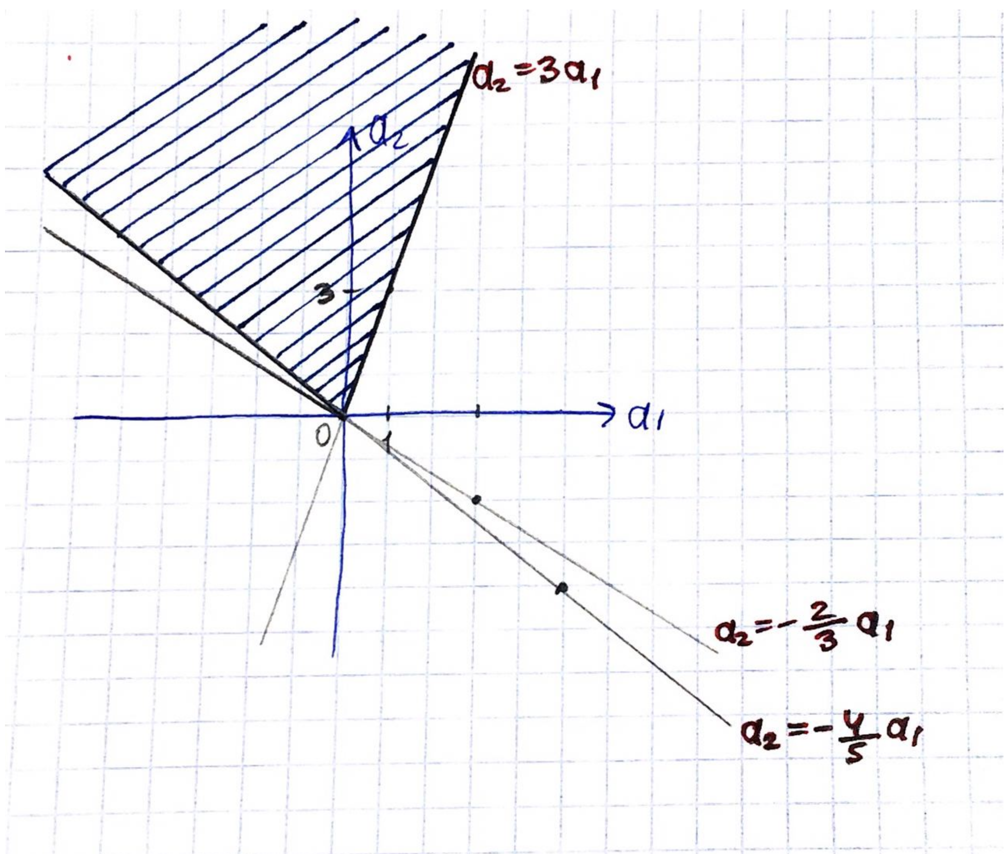
Homework 2

Lygina Oksana
878

23 февраля 2021 г.

Conjugate sets

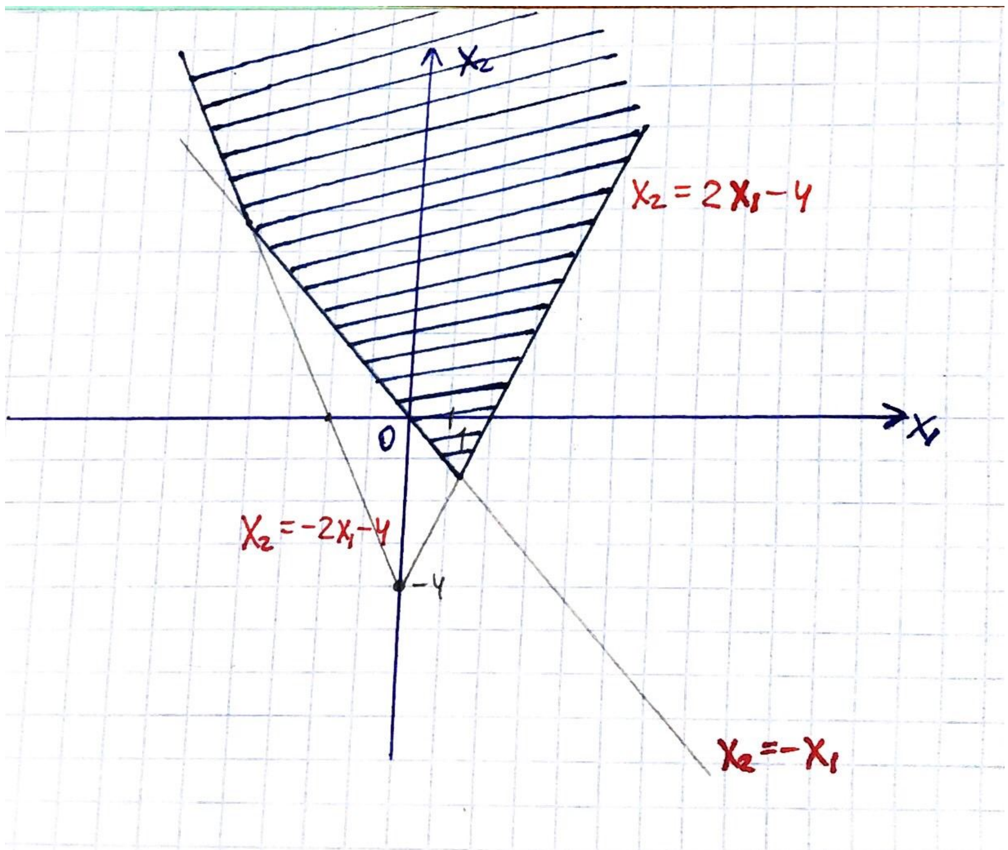
1. **solution**:
   По теореме с семинара: $S^* = \{a = (\mathrm{a}_1, a_2) \in R^2 \mid -3a_1 + a_2 \geq 0$, $2a_1 + 3a_2 \geq 0$, $4a_1$ $+ 5a_2 \geq 0\}$



2. **solution**:
   S = $\{x \in R^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0$, $2x_1 + x_2 \geq -4$,-2x$_1$ + $x_2 \geq -4\}$

Нарисуем это:

Заметим, что S = conv $\{(-4,4), (\frac{-4}{3}, \frac{4}{3})\}$ + cone {(-1, 2, 1, 2)}



Тогда по теореме получаем: $S^* = \{a = (\mathrm{a}_1, a_2) \in R^2 \mid -4a_1 + 4a_2 \geq -1,\ \frac{4}{3}a_1$ - $\frac{4}{3}a_2 \geq -1,\ a_1 + 2a_2 \geq 0$, -$a_1 + 2a_2 \geq 0\}$

S, S^* выпуклы, замкнуты и содержат нуль $\Rightarrow S^{**} =$ S, $S^{***} = S^*$

3. **solution**:

Сначала докажем утверждение: пусть L - подпространство евклидового пространства X. Тогда $L^* = L^\perp$, где $L^\perp$ - ортогональное дополнение L.

Доказательство:

1) $L^* \subset L^\perp$

Пусть $y \in L^*$. Тогда $\forall x \in L$, так как $(-x) \in L$:

$< x, y >\geq 0, < -x, y >\geq 0 \rightarrow < x, y >= 0 \rightarrow y \in L^\perp$

2) $L^* \supset L^\perp$

Пусть $y \in L^\perp$. Тогда $\forall x \in L$:

$< x, y >= 0 \geq 0 \rightarrow y \in L^*$

Теперь используя это утвеждение, докажем наше задание:

В силу утверждения достаточно показать, что $(A_n)^\perp = S_n$.

Покажем два включения.

1) $(A_n)^\perp \subset S_n$

Пусть $Y \in (A_n)^{\perp}$. Тогда возьмем антисимметричную матрицу А такую, что $a_{ij} = 0$, кроме $a_{kl} = -a_{kl} = 1$ $(k \neq l)$

Тогда <Y, A> $= y_{kl} - y_{lk} = 0 \to y_{kl} = y_{lk} \forall k \neq l \to Y \in S_n$

2) $(A_n)^{\perp} \supset S_n$

Пусть $Y \in S_n$. Тогда для любой антисимметричной матрицы А:

<Y, A> $= \sum\limits_{i,j=1}^{n} y_{ij}a_{ij} = \sum\limits_{i<j}(y_{ij}a_{ij} - y_{ij}a_{ij}) = 0$

Ответ:

4. **solution**:
   K $= \{(x, y, z) | y > 0, ye^{\frac{x}{y}} \leq z\}$

   $K^* = \{(a, b, c)$:$\forall$ (x, y, z) $\in K \hookrightarrow ax + by + cz \geq 0\}$

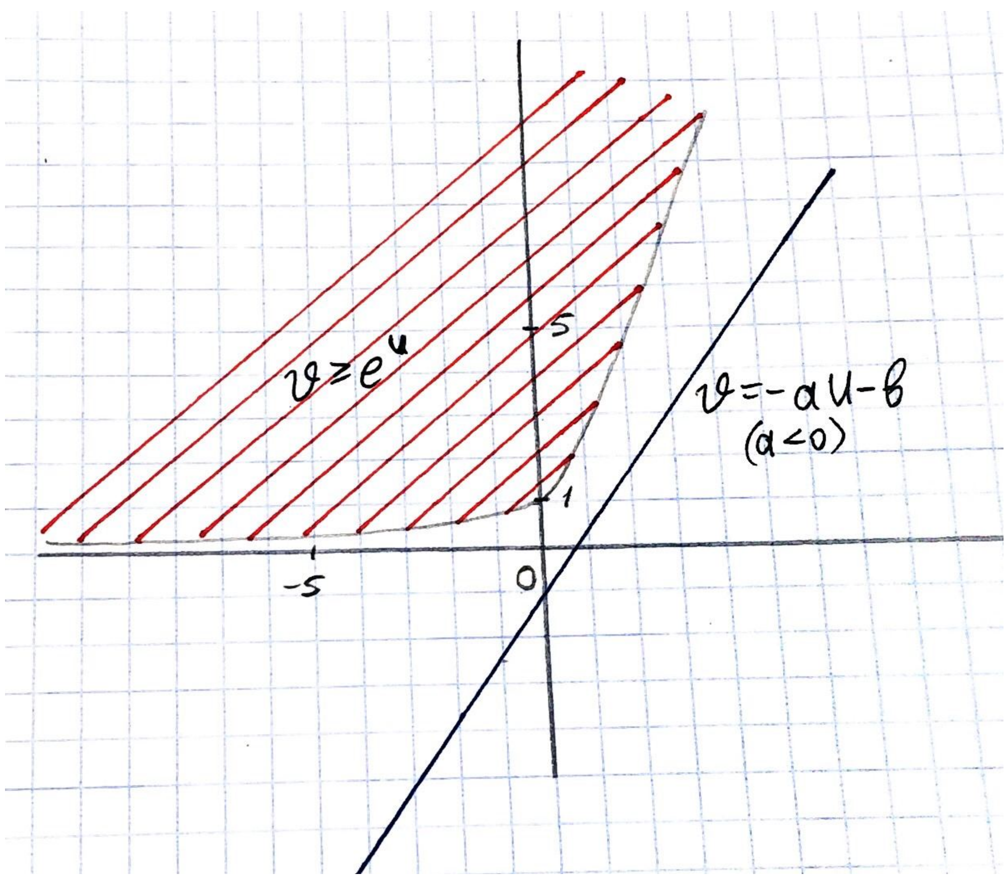
   Обозначим U $= \frac{x}{y}$, V $= \frac{z}{y}$, получим условие: aU + b + cV ≥ 0

   Нам достаточно рассмотреть три случая: c = -1, c = 0, c = 1

   1) c = 1

   Найдем такие константы a, b, чтобы область $\{V \geq e^U\}$ лежала внутри области $\{V \geq -aU - b\}$

   Это случится, если прямая будет лежать ниже экспоненты.



При a > 0 это невозможно

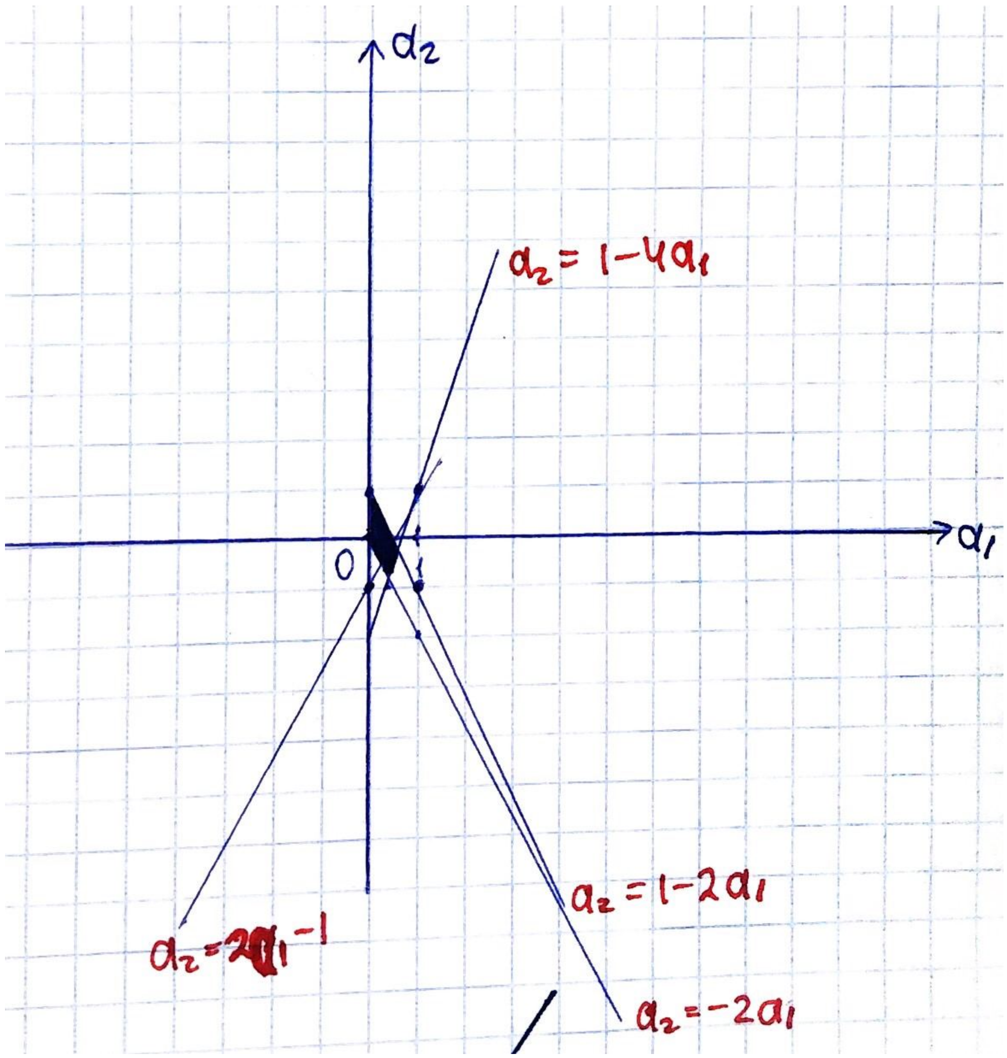
При a = 0 получим условие $b \geq 0$

При a < 0 найдем условие касания:
Система e^U = -aU - b, e^U = -a
Получаем: b = a(1 - ln(-a))
То есть при a < 0: $b \geq a(1 - ln(-a)$
при a = 0: $b \geq 0$
при a > 0: нет таких b
2) c = 0:
Нужно, чтобы $\{V \geq e^U\} \subset \{aU + b \geq 0\}$. Это невозможно ни при каких a и b, так как aU + b = 0 - вертикальная прямая
3) c < 0:
Аналогично, условие $\{V \geq e^U\} \subset \{V \leq aU + b\}$ не выполнено ни пи каких a и b, так как первое множество неограниченно сверху при любых U
В итоге получаем: $K^* = \{\lambda(a, b, 1) \mid \lambda \geq 0$, если a = 0, то b $\geq$ 0; если a < 0, то b $\geq$ a(1 - ln(-a)) }

5. **solution**:
S = conv $\{(-4, -1), (-2, -1), (-2, 1)\}$ + cone $\{(1, 0), (2, 1)\}$
По теореме с семинара: $S^* = \{a \in R^2 \mid -4a_1$ - $a_2 \geq -1$, $-2a_1$ - $a_2 \geq -1$, $-2a_1 + a_2 \geq -1$, $a_1 \geq 0$, $2a_1 + a_2 \geq 0\}$

6. **solution**:
Если $S^* = \{y \in R^n \mid$ <y, x> $\leq 1 \ \forall x \in S\}$ - сопряженное множество, то $B_1(0) = \{x| < x, x > \leq 1 \ \}-$единственное самосопряженное множество
Доказательство:
1) Покажем, что B = $B_1(0)$ - самосопряженное множество
Пусть $y \in B$. Тогда для любого $x \in B$ по неравенству Коши - Буняковского:
<x, y> $\leq$ |<x, y>| $\leq$ ||x||*||y|| $\leq$ 1*1 = 1 $\rightarrow y \in B^*$
Пусть $y \in B^*$. Тогда для любого $x \in B$ выполнено <x, y> $\leq$ 1.
Если y = 0, то $y \in B$. При $y \neq 0$ возьмем x = $\frac{y}{||y||} \in B$, тогда
<x, y> = $\frac{<y,y>}{||y||}$ = ||y|| $\leq$ 1$\rightarrow y \in B$
2) Покажем, что если $S \subset S^*$, то $S \subset B_1(0)$
Пусть $x \in S \subset S^*$. Тогда $\forall y \in S^*$ <x, y> $\leq$ 1.
При y = x имеем:
<x, y> = $||x||^2 \leq 1 \rightarrow x \in B_1(0)$
3) Покажем, что если $S^* \subset S \subset B_1(0)$, то $B_1(0) \subset S$
Имеем, что если <x, y> $\forall x \in S$, то $y \in S$. Покажем, что произвольный $y \in B_1(0)$ удовлетворяет этому условию, учитывая, что $S \subset B_1(0)$. По неравенству Коши - Буняковского для любого $x \in S$:
<x, y> $\leq$ ||x||*||y|| $\leq 1 \rightarrow y \in S$. чтд ✓

7. **solution**:
Найти сопряженное множество к эллипсоиду S = $\{x \in R^n | \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 * x_i^2 \leq \epsilon^2\}$



Докажем, что $S^* = Y = \{y \in R^n | \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2}\}$

1) $Y \subset S^*$

$y \in Y$, $x \in S \rightarrow < x, y >^2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \frac{y_i}{a_i}) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 a_i^2 * \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2} \leq \epsilon^2 * \frac{1}{\epsilon^2} = 1 \rightarrow < x, y > \geq 1 \rightarrow y \in S^*$

Здесь мы использовали неравенство Коши - Буняковского - Шварца

2) $S^* \subset Y$

Докажем от обратного. Пусть $\exists y \in S^* : y \notin Y$. Тогда выберем $x \in S : \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 = \epsilon^2$ и при этом чтобы координаты x были пропорциональны координатам y, то есть чтобы они были коллинеарны.

Покажем, что такой вектор действительно можно выбрать: так как координаты пропорциональны, то выразим все координаты $x_2, x_3, ..., x_n$ через $x_1, y_1, y_2, ..., y_n$ полученное подставим в $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 = \epsilon^2$ и отсюда найдем x_1, а через него и остальные компоненты.

Для коллинеарных векторов:

$< x, y >^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \frac{y_i}{a_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2}$ = A$^*\epsilon^2 > 1$ – обозначим за (1)
Здесь мы использовали тот факт, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2} > \frac{1}{\epsilon^2}$
Заметим, что в силу симметрии эллипсоида относительно начала координат для сопряженности необходимо не только чтобы $< x, y > \geq -1$, но чтобы $|< x, y >| \leq 1$.
Действительно, мы можем взять любой $x \in S$, отразить его и полученный вектор также будет лежать в S, а знак неравенства поменяется на противоположный.
Но в таком случае (1) мы получаем противоречие с тем, что $y \in S^*$ ✓

Conjugate function

1. **solution**:
   $f(x) = \frac{-1}{x}, x \in R_{++},\ f^*(y) -?$
   $f^*(y) = sup_{x \in domf}(< y, x > -f(x)) = sup_{x \in domf}(yx + \frac{1}{x})$
   при y > 0
   g(x, y) = yx + $\frac{1}{x}$ - неограничена сверху
   при $x \to +\infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, $yx \to \infty$
   при y < 0
   при $x \to \infty$ аналогично устремим выражение в бесконечность
   при y $= 0$
   g(x, y) - неограничена
   при $x \to 0$ $g(x, y) \to \infty$
   Значит $domf^*(y) = \{\phi\} \Rightarrow$ сопряженная функция нигде не определена.

2. **solution**:
   $f(x) = -0.5 -$logx$, x > 0,$f$^*(y) -?$
   f$^*(y) = sup_{x \in domf}(< y, x > -f(x)) = sup_{x \in domf}(yx + 0.5 + logx)$
   $g(x, y) = yx + 0.5 + logx$
   y ≥ 0
   при $x \to \infty$ $g(x, y) \to \infty$
   при y < 0
   $\nabla_x g(x, y)$ = y + $\frac{1}{x}$ = 0 $\to$ x = $\frac{-1}{y}$
   $f^*(y)$ = -0.5 - ln(-y), y < 0

3. **solution**:
   f(x) = $log(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$
   $f^*(y) = sup_{x \in domf}($<y, x> - log$(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$
   g(x, y) = yx - log$(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$
   $\nabla_{x_k} g(x, y) = y_k - \frac{e^{x_k}}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}} = 0$
   $\to y_k = e^{x_k} \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \to y > 0; 0.1^T * y = 1$
   $f^*(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}} - ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(lne^{x_i} e^{x_i}}{(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}) \frac{ln((\sum_{k=1}^{n} e^{x_k})}{(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k})} = ((\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}}[lne^{x_i} -$

$ln(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}} ln \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}}$ $=\sum_{i=1}^{n} y_i ln y_i$

4. **solution**:

5. **solution**:
   $f(X) = -lndetX, X \in S_{++}$, $f^*(Y)-?$
   $f^*(Y) = sup_{X\in domf}$ ((Y, X) + lndetX) = $sup_{X\in domf}$ (tr(Y$^T X) + lndetX)$
   $g(X, Y) = tr(XY) + lndetX$
   Предположим, что ∃ZX > 0: (Z, Y) = c$_0$≥ 0. Тогда возьмем X = CZ, C > 0, тогда XS_{++}^n. D = detX > 0
   g(X, Y) = C(Y, Z) + lndet CX = Cc$_o + ln(C^n D) = Cc_0 + nlnC + lnD$→ ∞ при C → ∞
   Таким образом, чтобы функция была ограничена сверху необходимо, чтобы такого Z не существовало, то есть Y была отрицательна определена.
   $\nabla_X g(X, Y)$ = Y + $X^{-T} = 0 \to X = -Y^{-T}$
   Видим, что отрицательная определенность Y является достаточным условием, чтобы это уравнение решалось относительно X. То есть $domf^* = \{Y \in S_{-,-}^n\}$.
   $f^*(Y)$ = tr$(-Y^T Y^{-T})$ - ln det(-Y) = -ln det(-Y) - n

6. **solution**:
   Доказать, что если f(x) = g(Ax), то $f^*(y) = g^*(A^(- T)y)$
   $f^*(y) = sup_x((x, y) - f(x))$ =sup$_x((x, y) - g(Ax))$ = | пусть t = Ax | = $sup_t((A^{-1}t, y) - g(t)) = sup_t((t, A^{-T}y) - g(t)) = g^*(A^{-T}y)$

Subgradient and subdifferential

1. **solution**:
   Пусть $0 \in \partial f(x_0) \to f(x) \geq f(x_0) \forall x \in S \to x_0$ - минимум по определению

2. **solution**:
   f(x) = $max\{0, x\}$
   Из теоремы Дубовицкого - Милютина:

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{x} < 0 \\ conv(0,1) = [0,1] & \text{x} = 0 \\ 1 & \text{x} > 0 \end{cases}$$

3. **solution**:
   1) при p = 1
   f(x) = $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} max\{-x_i, x_i/$

$\partial(x_i)(x) = \nabla_x(x_i) = (0, ..., 1, ..., 0)^T$ - единица на i - ом месте. По теореме Дубовицкого - Милютина(все функции выпуклы):
Система: $\partial|x_i|(x) = 1)$ (0, ..., -1, ..., 0)^T, $x_i < 0$
2) {0} x ... x[-1, 1] x ... x {0 }, $x_i = 0$
3) $(0, ..., 1, ..., 0)^T$, если $x_i > 0$
По теореме Моро - Рокафеллара (все функции выпуклы):
Система: $\partial f(x) = 1)(\text{sign}(x_1), ..., sign(x_n))^T$, все $x_i \neq 0$
2) $\prod_{i \in J)} \{\text{sign}(x_i)\} x \prod_{i \neq J}$ [-1, 1], $x_i \neq 0$ при $i \in J$
3)$[-1, 1]^n$, x = 0

2) при p = 2
f(x) = ||x|| = $\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$
При $x \neq 0$ функция f(x) дифференцируема, поэтому $\partial f(x) = \frac{x}{||x||}$
Покажем, что $\partial f(0) = B_1(0)$ - шар радиуса 1
Пусть $y \in B_1(0)$. По неравенству Коши - Буняковского:
$< y, x > \leq | < y, x > | \leq ||y|| * ||x|| \leq 1 * f(x) \to y \in \partial f(0)$
Пусть $y \in \partial f(0)$. Допустим, $||y|| > 1$
Известно, что норма $||.||_2$ является самосопряженной нормой и что сопряженная норма определяется выражением: $||q||_* = sup_{||p|| \leq 1} < q, p >$
Тогда имеем
||y|| = $sup_{||x|| \leq 1} < y, x >> 1 \to \exists x_o : (||x_o|| \leq 1)$ <y, x_o >> 1$\to$ $||x_o|| \leq 1 << y, x_o >$
Это противоречит тому, что $y \in \partial f(0)$
Система: $\partial f(x) = 1)$ $\frac{x}{||x||}$, $x \neq 0$
2) $B_1(0), X = 0$
3) при p = ∞
f(x) = $max_i|x_i| = max_i(max\{-x_i, x_i\}$
$\partial|x_i|(x)$ такой же, как в пункте 1)
По теореме Дубовицкого - Милютина (все функции выпуклы):
Система: $\partial f(x) = 1)(0, ..., sign(x_k), ..., 0)^T$, $|x_i| < |x_k|, = 1, .., n$,i $\neq k$
2)$conv_{j \in J}(sign(x_j))$, $x \neq 0$, max достигается на множестве индексов J
3) $[-1, 1]^n$, x = 0

solution:
f(x) = $||Ax - b||_1$
$\partial||x||_1$ мы знаем из 3 номера
$||x||_1^2 = \phi(||x||_1)$, $\phi(t) = t^2$ - дифференцируема, а значит применяем chain rule:
$\partial||x_1^2|| = 2||x||_1 \partial||x||_1$
Применяем свойство с семинара $\partial(f(Ax + b)) = A^T \partial f(Ax + b)$ для выпуклых функций:
$\partial||Ax - b||_1^2 = A^T * 2||Ax - b||_1 \partial||.||_1(Ax - b)$

solution:
f(x) = $e^{||x||_2}$ = h(g(x))
h(x) = e^x, g(x) = $||x||_2$

Применим chain rule и воспользуемся найденным в третьем номере субградиентом для евклидовой нормы:
$\partial f(x) = e^{||x|_2} \partial g(x) =$ 1) {z $\in R^n$||z$||_2 \leq 1$}, x = 0
2) $e^{||x||_2} \frac{x}{||x||^2}$, $x \equiv 0$