Homework 3

Lygina Oksana
878

23 февраля 2021 г.

General optimization problems

1. **solution**:
   Наша функция f(x) = $c^T x$ - выпукла, а значит выполнено условие регулярности Слейтера. Тогда найдем минимум из условий ККТ, которые являются необходимыми и достаточными:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = c^T + \lambda^{*T} A = 0, \\ \lambda_x L(x^*, \lambda^*) = Ax^* - b = 0. \end{cases}$$

   Тогда: $c^T = -\lambda^{*T} A$ – (1), $Ax^* = b$ – (2)
   Теперь рассмотрим случаи:
   1) когда (2) имеет реш, а (1) не имеет реш на λ
   Рассмотрим для (2) ФСР: $x_1 = x_0 + Fa$, $x_2 = x_0 + Fb$
   Тогда получим $c^T F(a-b)$ = $c^T x_1$ - $c^T x_2$
   Заметим, что при $a \neq b$ мы не получим ноль.
   2) когда (1) и (2) имеют реш
   Тогда: $x_1 = x_0 + Fa$, $x_2 = x_0 + Fb$
   $c^T F(a-b)$ = $c^T x_1$ - $c^T x_2$ = $\lambda^* AF(a-b)$ = 0
   С учетом 1) и 2) в итоге получим, что:

$$d^* = \begin{cases} \mathrm{c}^T A \dagger b, \text{ если (2) совместна} \\ -\infty, \text{ иначе} \end{cases}$$

2. **solution**:

3. **solution**:

4. **solution**:
N4: Наша функция f(x) = $c^T x$ - выпукла, а значит выполнено условие регулярности Слейтера. Тогда найдем минимум из условий ККТ, которые являются необходимыми:
Лагранжиан: L(x, μ) = $c^T x$ + $\mu(x^T Ax$ - 1)
Условия ККТ:
$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\mu) = \text{c} + \mu(\text{A} + A^T)\text{x} = 0 - (1) \\ \mu \geq 0 - (2) \\ \mu(\text{x}^T Ax \text{ - } 1) = 0 - -(3) \\ \text{x}^T Ax \text{ - } 1 \leq 0 - (4) \end{cases}$$
Так как c и μ не равны 0, можем выразить из (1) c + μ(A + A^T)x = 0 и учитывая, что A^T = A(у нас матрица симметрична по усл), получаем:
x = -$\frac{c}{2A\mu}$
А из (3) получим:
$4\mu^2 = c^T A^{-T} c$
$\mu = \frac{\sqrt{c^T A^{-T} c}}{2}$
Находим x обратной подстановкой:
x = -$\frac{A^{-1}c}{\sqrt{c^T A^{-T} c}}$
А значит $min_{x \in R}(c^T x)$ = -$\frac{c^T A^{-1} c}{\sqrt{c^T A^{-T} c}}$

5. **solution**:
N5: Наша функция f(x) = $c^T x$ - выпукла, а значит выполнено условие регулярности Слейтера.
Лагранжиан: L(x, μ) = $c^T x + \mu((x - x_c)^T A(x - x_c) - 1) = c^T x + \mu(y^T Ay)$ - 1), где x - x_c = t
x - x_c = t домножим слева на c^T
$c^T x$ - $c^T x_c = c^T y$
Нам нужно, чтобы $c^T y$ было минимально
Возьмем из 4 номера найденное значение:
Тогда получим $min_{x \in R^n} = \frac{-c^T A^{-1} c}{\sqrt{c^T A^{-T} c}} + c^T x_c$
Рассмотрим случай, когда $A \neq S^n_{++}$
Воспользуюсь Вашей подсказкой:)) A = $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$
Тут видим, что если хотя бы одна λ равна нулю или отрицательна, то можем x_i устремить в минус бесконечность и тогда минимум функции равен -∞

6. **solution**:
N6: Так как $B \in S^n_+$ (по усл), то есть матрица B положительно полуопределена, то $\forall x \in R^n$: $x^T Bx \geq 0$
При x = 0 достигается минимум и в то же время подходит под наше условие $x^T Ax = 0 \leq 1$

7. **solution**:
N7: 1) Лагранжиан: $L(x, \lambda) = ||Ax - b||^2 + \lambda^T(Cx - d)$
Условия ККТ:
$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = 2\text{A}^T(Ax - b) + c^T\lambda = 0, \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) = (Cx - d) = 0. \end{cases} \qquad \text{d} = c^T x$$

2) Найдем x:
$2A^T(Ax - b) + c^T\lambda = 0$
x = $\frac{2A^T b - c^T\lambda}{2A^T A}$
Теперь найдем λ:
$\frac{c(2A^T b - c^T\lambda}{2A^T A})$ = d
$2cA^T b$ - $cc^T\lambda = 2A^T Ad$
$\lambda^* = \frac{2A^T(cb - Ad)}{cc^T}$

3) Чтобы получить x^*, нужно найденную λ обратно подставить в x:
$x^* = \frac{2A^T b - c^T\lambda^*}{2A^T A}$

8. **solution**:
N8: Лагранжиан: L(x, λ) = trX - logdetX + λ^T(xS - y)
Условия ККТ:
$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = I - \text{x}^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda S^T + S\lambda^T) = 0, \\ xS = y, \text{x} \in S^{++}. \end{cases} \qquad \text{Выразим } x^{-1} = \text{I} + \frac{1}{2}(\lambda S^T + S\lambda^T) -$$
(1)
xS = y $\rightarrow$ S = $x^{-1}y$ – (2)
Домножим (1) скалярно на y и учтем (2) и $S^T y = 1$:
$x^{-1}y$ = y + $\frac{1}{2}(\lambda S^T y + S\lambda^T y) = 0$
S = y + $\frac{1}{2}(\lambda + S\lambda^T y)$
Еще раз домножим на y:
$1 = y^T y + \lambda^T y$
$\lambda = (1 + y^T y)S$ - 2y
Подставим в (1):
x^{-1} = I - Sy^T - yS^T + $(1 + y^T y)SS^T$
Можно легко убедиться, что $X^{-1}X^* =$ I, где X^* задана в условии
Теперь покажем, что $X^* \in S^n_{++}$:
То есть докажем положительную определенность:
$x^T(1 + yy^T$ - $\frac{1}{S^T S}SS^T)$x $= x^T x + (y^T x)^T(y^T x) + (s^T x)^T(s^T x)(\frac{1}{s^T s}) = ||x||^2 + (y, x)^2$ - $\frac{(s,x)^2}{||s||^2}$
Ну а последнее равенство всегда положительно, доказали.

9. **solution**:
N9: Из условия получаем:
при условии, что x - допустимое:

$\nabla f_0(x^*)^T$(x - x^*) = -$\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla f_i^T(x^*)(x-x^*) \geq$ -$\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla f_i^T(x^*)(x-x^*)$ + $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu^*(f_i(x) - f_i^*(x))$ = $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu^*((f_i(x) - f_i(x^*))$ - $\nabla f_i^T(x^*)(x-x^*)) \geq 0$
Использовали тот факт, что функция f_i выпукла

Duality

1. **solution**:
   Лагранжиан: L(x, μ) = $c^T x$ + μf(x)
   $g(\mu) = inf_{x \in R^n} L(x, \mu) = inf_{x \in R^n}(c^T x + \mu f(x)) = \mu inf_{x \in R^n}(\frac{1}{\mu} c^T x + f(x))$ = -$\mu sup_{x \in R^n}(-\frac{1}{\mu} c^T x - f(x))$ = -$\mu f^*(-\frac{c^T}{\mu}) \to min$
   При μ = 0: g(0) = $inf_{x \in R^n} c^T x$

2. **solution**:
   1) Лагранжиан: L(x, μ) = $lndetX^{-1}$ + $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(a_i^T x a_i - 1)$
   2) нашла в книге, прикреплю скрин решения:

Example 3.23 *Log-determinant.* We consider $f(X) = \log\det X^{-1}$ on $\mathbf{S}^n_{++}$. The conjugate function is defined as

$$f^*(Y) = \sup_{X \succ 0} (\mathbf{tr}(YX) + \log\det X),$$

since $\mathbf{tr}(YX)$ is the standard inner product on $\mathbf{S}^n$. We first show that $\mathbf{tr}(YX) + \log\det X$ is unbounded above unless $Y \prec 0$. If $Y \not\prec 0$, then Y has an eigenvector v, with $\|v\|_2 = 1$, and eigenvalue $\lambda \geq 0$. Taking $X = I + tvv^T$ we find that

$$\mathbf{tr}(YX) + \log\det X = \mathbf{tr}\,Y + t\lambda + \log\det(I + tvv^T) = \mathbf{tr}\,Y + t\lambda + \log(1+t),$$

which is unbounded above as $t \to \infty$.

Now consider the case $Y \prec 0$. We can find the maximizing X by setting the gradient with respect to X equal to zero:

$$\nabla_X (\mathbf{tr}(YX) + \log\det X) = Y + X^{-1} = 0$$

(see §A.4.1), which yields $X = -Y^{-1}$ (which is, indeed, positive definite). Therefore we have

$$f^*(Y) = \log\det(-Y)^{-1} - n,$$

with $\mathbf{dom}\, f^* = -\mathbf{S}^n_{++}$.

3. **solution**:
   Пусть x_0 - точка минимума функции $\phi(x)$:
   $\nabla_x \phi(x_0) = \nabla f_0(x_0) + 2\alpha A^T(Ax_0 - b) = 0 - (1)$
   Лагранжиан: L(x, λ) = $f_0(x) + \lambda^T(Ax - b)$

Из ККТ: $\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f_0(x) + A^T \lambda = 0$
Можно заметить, что решением (1) будет являться $\lambda_0 = 2\alpha(Ax_0 - b)$
$g(\lambda) = inf_{x \in R^n}(f_0(x) + \lambda^T(Ax - b))$
$g(\lambda_0) = inf_{x \in R^n}(f_0(x) + 2\alpha(Ax_0 - b, Ax - b)) = f_o(x_0) + 2\alpha||Ax_0 - b||_2^2$
Нижняя оценка для $\forall x$ Ax = b:
$f_0(x) \geq g(\lambda_0)$
$f_0(x) \geq f_0(x_0) + 2\alpha||Ax_0 - b||_2^2$