Seminar 9

Exerciţii recomandate: 9.1 f),g), 9.2 a),c), 9.3 a),c) 9.4

Rezerve: 9.1 a),b),g),h), 9.2 b),d), 9.3 b), 9.5 a), 9.6 b)

S9.1 Studiaţi derivabilitatea (ordinară, direcţională, Gâteaux sau parţială, depinzând de funcţie şi/sau de cerinţe) a următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}, & x\neq 1;\\ 0, & x=1,\end{cases}$ în $x_0=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\left\{|x|,|2-x^2|\right\}$, pe $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x]\sin^2(\pi x)$, pe $\mathbb{R}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+3x+3\right), & x\in\mathbb{Q};\\ (x+2)\left(e^{x+1}-1\right), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x_0\in\{-2,-1\}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}},\left(1+x^2\right)^{\sqrt[3]{x}}\right)$, în $x_0=0$;

f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=4xy^3-z^2$, în $(-1,1,13)$ în direcţia $(4,-3,12)$;

g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ în $(x_0,y_0)=(0,0)$;

h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, în $(x_0,y_0)=(0,0)$, unde

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{şi } f_2(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$a)\ f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}}{x-1}=$$

$$\boxed{\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y}=1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\cancel{1-x}^{\,-1}}{1+x}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Sau

f cont pe $\mathbb{R}$ (în part şi în 1) } ⟹ f deriv în 1

f deriv pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}f'(x)$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\underset{\text{cont}}{\overset{\operatorname{arctg}}{=}}\operatorname{arctg}0=0=f(1)$$

$\Rightarrow f$ cont în 1

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(1+x)^2}}{(1+x)^2+(1-x)^2} \cdot \frac{-1-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{\cancel{(1+x)^2}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{1+x^2+\cancel{2x}+1+x^2-\cancel{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(1+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}$$

Lagrange $\quad f'(1) = -\frac{1}{2}$

f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 4xy^3 - z^2$, în $(-1, 1, 13)$ în direcția $(4, -3, 12)$;

$$f'((x_0, y_0, z_0), u) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0, z_0)+tu) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$f'((-1,1,13),(4,-3,12)) = \lim_{t\to 0} \frac{f((-1,1,13)+t(4,-3,12)) - f(-1,1,13)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(-1+4t,\ 1-3t,\ 13+12t) - f(-1,1,13)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left[4\cdot(-1+4t)\cdot(1-3t)^3 - (13+12t)^2\right] - \left[4\cdot(-1)\cdot 1^3 - 13^2\right]}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{4(-1+4t)(1-9t+27t^2-27t^3) - (\cancel{13^2} + 144t^2 + 312t) - (-4) + \cancel{13^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{\cancel{4} + 16t + 36t - 144t^2 - 108t^2 + 432t^3 + 108t^3 - 432t^4}{t} + \frac{-144t^2 - 312t + \cancel{4}}{t} \right) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\left(16 + 36 - 108t + \overset{-288t^2}{432t^2} + 108t^2 - 432t^3 - 312\right)}{\cancel{t}}$$

$$52 - 312 = -260$$

$$f'((x_0, y_0, z_0), u) = (\nabla f)(x_0, y_0, z_0) \cdot u$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$f = 4xy^3 - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4y^3$$

$\Rightarrow$ fcț e deriv parțial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4x \cdot 3y^2 = 12xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z$$

$$\nabla f = (4y^3, 12xy^2, -2z)$$

$$\nabla f(-1, 1, 13) = (4, -12, -26)$$

$$f'((-1,1,13),(4,-3,12)) = (4,-12,-26)\cdot(4,-3,12)$$

$$= 16 + 36 - 312 = -260$$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases} \quad \text{în } (x_0,y_0)=(0,0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sin\frac{x\cdot 0}{x^2+0}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}\sin 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\cancel{y}\sin\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}}{\cancel{y}} = \lim_{y\to 0}\sin 0 = 0$$

Fie $(u,v)\neq(0,0)$

$$f((0,0),(u,v)) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(u,v)) - \overset{0}{\overline{f(0,0)}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(tu-tv)\sin\frac{t^2uv}{t^2u^2+t^2v^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(u-v) \sin \frac{\cancel{t^2} uv}{\cancel{t^2}(u^2+v^2)}}{\cancel{t}} =$$

$$(u-v) \sin \frac{uv}{u^2+v^2} \Rightarrow$$

f are derivata Gateaux

(are deriv direcționala pe

orice direcție)

f este dif Gateaux

S9.2 Studiaţi diferenţiabilitatea Fréchet în origine pentru fiecare din următoarele funcţii:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ şi } f_2(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x \ge 0 \end{cases};$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z) \ne (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, cu

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ şi } f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$ $\qquad \nabla f(0,0) = (1,1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} =$

$\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{y^3} - 0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{y} = 1$

$(x_0, y_0) = (0,0)$ $\qquad T_{(0,0)}(a,b) = \nabla f(0,0) \cdot (a,b)$

f este dif Fréchet dacă $\exists\, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a.î. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - T((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - (x+y)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x_n^3 + y_n^3} - (x_n + y_n)}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{\cancel{n}} - \frac{2}{\cancel{n}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{n}}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}}$$

$$(x_n', y_n') = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x_n'^3 + y_n'^3} - (x_n' + y_n')}{\sqrt{x_n'^2 + y_n'^2}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2^3}{n^3} + \frac{1}{n^3}} - \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{5}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{9} - 3}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

$\Rightarrow f$ nu e dif Fréchet în $(0,0)$

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$$

$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$T(a,b,c) = \nabla f(0,0,0)\cdot(a,b,c) = (0,0,0)\cdot(a,b,c) = 0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - \overbrace{f(0,0,0)}^{0} - \overbrace{T(x,y,z)}^{0}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

ineg mediilor

$$\sqrt[3]{|xyz|} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Big|^2$$

$$\frac{\sqrt[3]{|xyz|^2}}{x^2+y^2+z^2} \le 3 \qquad |xyz| = \sqrt[3]{|xyz|^3}$$

$$0 \le \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \le \underbrace{3\sqrt[3]{|xyz|}}_{\downarrow \atop 0}$$

$$\Rightarrow \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow 0 \Rightarrow f \text{ dif Fréchet în } (0,0,0) \text{ și}$$

$$df(0,0,0) = 0$$

Ineg mediilor $\quad x_1, \dots x_n \ge 0$

$$\min(x_1, \dots x_n) \le \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}}_{\text{media armonică}} \le \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}_{\text{media geom}} \le$$

$$\underbrace{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}_{\text{media aritm}} \le \underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}}}_{\text{media pătratică}} \le \max(x_1,\dots,x_n)$$

S9.3 Determinaţi derivatele parţiale de primul şi al doilea ordin pentru fiecare din următoarele funcţii, într-un punct al domeniului lor de definiţie:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \left(x^2 y, xy - y^2, x^3 - 2xy\right)$;

b) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\ln x, \operatorname{arctg} x)$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \left(e^z \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right), \sin(x - y + z)\right)$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy,\ y,\ 3x^2 - 2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2,\ x - 2y,\ -2x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = (2y,\ 0,\ 6x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,\ -2,\ 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x,\ 1,\ -2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = (2x,\ 1,\ -2)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left(e^z \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+y^2+1}},\ \cos(x - y + z)\right)$

$\left(e^z \frac{\frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2+1} + x}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}}{\cancel{x + \sqrt{x^2+y^2+1}}},\ \cos(x - y + z)\right) =$

$\left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\ \cos(x - y + z)\right)$

$(x^2+y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\left(e^z\,\frac{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+y^2+1}}\ ,\ -\cos(x-y+z)\right)=$$

$$\left(\frac{e^z\cdot y}{x^2+y^2+1+x\sqrt{x^2+y^2+1}}\ ,\ -\cos(x-y+z)\right)$$

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(e^z\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+1}\right),\sin(x-y+z)\right).$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\left(e^z\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+1}\right),\ \cos(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\left(e^z\cdot-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}x\ ,\ -\sin(x-y+z)\right)$$

$$=\left(-\frac{e^z x}{\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}}\ ,\ -\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\left(e^z\cdot\frac{x^2+y^2+1+x\sqrt{x^2+y^2+1}-y\left(2y+\frac{\cancel{2}yx}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)}{\left(x^2+y^2+1+x\sqrt{x^2+y^2+1}\right)^2}\ ,\right.$$

$$\left.-\sin(x-y+z)\right)=$$

$$\left(e^z\ \frac{(x^2-y^2+1)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}\right)+x(x^2+\cancel{y^2}+1)-\cancel{xy^2}}{\left(x^2+y^2+1+x\sqrt{x^2+y^2+1}\right)\sqrt{x^2+y^2+1}}\ ,\right.$$

$$\left.-\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \left(e^z \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+1}\right), -\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \left(\frac{e^z\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+y^2+1}}, -\sin(x-y+z)\right)$$

$$\left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, -\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \left(e^z \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+y^2+1}},\right.$$

$$\left.\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \cos(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \left(\frac{e^z \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}y}{\sqrt{x^2+y^2+1}^3},\right.$$

$$\left.\sin(x-y+z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

S9.4 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$. Arătaţi că există derivatele parţiale mixte ale lui f în orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dar ele nu sunt continue în $(0,0)$. Sunt ele egale în $(0,0)$?

Exerciţiu adiţional

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Demonstraţi că derivatele parţiale mixte în $(0,0)$ sunt diferite.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(\cancel{x},0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x - 0} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{x \cancel{y}(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)\cancel{y}} = \frac{x \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = x$$

$$= \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} =$$

$$\frac{\cancel{x} y (x^2-y^2)}{(x^2+y^2) \cdot \cancel{x}} = \frac{-y^3}{y^2} =$$

$$-y$$

$$= \frac{-y-0}{y-0} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (\\ 0, & (\end{cases} = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - \underline{2x^4y} + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2)^2 -}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{2(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

S9.5

a) Scrieţi formula lui Taylor pentru funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4,$$

în jurul lui $(1, 1, 1)$;

b) Scrieţi formula lui Taylor pentru polinomul $P(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 2y^2 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$ în jurul lui $(-1, 1)$;

c) Scrieţi formula lui Taylor pentru funcţia $f(x, y) = \left(e^{\sin(x-y)}, \cos(x + y)\right)$, pâna la termenii de ordinul doi.

Adiţional: diferenţiala de ordin 1 şi 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y-4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y+2x-z-3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z-y-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$df(x,y,z) =$
$(2x+2y-4)dx$
$+ (2y+2x-z-3)dy$
$+(2z-y-1)dz$

$d^2f(x,y,z) =$
$2dx^2+2dy^2+2dz$
$-2dzd\cancel{x}y +$
$4dxdy$

$$f(x,y,z) = f(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)(x-1) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)(y-1) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)(z-1) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1)\ \frac{(x-1)^2}{2} +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1)\ \frac{(y-1)^2}{2} +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1)\ (z-1)^2 +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1)(x-1)(y-1) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1)(y-1)(z-1) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,1)(z-1)(x-1) =$$

$$\ldots = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$$

S9.6 Fie $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, unde $f_1(x,y,z) = x^y + y^z - 2z^x$ şi $f_2(x,y,z) = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{y^2 z} + \dfrac{1}{z^3(x+y)}$, $\forall x,y,z > 0$. Calculaţi:

a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(3,2,1) + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,3,2) + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(2,3,1)$ şi $(\nabla f_1)(1,1,1)$;

b) $x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + 2z\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)$ în $(3,3,1)$;

c) $((\mathrm{d}f_1)(1,e,e))\left(\frac{2}{e},1,-1\right)$ şi $\left((\mathrm{d}f_2)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right)(1,1,-2)$;

d) $(\mathrm{d}f)(x_0,y_0,z_0)$, unde $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

S9.7 Arătaţi că următoarele funcţii sunt derivabile pe domeniul lor de definiţie şi că satisfac, în plus, relaţiile adiacente:

a) $f(x,y) = xy\sqrt{1+(x^2-y^2)^2}$,
$$xy\left\langle (y,x), (\nabla f)(x,y)\right\rangle_2 = \|(x,y)\|_2^2 \cdot f(x,y);$$

b) $f(x,y,z) = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$,
$$\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2;$$

c) $f(x,y) = \sin x + g(\sin y - \sin x)$,
$$\cos y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \cos x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos x \cos y,\ \forall g \in C^1([-2,2]);$$

d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \varphi\left(x_1 - x_2, (x_3-x_4)e^{-x_1}, x_3 - x_4(x_1-x_2+1)\right)$,
$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) + (x_3-x_4)\left[(x_1-x_2+1)\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right] = 0,\ \forall \varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

S9.8* Fie C o submulţime deschisă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in C$ şi orice $t \in \mathbb{R}^*$, avem $tx \in C$. O funcţie $f : C \to \mathbb{R}$ se numeşte *ω-Euler omogenă* ($\omega \in \mathbb{R}$) dacă $f(tx) = t^\omega f(x)$, $\forall x \in C$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$.

Arătaţi că dacă f este Fréchet diferenţiabilă pe C şi $\omega \in \mathbb{R}$, atunci f este ω-Euler omogenă dacă şi numai dacă satisface *identitatea lui Euler*:
$$\langle \nabla f(x), x\rangle = \omega f(x),\ \forall x \in C \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

S9.9* Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă (adică, pentru orice $x,y \in A$ şi $\lambda \in [0,1]$, avem $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$) şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe A. Arătaţi că f este convexă (adică, pentru orice $x,y \in A$ şi $\lambda \in [0,1]$, avem $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$) dacă şi numai dacă
$$\langle (\nabla f)(y) - (\nabla f)(x), y - x\rangle \ge 0,\ \forall x,y \in A$$
sau, echivalent
$$f(y) \ge f(x) + \langle (\nabla f)(x), y - x\rangle,\ \forall x,y \in A.$$

S9.10 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet pe D. Atunci, pentru orice $x,y \in D$, există $z \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$ astfel încât
$$f(y) - f(x) = (\mathrm{d}f)(z)(y-x).$$

S9.11 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă convexă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet pe D. Atunci, pentru orice $x,y \in D$, există $\xi \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$ astfel încât
$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} \le \|(\mathrm{d}f)(\xi)\|_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)} \cdot \|y - x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

S9.12 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \left(x^3+y^3+z^3-3xyz, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, xy+yz+zx\right)$.

a) Studiaţi derivabilitatea Gâteaux şi diferenţiabilitatea Fréchet în f pe $\ker f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$;

b) Arătaţi că matricea jacobiană a lui f există şi este singulară în orice punct al lui $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

S9.13 Arătaţi că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită de $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)\operatorname{sh}(x - y + z)$, satisface relaţia

$$(z - y)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (x + z)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + (x + y)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

S9.14 Fie $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ definită de $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3}$.

a) Calculaţi $(\mathrm{d}f)(1, 1, 1)$.

b) Arătaţi că f este convexă.

S9.15 Fie D o submulţime nevidă, deschisă a lui $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}^*$ o funcţie de clasă C^2 pe D. Arătaţi că are loc următoarea formulă:

$$\left(\left(\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)(x)\right)(u, v) = -\frac{1}{f^2(x)}\left(\left(\mathrm{d}^2 f\right)(x)\right)(u, v) + \frac{2}{f^3(x)}((\mathrm{d}f)(x))(u) \cdot ((\mathrm{d}f)(x))(v), \ \forall x \in D, \ \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

S9.16 Scrieţi formula lui Taylor de ordinul 3 pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(x, y) = 3y^2 - x^2 + 2xy - 6x - 2y + 4,$$

într-o vecinătate a lui $(-2, 1)$.

Bibliografie recomandată

[1] T. Dray, *Interpreting Derivatives,* Oregon State University, 2016.

[2] C. Drăguşin, *Calcul diferenţial (Culegere de exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

[3] A. Fulga, I. Radomir, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

[4] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

[5] J. Stewart, *Student Solutions Manual, Chapters 10-17 for Stewart's Multivariable Calculus*, 8th Paperback, 2015.

[6] I. Toma, *Analiză matematică.Calcul diferenţial.Curs, aplicaţii si exerciţii propuse,* Conspress (U.T.C.B.), 2010.