

BAZE DE DATE

Bibliografie

1. Abiteboul S., R.Hull, V.Vianu – “*Foundations of Databases*”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
2. Chandra, A. K., D. Harel – “*Structure and complexity of relational queries*”, J. Computer and Systems Sciences 25:1, pp.99-128.
3. Date, C.J. – “*Baze de date*”, traducere de Simona Preda si Titi Preda, editura PLUS, 2005.
4. Date, C.J., H. Darwen – “*A Guide to the SQL standard*”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

5. Date, C.J., Hugh Darwen – “*A Guide to the SQL Standard*”, Reading Mass., Addison-Wesley, 1997.
6. Date, C.J. – “*A Critique of the SQL Database Language*”, ACM SIGMOD Record 14, N.3, 1984.
7. Dubois, Paul – “*MySQL*” , traducere în limba română, Editura Teora, 2001.
8. England K. – “*Microsoft SQL Server 200 Performance Optimization and Tuning Handbook*”, Digital Press, 2001.
9. Fagin, R. – “*On an authorization mechanism*”, ACM Transactions on Database systems, 3:3, pp.310-319, 1978.
10. Fehily, C. – “*SQL visual quickstart guide*”, traducere în limba română, Editura B.I.C. ALL, 2004.

11. V.Felea: Baze de date relationale. Dependente. Editura Universitatii “Al.I.Cuza” Iasi, 1996
12. V.Felea, C.Matei si M.Balta: Interogarea bazelor de date, Aplicatii in Oracle si SQL Server, Editura MATRIXROM Bucuresti 2005.
13. V.Felea: Elemente ale implementarii modelului relational in Sisteme de Gestiune de Baze de Date”, Editura MATRIX-ROM, Bucuresti 2007.
14. Fotache Marin, Catalin Strimbei, Liviu Cretu – “*ORACLE 9i2, Ghidul dezvoltarii aplicatiilor profesionale*”, Editura Polirom, 2003.
15. Garcia-Molina Hector, Jeffrey D.Ullman, Jennifer Widom – “*Database Systems: The complete book*”, Pearson Education International, 2002.

16. Gulutzan, P., T.Pelzer – “*SQL-99 Complete, Really, R&D Books*”, Lawrence, KA, 1999.
17. Gulutzan P., Peltzer T. – “*SQL Performance Tuning*”, Addison Wesley, 2002
18. Lorie, R.A., J.F. Nilsson – “*An Access Specification Language for a Relational Data Base System*”, IMB J. R&D, 23, 3, 1979.
19. Lorie, R.A., J.J. Daudenarde – “*SQL and its Applications*”, Englewoods Cliffs, N.J., Prentice_Hall,1991.
20. Melton, J., A.R.Simon – “*SQL-1999- Understanding Relational Components*”, San Francisco, Calif., Morgan-Kaufmann, 2002.

21. Melton, J., A.R.Simon – “*Understanding the New SQL: A Complete Guide*”, Morgan-Kaufmann, San Francisco, 1993.
22. Palinski, J.A. – “*Oracle SQL and PL/SQL Handbook*”, Addison-Wesley, 2003.
23. Perkins, J. și Bryan Morgan – “*SQL fără profesor în 14 zile*”, traducere în limba română, Editura Teora, 1997.
24. Popescu, Ileana, “*Oracle8. – Prelucrarea avansata a informatiei*”, Editura Tehnica, Bucuresti, 1999.
25. Riordan R. – “*Designing Relational Database Systems*”, Microsoft Press, 1999.

26. Rozenshtein, D.A., Abramovich and E.Birger – “*Optimizing Transact-SQL: Advanced Programming Techniques*”, Fremont, Calif., SQL Forum Press, 1995.
27. Sheldon R., Wilansky E. – “*MCSE Training Kit : Microsoft SQL Server 2000 Database Design and Implementation*”, Microsoft Press, 2001
28. Smith, J.M., P.Y.Chang – “*Optimizing the performance of a relational algebra database interface*”, Comm. ACM 18:10 (1975), pp.568-579.
29. Stonebraker M., J.M. Hellerstein (eds) – ”Reading in Databases Systems”, Morgan-Kaufmann, San Francisco, 1998.

30. Ullman J.D. – “*Principles of Database and Knowledge-Base Systems*”, Volume I, Computer Science Press, New York, 1988.
31. Ullman J.D. – “*Principles of Database and Knowledge-Base Systems*”, Volume II, Computer Science Press, New York, 1989.
32. Urman, S. – “*Oracle 9i PL/SQL Programming*”, Osborne/McGraw-Hill, 2002.
33. Welling, L., Laura Thomson – “Dezvoltarea de aplicații WEB cu PHP și MySQL”, traducere în limba română, Editura Teora, 2004.

CAPITOLUL I

ELEMENTE ALE MODELULUI RELATIONAL

Considerăm o mulțime nevidă, finită de simboluri, notată cu **U**. Numim elementele lui **U** attribute.

Fie $\mathbf{U} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Fiecare atribut A_i îi vom asocia o mulțime nevidă de valori notată $\text{dom}(A_i)$, care va fi numită domeniul valorilor atributului A_i . Această mulțime $\text{dom}(A_i)$ este numită și mulțime valorilor posibile pentru A_i , $1 \leq i \leq n$.

Vom numi uplu peste **U** o aplicație, notată φ , $\varphi : \mathbf{U} \rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{dom}(A_i)$, astfel încât $\varphi(A_i) \in \text{dom}(A_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Pentru fiecare uplu φ peste \mathbf{U} putem să-i asociem mulțimea $\{A_1:V_1, A_2 : V_2, \dots, A_n : V_n\}$, unde $V_i = \varphi(A_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Invers, dacă este dată mulțimea $\{A_1:V_1, A_2 : V_2, \dots, A_n : V_n\}$, cu $V_i \in \text{dom}(A_i)$, $1 \leq i \leq n$, atunci putem defini uplul φ peste \mathbf{U} prin $\varphi(A_i) = V_i$, $1 \leq i \leq n$. Deci există o corespondență biunivocă între mulțimea de uple peste \mathbf{U} și mulțimea mulțimilor de forma considerată. Mai mult, dacă ordonăm mulțimea de atrbute ale lui \mathbf{U} sub forma: $\mathbf{U} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, atunci în locul mulțimii $\{A_1:V_1, A_2 : V_2, \dots, A_n : V_n\}$ se poate considera numai vectorul (V_1, V_2, \dots, V_n) .

În sisteme de gestiune de baze de date (FOX, DBASE, ORACLE, etc.) se lucrează cu astfel de ordonări. Vom privi uplele atât ca aplicații, cât și ca vectori, considerând **U** ordonată.

(i) Relatia ca set.

O relație peste **U**, notată r , este o mulțime de uple peste **U**. În cazul în care mulțimea de uple este vidă, spunem că relația este vidă. În cazul în care mulțimea de uple este finită, spunem că relația este finită.

Rezultă că într-o astfel de relație nu putem avea două uple identice.

Ca operații de actualizare a unei relații putem avea adăugarea de noi uple, ștergerea unor uple, modificarea de uple.

În prelucrarea unei relații, mulțimea de uple variază în timp, ceea ce este constant în timp este structura sa, adică numele relației, împreună cu mulțimea de attribute. Să notăm această structură prin $R(U)$ sau $R[U]$, sau $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sau $R[A_1, A_2, \dots, A_n]$, unde R este un simbol numit numele relației, iar U sau $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ este mulțimea de attribute corespunzătoare.

$R(U)$ poartă denumirea și de schemă de relație.

În cazul în care r este o relație finită peste U și U se ordonează sub forma (A_1, A_2, \dots, A_n) , atunci rezultă o reprezentare a lui r sub forma unui tablou:

	A_1	A_2	\dots	A_n
	V_{11}	V_{12}	\dots	V_{1n}
	1			
r			
	V_{h1}	V_{h2}	\dots	V_{hn}

unde $(V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in})$ constituie un uplu din r, $1 \leq i \leq h$. Avem $V_{ij} \in \text{dom}(A_j)$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq h$.

Din acest motiv, în majoritatea sistemelor de gestiune de baze de date, structurile de date ce memorează aceste relații se numesc tabele, iar uplele se numesc liniî.

O schemă de baze de date, notată D, este o mulțime finită de scheme de relație: $D = \{R_1[U_1], \dots, R_p[U_p]\}$, unde $R_j[U_j]$ este o schemă de relație, $1 \leq j \leq p$.

O bază de date peste schema de baze de date D, este o aplicație ce asociază fiecărei scheme de relație $R_j[U_j]$ o relație r_j peste U_j , $1 \leq j \leq p$. Dacă D se consideră ordonată sub forma $(R_1[U_1], \dots, R_p[U_p])$, atunci baza de date este un vector de relații, notat $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_p)$.

Structura unei relații se numește partea sa intensională, iar upilele relației poartă denumirea de partea sa extensională.

Operații referitoare la relații:

a) Proiecția unei relații.

Fie t un uplu peste $R[U]$ și X o submulțime a lui U . Proiecția lui t relativ la X , notată prin $t[X]$ este restricția lui t (ca uplu) la submulțimea X . Aici t este considerat ca aplicație. Dacă X este mulțimea vidă, atunci $t[X]$ il vom considera uplul vid. Dacă U este ordonată sub forma (A_1, A_2, \dots, A_n) , iar în această ordonare $X = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik})$, cu $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ și $X = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, atunci $t[X] = (V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{ik})$. Dacă r este o relație peste U , atunci proiecția lui r relativă la X , notată $r[X]$ va fi definită prin: $r[X] = \{t[X] / t \in r\}$.

b) Reuniunea a două relații.

Fie r_1 și r_2 relații peste $R[U]$. Atunci $r_1 \cup r_2$ notează reuniunea celor două și se definește ca:

$$r_1 \cup r_2 = \{t / t \text{ uplu, } t \in r_1 \text{ sau } t \in r_2\}$$

c) Diferența a două relații.

Fie r_1 și r_2 relații peste $R[U]$. Diferența lor, notată $r_1 - r_2$ se definește astfel:

$$r_1 - r_2 = \{t / t \text{ uplu, } t \in r_1 \text{ și } t \notin r_2\}$$

d) Unire (join) oarecare.

Fie relațiile r_i definite peste $R_i[U_i]$, $i=1,2$ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Fie $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \dots, A_{\alpha q} \in U_1$, $B_{\beta 1}, B_{\beta 2}, \dots, B_{\beta q} \in U_2$ și Θ_i un operator de comparare între $\text{dom}(A_{\alpha i})$ și $\text{dom}(B_{\beta i})$, $1 \leq i \leq q$.

Sintactic Θ_i este unul din operatorii $=, <, >, \leq, \geq, \neq$.

Deci Θ_i este o relație binară pe $\text{dom}(A_{\alpha i}) \times \text{dom}(B_{\beta i})$.

Rezultă că cele două domenii conțin valori comparabile prin Θ_i . Considerăm $\Theta = (A_{\alpha 1} \Theta_1 B_{\beta 1}) \wedge \dots \wedge (A_{\alpha q} \Theta_q B_{\beta q})$, unde semnul “ \wedge ” reprezintă conjuncția.

Join-ul oarecare între r_1 și r_2 prin expresia Θ se notează prin $r_1 \underset{\Theta}{\overset{*}{\wedge}} r_2$ și se definește prin:

$r_1 \underset{\Theta}{\overset{*}{\wedge}} r_2 = \{t / t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2, t[U_i] \in r_i, i=1,2 \text{ și}$
 $t[A_{\alpha j}] \Theta_j t[B_{\beta j}], j=1, q\}$

Se pot defini expresii de tip Θ mai generale decit cea de sus, folosind parantezele și operatorii de conjuncție și disjuncție (\wedge , respectiv \vee) astfel:

- o expresie elementară este de forma $A \Theta B$, unde A și B sunt attribute, iar Θ este operator de comparare.
- o expresie join se definește astfel:

1. Dacă e este o expresie elementară, atunci e și (e) sunt expresii join.
2. Dacă e_1 și e_2 sunt expresii join, atunci $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$, $(e_1 \wedge e_2)$, $(e_1 \vee e_2)$ sunt expresii join.
3. Orice expresie join se obține numai prin regulile 1 și 2.
Dacă Θ este o expresie join, atunci se definește faptul că (t_1, t_2) satisfacă Θ în mod recursiv, $t_1 \in r_1$, $t_2 \in r_2$.
 1. (t_1, t_2) satisfacă $A \Theta B$ dacă $t_1[A] \Theta t_2[B]$.
 2. (t_1, t_2) satisfacă $e_1 \wedge e_2$ și $(e_1 \wedge e_2)$ dacă (t_1, t_2) satisfacă e_1 și e_2 .
 3. (t_1, t_2) satisfacă $e_1 \vee e_2$ și $(e_1 \vee e_2)$, dacă (t_1, t_2) satisfacă e_1 sau e_2 .

În acest caz joinul oarecare se definește prin:

$r_1 \underset{\Theta}{\overset{*}{\ominus}} r_2 = \{(t_1, t_2) / (t_1, t_2) \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2, t_i \in r_i, i=1,2 \text{ și}$
 $(t_1, t_2) \text{ satisfac } \Theta\}$

e) Produsul cartezian.

Fie r_i relații definite peste $R_i[U_i]$, $i=1,2$ și $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Produsul cartezian al relațiilor r_1 și r_2 se notează prin $r_1 \times r_2$ și se definește prin: $r_1 \times r_2 = \{t / t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2, t[U_i] \in r_i, i=1,2\}$

Obs. Produsul cartezian este un join oarecare cu expresia join $\Theta = \text{TRUE}$.

f) Unirea naturală (join natural)

Fie r_i relații peste $R_i[U_i]$, $i=1,2$. Se numește join natural sau unire a celor două relații, notat $r_1 * r_2$ o relație peste $U_1 \cup U_2$ definită prin:

$$r_1 * r_2 = \{t / t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2, t[U_i] \in r_i, i=1,2\}$$

Fie R un nume pentru relația peste $U_1 \cup U_2$. Deci relația $r_1 * r_2$ va fi considerată peste schema $R[U_1 \cup U_2]$. Considerăm un exemplu pentru operația de join natural. Fie $R_1[ABCD]$, $R_2[CDE]$ și relațiile r_1 și r_2 date astfel:

	A	B	C	D	
r ₁	1	0	0	0	t ₁
	1	1	0	0	t ₂
	0	1	0	1	t ₃
	0	0	0	1	t ₄
	1	1	1	1	t ₅

	C	D	E	
r ₂	0	0	0	V ₁
	1	1	1	V ₂
	1	1	0	V ₃
	1	0	0	V ₄
	1	0	1	V ₅

Joinul natural va fi:

	A	B	C	D	E
	1	0	0	0	0
$r_1^*r_2 =$	1	1	0	0	0
BAZE DE DATE – Capitolul I	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	0

Se observă că upletele t_3 și t_4 din r_1 nu contribuie la construcția joinului, deoarece nu există uple $V_j \in r_2$, astfel încât $t_3[CD] = V_j[CD]$, și nu există uple $V_j \in r_2$, astfel încât $t_4[CD] = V_j[CD]$. La fel upletele V_4 și V_5 din r_2 nu contribuie la formarea joinului, deoarece $V_4[CD] = V_5[CD] \notin r_1[CD]$.

Să remarcăm faptul că perechea (t_i, V_j) , $t_i \in r_1$, $V_j \in r_2$ contribuie la formarea joinului, dacă $t_i[CD] = V_j[CD]$.

În acest caz, va rezulta un uplu în joinul natural, notat w , definit prin: $w[U_1] = t_i[U_1]$, $w[U_2 - U_1] = V_j[U_2 - U_1]$.

Se observă ușor următoarele relații:

1. $(r_1 * r_2)[U_1] \subseteq r_1$, $(r_1 * r_2)[U_2] \subseteq r_2$.
2. Dacă $r_1' = \{t_1 / t_1 \in r_1, \exists t_2 \in r_2, \text{a.î., } t_1[U_1 \cap U_2] = t_2[U_1 \cap U_2]\}$
și $r_2' = \{t_2 / t_2 \in r_2, \exists t_1 \in r_1, \text{a.î., } t_1[U_1 \cap U_2] = t_2[U_1 \cap U_2]\}$

și $r_1'' = r_1 - r_1'$, $r_2'' = r_2 - r_2'$, atunci
 $r_1 * r_2 = r_1' * r_2'$, $(r_1 * r_2)[U_1] = r_1'$, $(r_1 * r_2)[U_2] = r_2'$.

3. Dacă $\bar{r}_1 \subseteq r_1$ și $\bar{r}_2 \subseteq r_2$ satisfac relația $\bar{r}_1 * \bar{r}_2 = r_1 * r_2$, atunci $r_1' \subseteq \bar{r}_1$ și $r_2' \subseteq \bar{r}_2$, adică relațiile r_1' , r_2' sunt minimale în r_1 respectiv r_2 cu proprietatea $r_1' * r_2' = r_1 * r_2$. În cazul în care $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, atunci este clar că joinul natural este tocmai produsul cartezian $r_1 \times r_2$.

Operația de join natural se poate extinde la mai multe relații.

Fie r_i peste $R_i[U_i]$, $i=1,h$. Joinul natural al acestora se notează prin

$r_1 * r_2 * \dots * r_h$ sau $* \langle r_i, i=1,h \rangle$, sau $* \langle r_i, i=1,h \rangle$ și se definește prin:

$$r_1 * r_2 * \dots * r_h = \{t \mid t \text{ uplu peste } U_1 \cup \dots \cup U_h, \text{ a.i. } t[U_i] \in r_i, i=1,h\}$$

Este clar că operația de join natural nu depinde de ordinea considerării relațiilor r_i , $i=1,h$.

Dacă notăm cu $*_2$ operația de join natural între două relații și cu $*_h$ operația de join natural între h relații, apare următoarea problemă:

Problema 1. Operația $*_h$ se poate exprima cu ajutorul operației $*_2$?

Răspunsul la problema 1 este NU. Demonstrați.

g) Selecția.

Fie r o relație peste $R[U]$.

Definim întâi expresia elementară de selecție prin:

$A\Theta B$ sau $A\Theta c$ sau $c\Theta B$, unde $A, B \in U$, iar c este o constantă, comparabilă cu elementele din $\text{dom}(A)$ și $\text{dom}(B)$.

Dacă e_1 și e_2 sunt expresii elementare de selecție, atunci (e_1) , $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$, $(e_1 \wedge e_2)$, $(e_1 \vee e_2)$ este o expresie de selecție. Orice expresie de selecție se obține numai prin regulile de mai sus. Fie E o expresie de selecție.

Precizăm cazul în care uplul t satisface E .

Dacă $E \equiv A\Theta B$, atunci t satisface E , dacă $t[A]\Theta t[B]$.

Dacă $E \equiv A\Theta c$, atunci t satisface E , dacă $t[A]\Theta c$.

Dacă $E \equiv c\Theta B$, atunci t satisface E , dacă t satisface $c\Theta t[B]$.

Dacă $E \equiv e_1 \wedge e_2$, atunci t satisface E, dacă t satisface e_1 și e_2 .

Dacă $E \equiv e_1 \vee e_2$, atunci t satisface E, dacă t satisface e_1 sau t satisface e_2 .

Fie F o expresie de selecție.

Selecția se notează prin $\sigma_F(\underline{r})$ și se definește prin:

$\sigma_F(\underline{r}) = \{t / t \text{ uplu peste } R[U], t \text{ satisface } F\}$.

h) Intersecția relațiilor.

Fie r_i relații peste $R_i[U_i]$, $i=1,2$ și $U_1=U_2$.

Atunci intersecția se definește prin:

$$r_1 \cap r_2 = \{t / t \text{ uplu peste } U_1, \text{ a.î. } t \in r_1 \text{ și } t \in r_2\}$$

Se arată că o parte din operațiile cu relații se exprimă cu ajutorul altor operații. Multimea de operații: reuniune, diferență, produs cartezian, proiecție și selecție se arată a

fi minimală cu proprietatea că celelalte operații se exprimă cu ajutorul acestora.

(ii) Relatia ca multiset

Fie schema $R(U)$. O relatie ca multiset peste $R(U)$ este un multiset de uple peste U .

$$r = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}.$$

Orice relatie de tip set este multiset. Operatii:

a) Proiectia. $r = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}$ peste $R(U)$ si $X \subseteq U$, $r[X]$

$v_i = u_i[X]$, consideram $v_1:m_1, \dots, v_h:m_h$, v_i pot fi egale. Se grupeaza toate egale si se aduna

multiplicitatile pentru cele egale.

A	B	C	D	m_i
<hr/>				
0	0	0	0	3
0	0	1	0	2
0	0	0	1	4
1	1	0	1	2
1	1	1	2	1
<hr/>				

$$X = AB,$$

$$v_1[X] = (0 \ 0) : 3$$

$$v_2[X] = (0 \ 0) : 2$$

$$v_3[X] = (0 \ 0) : 4 \quad r[X] = \{(0 \ 0):9, (1 \ 1):3\}.$$

$$v_4[X] = (1 \ 1) : 2$$

$$v_5[X] = (1 \ 1) : 1$$

b) Reuniunea a două relații:

$r_1 = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}$, $r_2 = \{v_1:n_1, \dots, v_p:n_p\}$, peste $R(U)$.

$r_1 \cup r_2 = \{w_1 : q_1, \dots, w_l : q_l\}$, $u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_p$,
For $i=1$ to h

1) If există v_j astfel încât $u_i = v_j$, atunci $w_\alpha = u_i$,

$$q_\alpha = m_i + n_j,$$

2) altfel $w_\alpha = u_i$, $q_\alpha = m_i$

endfor

For $j=1$ to p

3) If $v_j \neq u_i$, for all $i=1, h$, atunci $w_\alpha = v_j$, $q_\alpha = n_j$

Endfor

Exemplu: $r_1 = \{(0\ 0):2, (0\ 1):3, (1\ 0):2\}$,

$r_2 = \{(0\ 0):1, (1\ 1):3\}$,

$r_1 \cup r_2 = \{(0\ 0):3, (0\ 1):3, (1\ 0):2, (1\ 1):3\}$

c) Diferenta a 2 relatii multiset.

$r_1 = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}$, $r_2 = \{v_1:n_1, \dots, v_p:n_p\}$, peste $R(U)$.

$r_1 - r_2 = \{w_1 : q_1, \dots, w_l : q_l\}$,

For $i=1$ to h

4) If exista v_j astfel incat $u_i = v_j$, si $m_i > n_j$, atunci $w_\alpha = u_i$, $q_\alpha = m_i - n_j$, altfel

5) If există v_j astfel încât $u_i = v_j$, și $m_i \leq n_j$, atunci continue,

6) altfel $w_\alpha = u_i$, $q_\alpha = m_i$

endfor

d) Joinul oarecare.

$r_1 = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}$, peste $R_1(U_1)$, $r_2 = \{v_1:n_1, \dots, v_p:n_p\}$, peste $R_2(U_2)$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$,

$r_1 \theta r_2 = \{w : q \mid w \text{ peste } U_1 \cup U_2, \text{ există } i \text{ și } j, w[U_1] = u_i, w[U_2] = v_j, w \text{ satisfacă } \theta\}$.

e) Produsul cartezian.

$r_1 = \{u_1:m_1, \dots, u_h:m_h\}$, peste $R_1(U_1)$, $r_2 = \{v_1:n_1, \dots, v_p:n_p\}$, peste $R_2(U_2)$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$,

$r_1 \times r_2 = \{ w : q \mid w \text{ este } U_1 \cup U_2, \text{ există } i \text{ și } j,$
 $w[U_1] = u_i, w[U_2] = v_j \}.$

f) Join natural.

- (C1) $u_i[U_1 \cap U_2] = v_j[U_1 \cap U_2],$
(C2) $w[U_1] = u_i[U_1], w[U_2 - U_1] = v_j[U_2 - U_1], q = m_i * n_j.$

$r = \Phi$

For $i=1,h$

For $j=1,p$

If perechea (u_i, v_j) satisfacă (C1), atunci

calculează $w:q$ conform lui (C2) și adaugă $w:q$ la r ,

endif

endfor

endfor

Exemplu:

A	B	C	D	m _i	
<hr/>					
0	1	0	0	3	u ₁

0	0	1	0	2	u ₂
---	---	---	---	---	----------------

0	1	1	1	2	u ₃
---	---	---	---	---	----------------

C	D	E	n _j	
<hr/>				
0	0	1	2	v ₁

1	0	0	3	v ₂
---	---	---	---	----------------

0	1	1	1	v ₃
---	---	---	---	----------------

0	0	0	3	v ₄
---	---	---	---	----------------

	A	B	C	D	E	q_1
(u_1, v_1) \rightarrow	0	1	0	0	1	6
(u_1, v_4) \rightarrow	0	1	0	0	0	9
(u_2, v_2) \rightarrow	0	0	1	0	0	6

Sunt valabile proprietatile joinului natural pentru cazul set?

Dependente functionale

1 Definitie. Proprietati. Sisteme de reguli de inferenta.

Fie $X, Y \subseteq U$. Vom nota sintactic o dependenta functionala prin $X \rightarrow Y$.

Semantic, vom spune ca o relatie r peste U satisface dependenta functionala

$X \rightarrow Y$ daca: $(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]]$.

Daca $X = \emptyset$, atunci spunem ca r satisface $\emptyset \rightarrow Y$ daca

$(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[Y] = t_2[Y]]$, altfel

spus, $r[Y]$ consta dintr-un singur element.

Daca $Y = \emptyset$, atunci consideram ca

orice relatie r peste U satisface dependenta functionala

$X \rightarrow \emptyset$. Daca r satisface dependenta functionala $X \rightarrow Y$,

atunci exista o functie : $r[X] \rightarrow r[Y]$ definita

prin: $F(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$, si $t'[X] = t \in r[X]$.

Daca r satisface $X \rightarrow Y$ se mai spune ca X determina functional pe Y in r .

Proprietati ale dependentelor functionale:

FD1. (Reflexivitate) Daca $Y \subseteq X$, atunci r satisface $X \rightarrow Y$ pentru orice relatie r peste U .

FD2 (Extensie) Daca r satisface $X \rightarrow Y$, si $Z \subseteq W$, atunci r satisface $XW \rightarrow YZ$.

FD3 (Tranzitivitate) Daca r satisface $X \rightarrow Y$, si $Y \rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow Z$.

FD4 (Pseudotranzitivitate) Daca r satisface $X \rightarrow Y$, si $YW \rightarrow Z$, atunci r satisface $XW \rightarrow Z$.

FD5 (Uniune) Daca r satisface $X \rightarrow Y$ si $X \rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow YZ$.

FD6 (Descompunere) Daca r satisface $X \rightarrow YZ$, atunci r satisface $X \rightarrow Y$ si $X \rightarrow Z$.

FD7 (Proiectabilitate) Daca r peste U satisface $X \rightarrow Y$ si $X \subset Z \subseteq U$, atunci $r[Z]$ satisface $X \rightarrow Y \cap Z$.

FD8 (Proiectabilitate inversa) Daca $X \rightarrow Y$ este satisfacuta de o proiectie a lui r , atunci $X \rightarrow Y$ este satisfacuta de r .

Definitia 2.

Fie Σ o multime de dependente functionale peste U . Spunem ca $X \rightarrow Y$ este consecinta din Σ , daca orice relatie ce satisface toate dependentele lui Σ va satisface si $X \rightarrow Y$.

Vom nota aceasta situatie prin $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$.

Deci $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ daca pentru $(\forall r)[\forall \alpha \in \Sigma, r \text{ satisface } \alpha \rightsquigarrow r \text{ satisface } X \rightarrow Y]$.

Fie $\Sigma^* = \{X \rightarrow Y \mid \Sigma \vdash X \rightarrow Y\}$. Fie Σ_1 o multime de dependente functionale.

Spunem ca Σ_1 constituie o acoperire pentru Σ^* , daca $\Sigma_1^* = \Sigma^*$.

Propozitia 1.1 Pentru orice multime Σ de dependente functionale exista o acoperire Σ_1 pentru Σ^* , astfel incat toate dependentele din Σ_1 sunt de forma

$X \rightarrow A$, A fiind un atribut din U.

Demonstratie. Pentru fiecare $X \rightarrow Y \in \Sigma$, cu $Y = B_1 B_2 \dots B_h$, consideram

$X \rightarrow B_j$ incluse in Σ_1 , $j = 1, h$. Dupa proprietatile FD5 si FD6 avem: r satisface $X \rightarrow Y$ daca si numai daca r satisface $X \rightarrow B_j$, $j = 1, h$. Dupa aceleasi proprietati si din modul de definire a lui Σ_1 avem: r satisface α , $\forall \alpha \in \Sigma$ daca si numai daca r satisface α_1 , $\forall \alpha_1 \in \Sigma_1$. Aceasta

din urma conduce la $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ daca si numai daca $\Sigma_1 \vdash X \rightarrow Y$, ceea ce inseamna $\Sigma_1^* = \Sigma^*$.

Propozitia 1.2 $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ daca si numai daca $\Sigma \vdash X \rightarrow B_j$ pentru $j = 1, h$, unde $Y = B_1 \dots B_h$.

Justificarea propozitiei rezulta imediat din FD5 si FD6.

Din cele doua propozitii de mai sus, rezulta ca studiul dependentelor functionale, din punct de vedere al relatiei de “consecinta”, se reduce la studiul acestei

“consecinte” pe multimea dependentelor functionale în care membrul doi are un singur atribut.

Reguli de inferenta.

In continuare vom considera reguli formale de deducere a noi dependente functionale, pornind de la o multime data Σ .

Fie \mathcal{R} o multime de reguli formale de deducere pentru dependente functionale si Σ o multime de dependente

functionale. Spunem ca $X \rightarrow Y$ are o demonstratie in Σ utilizand regulile \mathcal{R} , si vom nota $\Sigma \mid_{\mathcal{R}} X \rightarrow Y$, daca exista sirul $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, astfel incat:

a) $\alpha_n = X \rightarrow Y$, si

b) pentru orice $i = 1, n$, $\alpha_i \in \Sigma$ sau exista o regula din \mathcal{R} de forma

$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk}$

-----,

α_i

unde $j_1, j_2, \dots, j_k < i$ (adică α_i se obține utilizând o regula din \mathcal{R} , cu premizele existente în sir înainte de α_i). Corespunzător proprietăților FD1–FD6 se pot defini reguli formale de deducere a dependentelor funktionale:

FD1f : $Y \subseteq X$

$X \rightarrow Y$

FD2f : $X \rightarrow Y, Z \subseteq W$

$XW \rightarrow YZ$

FD3f: $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z$

 $X \rightarrow Z$

FD4f : $X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z$

 $XW \rightarrow Z$

FD5f : $X \rightarrow Y, X \rightarrow Z$

$X \rightarrow Y Z$

FD6f : $X \rightarrow Y Z$

$X \rightarrow Y$

Armstrong a definit urmatoarele reguli de inferenta
(numite axiomele lui Armstrong):

(A1) : ----- , $i = 1, m$

$A_1 \dots A_m \rightarrow A_i$

(A21) : $A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r$

-----, $j = 1, r$

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_j$

(A22) : $A_1 \dots A_m \rightarrow B_j , j = 1, r$

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r$

(A3) : $A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r, B_1 \dots B_r \rightarrow C_1 \dots C_p$

$A_1 \dots A_m \rightarrow C_1 \dots C_p$

unde A_i, B_j, C_k sunt attribute.

Observatia 1.1 Regula A3 este in fond FD3f
(tranzitivitatea).

Definitie. Regula a_{j_1}, \dots, a_{j_h}

a_i

se exprima cu ajutorul regulilor sistemului \mathcal{R} , daca:

$$\{ a_{j_1}, \dots, a_{j_h} \} \vdash_{\mathcal{R}} a_i$$

Propozitia 1.3 Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprima cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

In adevar, fie $X \rightarrow Y$ si $YW \rightarrow Z$ date. Aplicam FD2f pentru $X \rightarrow Y$ si $W \subseteq W$, si obtinem $XW \rightarrow YW$. Aceasta din urma si $YW \rightarrow Z$ si FD3f conduc la $XW \rightarrow Z$.

Fie date $X \rightarrow Y$ si $X \rightarrow Z$. Aplicand FD2f pentru $X \rightarrow Y$ si $X \subseteq X$ obtinem $X \rightarrow XY$; de asemenea aplicam FD2f

pentru $X \rightarrow Z$ si $Y \subseteq Y$ si obtinem $XY \rightarrow YZ$. Prin tranzitivitate din $X \rightarrow XY$ si $XY \rightarrow YZ$ obtinem $X \rightarrow YZ$.

Fie $X \rightarrow YZ$. Dupa FD1f obtinem $YZ \rightarrow Y$ si $YZ \rightarrow Z$, aplicand FD3f se obtine $X \rightarrow Y$ si $X \rightarrow Z$.

Sa notam prin $\Sigma^+_{\mathcal{R}} = \{X \rightarrow Y \mid |\Sigma| - {}_{\mathcal{R}} X \rightarrow Y\}$.

Fie $\mathcal{R}_1 = \{\text{FD1f}, \text{FD2f}, \text{FD3f}\}$, $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{\text{FD4f}, \text{FD5f}, \text{FD6f}\}$, $\mathcal{R}_A = \{A1, A21, A22, A3\}$.

Observatia 1.2. $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}_2}$ avand in vedere propozitia 1.3.

Propozitia 1.4. Regulile din \mathcal{R}_1 se exprima prin cele din \mathcal{R}_A si invers.

Demonstratie. Fie $X = A_1 \dots A_m$, si $Y = A_{i_1} \dots A_{i_k}$, $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. Aplicand regula A1 obtinem $X \rightarrow A_{i_1}, \dots, X \rightarrow A_{i_k}$, apoi considerand A22 obtinem $X \rightarrow A_{i_1} \dots A_{i_k}$, adica $X \rightarrow Y$. Deci FD1f se exprima prin regulile din \mathcal{R}_A .

Fie $X \rightarrow Y$ si $Z \subseteq W$ date. Evidențiem atributele din fiecare:

$X = A_1 \dots A_m$, $Y = B_1 \dots B_p$, $W = C_1 \dots C_q$,

$Z = C_{i_1} \dots C_{i_k}$ cu $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$.

Din $X \rightarrow Y$ prin A_{21} obtinem $X \rightarrow B_j$, $j = 1, p$.

Prin A_{11} , si A_{22} obtinem $XW \rightarrow X$. Din $X \rightarrow B_j$, si $XW \rightarrow X$ obtinem $XW \rightarrow B_j$, $j = 1, p$ utilizand A_{31} .

Prin A_{11} obtinem $XW \rightarrow C_{il}$, $l = 1, k$.

Aplicand A22 pentru $XW \rightarrow B_j$, $j = 1, p$ si $XW \rightarrow C_{il}$, $l = 1, k$ obtinem $XW \rightarrow Y Z$.

Regula FD3f este exact A3.

Regula A1 se exprima numai prin FD1f. Regula A21 se exprima aplicand regula FD6f de $r-1$ ori, iar FD6f se exprima cu ajutorul celor din \mathcal{R}_1 ,

dupa propozitia 1.3.

Daca a_{j1}, \dots, a_{jh}

----- $\in \mathcal{R}_1$

α_i

si se exprima cu ajutorul regulilor lui R2, notam

prin trans $_{\mathcal{R}_2}$ ($\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_h}, \alpha_i$) sirul de dependente ce se obtine pornind de la premizele $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_h}$ si aplicand regulile lui R2 pentru obtinerea lui α_i .

Propozitia 1.5 Fie \mathcal{R}'_1 , si \mathcal{R}'_2 doua multimi de reguli, astfel incat \mathcal{R}'_1 se exprima prin \mathcal{R}'_2 , si invers. Atunci

$\Sigma^+_{\mathcal{R}_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}_2}$ pentru orice multime Σ de dependente functionale.

Demonstratie. Fie $X \rightarrow Y \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$. Sa aratam ca $X \rightarrow Y \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_2}$ (*)

Există sirul $a_1, a_2, \dots, a_n = X \rightarrow Y$, astfel încât pentru orice $i, i = 1, n$ avem:

- a) $a_i \in \Sigma$ sau
- b) există $\sigma = a_{j1}, \dots, a_{jh}$

----- $\in \mathcal{R}'_1$

α_i

cu $j_1, j_2, \dots, j_h < i$

Demonstratia o realizam prin inductie dupa n.

Daca $n = 1$, atunci putem avea:

c) $\alpha_1 \in \Sigma$, si deci $\alpha_1 \in \Sigma^+ \mathcal{R}_2^*$ sau

d) ----- $\in \mathcal{R}'_1$

α_1

In cazul d) sirul trans $_{\mathcal{R}_2}(\alpha, \alpha_1)$ constituie o demonstratie pentru α_1 in Σ , utilizand \mathcal{R}'_2 , adica $\alpha_1 \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_2}$.

Presupunem afirmatia (*) valabila in cazul in care $X \rightarrow Y$ are demonstratii in Σ utilizand reguli din \mathcal{R}'_1 si lungimea demonstratiei este mai mica sau egala cu n .

Fie acum $X \rightarrow Y \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ cu lungimea demonstratiei egala cu $n + 1$. Exista sirul $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} = X \rightarrow Y$, astfel incat pentru orice i , $1 \leq i \leq n + 1$, avem:

a1) $\alpha_i \in \Sigma$ sau

b1) există β , instantierea unei reguli din \mathcal{R}'_1

$\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jh}$

$\beta = \text{-----} \in \mathcal{R}'_1$

α_i

cu $j1, \dots, jh < i$

Daca $\alpha_{n+1} \in \Sigma$, atunci $\alpha_{n+1} = X \rightarrow Y \in \Sigma^+ \mathcal{R}'_2$.

Daca α_{n+1} se obtine prin b1), atunci există

$\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jh}$

----- $\in \mathcal{R}'_1$

α_{n+1}

cu $j_1, \dots, j_h < n + 1$.

Dupa ipoteza inductiei avem: $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_h} \in \Sigma^+ \mathcal{R}_2^+$.

Fie $\text{dem}_{\mathcal{R}_2}(\alpha_{j_i})$ o demonstratie pentru α_{j_i} in Σ , utilizand regulile lui \mathcal{R}_2' , $i = 1, h$.

Atunci sirul: $\text{dem}_{\mathcal{R}_2}(\alpha_{j_1}), \dots, \text{dem}_{\mathcal{R}_2}(\alpha_{j_h}), \text{trans}_{\mathcal{R}_2}(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_h}, \alpha_{n+1})$

constituie o demonstratie pentru α_{n+1} in Σ , utilizand regulile din \mathcal{R}'_2 . Deci $\alpha_{n+1} \in \Sigma^+ \mathcal{R}_2$.

Relatia (*) inseamna $\Sigma^+ \mathcal{R}_1 \subseteq \Sigma^+ \mathcal{R}_2$. Rationamentul fiind simetric, rezulta si incluziunea inversa, deci egalitatea dorita.

Consecinta 1.1 $\Sigma^+ \mathcal{R}_1 = \Sigma^+ \mathcal{R}_A = \Sigma^+ \mathcal{R}_2$.

Relatii Armstrong

Definitie. Fie Σ o multime de restrictii functionale peste schema $R(U)$. Numim relatie Armstrong pentru Σ o relatie r_0 , care satisface proprietatile:

1) r_0 satisface τ , $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, si

2) r_0 nu satisface γ , $\forall \gamma \not\in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$.

Obs. Proprietatea 1) este echivalenta cu 1'):

1') r_0 satisface τ , $\forall \tau \in \Sigma$

Fie $X \subseteq U$ si \mathcal{R} o multime de reguli de inferenta. Sa notam prin $X^+_{\mathcal{R}} = \{A | \Sigma |-_{\mathcal{R}} X \rightarrow A\}$

Lema 1.1 $\Sigma |-_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$ daca si numai daca $Y \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$.

Demonstratie. Fie $Y = A_1 A_2 \dots A_m$, $A_i \in U$, $i = 1, m$.

Presupunem ca $Y \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$. Atunci $A_i \in X^+_{\mathcal{R}_1}$, $i = 1, m$, deci $\Sigma |-_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow A_i$, $i = 1, m$. Aplicand regula A22 (A22 se exprima cu ajutorul regulilor din \mathcal{R}_1) obtinem:

$\Sigma |-_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$.

Invers, daca $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$, atunci aplicand regula A21,
(A21 se exprima cu ajutorul regulilor din \mathcal{R}_1) se obtine:

$\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow A_i$, $i = 1, m$, ceea ce inseamna $A_i \in X^+_{\mathcal{R}_1}$, $i = 1, m$, deci $Y \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$.

Lema 1.2 Fie Σ o multime de dependente functionale si
 $\sigma: X \rightarrow Y$ o dependenta functionala astfel incat $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$. Atunci exista o relatie r_σ ce satisface toate
dependentele din Σ si r_σ nu satisface $X \rightarrow Y$.

Demonstratie. Avem $X^+_{\mathcal{R}_1} \not\subseteq U$, caci in caz contrar,

$X^+_{\mathcal{R}_1} = U$ si utilizand lema 1.1 si faptul ca $Y \subseteq U$, obtinem
 $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$, deci contradictie.

Definim relatia $r_\sigma = \{ t_1, t_2 \}$, unde t_1 este uplul continind
1 pentru toate atributele din U , iar t_2 este definit prin:
 $t_2[A] = 1$ daca $A \in X^+_{\mathcal{R}_1}$ si 0 altfel.

Deoarece $X^+_{\mathcal{R}_1} \not\subseteq U$, rezulta $t_1 \not\leftrightharpoons t_2$.

1) Aratam ca r_σ satisface orice dependenta functionala
 $V \rightarrow W \in \Sigma$.

Presupunem contrariul, deci r_σ nu satisface $V \rightarrow W$.

Atunci $V \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$, caci daca $V \not\subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$, exista $B \in V$, si $B \notin X^+_{\mathcal{R}_1}$, ceea ce inseamna $t_1[B] \neq t_2[B]$, deci

$t_1[V] \neq t_2[V]$, de unde rezulta r_σ satisface $V \rightarrow W$ (contradictie).

Pe de alta parte, avem: $W \not\subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$, caci daca $W \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$, atunci $t_1[W] = t_2[W]$ (dupa definitia lui r_σ), ceea ce ar inseamna ca r_σ satisface $V \rightarrow W$ (contradictie).

Din $W \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$ rezulta ca există $A \in W$, $A \not\in X^+_{\mathcal{R}_1}$. Deci $t_2[A] = 0$ și $t_1[A] = 1$.

Relatia $V \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$ conduce la $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow V$, după lema 1.1. Dar $V \rightarrow W \in \Sigma$, aplicând tranzitivitatea rezulta

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow W$, ceea ce înseamnă $W \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$, contradictie.

2) Aratăm că r_σ nu satisfacă $X \rightarrow Y$.

Presupunem că r_σ satisfacă $X \rightarrow Y$. Aceasta înseamnă că $t_1[X] = t_2[X]$ implica $t_1[Y] = t_2[Y]$.

Deoarece $X \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$ si $t_1[A] = t_2[A]$, $\forall A \in X^+_{\mathcal{R}_1}$, rezulta $t_1[X] = t_2[X]$, deci avem $t_1[Y] = t_2[Y]$, ceea ce inseamna dupa definitia lui r_σ ca $Y \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$ si dupa lema 1.1, obtinem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X \rightarrow Y$, deci o contradictie.

Teorema 1.1 (Armstrong). Fie Σ o multime de dependente functionale.

Atunci exista o relatie r_0 ce satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, adica:

1) r_0 satisface τ , $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, si

2) r_0 nu satisface γ , $\forall \gamma \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$.

Demonstratie. Deoarece U este finita, rezulta ca Σ este finita si $P(U) \times P(U) - \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ este finita. $(P(U))$ este multimea partilor lui U ; pentru orice dependenta functionala $X \rightarrow Y$, exista o unica pereche $(X, Y) \in P(U) \times P(U)$.

Fie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ dependentele care nu apartin multimii $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$. Pentru o restrictie $\sigma \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ in lema anterioara am construit $r_\sigma = \{t_1, t_2\}$, unde t_1 si t_2 aveau valorile 0 si 1.

Vom considera valori diferite pentru $\sigma_i \Leftarrow \sigma_j$, si anume:

In r_{σ_i} vom considera valorile $2i-2$ si $2i-1$, $i = 1, k$.

Desigur r_{σ_i} le vom construi ca in lema precedenta:

$$r_{\sigma_i} = \{t_1^i, t_2^i\},$$

$$t_1^i[A] = 2i - 1, \forall A \in U, \text{ iar}$$

$$t_2^i[A] = 2i - 1 \text{ pentru } A \in X_{i, R_1}^+ \text{ si } 2i - 2 \text{ altfel.}$$

$$(\sigma_i : X_i \rightarrow Y_i).$$

Definim r_0 ca fiind reuniunea relatiilor r_{σ_i} , $i = 1, k$. În continuare pentru fiecare atribut A ce satisface

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} \emptyset \rightarrow A$ (echivalent cu $A \in \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$) înlocuim toate valorile din coloana atributului A în r_0 cu o aceeasi valoare, notata v_A . Vom lua pentru astfel de attribute A și A' , $v_A \neq v_{A'}$ și $v_A \geq 2k$.

Vom arata ca r_0 , astfel construită, este o relație Armstrong pentru Σ .

a) Aratam ca r_0 satisface orice $X \rightarrow Y \in \Sigma$.

Fie $A \in Y$ oarecare. Este suficient sa aratam ca r_0 satisface $X \rightarrow A$ (aplicand uniunea va rezulta ca r_0 satisface $X \rightarrow Y$). Distingem doua cazuri:

- I. $X \subseteq \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$. Avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} \emptyset \rightarrow X$, si impreuna cu $X \rightarrow Y \in \Sigma$, obtinem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} \emptyset \rightarrow Y$ (prin tranzitivitate), ceea ce inseamna $Y \subseteq \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$ (lema 1.1).

$A \in Y$ si $Y \subseteq \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$ implica $A \in \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$ si din constructia lui r_0 toate valorile in coloana A sunt v_A , ceea ce denota faptul ca r_0 satisface $X \rightarrow A$.

II. $X \subseteq \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$. Rezulta ca $\exists B \in X, B \not\in \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$.

Fie $t_1, t_2 \in r_0$ cu proprietatea $t_1[X] = t_2[X]$.

Trebuie sa aratam ca $t_1[A] = t_2[A]$.

Deoarece $B \in X$ si $B \not\in \emptyset^+_{\mathcal{R}_1}$, rezulta ca in aceasta situatie coloana lui B contine $2k$ valori

dincte, deci t_1 si t_2 nu contin aceleasi valori.

Deoarece $t_1[X] = t_2[X]$, rezulta ca t_1 si t_2 provin din aceeasi relatie r_{σ_i} . (Eventual anumite coloane A din

t_1 si t_2 au suferit modificarea cu valori v_A). Dupa lema anterioara t_1 si t_2 initiale din r_{σ_i} au satisfacut Σ , deci si

$X \rightarrow A$. Noile t_1 si t_2 obtinute prin identificarea valorilor din anumite coloane, vor satisface, de asemenea,

$X \rightarrow A$, deci $t_1[A] = t_2[A]$.

b) Aratam ca r_0 nu satisface σ , $\forall \sigma \notin \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ (echivalent cu r_0 nu satisface σ_i , $i = 1, k$).

Dupa lema anterioara stim ca r_{σ_i} nu satisface σ_i .

$$r_{\sigma i} = \{t^i_1, t^i_2\},$$

$$t^i_1[A] = 2i - 1, \forall A \in U, \text{ iar}$$

$$t^i_2[A] = 2i - 1 \text{ pentru } A \in X^+_{i, R_1}, 2i - 2 \text{ altfel.}$$

$$(\sigma_i : X_i \rightarrow Y_i).$$

Deoarece $X_i \subseteq X^+_{i, R_1}$ inseamna ca $\exists B_i \in Y_i, B_i \not\in X^+_{i, R_1}$

astfel incat $t^i_1[B_i] \neq t^i_2[B_i]$.

Vom arata ca nu toate coloanele de acest tip B_i din Y suferă identificarea datorită apartenenței atributului respectiv la $\emptyset^+_{\mathcal{R}1}$.

Presupunem că pentru orice $B_i \in Y_i$, $B_i \notin X^+_{i,\mathcal{R}1}$

avem $B_i \in \emptyset^+_{\mathcal{R}1}$. Atunci $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}1} \emptyset \rightarrow B_i$, aplicând uniunea obținem: $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}1} \emptyset \rightarrow Y_i - X^+_{i,\mathcal{R}1}$. Aceasta împreună cu $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}1} X_i \rightarrow \emptyset$ și tranzitivitatea ne dau

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}1} X_i \rightarrow Y_i - X^+_{i,\mathcal{R}1}$.

Dar avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X_i \rightarrow X^+_{i, \mathcal{R}_1}$, aplicand uniunea pentru toate A din $X^+_{i, \mathcal{R}_1} = \{A \mid \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X_i \rightarrow A\}$. Aplicand inca o data uniunea obtinem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} X_i \rightarrow Y_i$, adica $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_1} \sigma_i$, contradictie. Rezulta ca in urma identificarii $\exists B_i \in Y_i$, astfel incat $t_1^i [B_i] \neq t_2^i [B_i]$. Avand $t_1^i [X_i] = t_2^i [X_i]$, rezulta ca r0 nu satisface σ_i .

Studiul dependentelor functionale utilizand calculul propozitional

Acest studiu a fost realizat de Fagin. Pentru fiecare atribut $A \in U$ se asociaza o variabila propozitională notată a . Corespunzator dependentei functionale

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_p$ asociem implicatia logica

$a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_p$, unde $a_1 \dots a_m$ inseamna conjunctia logica a variabilelor a_1, a_2, \dots, a_m ;

similar b₁ . . . b_p. Semnul “ \Rightarrow ” reprezinta implicatia logica.

Vom nota valorile de adevar din calculul propozitional prin 1 (adevarat) , si 0 (fals).

O asignare o notam prin δ si este o functie $\delta: \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$, unde Var este multimea variabilelor propozitionale.

Functia δ se extinde la formule in general (si la implicatii in particular) prin

$\delta(p_1 \wedge p_2) = \delta(p_1) \wedge \delta(p_2)$, p₁ si p₂ fiind formule,

$$\delta(p_1 \vee p_2) = \delta(p_1) \vee \delta(p_2),$$

$$\delta(\neg p) = \neg \delta(p),$$

unde conjunctia, disjunctia si negatia in {0, 1} sunt definite in modul cunoscut.

Rezulta ca $\delta(a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_p) = 1$ daca si numai daca:

1. $\exists i, 1 \leq i \leq m$, astfel incat $\delta(a_i) = 0$ sau

2. $\forall i, i = 1, m, \delta(a_i) = 1$, si $\forall j, j = 1, p, \delta(b_j) = 1$.

In calculul propositional exista noțiunea de consecință logică a unei formule g dintr-o multime de formule F . Se notează prin $F \models_{c.l.} g$, dacă

$$(\forall \delta)[(\forall f \in F, \delta(f) = 1) \rightsquigarrow \delta(g) = 1];$$

δ notează o asignare a variabilelor propozitionale.

Pentru o dependență σ vom nota prin $\bar{\sigma}$ implicatia atașată, iar pentru o multime de dependente funktionale Σ , vom nota prin $\bar{\Sigma} = \{ \bar{\sigma} | \sigma \in \Sigma \}$.

Exemplul 2.1 Fie $\Sigma = \{AB \rightarrow C, AC \rightarrow D, BD \rightarrow E\}$. Atunci $\bar{\Sigma} = \{ab \Rightarrow c, ac \Rightarrow d, bd \Rightarrow e\}$.

Vom stabili o legatura intre notiunea de “consecinta” definita in domeniul dependentelor functionale si notiunea de “consecinta logica” definita in domeniul calculului propositional.

Fie $\sigma: AB \rightarrow E$ si Σ din exemplul anterior. Se pune intrebarea daca $\Sigma \models \sigma$?

Pentru aceasta, fie r o relatie ce satisface toate elementele lui Σ si fie $t_1, t_2 \in r$

astfel incat $t_1[AB] = t_2[AB]$. Din r satisface $AB \rightarrow C$ rezulta $t_1[C] = t_2[C]$, deci $t_1[AC] = t_2[AC]$.

Din faptul ca r satisface $AC \rightarrow D$ rezulta $t_1[D] = t_2[D]$, deci $t_1[BD] = t_2[BD]$.

Din faptul ca r satisface $BD \rightarrow E$ rezulta ca $t_1[E] = t_2[E]$, deci r satisface $AB \rightarrow E$. In concluzie $\Sigma \models AB \rightarrow E$.

Vrem sa vedem acum daca $\bar{\Sigma} \models_{c.l.} \bar{\sigma}$? Pentru aceasta vom putea proceda astfel: construim tabela cu cele 25 asignari ale variabilelor propositionale a, b, c, d, e , si vom calcula valoarea de asignare pentru toate elementele lui $\bar{\Sigma}$ si pentru $\bar{\sigma}$, si daca in fiecare caz, in care toate elementele lui $\bar{\Sigma}$ sunt 1, rezulta si $\bar{\sigma}$ este 1, atunci vom avea $\bar{\Sigma} \models_{c.l.} \bar{\sigma}$.

Dar putem reduce acest calcul considerand asignarile δ astfel:

1. Daca $\delta(a) = 0$ sau $\delta(b) = 0$, atunci $\delta(\bar{\sigma}) = 1$.
2. Daca $\delta(a) = \delta(b) = 1$, atunci deoarece δ trebuie sa satisfaca $ab \Rightarrow c$, rezulta $\delta(c) = 1$. Cum δ trebuie sa satisfaca $ac \Rightarrow d$, rezulta $\delta(d) = 1$, si la fel δ trebuie sa satisfaca $bd \Rightarrow e$, rezulta $\delta(e) = 1$, deci $\delta(ab \Rightarrow e) = 1$, adica $\delta(\bar{\sigma}) = 1$.

Vom stabili echivalenta intre “consecinta” din universul dependentelor functionale si “consecinta logica” din calculul propozitional.

Teorema 2.1 (de echivalenta). Fie Σ o multime de dependente functionale si σ o dependenta functionala. Fie $\bar{\Sigma}$ multimea de implicatii corespunzatoare lui

Σ si $\bar{\sigma}$ implicatia asociata lui σ . Atunci avem:

σ este consecinta a lui Σ daca si numai daca
 $\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$

$$\Sigma \models \sigma \text{ iff } \bar{\Sigma} \models_{\text{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Conform acestei teoreme problema deciderii daca o dependenta functionala este consecinta a unei multimi de dependente se transforma intr-o problema de a decide daca o implicatie este consecinta logica a unei multimi de implicatii.

Pentru aceasta ultima problema de decizie exista un algoritm eficient, datorat lui Chang.

Dupa propozitiile 1.1, 1.2, putem presupune ca Σ are dependentele cu un singur atribut in partea dreapta , si

la fel σ are în partea dreaptă un singur atribut.

Algoritmul lui Chang:

1. Se consideră cuvinte formate peste $\bar{U} \cup \{\sim, *\}$ astfel:

pentru $a_1 \dots a_m \Rightarrow b \in \bar{\Sigma}$ se consideră cuvantul

$\sim a_1 * \sim a_2 * \dots \sim a_m * b$

Dacă $U = \{A_1, \dots, A_n\}$, atunci $\bar{U} = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Să notăm prin S multimea de cuvinte obținute.

2. Daca $\bar{\sigma}$ are forma: $c_1 \dots c_k \Rightarrow d$, atunci adaugam la S urmatoarele $k + 1$ cuvinte:

c_1

c_2

...

c_k

$\sim d$

Numim o variabila ai “atom” , si \sim ai “atom negat”.

3. Algoritmul cauta un atom X , astfel incat X este un cuvant in S , si exista un cuvant ce incepe cu $\sim X$. Daca exista un astfel de atom, se selecteaza unul arbitrar si se sterge $\sim X$ din fiecare sir ce incepe cu $\sim X$ (eventual si * daca acest caracter * urmeaza in sir).
4. Se continua pasul 3) atat timp cat exista un astfel de atom. Este clar ca algoritmul se opreste intotdeauna si exista 2 situatii:

(a) s-a obtinut sirul vid, notat cu λ sau

(b) nu exista nici un atom X ce satisface cele 2 conditii si nu s-a obtinut sirul vid.

Daca avem (a) atunci $\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$, altfel $\bar{\sigma}$ nu este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$.

Exemplul 2.2 Fie $\bar{\Sigma} = \{ab \Rightarrow c, ac \Rightarrow d, bd \Rightarrow e\}$ si $\bar{\sigma}: ab \Rightarrow e$. Atunci:

$$S = \{\sim a * \sim b * c, \sim a * \sim c * d, \sim b * \sim d * e, a, b, \sim e\}.$$

Putem alege $X = a$, atunci S devine

$$S = \{\sim b * c, \sim c * d, \sim b * \sim d * e, a, b, \sim e\}$$

In continuare putem lua $X = b$ si S devine

$$S = \{c, \sim c * d, \sim d * e, a, b, \sim e\}$$

Fie acum $X = c$, atunci S devine:

$$S = \{c, d, \sim d * e, a, b, \sim e\}$$

Luand acum $X = d$ obtinem:

$$S = \{c, d, e, a, b, \sim e\},$$

Pentru $X = e$, rezulta:

$$S = \{c, d, e, a, b, \lambda\}, \text{ deci } \bar{\Sigma}|_{=_{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Teorema 2.2 (de completitudine a dependentelor). Fie Σ o multime de dependente functionale, σ o dependenta functionala. Atunci avem σ este o consecinta a lui Σ daca si numai daca σ are o demonstratie in Σ utilizand regulile de inferenta A1,A2,A3 (axiomele lui Armstrong).

In notatii, teorema se exprima prin:

$$\Sigma \models_{\sigma} \text{ iff } \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_A} \sigma.$$

Demonstratie. Regulile de inferenta A1,A2,A3 au forma:

(A1) $A_1 \dots A_m \rightarrow A_i, \quad 1 \leq i \leq m$

(A21) $A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r$

-----, $j = 1, r,$

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_j$

(A22)

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_j, j = 1, r$

$A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r$

(A3) $A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_r, B_1 \dots B_r \rightarrow C_1 \dots C_p$

$A_1 \dots A_m \rightarrow C_1 \dots C_p$

Fapt 1: Daca \mathcal{R} este un sistem de reguli de inferenta valide si daca $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} \sigma$, atunci $\Sigma \models \sigma$.

O regula $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

α

se numeste valida daca $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \} \models \alpha$.

Justificarea faptului rezulta prin inductie asupra lungimii demonstratiei. Fie

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h = \sigma$ o demonstratie pentru σ in Σ utilizand regulile \mathcal{R} . Daca

$h = 1$, atunci $\sigma_1 = \sigma$ poate fi in una din situatiile:

- a) $\sigma_1 = \sigma \in \Sigma$, si deci $\Sigma \models \sigma$, sau
- b) exista o regula de forma $\text{-----} \in \mathcal{R}$;

σ

regula fiind valida, rezulta σ dependent triviala

(deci satisfacuta de orice relatie), de unde $\Sigma \models \sigma$.

Presupunem Fapt 1 adevarat pentru demonstratii de lungime mai mica sau egala cu h . Fie o demonstratie a lui σ de lungime $h + 1$: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \sigma_{h+1} = \sigma$.

Pentru σ avem 2 situatii:

c) $\sigma \in \Sigma$, deci $\Sigma \models \sigma$ sau

d) $\exists \sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ik}$

----- $\in \mathcal{R}$, $i_1, \dots, i_k \leq h$.

σ

In cazul d) dupa ipoteza inductiei avem:

$\Sigma \models \sigma_{i_1}, \dots, \Sigma \models \sigma_{i_k}$, si deoarece

regula este valida, avem $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}\} \models \sigma$.

Rezulta atunci $\Sigma \models \sigma$.

Regulile (A1) (A2) (A3) sunt valide, din proprietatile dependentelor functionale.

Deci putem aplica Fapt 1, ceeace implica:

Daca $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}A} \sigma$, atunci $\Sigma \models \sigma$.

Invers: presupunem $\Sigma \models \sigma$. Consideram $\Sigma^+_{\mathcal{R}A}$ (inchiderea lui Σ referitoare la regulile de inferenta $\mathcal{R}A$).

Stim ca:

$$\Sigma^+_{\mathcal{R}A} = \{\sigma_1 | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}A} \sigma_1\}.$$

Trebuie sa aratam ca $\sigma \in \Sigma^+_{\mathcal{R}A}$.

Avem: $\Sigma \subseteq \Sigma^+_{\mathcal{R}A}$.

Dupa teorema lui Armstrong (Teorema 1.1) exista o relatie r_0 ce satisface exact elementele din $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, unde $\mathcal{R}_1 = \{\text{FD1f}, \text{FD2f}, \text{FD3f}\}$.

Dupa consecinta 1.1, avem $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$. Deci relatia r_0 satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$.

Deoarece $\Sigma \subseteq \Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$, rezulta ca r_0 satisface toate dependentele din Σ .

Avand $\Sigma \models \sigma$ obtinem ca r_0 satisface σ . Deoarece r_0 satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$, obtinem:

$\sigma \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$, deci $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_A} \sigma$.

Reguli de inferenta pentru formule.

(similar cu regulile A1,A2, A3).

(A1') $\text{-----}, 1 \leq i \leq m$

$a_1 \dots a_m \Rightarrow a_i$

(A21') $a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_r$

$$\dots, j = 1, r,$$
$$a_1 \dots a_m \Rightarrow b_j$$

(A22') $a_1 \dots a_m \Rightarrow b_j, j = 1, r$

$$a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_r$$

(A3') $a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_r, b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p$

$$a_1 \dots a_m \Rightarrow c_1 \dots c_p$$

Teorema 2.3 (de completitudine implicationala). Fie $\bar{\Sigma}$ o multime de implicatii asociate dependentelor functionale din Σ , $\bar{\sigma}$ implicatia asociata dependentei functionale σ .

Atunci $\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$ daca si

numai daca $\bar{\sigma}$ are o demonstratie in $\bar{\Sigma}$, utilizand regulile de inferenta (A1'),(A21'),(A22'), (A3').

Demonstratie. Regulile $(A1')$, $(A21')$, $(A22')$, $(A3')$ considerate ca reguli in calculul propositional sunt valide, adica orice asignare care face adevarate premizele regulii, va face adevarata si concluzia regulii.

Procedand ca in demonstratia teoremei de completitudine a dependentelor obtinem ca daca $\Sigma \vdash_{\neg\neg} A1', A21', A22', A3' \sigma$, atunci $\Sigma \vDash_{c.l.} \sigma$.

Invers, fie $\Sigma \vDash_{c.l.} \sigma$.

Va trebui sa aratam ca: $\Sigma \vdash_{\neg\neg} A1', A21', A22', A3' \sigma$.

Fie $\bar{\sigma}$: $a_1 \dots a_m \Rightarrow d_1 \dots d_h$.

Sa notam prin:

$$\text{PROV } E = \{e | \Sigma \vdash_{A1', A21', A22', A3'} a_1 \dots a_m \Rightarrow e\}$$

Aplicand regula (A1') obtinem $a_i \in \text{PROV } E$, $1 \leq i \leq m$.

Aratam ca $d_j \in \text{PROV } E$, pentru orice $j = 1, h$.

Presupunem contrariul, deci $\exists j \in \{1, 2, \dots, h\}$, astfel incat $d_j \notin \text{PROV } E$, adica:

$$\Sigma \vdash /-_{A1', A2', A22', A3'} a_1 \dots a_m \Rightarrow d_j .$$

Consideram urmatoarea asignare:

$\delta_0(x) = 1$ daca $x \in \text{PROV E}$ si 0 altfel

Deoarece $a_i \in \text{PROV E}$, rezulta ca $\delta_0(a_i) = 1$, orice $i = 1, m$.

Relatia: $d_j \not\in \text{PROV E}$ implica $\delta_0(d_j) = 0$, deci $\delta_0(\bar{\sigma}) = 0$.

Aratam ca δ_0 satisface toate elementele din $\bar{\Sigma}$.

Fie $b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p \in \bar{\Sigma}$. Avem doua situatii:

1. $b_i \in PROV_E$ pentru orice $i = 1, r$; aceasta inseamna ca $\Sigma |-- A1', A21', A21', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow b_i, i = 1, r$

Aplicand (A22') obtinem:

$$\Sigma |-- A1', A21', A22', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_r.$$

Aceasta relatie impreuna cu $b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p \in \bar{\Sigma}$ si (A3') conduc la:

$$\Sigma |-- A1', A21', A22', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow c_1 \dots c_p.$$

De aici, aplicand (A22') obtinem:

$\Sigma |-- A1', A21', A22', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow c_k, \quad 1 \leq k \leq p,$

ceea ce inseamna ca $c_k \in \text{PROVE}$, orice k , $1 \leq k \leq p$, si dupa definitia lui δ_0 obtinem :

$\delta_0(c_k) = 1, \forall k, 1 \leq k \leq p$, deci $\delta_0(c_1 \dots c_p) = 1$, ceea ce inseamna:

$\delta_0(b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p) = 1.$

2. Exista $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, astfel incat $b_i \not\in \text{PROVE}$.

Aceasta inseamna ca:

$\delta_0(b_i) = 0$, deci $\delta_0(b_1 \dots b_r) = 0$, de unde

$$\delta_0(b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p) = 1.$$

Asignarea δ_0 construită mai sus satisfacă condiția

$\delta_0(\bar{y}) = 1$, orice $\bar{y} \in \bar{\Sigma}$, dar avem:

$\delta_0(\bar{\sigma}) = 0$. Acest lucru contrazice ipoteza $\Sigma \models_{c.l.} \sigma$.

Inseamnă că toate variabilele $d_j \in \text{PROV } E$, $j = 1, h$.

De aici rezulta:

$$\Sigma \vdash A1', A21', A22', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow d_j, j = 1, h$$

Aplicand A22' se obtine :

$\Sigma | \neg A1', A21', A22', A3' \quad a_1 \dots a_m \Rightarrow d_1 \dots d_h$, adica:

$\Sigma | \neg A1', A21', A22', A3' \quad \bar{\sigma}.$

Demonstrarea teoremei de echivalenta.

Teorema 2.1 (de echivalenta). Fie Σ o multime de dependente functionale si σ o dependenta functionala.

Fie $\bar{\Sigma}$ multimea de implicatii corespunzatoare lui

Σ si $\bar{\sigma}$ implicatia asociata lui σ . Atunci avem:

σ este consecinta a lui Σ daca si numai daca

$\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$

$$\Sigma \models \sigma \text{ iff } \bar{\Sigma} \models_{\text{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Demonstratie. Dupa teorema de completitudine a dependentelor avem:

$$\Sigma \models \sigma \text{ iff } \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_A} \sigma$$

Orice demonstratie a lui σ in Σ , utilizand regulile \mathcal{R}_A se poate transforma sintactic intr-o demonstratie a lui $\bar{\sigma}$ in $\bar{\Sigma}$ utilizand regulile A'1,A21',A22',A3' si inlocuind atributele prin variabilele propozitionale respective, semnul " \rightarrow " prin " \Rightarrow " si invers. Deci avem:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_A} \sigma \text{ iff } \bar{\Sigma} \vdash_{A'1, A21', A22', A3'} \bar{\sigma}$$

Dupa teorema de completitudine implicationala
avem:

$$\Sigma \Vdash \neg A_1', A_21', A_22', A_3' \bar{\sigma} \quad \text{iff} \quad \bar{\Sigma} \models_{\text{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Astfel avem:

$$\Sigma \models \sigma \quad \text{iff} \quad \bar{\Sigma} \models_{\text{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Dependente multivaluate

Fie $X, Y \subseteq U$. O dependenta multivaluata este notata sintactic prin $X \rightarrow\rightarrow Y$.

Vom da doua definitii pentru satisfacerea unei dependente multivaluate de catre o relatia r peste U .

Definitia 1. Relatia r peste U satisface dependenta multivaluata $X \rightarrow\rightarrow Y$, daca pentru

orice doua uple $t_1, t_2 \in r$ si $t_1[X] = t_2[X]$, exista
uplele t_3 si t_4 din r , astfel incat:

- (i) $t_3[X] = t_1[X], t_3[Y] = t_1[Y]$ si $t_3[Z] = t_2[Z]$;
- (ii) $t_4[X] = t_2[X], t_4[Y] = t_2[Y]$ si $t_4[Z] = t_1[Z]$,

unde $Z = U - XY$.

In definitia 1 este suficient sa cerem existenta
lui t_3 sau t_4 , celalalt uplu rezulta considerand
uplele in ordinea t_2, t_1 .

Pentru $t \in r$ avem $t[X] \in r[X]$. Notam prin $F_Y(t[X]) = \{t'[Y]/t' \in r, t'[X] = t[X]\}$. Aceasta se numeste multimea Y -valorilor asociate lui $t[X]$.

Exemplul 1. Fie relatia r data astfel:

A B C D

a₁ b₁ c₁ d₁

a₁ b₂ c₂ d₂

a₁ b₁ c₁ d₂

a₁ b₂ c₂ d₁

$a_2 \ b_3 \ c_1 \ d_1$

$a_2 \ b_3 \ c_1 \ d_2$

Se verifica faptul ca r satisface $A \rightarrow\!\!\! \rightarrow BC$
conform definitiei 1.

Pentru $t \in r$, definim:

$$M_Y(t[XZ]) = \{t'[Y]/t' \in r, t'[XZ] = t[XZ]\}.$$

Definitia 2. Relatia r peste U satisface dependenta multivaluata $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$, daca pentru orice $t_1, t_2 \in r$, astfel incat $t_1[X] = t_2[X]$ avem:

$$M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ]).$$

Propozitia 1. Definitiile 1 si 2 sunt echivalente.

Demonstratie. Fie r ce satisface $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ dupa definitia 1 si fie $t_1, t_2 \in r$, astfel incat $t_1[X] = t_2[X]$. Fie $t'_1[Y] \in M_Y(t_1[XZ])$. Sa aratam ca

$t'_1[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$.

Avem $t'_1 \in r$ si $t'_1[XZ] = t_1[XZ]$. Rezulta $t'_1[X] = t_1[X] = t_2[X]$. Deoarece r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ dupa definitia 1 si $t'_1[X] = t_2[X]$, exista $t_3 \in r$, astfel incat: $t_3[X] = t'_1[X]$, $t_3[Y] = t'_1[Y]$ si $t_3[Z] = t_2[Z]$.

De aici $t_3[XZ] = t_2[XZ]$, de unde

$t_3[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$. Deoarece $t'_1[Y] = t_3[Y]$, obtinem $t'_1[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$.

Rationalamentul fiind simetric rezulta si invers,

adica $t'_2[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$ implica:

$t'_2[Y] \in M_Y(t_1[XZ]).$

Am aratat:

$M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ]),$ adica r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ dupa definitia 2.

Presupunem acum ca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ dupa definitia 2 si fie $t_1, t_2 \in r,$ astfel incat $t_1[X] = t_2[X].$

Din $M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$ si faptul ca $t_1[Y] \in M_Y(t_1[XZ])$ obtinem $t_1[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$.

Deci $\exists t'_2 \in r$, astfel incat $t_1[Y] = t'_2[Y]$ si $t'_2[XZ] = t_2[XZ]$. Pentru $t'_2 \in r$ avem: $t'_2[X] = t_2[X] = t_1[X]$, $t'_2[Y] = t_1[Y]$ si $t'_2[Z] = t_2[Z]$.

Similar obtinem $t'_1 \in r$, astfel incat: $t'_1[X] = t_2[X]$, $t'_1[Y] = t_2[Y]$ si $t'_1[Z] = t_1[Z]$. Am aratat ca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ dupa definitia 1.

Observatia 1. Daca r satisface dependenta
functională $X \rightarrow Y$, atunci
pentru orice $t \in r$, avem $M_Y(t[XZ]) = \{t[Y]\}$.

Observatia 2. Daca r satisface dependenta
functională $X \rightarrow Y$, atunci r satisface
dependenta multivaluata $X \rightarrow\rightarrow Y$.

Observatia 3. Daca r satisface dependenta multivaluata $X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Y$, atunci putem defini o functie $\psi : r[X] \rightarrow P(r[Y])$, prin
 $\psi(t[X]) = M_Y(t[XZ])$, $\forall t \in r$. Cand r satisface $X \rightarrow Y$, atunci $\psi : r[X] \rightarrow r[Y]$.

Proprietati ale dependentelor multivaluate:

Propozitia 2. MVD0 (Complementariere).

Fie $X, Y, Z \subseteq U$, astfel incat $XY Z = U$ si $Y \cap Z \subseteq X$. Daca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$, atunci r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$.

MVD1 (Reflexivitate). Daca $Y \subseteq X$, atunci orice relatie r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$.

MVD2 (Extensie). Fie $Z \subseteq W$ si r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y$. Atunci r satisface $XW \rightarrow\!\!\rightarrow YZ$.

MVD3 (Tranzitivitate). Daca r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y$ si $Y \rightarrow\!\!\rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Z - Y$.

MVD4 (Pseudotranzitivitate). Daca r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y$, si $YW \rightarrow\!\!\rightarrow Z$, atunci r satisface $XW \rightarrow\!\!\rightarrow Z - YW$.

MVD5 (Uniune). Daca r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y$, si $X \rightarrow\!\!\rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow YZ$.

MVD6 (Descompunere). Daca r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y$, si $X \rightarrow\!\!\rightarrow Z$, atunci
 r satisface $X \rightarrow\!\!\rightarrow Y \cap Z, X \rightarrow\!\!\rightarrow Y - Z, X \rightarrow\!\!\rightarrow Z - Y$.

Deoarece vom lucra cu multimi de dependente,
ce pot fi functionale sau multivaluate, vom avea
nevoie de asa numitele proprietati mixte.

FD-MVD1. Daca r satisface $X \rightarrow Y$, atunci r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$.

FD-MVD2. Daca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$ si $Y \rightarrow Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \emptyset$, atunci r satisface $X \rightarrow Z'$.

FD-MVD3. Daca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ si $XY \rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow Z - Y$.

Demonstrarea lui MVDO:

Pentru $X, Y, Z \subseteq U$ vom considera, în general,
urmatoarea diagramă:

U reprezintă intregul patrat, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 5, 6\}$, $Z = \{3, 4, 6, 7\}$, $U - XYZ = \{8\}$.

In conditiile proprietatii MVD0 ($XYZ = U$ si $Y \cap Z \subseteq X$), avem $8 = \emptyset$ si $6 = \emptyset$.

Fie $T1 = U - XY = \{7\}$, $T2 = U - XZ = \{5\}$.

Presupunem ca r satisface $X \rightarrow Y$. Aceasta inseamna ca pentru orice $t, t' \in r$ cu $t[X] = t'[X]$, exista t_3 si $t_4 \in r$, astfel incat $t_3[X] = t[X]$, $t_3[Y] = t[Y]$, $t_3[T1] = t'[T1]$ si $t_4[X] = t'[X]$, $t_4[Y] = t'[Y]$, $t_4[T1] = t[T1]$.

Sa notam prin t_i respectiv t'_i , proiectia lui t respective t' , pe domeniul i . Atunci pentru t avem:

$$X \quad Y \quad T_1$$

$$t \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_2, t_3, t_5), (t_7))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), (t'_2, t'_3, t'_5), (t'_7))$$

$$X \quad Z \quad T_2$$

$$t \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_3, t_4, t_7), (t_5))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), (t'_3, t'_4, t'_7), (t'_5))$$

Din $t[X] = t'[X]$ rezulta $t_i = t'_i$, $i = 1, 4$.

Aplicam faptul ca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$. Rezulta ca exista $t'' \in r$, astfel incat:

$$\begin{array}{ccc} X & Y & T1 \end{array}$$

$$t'' \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_2, t_3, t_5), (t'_7)).$$

Acest t'' proiectat pe $X, Z, T2$ da:

$$t'' \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_3, t_4, t'_7), (t_5)) =$$

$((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), (t'_3, t'_4, t'_7), (t_5))$

Avem deci satisfacuta definitia 1 pentru t' si t .

Multimile Y si Z intervin simetric in MVD0, deci rezulta si invers: daca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$.

Demonstrarea proprietatii MVD1:

$Y = \{1\}$, $X = \{1, 2\}$, $Z = U - XY = \{3\}$.

Fie $t, t' \in r$, astfel incat $t[X] = t'[X]$, adica
 $t_i = t'_i$, $i = 1, 2$.

X Y Z

$$t \rightarrow ((t_1, t_2), (t_1), (t_3))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1, t'_2), (t'_1), (t'_3))$$

consideram $t'' = t'$. Avem:

$$t'' \rightarrow ((t'_1, t'_2), (t'_1), (t'_3)) = ((t_1, t_2), (t_1), (t_3))$$

Demonstrarea proprietatii MVD2:

Avem $Z \subseteq W$ si r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$. Aratam ca r satisface $XW \rightarrow\rightarrow YZ$.

$$X = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$Y = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$$

$$W = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$Z = \{5, 7, 9, 10\}$$

$$T_1 = U - XY = \{10, 11, 12\}$$

$$T_2 = U - XWYZ = \{12\}.$$

Fie $t, t' \in r$, astfel incat $t[XW] = t'[XW]$, adica $t_i = t'_i$, $i = 1, 3, 4 - 11$.

$$XW$$

$$YZ$$

$$T_2$$

$$t \rightarrow ((t_1, t_3, t_4 - t_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_{10}), (t_{12}))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1, t'_3, t'_4 - t'_{11}), (t'_2 - t'_5, t'_7 - t'_{10}, (t'_{12})),$$

unde $t_i - t_j$ noteaza toate componentele

incepand cu t_i si terminand cu t_j , ($i < j$).

Proiectam acum t si t' pe tripla $(X, Y, T1)$:

$$t \rightarrow ((t_1, t_3, t_4 - t_7), (t_2 - t_5, t_8, t_9), (t_{10} - t_{12}))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1, t'_3, t'_4 - t'_7), (t'_2 - t'_5, t'_8, t'_9), (t'_{10} - t'_{12})).$$

Deoarece avem $t[X]=t'[X]$ si r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$,

rezulta ca exista $t'' \in r$, astfel incat:

$t'' \rightarrow ((t_1, t_3, t_4 - t_7), (t_2 - t_5, t_8, t_9), (t'_{10} - t'_{12}))$ pe
 $X, Y, T1.$

Proiectand acest t'' pe $XW, YZ, T2$, obtinem:

$$\begin{aligned} t'' &\rightarrow ((t_1, t_3, t_4 - t_9, t'_{10}, t'_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_9, t'_{10}), (t'_{12})) \\ &= ((t_1, t_3, t_4 - t_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_{10}), (t'_{12})), \\ &\text{deoarece } t_i = t'_i, i = 1, 3, 4 - 11. \end{aligned}$$

Pentru t si t' am obtinut t'' care satisface
definitia1.

Demonstrarea proprietatii MVD3:

Daca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$, si $Y \rightarrow\rightarrow Z$, atunci r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z - Y$.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$Z = \{3, 4, 6, 7\},$$

$$Z - Y = \{4, 7\}$$

$$T_1 = U - XY = \{7, 8\}$$

$$T_2 = U - Y Z = \{1, 8\}$$

$$T_3 = U - X(Z - Y) = \{5, 6, 8\}$$

Fie $t, t' \in r$, astfel incat $t[X] = t'[X]$, adica $t_i = t'_i$,

$$i = 1, 4$$

$$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_4, t_7), (t_5, t_6, t_8))$$

$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_4, t'_7), (t'_5, t'_6, t'_8))$ pe $X, Z - Y, T3$

Consideram t si t' proiectate pe $X, Y, T1$:

$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t_7, t_8))$

$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_2, t'_3, t'_5, t'_6), (t'_7, t'_8))$

Deoarece r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$, rezulta ca exista

$t'' \in r$, astfel incat:

$t'' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t'_7, t'_8))$ pe $X, Y, T1$.

Consideram acum t si t'' pe $Y, Z, T2$.

$t \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t_7), (t_1, t_8))$

$t'' \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t'_7), (t_1, t'_8))$

r satisface $Y \rightarrow\rightarrow Z$. Pentru t'' si t exista $t''' \in r$, astfel incat

$t''' \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t'_7), (t_1, t_8)).$

Considerand t''' proiectat pe $X, Z - Y$ si $T3$

obtinem:

$t''' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_4, t'_7), (t_5, t_6, t_8)) =$

$((t'_1 - t'_4), (t'_4, t'_7), (t_5, t_6, t_8))$

In concluzie, pentru t' si $t \in r$ cu $t'[X] = t[X]$ am gasit t''' ce satisface definitia 1.

Am aratat FD-MVD1. Sa aratam acum FD - MVD2:

Fie r care satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$ si $Y \rightarrow Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \emptyset$.

Sa aratam ca r satisface $X \rightarrow Z'$.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{2, 5\}$$

$$Z = \{3, 4, 6, 7\}$$

$$Z' = \{4, 6\}$$

$$T1 = U - XZ = \{5, 8\}.$$

Fie $t, t' \in r$, astfel incat : $t[X] = t'[X]$, deci

$t_i = t'_i$, $i = 1, 4$. Sa aratam ca $t[Z] = t'[Z']$, adica
 $t_6 = t'_6$.

Consideram proiectiile uplelor t si t' pe $X, Z, T1$:

$$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_3, t_4, t_6, t_7), (t_5, t_8))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_3, t'_4, t'_6, t'_7), (t'_5, t'_8))$$

Deoarece r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$, exista $t'' \in r$, astfel incat proiectiile lui t'' pe $X, Z, T1$ sunt :

$$t'' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_3, t_4, t_6, t_7), (t'_5, t'_8))$$

Avem $t''_2 = t_2 = t'_2$ si $t''_5 = t'_5$, deci $t''[Y] = t'[Y]$.

Deoarece r satisfacă $Y \rightarrow Z'$, obținem $t''[Z'] = t'[Z']$, adică $t''_6 = t'_6$, dar $t''_6 = t_6$. Deci $t_6 = t'_6$.

Să aratăm acum FD-MVD3:

Presupunem că r satisfacă $X \twoheadrightarrow Y$ și $XY \rightarrow Z$.

Aratăm că r satisfacă

$X \rightarrow Z - Y$.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$Z = \{3, 4, 6, 7\}$$

$$Z - Y = \{4, 7\}$$

$$T1 = U - XY = \{7, 8\}.$$

Fie $t, t' \in r$, astfel incat $t[X] = t'[X]$, adica

$t_i = t'_i$, $i = 1, 4$. Sa aratam ca

$t[Z - Y] = t'[Z - Y]$, adica $t_7 = t'_7$.

(Avem $t_4 = t'_4$).

Proiectam t si t' pe X, Y si $T1$:

$$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t_7, t_8))$$

$$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_2, t'_3, t'_5, t'_6), (t'_7, t'_8))$$

Deoarece r satisface $X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Y$, există $t'' \in r$, astfel încât proiecțiile lui t'' pe X , Y și $T1$ sunt:
 $t'' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t'_7, t'_8))$

Avem $t''_i = t_i$, $i = 1, 6$.

Deoarece r satisface $XY \rightarrow Z$, rezulta $t''[Z] = t[Z]$, de unde $t''_7 = t_7$. Dar $t''_7 = t'_7$, deci $t'_7 = t_7$.

Pentru fiecare proprietate a dependentelor multivolate asociem o regula formală prin aceeași metodă ca la dependentele funktionale:

MVD0f: $XY \cdot Z = U$ și $Y \cap Z \subseteq X$, $X \rightarrow\rightarrow Y$

$$X \rightarrow\rightarrow Z$$

MVD1f: $Y \subseteq X$

$$X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$$

MVD2f: $Z \subseteq W, X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$

$$XW \rightarrow\!\!\!\rightarrow YZ$$

MVD3f: $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y, Y \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z$

$$X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z - Y$$

MVD4f: $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y, YW \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z$

$$XW \rightarrow Z - YW$$

MVD5f: $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y, X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z$

$$X \rightarrow\!\!\!\rightarrow YZ$$

MVD6f: $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y, X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z$

$$X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y \cap Z, X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y - Z, X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Z - Y$$

FD-MVD1f: $X \rightarrow Y$

$X \rightarrow\rightarrow Y$

FD-MVD2f: $X \rightarrow\rightarrow Z, Y \rightarrow Z', Z' \subseteq Z, Y \cap Z = \emptyset$

$X \rightarrow Z'$

FD-MVD3f: $X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Y, XY \rightarrow Z$

$$X \rightarrow Z - Y$$

Propozitia 3. Regulile de inferenta enunțate mai sus sunt valide.

Demonstratie. Rezulta imediat din propozitia 2.

Propozitia 4. Fie \mathcal{R} o multime de reguli valide si o regula: $\sigma_1, \dots, \sigma_k$

 σ ,

astfel incat $\{ \sigma_1, \dots, \sigma_k \} \vdash_{\mathcal{R}} \sigma$, atunci si regula este valida.

Afirmatia rezulta usor prin inductie dupa lungimea demonstratiei in $\{ \sigma_1, \dots, \sigma_k \}$ utilizand \mathcal{R} . Faptul ca $\{ \sigma_1, \dots, \sigma_k \} \vdash_{\mathcal{R}} \sigma$ il vom numi: “regula se exprima cu ajutorul regulilor de inferenta din \mathcal{R} ”. In continuare, vom

considera în afara de regulile de inferenta de mai sus și regulile de inferenta FD1f, FD2f, FD3f pentru dependentele funktionale.

Propozitia 5 Fie $\mathcal{R}_{FM} = \{ FD1f-FD3f, MVD0f-MVD3f, FD-MVD1f- FD-MVD3f \}$. Avem:

FD-MVD3f se exprima prin celealte reguli din \mathcal{R}_{FM} și FD-MVD2f se exprima prin celealte reguli din \mathcal{R}_{FM} .

Demonstratie. Fie $\sigma_1: X \rightarrow Y$ si $\sigma_2: XY \rightarrow Z$.

Aplicam la prima MVD0f obtinem

$\sigma_3: X \rightarrow U - XY$. Din $XY \rightarrow Z$ si $Z \rightarrow Z - XY$

(obtinuta din FD1f) prin FD3f rezulta

$\sigma_4: XY \rightarrow Z - XY$. Deoarece $Z - XY \subseteq U - XY$

si $XY \cap (U - XY) = \emptyset$, putem aplica FD-MVD2f

pentru σ_3 si σ_4 si obtinem: $\sigma_5: X \rightarrow Z - XY$.

Dupa FD1f avem $\sigma_6: X \rightarrow X \cap Z - Y$.

Aplicand FD5f care se exprima cu ajutorul regulilor FD1f-FD3f (Propozitia 1.3 Cap. II) rezulta $\sigma_7 : X \rightarrow Z - Y$, adica FD-MVD3f se exprima prin celelalte reguli din \mathcal{R}_{FM} .

Fie date $\sigma_1 : X \rightarrow\rightarrow Z$, $\sigma_2 : Y \rightarrow Z'$ cu conditiile $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \emptyset$.

Aplicand MVD0f lui σ_1 obtinem:

$\sigma_3 : X \rightarrow\rightarrow U - XZ$.

Deoarece $Y \subseteq X(U - XZ)$ prin FD1f obtinem:

$\sigma_4: X(U - XZ) \rightarrow Y$. Aplicand FD3f pentru σ_4 si σ_2 se obtine $\sigma_5: X(U - XZ) \rightarrow Z'$.

Putem aplica regula FD-MVD3f pentru σ_3 si σ_5 , ceea ce conduce la $\sigma_6: X \rightarrow Z' - (U - XZ)$.

Dar $Z' - (U - XZ) = Z'$. Deci $\sigma_6: X \rightarrow Z'$.

In concluzie, regula FD-MVD2f se exprima prin celelalte reguli din \mathcal{R}_{FM} .

Propozitia 6. Regulile MVD4f-MVD6f se exprima cu ajutorul regulilor MVD0f-MVD3f.

Demonstratie. Fie $\sigma_1: X \rightarrow Y$ si $\sigma_2: YW \rightarrow Z$.

Aplicam pentru σ_1 si $W \subseteq W$ regula MVD2f si obtinem: $\sigma_3: XW \rightarrow YW$.

Pentru σ_3 si σ_2 aplicam MVD3f si se obtine:

$\sigma_4: XW \rightarrow Z - YW$.

Deci $\{\sigma_1, \sigma_2\} \vdash_{\{MVD2f, MVD3f\}} \sigma_4$

(regula pentru pseudotranzitivitate).

Consideram acum MVD5f. Fie $\sigma_1: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Y$ si $\sigma_2: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Z$.

Din σ_1 , $Z \subseteq Z$ si MVD2f se obtine

$\sigma_3: XZ \rightarrow\!\!\! \rightarrow YZ$. Aplicand lui σ_3 regula MVD0f se obtine

$\sigma_4: XZ \rightarrow\!\!\! \rightarrow (U - XYZ)$. Din σ_2 , $X \subseteq X$ si MVD2f rezulta $\sigma_5: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow XZ$. Din σ_5 , σ_4 si regula MVD3f rezulta $\sigma_6: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow U - XYZ$.

Aplicand pentru σ_6 regula MVD0f rezulta $\sigma_7: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow YZ$.

Fie $\sigma_1: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Y$ si $\sigma_2: X \rightarrow\!\!\! \rightarrow Z$.

Din $X \rightarrow\!\!\! \rightarrow X$ (reflexivitate)

si σ_1 prin MVD3f obtinem $\sigma_3 : X \rightarrow Y - X$.

Aplicand lui σ_3 regula MVD0f obtinem

$\sigma_4 : X \rightarrow U - XY$.

Din $X \rightarrow X$ si $X \rightarrow Z$ prin MVD3f obtinem:

$\sigma_5 : X \rightarrow Z - X$. Aplicand acesteia MVD0f
obtinem:

$\sigma_6 : X \rightarrow U - XZ$. Aplicand acum MVD4f
(reuniunea) pentru σ_4 si σ_6 obtinem:

$\sigma_7: X \rightarrow (U - XY)(U - XZ)$. Aplicam acum MVD0f pentru σ_7 , vom avea:

$\sigma_8: X \rightarrow Y \cap Z - X$. Prin MVD1f avem

$\sigma_9: X \rightarrow X \cap Y \cap Z$.

Prin reuniune (MVD4f) din σ_8 si σ_9 se obtine

$\sigma_{10}: X \rightarrow Y \cap Z$.

Astfel, pornind de la σ_1 si σ_2 si aplicand regulile MVD0f-MVD3f se obtine σ_{10} .

Sa aratam acum cea de a doua parte a lui MVD6f. Pornim de la $\sigma_1: X \rightarrow Y$ si $\sigma_2 : X \rightarrow Z$. Aplicand MVD5f se obtine $X \rightarrow YZ$.

De aici, prin MVD0f, se obtine:

$\sigma_3: X \rightarrow U - XYZ$. Aplicam MVD5f pentru σ_2 si σ_3 ceea ce produce:

$\sigma_4: X \rightarrow Z(U - XYZ)$. Pentru σ_4 aplicam MVD0f, ceea ce conduce la

$\sigma_5 : X \rightarrow Y - XZ$. Prin reflexivitate avem

$\sigma_6 : X \rightarrow X \cap Y - Z$. Prin MVD5f din σ_5 si σ_6 se obtine: $\sigma_7 : X \rightarrow Y - Z$. In mod similar, se obtine $X \rightarrow Z - Y$ (schimband in fond Y cu Z peste tot).

Teorema 1. Fie Σ o multime de dependente
functionale sau multivaluate si X o submultime
de atribute. Atunci exista o partitie a lui $U - X$
notate prin $\{Y_1, \dots, Y_k\}$, astfel incat pentru $Z \subseteq U - X$ avem $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Z$ iff Z este reuniunea
unui numar de multimi din partitia $\{Y_1, \dots, Y_k\}$.

Demonstratie. Construim partitia notata P,
astfel: initial consideram in P numai $U - X$. Fie
P obtinuta la un moment dat avand elementele
 W_1, \dots, W_n .

Presupunem ca $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow W_i$, pentru orice $i = 1, n$ (initial $\Sigma \vdash X \rightarrow\rightarrow U - X$ dupa MVD0f si
MVD1f).

Fie $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Z$ si $Z \subseteq U - X$ si Z nu este reuniune de multimi W_i .

Deoarece P este partitie pentru $U - X$, rezulta ca exista W_i din P , astfel

incat $W_i \cap Z \neq \emptyset$ si $W_i - Z \neq \emptyset$. Pentru fiecare astfel de W_i din P inlocuim in P pe W_i cu $W_i \cap Z$ si $W_i - Z$. Deoarece $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Z$ si dupa

ipoteza inductiei $\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow W_i$, aplicand

MVD6f se obtine $\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow W_i \cap Z$

si $\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow W_i - Z$.

Altfel spus, noua partitie satisface aceeasi proprietate ca vechea partitie.

Deoarece U este finita si multimea dependentelor functionale sau multivaluate

este finita, rezulta ca algoritmul de mai sus este finit. (Numarul partitiilor lui $U - X$ este de asemenea finit).

Fie $P = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ partitia finala obtinuta.

Rezulta prin inductie

dupa pasii folositi in constructia lui P ca:

$$\sum |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Y_i, i = 1, k.$$

Daca $Z \subseteq U - X$ este reuniune de Y_i , adica $Z = Y_{i1} \cup \dots \cup Y_{ih}$, aplicand MVD5f se obtine
 $\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow Z$.

Invers. Pentru $Z \subseteq U - X$, daca $\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow Z$, atunci Z este reuniune de Y_i , pentru ca altfel s-ar putea rafina partitia P , ceea ce este o contradictie.

Definitia 3. Pentru Σ o multime de dependente
functionale sau multivaluate si X o submultime
de atribute, numim baza de dependenta pentru
 X cu privire la Σ , partitia $B(\Sigma, X) = \{\{A_1\} \dots \{A_h\},$
 $Y_1, \dots, Y_k\}$, unde
 $X = A_1 \dots A_h$, iar $Y_1 \dots Y_k$ este partitia
construita in teorema 1.

Observatia 4. Avem $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Z$ iff Z este o reuniune de elemente din partitia $B(\Sigma, X)$.

In adevar, daca Z este reuniune de elemente din $B(\Sigma, X)$, atunci fie

$$Z = A_{i1} \cup \dots \cup A_{it} \cup Y_{j1} \cup \dots \cup Y_{jl}.$$

Avem : $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow A_{ip}$, $p = 1, t$ dupa

MVD1f si $\Sigma \dashv_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow Y_{jq}$, $q = 1, l$ dupa teorema 1.

Aplicand acestora MVD5f se obtine

$$\Sigma |--_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow Z.$$

Invers, presupunem că avem $\Sigma | \mathcal{R} FM$

$X \rightarrow\rightarrow Z$. Fie $Z = X_1 \cup Z_1$,

unde $X_1 \subseteq X$ și $Z_1 \subseteq U - X$. ($X_1 \cap Z_1 = \emptyset$).

După MVD6f rezulta

$\Sigma | \mathcal{R}_{FM} X \rightarrow\rightarrow Z_1$. De aici după teorema 1,

$$Z_1 = Y_{j_1} \cup \dots \cup Y_{j_l}.$$

Daca $X_1 = A_{i_1} \dots A_{i_t}$, atunci Z este reuniunea elementelor $A_{i_1} \dots A_{i_t}$, $Y_{j_1} \dots Y_{j_l}$ din $B(\Sigma, X)$.

Observatia 5. Fie $X_\Sigma = \{A | \Sigma | \mathcal{R}_{FM} \ X \rightarrow A\}$.

Atunci pentru orice $A \in X^* \Sigma$ avem $\{A\} \in B(\Sigma, X)$.

In adevar, pentru $A \in X^* \Sigma$ dupa FD-MVD1f, obtinem $\Sigma | \mathcal{R}_{FM} \ X \rightarrow A$ si aplicand teorema 1, rezulta $\{A\} \in B(\Sigma, X)$.

1 Studiul dependentelor functionale si multivariate utilizand calculul propozitional

Pentru fiecare atribut $A \in U$ asociem o variabila propozitională notată a . Pentru o dependență funcțională $\sigma: A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_h$ asociem

formula (numita implicatie) $\sigma : a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_h$ (ca in cazul studiului dependentelor functionale, utilizand calculul propozitional, capitolul II, §2).

Daca $\sigma : A_1 \dots A_m \rightarrow B_1 \dots B_h$ este o dependenta multivaluata si $U = A_1 \dots A_m B_1 \dots B_h = C_1 \dots C_p$, atunci formula asociata lui σ va fi

$\sigma: a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_h + c_1 \dots c_p$.

Semnul + noteaza disjunctia logica.

Daca $\sigma : X \rightarrow Y$, atunci $__$ se noteaza si prin

$x \Rightarrow y$. Daca $\sigma : X \rightarrow\rightarrow Y$,

atunci $__$ se noteaza si prin $x \Rightarrow\Rightarrow y$.

Multimile X , Y si $Z = U - XY$ pot fi vide. Facem
conventia ca pentru multimea vida \emptyset , formula

asociata are valoarea true (conjunctia unei multimi vide de variabile propozitionale este true).

Propozitia 1.1 $x \Rightarrow y$ este true iff $x \Rightarrow y - x$ este true.

Demonstratie. Daca $X = A_1 \dots A_m$, $Y = B_1 \dots B_h$ si $Z = U - XY = C_1 \dots C_p$, atunci $x \Rightarrow y$ este $a_1 \dots a_m \Rightarrow b_1 \dots b_h + c_1 \dots c_p$.

Fie $Y - X = B_1 \dots B_t$ si $Y \cap X = B_{t+1} \dots B_h$.

Daca δ este o asignare, astfel incat

$\delta(x \Rightarrow y) = \text{true}$, atunci putem avea:

a) exista i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, astfel incat $\delta(a_i) = \text{false}$.

In acest caz $\delta(x \Rightarrow y - x) = \text{true}$.

b) $\forall i$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\delta(a_i) = \text{true}$.

De aici $\delta(a_1 \dots a_m) = \text{true}$.

Rezulta $\delta(b_1 \dots b_h) = \text{true}$ sau $\delta(c_1 \dots c_p) = \text{true}$.

b1) $\delta(b_1 \dots b_h) = \text{true}$ implica $\delta(b_1 \dots b_t) = \text{true}$, deci $\delta(x \Rightarrow (y - x) + c_1 \dots c_p) = \text{true}$.

b2) $\delta(c_1 \dots c_p) = \text{true}$ atunci $\delta(x \Rightarrow y - x) = \text{true}$.

Invers rezulta similar.

Pentru simplitatea scrierii vom considera
valoarea de adevar true notata
prin 1, iar false prin 0.

Ca si in cazul dependentelor functionale,
intentia noastra este de a stabili o legatura intre
notiunea de consecinta din domeniul
dependentelor

functionale si multivaluate si notiunea de consecinta logica din calculul propozitional.

Exemplul 1.1 Fie $U = \{A, B, C, D\}$, si $\Sigma = \{A \rightarrow A, B, C \rightarrow B\}$ si

$\sigma: A \rightarrow B$. Atunci $_ : a \Rightarrow b$,

$\Sigma = \{a \Rightarrow b + cd, c \Rightarrow b\}$.

Aratam ca $\Sigma \models _$. In adevar, fie r o relatie ce satisface dependentele

$A \rightarrow\!\!> B$ si $C \rightarrow B$. Sa aratam ca r satisface $A \rightarrow\!\!> B$. Fie $t_1, t_2 \in r$ cu $t_1[A] = t_2[A]$ si fie
 $t_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ si $t_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$.

Deoarece r satisface $A \rightarrow\!\!> B$, rezulta ca exista
 $t_3, t_4 \in r$, astfel incat $t_3 = (a_1, b_1, c_2, d_2)$
si $t_4 = (a_1, b_2, c_1, d_1)$. Deoarece $t_1, t_4 \in r$ si r
satisfac $C \rightarrow B$, rezulta ca

$b_1 = b_2$, adica $t_1[B] = t_2[B]$, deci r satisface $A \rightarrow$

B. Aratam acum ca $\Sigma \models_{c.l.}$.

Fie δ o asignare, astfel incat $\delta(a \Rightarrow b + cd) = 1$
si $\delta(c \Rightarrow b) = 1$.

Sa aratam ca $\delta(a \Rightarrow b) = 1$.

Daca $\delta(a) = 0$, atunci am terminat.

Daca $\delta(a) = 1$, atunci $\delta(b+cd) = 1$, deci $\delta(b) = 1$
sau $\delta(cd) = 1$; in cazul $\delta(b) = 1$ am terminat.

In cazul $\delta(cd) = 1$ rezulta $\delta(c) = 1$ si cu $\delta(c \Rightarrow b) = 1$ se obtine $\delta(b) = 1$, deci iarasi $\delta(a \Rightarrow b) = 1$.

Teorema 1.1 Teorema de echivalenta.

Fie Σ o multime de dependente

functionale sau multivaluate si σ o dependenta
functională sau multivaluată.

Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) σ este o consecinta a lui Σ .

- b) σ este o consecinta a lui Σ pe multimea relatiilor cu 2 uple.
- c) este consecinta logica a lui Σ .

Vom da intai o demonstratie sintactica a teoremei de echivalenta. Pentru aceasta vom considera reguli de inferenta pentru implicatii ce se construiesc

pornind de la regulile de inferenta din $\mathcal{RFM} = \{\text{FD1f-FD3f, MVD0f-MVD3f, FD-MVD1f-FD-MVD3f}\}$

In capitolul II am considerat regulile de inferenta A1', A2', A3' pentru implicatii din calculul propositional, reguli ce corespund axiomelor lui Armstrong.

Enuntam regulile de inferenta asociate celor din
 $\mathcal{R}FM$:

FD1': $y \subseteq x$

$x \Rightarrow y$

$y \subseteq x$ noteaza faptul ca orice variabila ce apare
in y , apare de asemenea in x .

FD2': $x \Rightarrow y, z \subseteq w$

 $xw \Rightarrow yz$ $\text{FD3': } x \Rightarrow y, y \Rightarrow z$

 $x \Rightarrow z$ $\text{MVD0': } xyz = u, y \cap z \subseteq x, x \Rightarrow\Rightarrow y$

 $x \Rightarrow\Rightarrow z$

u este conjunctia tuturor variabilelor asociate lui U .

MVD1': $y \subseteq x$

$x \Rightarrow\Rightarrow y$

MVD2': $z \subseteq w, x \Rightarrow\Rightarrow y$

$xw \Rightarrow\Rightarrow yz$

MVD3': $x \Rightarrow\Rightarrow y, y \Rightarrow\Rightarrow z$

$x \Rightarrow\Rightarrow z - y$

FD-MVD1': $x \Rightarrow y$

$x \Rightarrow\Rightarrow y$

FD-MVD2': $x \Rightarrow\Rightarrow z, y \Rightarrow z', z' \subseteq z, y \cap z = \emptyset$

$$x \Rightarrow z'$$

FD-MVD3': $x \Rightarrow\Rightarrow y$, $xy \Rightarrow z$

$$x \Rightarrow z - y$$

Observatia 1.2 Deoarece sistemul de reguli
 $\{A1', A2', A3'\}$ este valid si $\{A1', A2', A3'\}$ este
echivalent cu $\{FD1', FD2', FD3'\}$ (in virtutea

faptului ca $\{A_1, A_2, A_3\}$ este echivalent cu $\{FD_{1f}, FD_{2f}, FD_{3f}\}$ si $\Sigma \dashv \vdash \{FD_{1f}, FD_{3f}\} \sigma$ iff $\Sigma \dashv \vdash |_{\{A_1, A_2, A_3\}} \sigma$) rezulta ca FD'_1, FD'_2, FD'_3 sunt valide. Aceasta afirmatie rezulta desigur si direct.

Observatia 1.3 In virtutea propozitiei 5 ne vom dispensa de una din

regulile FD-MVD2' sau FD-MVD3'. Vom renunta la ultima.

Lema 1.4 Regulile de inferenta FD1'-FD3', MVD0'-MVD3', FD-MVD1',FD-MVD2' sunt valide. Fie $\mathcal{R}FM'$ multimea acestor reguli.
Demonstratie. Primele 3 sunt valide dupa observatia 1.2.

MVD0' este valida: Consideram reprezentarea
multimilor de variabile
din $x, y, z, u = xy, u = xz$:

Din ipotezele respective se obtine: $6 = \emptyset$ si $8 = \emptyset$.

Fie $t_1 = u - xy$ si $t_2 = u - xz$.

Sa notam prin i conjunctia variabilelor din domeniul i , $i = 1, 5, 7$.

Formula $x \Rightarrow\Rightarrow y$ se scrie astfel: $1\ 2\ 3\ 4 \Rightarrow 2\ 3\ 5 + 7$, iar $x \Rightarrow\Rightarrow z$ devine $1\ 2\ 3\ 4 \Rightarrow 3\ 4\ 7 + 5$.

Fie δ o asignare astfel incat $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow y) = 1$.

Daca $\delta(1\ 2\ 3\ 4) = 0$, atunci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Daca $\delta(1\ 2\ 3\ 4) = 1$, atunci $\delta(2\ 3\ 5) = 1$ sau $\delta(7) = 1$.

Cand avem $\delta(2\ 3\ 5) = 1$, atunci $\delta(5) = 1$, deci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Cand avem $\delta(7) = 1$, atunci $\delta(3\ 4\ 7) = 1$, deci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Observatia 1.4 Fie Σ o multime de formule din calculul propozitional si Σ^+ multimea formulelor ce pot fi derivate din Σ , utilizand regulile de inferenta FD1'-FD3', MVD0'- MVD3', FD-MVD1', FD-MVD2'.

Atunci dupa lema 1.4 rezulta ca $\Sigma \models_{c.l.} \Sigma^+$, adica formulele din Σ^+ sunt consecinte logice ale formulelor din Σ .

Lema 1.5 Fie Σ o multime de formule asociate
multimii Σ de dependente functionale sau
multivaluate si X o multime de atribute.

Fie $X^+ = \{A | \Sigma \text{--FM } X \rightarrow A\}$. Fie $B(\Sigma, X)$ baza de
dependenta pentru X cu privire la Σ si $W \in$
 $B(\Sigma, X)$, astfel incat $W \cap X^+ = \emptyset$. Consideram
asignarea δ_0 definita astfel: $\delta_0(a) = 0$ iff $A \in W$.
Atunci avem: $\delta_0(_) = 1$ pentru $_ \in \Sigma$.

Teorema 1.2 (Teorema de completitudine pentru formule).

Fie Σ multimea de formule asociate multimii Σ de dependente functionale sau multivaluate si _ formula asociata dependentei _ (functională sau multivaluată). Atunci _ este consecința logica a lui Σ dacă și numai dacă _ poate fi

demonstrata în Σ utilizând regulile de inferență $\mathcal{R}FM'$. Pe scurt: $\Sigma \models_{c.l.} _$ iff $\Sigma \vdash FM' _$.

În continuare vom da demonstrația sintactică a teoremei de echivalentă.

Teorema 1.3 (Teorema de echivalentă). Fie Σ o multime de dependente

functionale sau multivaluate și _ o dependență
funcțională sau multivaluată.

Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

- a) _ este o consecință a lui Σ .
- b) _ este o consecință a lui Σ pe domeniul
relațiilor cu 2uple.
- c) _ este o consecință logică a lui Σ .

Demonstratie.

a) implica b) rezulta imediat.

Aratam ca b) implica c). Fie b) adevarata si presupunem c) falsa.

Atunci exista o asignare δ , astfel incat $\delta(_) = 1$ pentru orice $_ \in \Sigma$ si $\delta(_) = 0$.

Consideram relatia r cu 2 uple t_1 si t_2 definite astfel:

$t_1[A] = 1$ pentru orice $A \in U$, $t_2[A] = 1$ iff $\delta(a) = 1$.

Dupa lema 2.5 obtinem:

r satisface $__$, orice $__ \in \Sigma$ si r nu satisface $__$,
ceea ce contrazice b).

Aratam acum: c) implica a). Fie $__$ consecinta
logica a lui Σ . Dupa teorema 1.1 rezulta ca
 $\Sigma \mid \mathcal{R}' \text{FM } __$, de unde $\Sigma \mid \mathcal{R} \text{FM } __$.

Avem atunci $\Sigma \models __$,

deoarece regulile din *R*FM sunt valide.