5) $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\exists x.P(x,y)$ validă

ddacă

Th corect $\Longrightarrow$ $\exists x.\forall y.P(x,y) \vDash \forall y.\exists x.P(x,y)$

$\Longleftarrow$ Th. compl.

$u=0$ — v_1, v_2, v_3 $\quad \leq$

pt orice S,α a.î. $S,\alpha \vDash \exists x.\forall y.P(x,y)$ (există $u \in D$ a.î. pt orice $v \in D$, $P^S(u,v)$)

avem şi $S,\alpha \vDash \forall y.\exists x.P(x,y)$ (pt orice $v \in D$ avem $u \in D$ a.î. $P^S(u,v)$)

$v_1 - u$
$v_2 - u$
$v_3 - u$

$0 \leq^S$ $\quad P^S$

$v_1 - u_1$
$v_2 - u_2$
$v_3 - u_3$

$u <$

1. $\underbrace{\exists x.\forall y.P(x,y)}_{\Gamma} \vdash \underbrace{\exists x.\forall y.P(x,y)}_{\varphi}$ (ip)
2. $\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x_0,y) \vdash \forall y.P(x_0,y)$ (ip)

$\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x_0,y) \vdash P(x_0,y_0)$ $\quad$??? $\neq$

j. $\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x,y) \vdash P(t_x,y_0)$

m. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \underbrace{P(t_x,y_0)}_{\psi}$ ($\exists_e$, 1, j)

k. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \exists x.P(x,y_0)$ ($\exists_i$, k)

n. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\underbrace{\exists x.P(x,y)}_{\varphi}$ ($\forall_i$, k)

$x_0 \notin vars(\Gamma)$ ✓
$x_0 \notin vars(\varphi)$ ✓
$x_0 \notin vars(\psi)$
$\Downarrow$
tx nu conține x_0

$\sigma = \{x \mapsto x_0\}$

$$\forall_i \ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto x_0]}{\Gamma \vdash \forall x.\varphi} \ x_0 \notin var(\Gamma,\varphi)$$

ap. libere ale lui x în φ înlocuite cu x_0

x_0 - var. nouă

$\varphi[x \mapsto x_0] = \sigma^{\flat}(\varphi)$

$$\exists_i \ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x.\varphi}$$

$$\exists_e \ \frac{\Gamma \vdash \exists x.\varphi \qquad \Gamma, \varphi[x \mapsto x_0] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \ x_0 \notin vars(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\forall_e \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}$$

1. $\overbrace{\exists x.\forall y.P(x,y)}^{\Gamma} \vdash \overbrace{\exists x.\forall y.P(x,y)}^{\varphi}$ (ip)

2. $\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x_0,y) \vdash \forall y.P(x_0,y)$

j. $\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x_0,y) \vdash P(\cancel{t_x}\; x_0, y_0)$ $(\forall_e, 2, y_0)$

$x_0 \notin vars(\Gamma)$ ✓
$x_0 \notin vars(\varphi)$ ✓
$x_0 \notin vars(\psi)$ ✓

m. $\exists x.\forall y.P(x,y), \forall y.P(x_0,\underbrace{y_0}_{\psi}) \vdash \exists x.P(x,y_0)$ $(\exists_i, j)$

k. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \exists x.P(x,y_0)$ $(\exists_e, 1, m)$

n. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\underbrace{\boxed{\exists x.P(x,y)}}_{\varphi}$ $(\forall_i, k)$

$\Rightarrow$ $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\exists x.P(x,y)$ validă

Dar

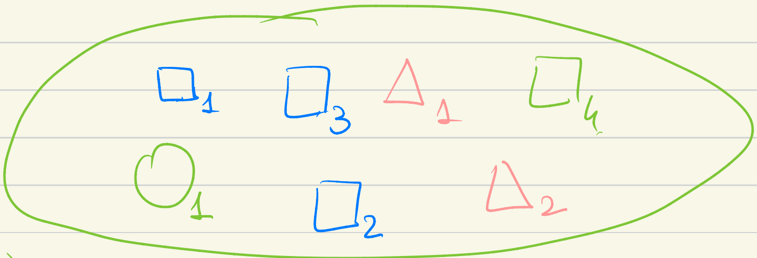
P.R.A $\forall y.\exists x.P(x,y) \vdash \exists x.\forall y.P(x,y)$ validă ddacă

Th corect $\Rightarrow$
$\Leftarrow$ Th complet
$\forall y.\exists x.P(x,y) \vDash \exists x.\forall y.P(x,y)$ (1)

$\forall y.\exists x.P(x,y) \vDash \exists x.\forall y.P(x,y)$ ddacă

F. pt orice structură S și pt orice S-atr α
a.î. $S,\alpha \vDash \forall y.\exists x.P(x,y)$ (*)
avem și $S,\alpha \vDash \exists x.\forall y.P(x,y)$ (**)

"F" ddacă



✓ (*) pătrate
× (**) albastru

pt orice pătrat, este albastru

"F"

există un obiect care este pătrat și Nu este albastru
(*) Nu (**)

$(S,\alpha) \Leftrightarrow$ un obiect

Căutăm o structură S și o S-atr α a.î. (*) "A" și

(**) "F"

(*) ddacă $S, \alpha \models \forall y. \exists x. P(x, y)$

ddacă pt orice $u \in D$ avem $S, \underbrace{\alpha[y \mapsto u]}_{\alpha'} \models \exists x. P(x, y)$

ddacă pt orice $u \in D$ avem există $v \in D$ a.î. $S, \underbrace{\alpha'[x \mapsto v]}_{\alpha''} \models P(x, y)$

$\alpha : X \to D$	$\alpha' : X \to D$	$\alpha'' : X \to D$
$\alpha(x) = \ldots$	$\alpha'(x) = \alpha(x)$	$\alpha''(x) = v$
$\alpha(y) = \ldots$	$\alpha'(y) = u$	$\alpha''(y) = u$
$\alpha(z) = \ldots$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$	$\alpha'(z) = \alpha(z)$	$\alpha''(z) = \alpha(z)$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

ddacă pt orice $u \in D$ avem există $v \in D$ a.î. $P^S(\overline{\alpha''}(x), \overline{\alpha''}(y))$

ddacă pt orice $u \in D$ avem există $v \in D$ a.î. $P^S(v, u)$ "A"

(**) $S, \alpha \models \exists x. \forall y. P(x, y)$

ddacă există $v \in D$ a.î. $S, \underbrace{\alpha[x \mapsto v]}_{\alpha_1'} \models \forall y. P(x, y)$

ddacă există $v \in D$ a.î. pt orice $u \in D$ avem $S, \underbrace{\alpha_1'[y \mapsto u]}_{\alpha_1''} \models P(x, y)$

$\alpha : X \to D$	$\alpha_1' : X \to D$	
$\alpha(x) = \ldots$	$\alpha_1'(x) = v$	$\alpha_1''(x) = v$
$\alpha(y) = \ldots$	$\alpha_1'(y) = \alpha(y)$	$\alpha_1''(y) = u$
$\alpha(z) = \ldots$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$	$\alpha_1'(z) = \alpha(z)$	$\alpha_1''(z) = \alpha(z)$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

ddacă existā $v \in D$ a.î. pt orice $u \in D$ avem $P^S(v, u)$ "F"

Fie $S = (\mathbb{R}^*, \{=\}, \{\times, \cdot^{-1}, 1\})$ (D, P^S)

$\alpha : X \to \mathbb{R}^*$, $\alpha(z) = 1$ pt orice $z \in X$

(*) ddacă pt orice $u \in \mathbb{R}^*$, existā $v \in \mathbb{R}^*$ a.î. $v = u$ "A"

(**) ddacă existā $v \in \mathbb{R}^*$ a.î. pt orice $u \in \mathbb{R}^*$ avem $v = u$ "F"

$\Rightarrow$ Nu pt orice S și orice S-atr α a.î. (*) avem și (**)

$\Rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y) \not\models \exists x. \forall y. P(x, y)$ (2)

$\Rightarrow$ Din (1), (2) $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$

$\forall y. \exists x. P(x, y) \vdash \exists x. \forall y. P(x, y)$ nu este validă

Ex 85 $A = \{p, q, r \ldots\}$ $\longrightarrow$ $\Sigma_{LP} = \{A, \emptyset\}$

$\quad = (\{P, Q, R \ldots\}, \emptyset)$

$ar(P) = \ldots = 0$

$\tau : A \to B$ atrib.

$S = (D, \{a^S / a \in A\}, \emptyset\})$

$a^S = \tau(a)$, pt orice $a \in A$

pt orice $\varphi \in LP$ avem $\tau \models \varphi$ ddacă $S, \alpha \models \varphi$ pt orice S-atr α.

φ valid în S

$P(\varphi_1)$: " $\tau \models \varphi_1$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_1$ ~~pt orice S-atr α~~ "

Fie $\varphi \in LP$ arbitrar fixat.

Fie α arbitrar fixat.

Arătăm $P(\varphi)$

"$\Longrightarrow$" Pp. $\mathcal{I} \models \varphi$
$$\overline{}$$
$S, \alpha \models \varphi$ pt orice S a.i. α

"$\Longleftarrow$" pp. $S, \alpha \models \varphi$
$$\overline{}$$
$\mathcal{I} \models \varphi$

simultan.

Știm $\mathcal{I} \models \varphi$ ddacă $\hat{\mathcal{I}}(\varphi) = 1$

Dem prin inducție structurală în fct de structura lui φ.

1. (CB) $\varphi = a \in A$

$\mathcal{I} \models \varphi \iff \hat{\mathcal{I}}(\varphi) = 1 \iff \hat{\mathcal{I}}(a) = 1 \iff \mathcal{I}(a) = 1 \iff$

$\iff a^S$ are loc.

$\iff S, \alpha \models a \Rightarrow S, \alpha \models \varphi$

$\Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi$ ddacă $S, \alpha \models \varphi$

2. (CI 1) $\varphi = \neg \varphi_1$, $\varphi_1 \in LP$

Pp. $P(\varphi_1)$ "A" arătăm că $P(\varphi)$ "A"

" $\mathcal{I} \models \varphi_1$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_1$ pt orice α " "A". (ip ind)

"$\Longrightarrow$"

$\mathcal{I} \models \neg\varphi_1 \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \varphi_1$ (1)

$\mathcal{I} \models \varphi \Rightarrow$ Tb. arătat că $S, \alpha \models \varphi$ ~~pt orice~~ α (α fixat arbitrar)

$S, \alpha \models \varphi$ ddacă $S, \alpha \models \neg\varphi_1$ ddacă $S, \alpha \not\models \varphi_1$. (*)

pp. RA că $S, \alpha \models \varphi_1 \xRightarrow{P(\varphi_1)\text{"A"}} \mathcal{I} \models \varphi_1$

Din (1) $\Rightarrow \mathcal{I} \not\models \varphi_1$ | $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$

$\Rightarrow S, \alpha \not\models \varphi_1 \xRightarrow{(*)} S, \alpha \models \varphi$

"$\Longleftarrow$"

pp. $S, \alpha \models \varphi$ și arătăm $\mathcal{I} \models \varphi$

$S, \alpha \models \varphi$ ddacă $S, \alpha \models \neg\varphi_1$ ddacă $S, \alpha \not\models \varphi_1$ (2)

Tb arătat că $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \neg\varphi_1 \iff \mathcal{I} \not\models \varphi_1$ (*)

pp. RA că $\mathcal{I} \models \varphi_1 \xRightarrow{\text{ip ind "}\Rightarrow\text{"}}$

$\Rightarrow S, \alpha \models \varphi_1 \xRightarrow{\text{din (2)}}$

$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow \mathcal{I} \not\models \varphi_1$

$\xRightarrow{(*)} \mathcal{I} \models \varphi$

$\mathcal{T} \models \neg\varphi \iff \mathcal{T} \not\models \varphi$ $\qquad$ $\mathcal{T} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff \mathcal{T} \models \varphi_1$ și $\mathcal{T} \models \varphi_2$

$S, \alpha \models \neg\varphi \iff S, \alpha \not\models \varphi$ $\qquad$ $S, \alpha \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff S, \alpha \models \varphi_1$ și $S, \alpha \models \varphi_2$

3) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$

Pp. $P(\varphi_1)$ "A" $\iff$ "$\mathcal{T} \models \varphi_1$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_1$" (ip. ind 1)

$P(\varphi_2)$ "A" $\iff$ "$\mathcal{T} \models \varphi_2$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_2$" (ip. ind 2)

(*) Dem $P(\varphi)$ pt direcția "$\Longrightarrow$"

Pp. $\mathcal{T} \models \varphi$

$S, \alpha \models \varphi$

$\mathcal{T} \models \varphi$ ddacă $\begin{cases} \mathcal{T} \models \varphi_1 \\ \text{și } \mathcal{T} \models \varphi_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{ip. ind}} \begin{cases} S, \alpha \models \varphi_1 \\ \text{și} \\ S, \alpha \models \varphi_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Def Aceu } \mathbb{LP}1}$

$\Rightarrow S, \alpha \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow S, \alpha \models \varphi$

Dem $P(\varphi)$ pt direcția "$\Longleftarrow$"

Pp. $S, \alpha \models \varphi$

$\mathcal{T} \models \varphi$

$S, \alpha \models \varphi$ ddacă $S, \alpha \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ddacă

ddacă $\begin{cases} S, \alpha \models \varphi_1 \\ \text{și} \\ S, \alpha \models \varphi_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{(ip ind)}} \begin{cases} \mathcal{T} \models \varphi_1 \\ \text{și} \\ \mathcal{T} \models \varphi_2 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{T} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

4) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ (identic cu 3)