Matematică - Calcul diferenţial şi integral
Seminar - Săptămâna 2

***Exerciţii recomandate:** 2.1(a-f), 2.2, 2.3(a,b), 2.4(b), 2.5(a,b), 2.6(a), 2.7(a), 2.10, 2.11, 2.12, 2.16
***Rezerve:** 2.1(g,h), 2.4(a,c),2.5(b), 2.7(b), 2.14, 2.15, 2.17

S2.1 Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n}{n^3 + n^2 + 1}; \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} [\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6)]; \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}};$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} (3n^2 + 5) \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right); \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}; \quad \text{f) } \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2};$$

$$\text{g) } \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 2}\right); \quad \text{h) } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

S2.2 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, definit prin $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) x_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent.

S2.3 Să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:

$$\text{a) } x_n = (1 + \cos n\pi)\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}; \qquad \text{b) } x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 = 2;$$

$$\text{c) } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 \geq -2; \quad \text{d) } x_n = \frac{(-1)^n n^3 - 3^{-n}}{n^3}, n \in \mathbb{N}^*;$$

S2.4 Să se stabilească dacă următoarele şiruri sunt fundamentale:

$$\text{a) } x_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{c) } x_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}; \quad \text{d) } x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*;$$

S2.5 Să se determine $L(x_n)$ pentru fiecare din şirurile cu termenul general x_n, unde:

$$\text{a) } x_n = \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n} + e^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{b) } x_n = 2 + (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}; \quad \text{c) } x_n = \frac{(-1)^n + n\ \mathrm{tg}\frac{n\pi}{4}}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

S2.6 Să se calculeze următoarele limite

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}}; \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \qquad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}.$$

S2.7 Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}$.

S2.8* Să se arate că şirul cu termenul general

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$$

este convergent în $\mathbb{R}$ (limita sa fiind aşa numita constantă a lui Euler, $c = 0,577215\ldots \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

S2.9 Să se găsească $L(x_n)$ pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}$, unde

$$x_n = [1+(-1)^n]\cdot n^{(-1)^n}+\cos\frac{n\pi}{6},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$$

S2.10 Se consideră polinomul de gradul al doilea $f\in\mathbb{R}[X]$, astfel încât $f(1)=4, f(-1)=7, f(2)=12$.

a) Să se determine forma algebrică a polinomului f.

b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X+3$.

S2.11 Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, cu $f=X^3-3X+a$ şi $g=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=2$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(X)=g(X)$.

b) Să se determine valorile parametrului $a\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite o rădăcină dublă pozitivă. Care sunt rădăcinile reale ale lui f în acest caz?

S2.12 Se consideră polinomul $f\in\mathbb{C}[X]$, $f(X)=X^4-6X^3+18X^2-30X+25$.

a) Să se demonstreze că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

S2.13 Resturile împărţirii polinomului $f\in\mathbb{R}[X]$ la binoamele $X+2, X+4, X-2$ sunt respectiv $38, 112$ şi 10. Să se afle restul împărţirii polinomului f la $(X^2-4)(X+4)$.

S2.14 Să se determine polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia $2f(X)=Xf(X)-2X^3+10X^2-16X+8$.

S2.15 Câturile împărţirii polinomului $f\in\mathbb{R}[X]$ la $X-a$ şi $X-b$ sunt respectiv X^2-3X+4 şi X^2-4X+2. Determinaţi valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul f, ştiind că termenul liber al polinomului este 1.

S2.16 Determinaţi valorile parametrilor reali a,b ştiind că polinomul $f=aX^4+bX^3-3$ este divizibil cu $(X-1)^2$.

S2.17 Se consideră polinomul $f\in\mathbb{C}$, $f=(X+i)^{2020}+(X-i)^{2020}$, care are forma algebrică

$$f=a_{2020}X^{2020}+a_{2019}X^{2019}+\ldots+a_1X+a_0.$$

a) Să se calculeze $a_{2020}+a_{2019}$.

b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la X^2-1.

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, (§1.5), ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.

2. A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu, *Analiza matematică. Probleme*, Ed. Tehnopress, Iaşi, 2015.

3. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. S. Chiriţă - *Probleme de matematici superioare,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

S2.1 Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n}{n^3 + n^2 + 1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} [\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6)]$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2 + 5) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 2}\right)$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln n}{n\sqrt{n}}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n}{n^3 + n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}\left(2 - \frac{n}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right)} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{1 + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^3}}} = \dfrac{2-0}{1+0+0} = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0 \qquad a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0 n^0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_0 n^0} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_m}, & \text{dacă } m = k \\ 0, & \text{dacă } m > k \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_k}{b_m}\right) \cdot \infty & \text{dacă } m < k \end{cases}$$

Cazuri de nedeterminare:

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\qquad \dfrac{n^2}{n} = n \to \infty$

$\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$

- $\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{1} = n \longrightarrow \infty$

$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

- 1^∞ $\qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$1^n = 1 \longrightarrow 1$

- 0^∞ $\qquad 0^0$

- $\infty - \infty$

- $\infty \cdot 0$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad a, b > 0$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6) \right]$

$\overset{\infty - \infty}{=\!=} \lim\limits_{n \to \infty} \ln \frac{n^2 + 2n + 3}{3n^2 + n - 6} \qquad \frac{\ln \text{ fct}}{\text{cont}}$

$\ln \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{3n^2 + n - 6} = \ln \frac{1}{3} =$

$$\ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 < 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^{n+1}}\left(\frac{3^n}{5^n}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}{\cancel{5^{n+1}}\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}+1\right)}$$

Se simplifică prin nr mai mare la puterea mai mare în cazul în care avem un nr. finit de termeni

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |a|<1 \\ 1, & \text{dacă } a=1 \\ \infty, & \text{dacă } a>1 \\ \nexists, & \text{dacă } a\le -1 \end{cases}$$

d) $$\lim_{n\to\infty} (3n^2+5)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$a\ln b = \ln b^a \quad b>0$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{3n^2+5} =$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

unde $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{3n^2+5}{n^2}} \overset{\ln}{=}$$

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2}}$$

$\ln$ f, ct, cont

Calculele cu limită trebuie făcute cu grijă

$$(-1)^{2n} = (-1)^n \cdot (-1)^n$$

$$= \left((-1)^2\right)^n$$

$$= 1^n$$

$$= 1$$

$$\ln e^3 = 3$$

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}} =$$

$$x^0 + x^1 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad x \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}}{\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{3}-1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{} 0 \; -1}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-\frac{2}{3}}{\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}_{\to 0}-1}\right] = \frac{\cancel{-1}}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-\frac{2}{3}}{\cancel{-1}} = \frac{4}{3}$$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2} \; \boxed{=}$

$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$2^2+4^2+\ldots+(2n)^2 =$

$2^2(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}\,3}$

$\underline{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 + 2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$

$-2^2-4^2-\ldots-(2n)^2 =$

$1^2+2^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2 -$

$(2^2+4^2+\ldots+(2n)^2) =$

$\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$$\frac{2n(2n+1)}{6}\left(4n+1-2(n+1)\right) =$$

$$\frac{\cancel{2}n(2n+1)}{\cancel{6}\,3}\left(2n-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{n}(n+1)\cancel{(2n+1)}}{\frac{\cancel{n}(2n-1)\cancel{(2n+1)}}{\cancel{3}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n-1} = 1$$

2.2 $\qquad x_1 = 1$

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

Termenii scad, deci ne gândim să arătăm că șirul e descrescător

$P(k): x_n > 0$

$x_1 > 0$

Pp că $x_n > 0$

$\left(1-\frac{1}{3n^2}\right) > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} > 0$

$P(1)$ A

$P(n) \rightarrow P(n+1)$

$P(k)$ A $\forall k \geq 1$

$\Rightarrow x_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$

$n^2 > 0$

$\frac{1}{3n^2} > 0$

$-\frac{1}{3n^2} < 0$

$1-\frac{1}{3n^2} < 1$

$n^2 \geq 1$

$3n^2 > 1$

$\frac{1}{3n^2} < 1 \Rightarrow$

$-\frac{1}{3n^2} > -1$

$1-\frac{1}{3n^2} > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n$

$\Rightarrow$ Șirul e strict descrescător

$0 < x_k < \ldots \leq x_1 = 1$

$\Rightarrow$ Șirul este mărginit

Weierstrass $\Longrightarrow$

x_n convergent

$\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} \quad l \in [0,1)$

$l = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n^2}\right)}_{1} \cdot l$

$l = l$

Teorema lui Weierstrass:

Un şir monoton şi mărginit este convergent

$n^2 \nearrow$

To do

$\frac{1}{3n^2} \searrow$

$-\frac{1}{3n^2} \nearrow$

Dacă

$x_{n+1}, x_n > 0$

$$\left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) \cdot x_n$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{3n^2} < 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \quad x_n\left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) -$$

$$x_n =$$

$$x_n\left(\cancel{1} - \frac{1}{3n^2} - \cancel{1}\right) =$$

$$x_n \cdot \left(-\frac{1}{3n^2}\right)$$

2.3.

a) $x_n = (1+\cos n\pi)\dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N};$ b) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{1+x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 = 2;$

Încercăm să trecem la limită:

$$\underbrace{\left(1 + \lim_{n\to\infty} \cos n\pi\right)}_{\nexists} \cdot 1 \quad \rightarrow \text{Intuiesc că șirul nu e convergent}$$

Pt. a arăta că șirul nu e convergent găsesc 2 subșiruri care tind la valori diferite

$k \in \mathbb{N}$

Fie $x_{2k} = (1 + \cos 2k\pi) \cdot \frac{2k}{2k+1} =$

|| cos fct. periodică?

$x_{2k} = (1 + \underbrace{\cos 0}_{1}) \cdot \frac{2k}{2k+1} =$

$x_{2k} = \frac{2 \cdot 2k}{2k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 2$

$x_{2k+1} = (1 + \cos(2k+1)\pi) \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$

$x_{2k+1} = (1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1}) \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = 0 \to 0$

$\left.\begin{matrix} x_{2k} \to 2 \\ x_{2k+1} \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_n$ nu e conv.

b) $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 = 2;$

$x_1 = \frac{2^2}{1+2} = \frac{4}{3}$

$x_2 = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{7}{3}}$

Dacă nu aș ști că termenii sunt pozitivi

Fie $P(k): x_k > 0$

monotonia aş studia-o

$P(0): x_0 = 2 > 0$ (A)

$x_{n+1} - x_n$

see below

Pp $P(n)$ adev:

Pp $x_n > 0$.

Vreau să dem $P(n+1)$

$$x_{n+1} = \frac{\overset{>0}{x_n^2}}{\underbrace{1+x_n}_{>0 \text{ (ip inducție)}}} > 0 \Rightarrow P(n+1)$$

$P(0)$ (A)

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$ $\Big\} \Rightarrow$

$P(k)$ adev $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{x_n^2}{1+x_n}}{\cancel{x_n}} =$$

$$\frac{x_n}{1+x_n} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_n)$ descrescător

$$\left.\begin{aligned} & x_n \le x_0 = 2 \\ & 0 < x_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x_n \in (0, 2] \Rightarrow$

(x_n) mărginit

$\Rightarrow$ W

(x_n) convergent $\Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$

Pot trece la limită în relația de recurență:

$$l = \frac{l^2}{1+l} \Rightarrow$$

sau

$l + l^2 = l^2$

$$\frac{l^2}{1+l} - l = 0$$

$$l\left(\frac{l}{1+l} - 1\right) = 0$$

$$l\left(\frac{\cancel{l}}{1+l} - \frac{1+\cancel{l}}{1+l}\right) = 0$$

$$-\frac{l}{1+l} = 0 \to l = 0$$

sau

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{1+x_n} - x_n =$$

$$x_n\left(\frac{x_n}{1+x_n}-1\right)=$$

$$x_n\left(\frac{\cancel{x_n}-1-\cancel{x_n}}{1+x_n}\right)=$$

$$-\frac{x_n}{1+x_n}$$

Trebuie să văd că $-\dfrac{x_n}{1+x_n}\overset{?}{\geq}0$

șir fundamental = șir Cauchy

Pe $\mathbb{R}$ un șir este Cauchy $\Leftrightarrow$
un șir este convergent

Pe $\mathbb{Q}$ un șir poate fi Cauchy
fără a fi convergent

Fie $\varepsilon>0$ $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}^*$ a.î.

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon$

$\Rightarrow$ șirul este Cauchy

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \simeq 1.414213\ldots$

Fie $x_0 = 1$ în $\mathbb{Q}$

$x_1 = 1.4$

$x_2 = 1.41$

$x_3 = 1.414$

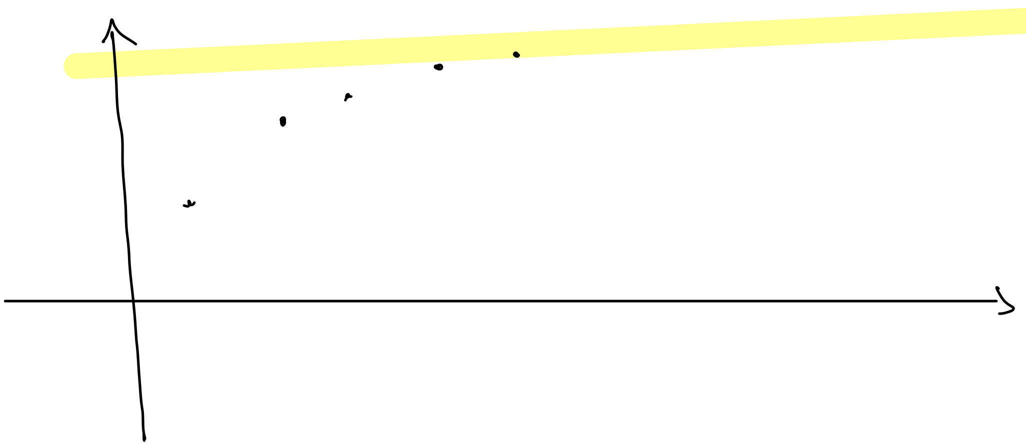
$x_4 = 1.4142$

0.4

0.01

0.004

0.0002



În practică punem

cu $|x_{n+p} - x_n| < y(n) \to 0$

nu depinde de p

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| =$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$\frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$$

$$\frac{n+1-n}{n(n+1)}+\frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{n+p-(n+p-1)}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$\frac{\cancel{n+1}}{n\cancel{(n+1)}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)}+\frac{\cancel{n+2}}{(n+1)\cancel{(n+2)}}-$$

$$\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}+\dots+\frac{\cancel{n+p}}{(n+p-1)\cancel{(n+p)}}-$$

$$\frac{\cancel{n+p-1}}{\cancel{(n+p-1)}(n+p)}=$$

$$\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}+\dots$$

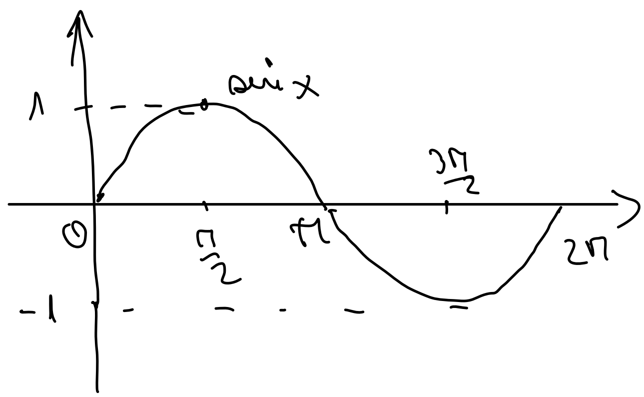
$$+\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}=$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\longrightarrow 0$$

şirul este Cauchy

2.5 b)

$$x_n = 2 + \underbrace{(-1)^n}_{-1 \quad 1} + \sin \frac{n\pi}{2}$$



Dacă $n = 2k$

$$x_{2k} = 2 + (-1)^{2k} + \sin \frac{2k\pi}{2} =$$

$$2 + 1 + 0 = 3 \longrightarrow 3$$

$n = 4k+1$

$$x_{4k+1} = 2 + (-1)^{4k+1} + \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} =$$

$$2 - 1 + 1 = 2 \longrightarrow 2$$

Dacă $n = 2k$

$$\sin \frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}} = \sin k\pi = 0$$

Dacă $n = 2k+1$

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

Dacă $n = 4k+1$

$$\sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Dacă $n = 4k+3$

$$\sin \frac{(4k+3)\pi}{2} = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$n = 4k+3$

$$x_{4k+3} = 2+(-1)^{4k+3} + \sin\frac{(4k+3)\pi}{2} =$$

$$2-1-1=0 \longrightarrow 0$$

$$(x_n) = (x_{2k}) \cup (x_{4k+1}) \cup (x_{4k+3})$$

$$\Rightarrow L(x_n) = \{0, 2, 3\}$$

a) $$x_n = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}}$$

$n = 2k$

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k}+e^{\frac{1}{2k}}} = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{2k}}_{\to 0}+\underbrace{e^{\frac{1}{2k}}}_{\text{exp cont}}}$$

$\frac{1}{2k} \to 0$

$e^0 = 1$

$$\longrightarrow \frac{1}{1+0+1} = \frac{1}{2}$$

$n = 2k+1$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{1+\frac{1}{2k+1}+e^{\frac{1}{2k+1}}} =$$

$$\frac{-1}{1+\underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{\to 0}+e^{\frac{1}{2k+1}}} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

$$e^{\frac{1}{2k+1}} \to 1$$

$$x_n = (x_{2k}) \cup (x_{2k+1}) \to$$

$$L(x_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

2.6

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}}$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (x_n > 0)$$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$

$(k+p)! = k! \cdot (k+1) \ldots (k+p)$

$$x_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \underset{\exists}{\overset{\text{Dacă}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(3(n+1))!}{[(n+1)!]^3}}{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(3n)!}\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{\cancel{(n!)^3}\,(n+1)^3} \cdot \frac{\cancel{(n!)^3}}{\cancel{(3n)!}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27n^3 + \ldots}{n^3+3n^2+3n+1} = 27$$

2.7 a)

Cesaro Stolz $x_n, y_n \to \pm\infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ Dacă $\exists$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

Sumă de n termeni >1 $\to \infty$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}}{n} =$ $\searrow \infty$

Dacă $\exists$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1}+\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\cancel{\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n+1]{n+1}-\cancel{1}-\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt[3]{3}}-\ldots-\cancel{\sqrt[n]{n}}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$|| \qquad ||$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}$

S2.10 Se consideră polinomul de gradul al doilea $f \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f(1) = 4, f(-1) = 7, f(2) = 12$.

a) Să se determine forma algebrică a polinomului f.

b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X + 3$.

S2.11 Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, cu $f = X^3 - 3X + a$ şi $g = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(X) = g(X)$.

b) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite o rădăcină dublă pozitivă. Care sunt rădăcinile reale ale lui f în acest caz?

S2.12 Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f(X) = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 30X + 25$.

a) Să se demonstreze că polinomul f se divide cu $X^2 - 2X + 5$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

$$\begin{cases} a\cdot 1 + \cdot + - \\ a\cdot(-1)^2 + \quad - = 7 \\ \cdot^2 \quad - = \end{cases} \qquad a - \quad = - \quad -4$$

S2.10 Se consideră polinomul de gradul al doilea $f \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f(1) = 4, f(-1) = 7, f(2) = 12$.

a) Să se determine forma algebrică a polinomului f.

b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X + 3$.

S2.11 Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, cu $f = X^3 - 3X + a$ şi $g = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(X) = g(X)$.

b) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite o rădăcină dublă pozitivă. Care sunt rădăcinile reale ale lui f în acest caz?

$f(x) = (x^2-2x+5)(x^2-4x+5)$

S2.12 Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f(X) = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 30X + 25$.

a) Să se demonstreze că polinomul f se divide cu $X^2 - 2X + 5$.

$x^2 - 4x + 5$

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

Pt ec de gr 2 nu are răd reale $\Delta < 0$

c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

$x^2 - 4x + 5 \to 2+i,\ 2-i$ $\quad x^2 - 2x + 5 = 0 \to 1+2i,\ 1-2i$

S2.13 Resturile împărţirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la binoamele $X + 2, X + 4, X - 2$ sunt respectiv $38, 112$ şi 10. Să se afle restul împărţirii polinomului f la $(X^2 - 4)(X + 4)$.

S2.14 Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia $2f(X) = Xf(X) - 2X^3 + 10X^2 - 16X + 8$.

S2.15 Câturile împărţirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la $X - a$ şi $X - b$ sunt respectiv $X^2 - 3X + 4$ şi $X^2 - 4X + 2$. Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul f, ştiind că termenul liber al polinomului este 1.

S2.16 Determinaţi valorile parametrilor reali a, b ştiind că polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ este divizibil cu $(X - 1)^2$.

forma alg.

$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

gradul lui f

a_i – coef polinomului $\quad \deg f = n$

a_n – coef dominant

a_0 – termen liber

$g \mid f$ $\quad$ g(x) divide pe f dacă $\exists\, h$ a.î.

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Date f, g $\exists\, q(x)$ și $r(x)$ a.î.

$f(x) = g(X) \cdot q(x) + r(X)$

$\deg r < \deg g$

a este rădăcină a lui f dacă

$f(a)=0 \iff (X-a) \mid f$

a este rădăcină multiplă de ordin k a lui f dacă

$(X-a)^k \mid f$

$(X-a)^{k+1} \nmid f$

$f(a)=0$

$f'(a)=0$

$\vdots$

$f^{(k-1)}(a)=0$

$f^{(k)}(a) \neq 0$

10.

; $f(1) = 4, f(-1) = 7, f(2) = 12.$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 7 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = 7 \\ 4a + 2b + c = 12 \end{cases} \Big\} \ominus$$

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 2b=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{2} \\ 4a+2b+c=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+c=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \\ 4a+c=12+3=15 \end{cases} \quad -$$

$$\begin{cases} 3a=15-\frac{11}{2}=\frac{19}{2} \Rightarrow a=\frac{19}{6} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=\frac{11}{2}-\frac{19}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{19}{6}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} \frac{19}{6}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3} & x+3 \\ \hline -\frac{19}{6}x^2-\frac{19}{2}x & \frac{19}{6}x-11 \\ \hline \quad -11x+\frac{7}{3} & \\ \quad +11x+33 & \\ \hline \quad\quad 33+\frac{7}{3}=\frac{106}{3} & \end{array}$$

sau

$\exists\ q, r$ a.î

$$\frac{19}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3} = (x+3)\,q(x) + r(x)$$

$\deg r(x) < \deg(x+3) = 1$

$\deg r(x) = 0$

Pt $x = -3$ $\Rightarrow r(x) = r \in \mathbb{R}$

$$\frac{19}{6}\cdot(-3)^2 - \frac{3}{2}\cdot(-3) + \frac{7}{3} = \overbrace{(-3+3)}^{0}\,q(-3) + r$$

$$\frac{19}{6}\cdot 9 + {}^{3/}\frac{9}{2} + {}^{2/}\frac{7}{3} = r$$

$$\frac{171+27+14}{6} = r$$

$$\frac{212^{(2}}{6} = r \qquad \frac{106}{3} = r$$

Scrie

Horner

$X+3$ $\quad X=-3$ rădăcină

	X^2	X	X^0	
	$\frac{19}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	
-3	$\frac{19}{6}$	$\frac{19}{6}\cdot(-3)+-\frac{3}{2}$	$-11\cdot(-3)+\frac{7}{3}=$	

$$=-\frac{19}{2}+-\frac{3}{2}=$$

$$-\frac{22}{2}=-11$$

$$33+\frac{7}{3}=\frac{106}{3}$$

S2.11 Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, cu $f = X^3 - 3X + a$ şi $g = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(X) = g(X)$.

b) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite o rădăcină dublă pozitivă. Care sunt rădăcinile reale ale lui f în acest caz?

a) $X^3 - \cancel{3X} + \cancel{2} = X^2 - \cancel{3X} + \cancel{2}$

$$X^3 = X^2 \Rightarrow X^3 - X^2 = 0$$

$$X^2(X-1)=0 \quad (X-0)^2(X-1)=0$$

0 rădăcină dublă

1 rădăcină simplă

b) $\exists\, b$ a.î. $f(b)=0 \Rightarrow b^3-3b+a=0$

$f'(b)=0 \Rightarrow 3b^2-3=0$

$f''(b)\neq 0$

$f' = 3x^2-3$

$b^2-1=0$

$b=\pm 1$

$b>0$

$b=1$

$1^3-3\cdot 1+a=0 \Rightarrow -2+a=0 \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow (x-1)^2 \mid f$

$x^2-2x+1 \mid f$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad\quad -3x+2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2-x & x+2 \\ \hline 2x^2-4x+2 & \\ -2x^2+4x-2 & \\ \hline / \quad / \quad / & \end{array}$$

$\Rightarrow f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

1 rădăcină dublă

-2 rădăcină simplă