

## Inchidere

Def

Fie  $\rho$  relație binară pe  $A$

- 1)  $r(\rho)$  - închiderea reflexivă a lui  $\rho$  = cea mai mică relație binară reflexivă
- 2)  $s(\rho)$  " sim. " = ce include  $\rho$  și " sim. "
- 3)  $t(\rho)$  " tranz" = " tranz "

$$A = B = \{0, 1\}$$

$$\rho = \{(0,1), (1,0)\}$$

$$\sigma = \{(1,1), (0,1)\}$$

$$\rho \circ \sigma = \{(0,1), (1,1)\}$$

$\overline{[a,c]}$  [b,d]

$\rho \circ \sigma$

$(\rho \circ \sigma) \circ \theta$

## Exerciții

1. Fie  $\rho, \sigma, \theta$  relații binare, demonstrați că:

$$a) \rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta$$

$(a, c)$

$(b, d)$

### Exerciții

$$(\rho \circ \sigma) \circ \theta$$

1. Fie  $\rho, \sigma, \theta$  relații binare, demonstrați că:

a)  $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta$

Fie  $(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta \Rightarrow (\exists c)((a, c) \in (\rho \circ \sigma)) \wedge (c, b) \in \theta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\exists c)(\exists d)((a, d) \in \rho \wedge (d, c) \in \sigma) \wedge (c, b) \in \theta \Leftrightarrow (\exists d)(a, d) \in \rho \wedge (\exists c)((d, c) \in \sigma \wedge (c, b) \in \theta) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\exists d)(a, d) \in \rho \wedge (d, b) \in (\sigma \circ \theta) \Rightarrow (a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta)$

$$\rho \circ \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \circ \theta$$
  

$$\{ (1,1), (1,1), (1,1) \}$$

Fie  $\rho, \sigma, \theta$  relații binare, demonstrează că

$$\rho \begin{cases} (, ) \\ (, ) \end{cases} \quad \sigma \begin{cases} (, ) \\ (, ) \end{cases}$$

a)  $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta$  asociativitate  
 $(a,b) \in \rho \circ \sigma \Rightarrow (\exists c)(a,c) \in \rho \wedge (c,b) \in \sigma$

$$\begin{aligned} \Rightarrow: \text{Fie } (a,b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta) &\Rightarrow (\exists c)(a,c) \in \rho \wedge (c,b) \in (\sigma \circ \theta) \Leftrightarrow (\exists c)(a,c) \in \rho \wedge (\exists d)(c,d) \in \sigma \wedge (d,b) \in \theta \\ &\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)((a,c) \in \rho \wedge (c,d) \in \sigma) \wedge (d,b) \in \theta \Leftrightarrow (\exists d)(a,d) \in \rho \circ \sigma \wedge (d,b) \in \theta \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta \quad \leftarrow \text{semn obiect} \end{aligned}$$

b

$$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d) \left[ (a,c) \in g \wedge (c,d) \in \sigma \wedge (d,b) \in \theta \right] \Leftrightarrow (\exists d) (a,d) \in g \circ \sigma \wedge (d,b) \in \theta$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in (g \circ \sigma) \circ \theta$$

b)  $g \circ (\sigma \cup \theta) = (g \circ \sigma) \cup (g \circ \theta)$  distributivitate

$\cup \cap$   
 $\vee \wedge$

$$\Rightarrow: \text{Fie } (a,b) \in g \circ (\sigma \cup \theta) \Rightarrow (\exists c) (a,c) \in g \wedge (c,b) \in (\sigma \cup \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists c) (a,c) \in g \wedge ((c,b) \in \sigma \vee (c,b) \in \theta) \Rightarrow (\exists c) (a,c) \in g \wedge (c,b) \in \sigma \vee (a,c) \in g \wedge (c,b) \in \theta$$

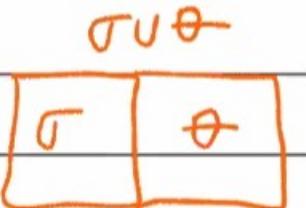
$$\Rightarrow (a,b) \in g \circ \sigma \vee (a,b) \in g \circ \theta \Rightarrow (a,b) \in (g \circ \sigma) \cup (g \circ \theta)$$

$$\Leftarrow: \text{Fie } (a,b) \in (g \circ \sigma) \cup (g \circ \theta) \Rightarrow (a,b) \in g \circ \sigma \vee (a,b) \in (g \circ \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists c) (a,c) \in g \wedge (c,b) \in \sigma \vee (\exists d) (a,d) \in g \wedge (d,b) \in \theta$$

$$\Rightarrow (\exists c) (a,c) \in g \wedge (c,b) \in (\sigma \cup \theta) \vee (\exists d) (a,d) \in g \wedge (d,b) \in (\sigma \cup \theta)$$

$$\Rightarrow (a,b) \in g \circ (\sigma \cup \theta) \quad \underline{\vee (a,b) \in g \circ (\sigma \cup \theta)}$$



$A_3$	$A_4$
•	*
• $\in A_3$	Adm
• $\in A_4$	<del>Adm</del>
• $\in A_3 \cup A_4$	Adm

$$\rho = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$$

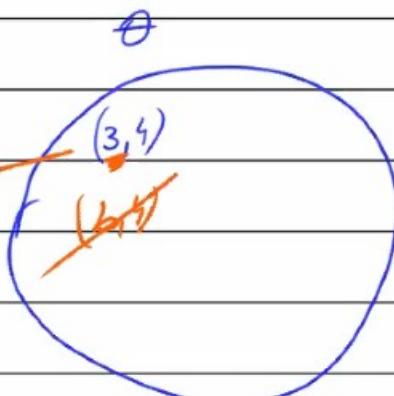
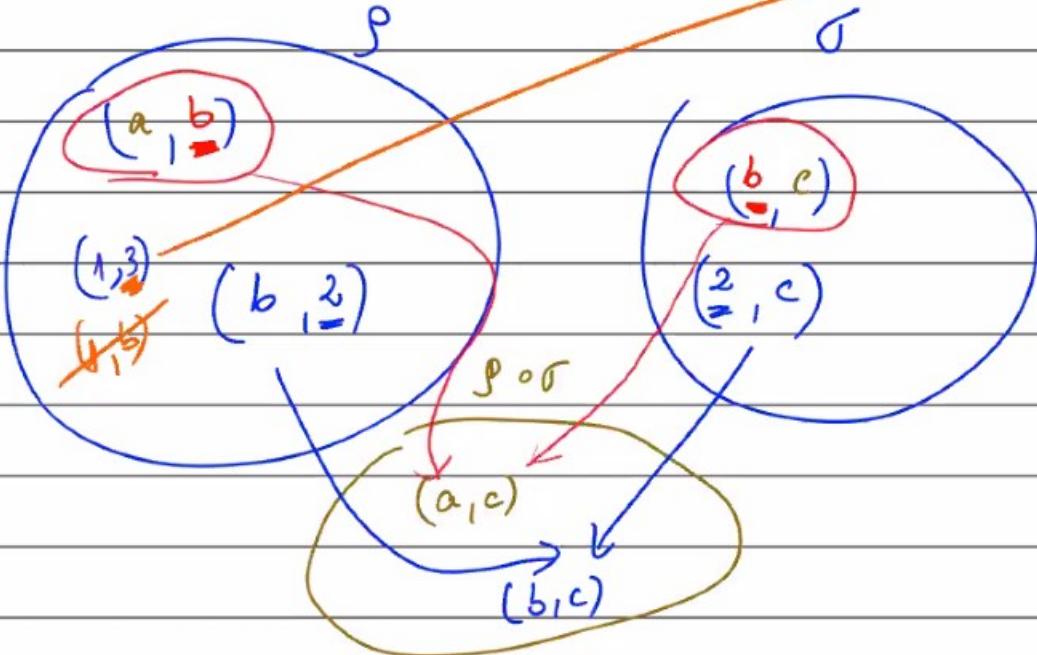
$$\sigma = \{(1,3), (1,4), (2,3)\}$$

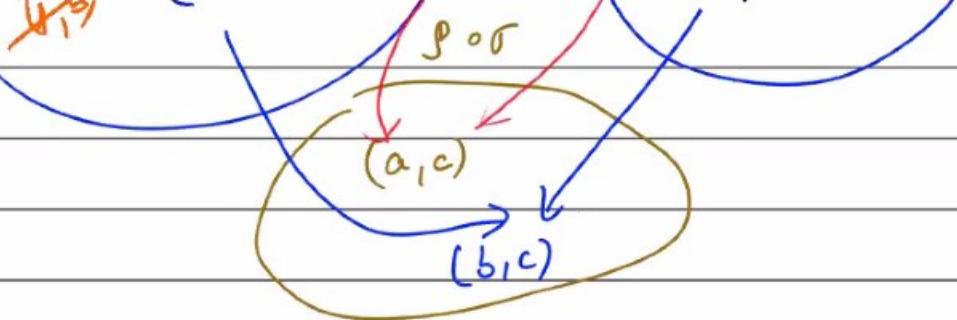
$$\rho \subseteq A \times B$$

$$(a,b) \in \rho$$

$$a\rho b$$

$$\rho \circ \sigma = \{ (a,c) \mid \underline{\exists b} ((a,b) \in \rho) \wedge ((b,c) \in \sigma) \}$$





$$g^{-1} \circ = \{(b, a) \mid (a, b) \in g\}$$

### Proprietăți relații binare

- 1)  $g$  reflexivă dacă  $\forall a \in A \quad (a, a) \in g$
- 2)  $g$  simetrică dacă  $\forall a, b \in A \quad (a, b) \in g \Rightarrow (b, a) \in g$
- 3)  $g$  <sup>anti</sup>simetrică dacă  $\forall a, b \in A \quad (a, b) \in g \wedge (b, a) \in g \rightarrow a = b$
- 4)  $g$  transzitivă dacă  $\forall a, b, c \in A \quad (a, b) \in g \wedge (b, c) \in g \Rightarrow (a, c) \in g$
- 5)  $g$  relație de preordine :  $g$  reflexivă și transzitivă
- 6)  $g$  relație de ordine parțială:  $g$  reflexivă, transz., și antisimetrică
- 7)  $g$  rel. de echivalență:  $g$  reflexiv., sim., transz.

$$g^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in g\}$$

o

## Proprietăți relații binare

- 1)  $\rho$  reflexivă dacă  $\forall a \in A \quad (a, a) \in \rho$
- 2)  $\rho$  simetrică dacă  $\forall a, b \in A \quad (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$
- 3)  $\rho$  <sup>anti</sup>asimetrică dacă  $\forall a, b \in A \quad (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$
- 4)  $\rho$  transițivă dacă  $\forall a, b, c \in A \quad (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$
- 5)  $\rho$  relație de preordine :  $\rho$  reflexivă și transițivă
- 6)  $\rho$  relație de ordine parțială :  $\rho$  reflexivă, transițivă și antisimetrică
- 7)  $\rho$  rel. de echivalență :  $\rho$  reflexivă, simetrică, transițivă.

## Prop. 1

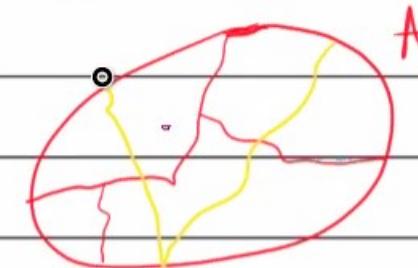
- 1)  $\rho$  reflexivă  $L_A \subseteq \rho$
- 2)  $\rho$  simetrică  $\rho = \rho^{-1}$
- 3)  $\rho$  transițivă  $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

$$L_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$(\overset{\checkmark}{\cdot}, \overset{\checkmark}{=}) \quad (\overset{\checkmark}{=}, \overset{\checkmark}{\cdot}) \quad (\cdot, \cdot)$

Def.  $A \neq \emptyset$   $\text{cl} \subseteq P(A)$  s.n. partitie a lui  $A$  dacă:

- 1)  $B \in \text{cl}$   $B \neq \emptyset$
- 2)  $\forall B, C \in \text{cl}, B \neq C, B \cap C = \emptyset$
- 3)  $A = \bigcup_{B \in \text{cl}} B$



Def. clasa de echivalență a lui  $a$ :  $[a]_g = \{b \in A \mid (a, b) \in g\}$

mt. cât relativ la  $g$ :

$$A/g = \{[a]_g \mid a \in A\}$$

unde  $A \neq \emptyset, g \subseteq A \times A$ , rel. de echiv. pe  $A$

### Inchideri

Def Fie  $g$  relație binară pe  $A$

- 1)  $r(g)$  - închiderea reflexivă a lui  $g$  = cea mai mică relație binară reflexivă
- 2)  $s(g)$  " sim. " = ce include  $g$  " sim. "
- 3)  $t(g)$  " transz " = " transz "

$$a \quad b \quad \quad \quad c \quad d$$