$f: V \to W$ este aplicație liniară dacă

$(\bullet)\ f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \bar{u}, \bar{v} \in V \iff$

Seminar 6

$(\bullet\bullet) \begin{cases} f(\alpha \bar{u}) = \alpha f(\bar{u}) & \text{omog} \\ f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) & \text{aditiv} \end{cases}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

***Exerciţii recomandate:** 6.1(i, iii), 6.2, 6.3, 6.4

***Rezerve:** 6.1(ii), 6.6(iii), 6.7(i)

S6.1 Să se decidă care dintre aplicaţiile date în continuare sunt liniare şi care nu:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 4x_3 + 1)$;

Nu e liniară

$f(0,0,0) = (0-0,\ 4\cdot 0 + 1) = (0,1)$

$f((0,0,0) + (0,0,0)) = f(0,0,0) = (0,1)$

$\neq$

$f(0,0,0) + f(0,0,0) = (0,1) + (0,1) = (0,2)$

$\Rightarrow$ Aplicația nu e aditivă $\Rightarrow$ nu e liniară

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (-x, 4x, 7x^2)$; $\to$ Nu e liniară

$f(1) = (-1, 4, 7)$

$f(2 \cdot 1) = f(2) = (-2, 8, 28)$

$\neq$

$2f(1) = 2(-1, 4, 7) = (-2, 8, 14)$

$\Rightarrow$ Aplicația nu e omogenă $\Rightarrow$ nu e liniară

În general $f(2x) \neq 2f(x)$ pt $x \neq 0$

Dem o prop P pt toate val.

Prop P nu are loc dacă găsim un contraex.

O aplicație nu e liniară dacă de ex:

- apar adunate nr. în def: "+ 5"
- apar puteri

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(\bar{x}) = \underbrace{A}_{m \times n} \underbrace{\bar{x}}_{n \times 1}$ $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

$(1), (2) \Rightarrow f$ liniară

Alternativ e suf să dem că

$f(x_1, x_2) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f$ liniară

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$;

$x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2, -3\lambda x_1 + \lambda x_2)$

$\lambda f(x) = \lambda(2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2, -3\lambda x_1 + \lambda x_2)$

$\Rightarrow f$ omogenă (1)

$f(x+y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), -3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) =$
$(2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2, -3x_1 - 3y_1 + x_2 + y_2)$

$f(x) + f(y) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2) + (2y_1 - y_2, -3y_1 + y_2) =$
$(2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2, -3x_1 + x_2 - 3y_1 + y_2)$

$\Rightarrow f$ aditivă (2)

~~iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (-4x_1 + 3x_2, x_1 + x_2, 5x_1 - 6x_2)$.~~

S6.2 Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism a cărui matrice în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este următoarea:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

dom = codom | aplicație care păstrează structura.
În cazul nostru, păstrează structura de sp liniar, adică e aplic liniară

i) Să se calculeze $T(1,-2,3)$.

$$T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}-1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 3\\ 3\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 4\cdot 3\\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ii) Să se determine matricea lui T în baza $\underbrace{\{(2,3,-1),(0,-2,1),(-1,-1,1)\}}_{\mathcal{B}}$.

$$S_{C\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad S_{C\mathcal{B}}^{-1}$$

$$A_{\mathcal{B}} = (S_{C\mathcal{B}})^{-1}\cdot A\cdot S_{C\mathcal{B}}$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{matrix}}_{\text{Vrem să obț aici matricea identitate}}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{\text{Vom obține inversa}}\right]$$

$L_1 = L_1 + L_3$

$L_2 = L_2 + L_3 - L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{L_3 = L_3 + L_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{L_2 = L_2 + L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{L_1 = L_1 - L_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{L_3 = L_3 - 2L_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{L_3 = L_3 \cdot \tfrac{-1}{3}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 = L_1 + 2L_3 \\ L_2 = L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{S_{CB}^{-1}}$$

$$A_B = (S_{CB})^{-1} \cdot A \cdot S_{CB} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 & 2 & 2 \\ -10 & 4 & 7 \\ 35 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

iii) Să se afle $Im(T)$ şi $rang(T)$.

$$Im\,T = Lin\left(T(e_1), T(e_2), T(e_3)\right)$$

• Studiem dacă ei sunt liniar independenţi $\Leftrightarrow$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{T(e_1)}\!\!\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{T(e_2)}\!\!\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{T(e_3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nr vectori = dim sp $\Leftrightarrow$ a calcula det A

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 + 2C_1]{C_2 = C_2 + C_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 = \frac{1}{5} C_3]{C_2 = \frac{1}{3} C_2} 15 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad T(e_1), T(e_2) \text{ l. indep}$$

$$\Rightarrow Im(T) = Lin\left(\underline{T(e_1), T(e_2)}\right) = \{\alpha T(e_1) + \beta T(e_2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ 3\alpha + 3\beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

rang $T = \dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$

iv) Să se afle $\underbrace{Ker(T)}_{\{x \mid T(x)=0\}}$ şi $def(T)$. $= \dim(Ker(T))$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$

$x_3 = \alpha$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2\alpha \quad | \cdot 3 \\ 3x_1 + 3x_2 = -4\alpha \end{cases} \qquad \begin{matrix} -3x_1 + 3x_2 = -6\alpha \\ 3x_1 + 3x_2 = -4\alpha \end{matrix}$$

$6x_2 = -10\alpha$

$x_2 = -\frac{10}{6}\alpha$

$x_1 = -\frac{10}{6}\alpha + 2\alpha$

$x_1 = \frac{2}{6}\alpha$

$Ker\,T = \{(\frac{1}{3}\alpha, -\frac{5}{3}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$Ker\,T = \{(\alpha, -5\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$def\,T = \dim(Ker\,T) = 1 = \dim \mathbb{R}^3 - rang\,T$

S6.3 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin:

$1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2$ $\quad$ $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$ $\quad$ $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2)\,.$$

a) Să se arate că T este o aplicaţie liniară şi să se scrie matricea corespunzătoare în perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})}}^{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

T de (x_1, x_2) =

$$\text{Matrice} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T \text{ liniară}$$

b) Să se afle matricea operatorului T în raport cu bazele $\hat{B} = \{(1, -1), (2, 3)\}$ şi $\hat{B}' = \{(1, 2, 3), (-2, 1, 3), (1, -1, 1)\}$.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{ccccc}
\text{baza canonică din } \mathbb{R}^2 \to & C_2 & \xrightarrow{A} & C_3 & \leftarrow \text{baza canonică din } \mathbb{R}^3 \\
 & \downarrow S_{C_2\hat{B}} & & \downarrow S_{C_3\hat{B}'} & \\
 & \hat{B} & \dashrightarrow & \hat{B}' &
\end{array}$$

Matricea nouă a operatorului

$$A_{\hat{B}\hat{B}'} = \underbrace{\underbrace{(S_{C_3\hat{B}'})^{-1}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{A}_{3\times 2} \cdot \underbrace{(S_{C_2\hat{B}})}_{2\times 2}}_{3\times 2}$$

$\mathbb{R}^2 \quad C_2 = \{ \bar{e}_1 = (1,0), \quad \bar{e}_2 = (0,1) \}$

$\hat{B} = \{ \bar{v}_1 = (1,-1), \quad \bar{v}_2 = (2,3) \}$

$\mathbb{R}^3 \quad C_3 = \{ \bar{f}_1 = (1,0,0), \quad \bar{f}_2 = (0,1,0),$

$\bar{f}_3 = (0,0,1) \}$

$\hat{B}' = \{ w_1 = (1,2,3), w_2 = (-2,1,3),$

$w_3 = (1,-1,1) \}$

$$\underset{\mathbb{R}^3}{y} = T(\underset{\mathbb{R}^2}{x})$$

Dacă îi scriu pe y și x în C_3 respectiv C_2

$$y = (f_1 \; f_2 \; f_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$x = (e_1 \; e_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\bullet)$$

$$(w_1 \ w_2 \ w_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) S_{C_3 \hat{B}'}$$

$$(v_1 \ v_2) = (e_1 \ e_2) S_{C_2 \hat{B}}$$

Fie $y = (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Scrierea lui y în $\hat{B}'$

$x = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ Scrierea lui x în $\hat{B}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_{C_3 \hat{B}'} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S_{C_2 \hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Înlocuind în $(\circ)$

$$S_{C_3 \hat{B}'} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A \, S_{C_2 \hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(S_{C_3 \hat{B}'}\right)^{-1} A \, S_{C_2 \hat{B}}}_{} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$S_{C_2 \hat{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_{C_3 \hat{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(S_{C,\hat{B}'}\right)^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{\hat{B}\hat{B}'} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 7 & 34 \\ -13 & 34 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$$

S6.4 Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se determine valorile proprii ale lui T şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

1.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Polinomul caract al matricii A

$$= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_1 = C_1 - C_2 - C_3$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -2 \\ \lambda-1 & -2-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_2 = L_2 + L_1$

$L_3 = L_3 + L_1$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left[-(3-\lambda)(1+\lambda)+4\right] =$$

$$(1-\lambda)\left(-(3-\lambda+3\lambda-\lambda^2)+4\right) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda-1)^2 = -(\lambda-1)^3$$

3. Det valorile proprii (rădăcinile polinomului caract) + ordinele lor de multiplicitate.

$$\det(A-\lambda I_3)=0 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1 \quad m_1 = 3$$

pt toți λ găsiți

4. $(A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\det(A - \lambda_1 I_3) = 0}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caut minor nenul

$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $x_1 = \alpha$ nec sec

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 = 2\alpha \\ -x_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \end{matrix}$$

subsp proprii coresp pt λ_1

$V_1 = \{(\alpha, -\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\alpha = 1 \Rightarrow$ o bază în $V_1 = \{(1, -1, -1)\}$

$\underline{\dim V_1 = 1}$

b) Să se precizeze dacă matricea lui T poate fi adusă la forma diagonală şi, în caz afirmativ, să se găsească o bază faţă de care matricea lui T are forma diagonală.

- Toate val proprii reale ✓
- Pt toate val proprii găsite

$m_{\lambda_i} = \dim V_{\lambda_i}$

$\left.\begin{array}{l} m_{\lambda_1} = 3 \\ \dim V_{\lambda_1} = 1 \end{array}\right\}$ Op nu e diagonaliz.

S6.5 Fie endomorfismele

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\,,$$
$$\forall\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

şi

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători;

b) Să se afle subspaţiile proprii şi dimensiunile lor;

c) Să se analizeze posibilitatea diagonalizării lui T_1 şi T_2. În caz afirmativ, să se afle baza în care se manifestă forma diagonală, matricea schimbării de bază în cauză, precum şi forma diagonală ca atare.

S6.6 Fie $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismul care, în raport cu baza alcătuită din $b_1 = (1, -1)$ şi $b_2 = (0, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, fie $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfism care, faţă de vectorii $v_1 = (2, 1)$ şi $v_2 = (-1, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea endomorfismului $T_2 - T_1$ în raport cu sistemul de vectori $\{v_1, v_2\}$, precum şi matricea lui $T_2 \circ T_1$ faţă de baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$.

S6.7 Care dintre endomorfismele date mai jos este diagonalizabil? În caz afirmativ, să se determine forma diagonală în cauză.

i) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{L_1 = L_1 + L_2 + L_3}}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \end{array}$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0 \quad m_1 = 1$

$\lambda_2 = -3 \quad m_2 = 1$

$\lambda_3 = -1 \quad m_3 = 1$

$V_{\lambda_1} \quad \lambda_1 = 0$

$$(A - 0 \cdot I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad x_3 = \alpha \text{ nec sec}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

O bază $v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)$

V_{λ_2} $\quad \lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} -1-(-3) & 1 & 0 \\ 1 & -2+3 & 1 \\ 0 & 1 & -1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \alpha$

var sec

$x_1 + x_2 = -\alpha$

$x_2 = -2\alpha \rightarrow x_1 = \alpha$

$$V_{\lambda_2} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$v_{\lambda_2} = (1, -2, 1)$$

V_{λ_3} $\qquad \lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 1 & 0 \\ 1 & -2+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \alpha \text{ nec sec}$$

$x_2 = 0$

$x_1 - x_2 = -x_3 \to x_1 = -\alpha$

$V_{\lambda_3} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$v_{\lambda_3} = (-1, 0, 1)$

Toate răd reale ✓

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 & m_{\lambda_1} = 1 & \dim V_{\lambda_1} = 1 \\ \lambda_2 & m_{\lambda_2} = 1 & \dim V_{\lambda_2} = 1 \\ \lambda_3 & m_{\lambda_3} = 1 & \dim V_{\lambda_3} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Op diagonaliz.}$$

Forma diagonală

$$\begin{pmatrix} 0=\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -3=\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1=\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Bază în care e diag $\mathcal{B} = \{v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}\} =$

$$S_{C\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_2 - 2x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

iii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (cap.IV)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

2. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iaşi, 2000.

3. O. Dogaru, Cristina Stamin - *Algebră liniară. Calcul vectorial (exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

4. Kenneth Kuttler - *Solutions Manual in Linear Algebra,* The Saylor Foundation, 2013.

5. Erling Stormer - *Positive Linear Maps of Operator Algebras*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2014.