Seminar 1

*Exerciţii recomandate:** S1.1(a,e,f), S1.2, S1.3, S1.4, S1.5, S1.6
*Rezerve:** S1.8, S1.13, S1.14, S.16

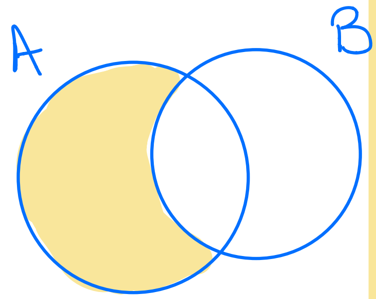
S1.1 Să se arate că, pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

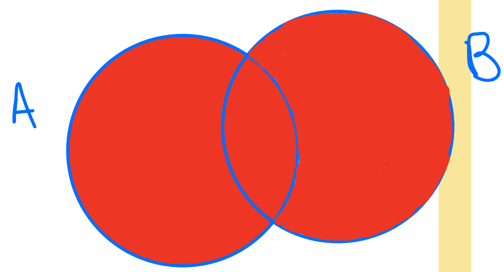
Operații cu mulțimi:

Date $A, B \subseteq X$

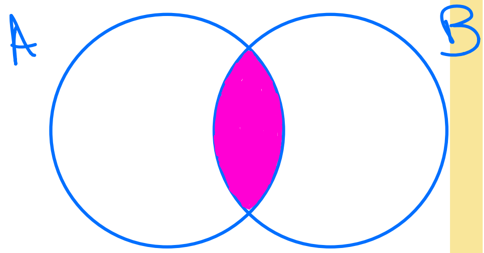
$A \setminus B = \{x \in A \vee x \in B\}$



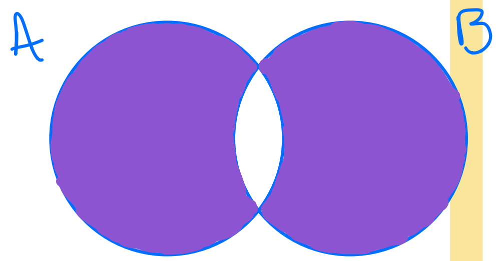
$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$



$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$



$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



a) $A \setminus B = \underbrace{(A \cup B) \setminus B}$

$x \in (A \cup B) \setminus B \iff$

$\underbrace{x \in (A \cup B)} \wedge x \notin B \iff$

$$((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (x \notin B)$$

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$((x\in A)\wedge(x\notin B))\vee\underbrace{((x\in B)\wedge(x\notin B))}\Leftrightarrow$$

$$((x\in A)\wedge(x\notin B))\vee 0 \Leftrightarrow$$

$$(x\in A)\wedge(x\notin B)\Leftrightarrow$$

$$x\in A\setminus B$$

e) $\underbrace{(A\setminus B)\cap C} = \underbrace{(A\cap C)\setminus(B\cap C)}$

$$x\in(A\cap C)\setminus(B\cap C)\Leftrightarrow$$

$$x\in(A\cap C)\wedge x\notin(B\cap C)\Leftrightarrow$$

$$(x\in A\wedge x\in C)\wedge\neg(x\in(B\cap C))\Leftrightarrow$$

$$(x\in A\wedge x\in C)\wedge\neg((x\in B)\underline{\wedge}(x\in C))\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\neg(p\wedge q)=\neg p\vee\neg q\\ \neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q\end{array}}$$

$$(x\in A \wedge x\in C) \wedge \big(\neg(x\in B) \vee \neg(x\in C)\big) \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{(x\in A \wedge x\in C)}_{p} \wedge \big(\underbrace{(x\notin B)}_{q} \vee \underbrace{(x\notin C)}_{r}\big) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$$

$$\big((x\in A \wedge x\in C) \wedge (x\notin B)\big) \vee$$

$$\underbrace{\big(x\in A \wedge \underbrace{(x\in C \wedge x\notin C)}_{0}\big)}_{0} \Longleftrightarrow$$

$$x\in A \wedge x\in C \wedge x\notin B \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{x\in A \wedge x\notin B} \wedge x\in C \Longleftrightarrow$$

$$x\in A\setminus B \wedge x\in C \Longleftrightarrow$$

$$x\in (A\setminus B)\cap C$$

f) $\underbrace{(A \cap B) \Delta (A \cap C)} = A \cap (B \Delta C)$

$x \in (((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup$

$((A \cap C) \setminus (A \cap B))$ $\overset{e}{\Longleftrightarrow}$

$x \in ((B \setminus C) \cap \underline{\underline{A}}) \cup ((C \setminus B) \cap \underline{\underline{A}}) \Longleftrightarrow$

$x \in ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \cap A \Longleftrightarrow$

$x \in (B \Delta C) \cap A$

S1.2 Să se determine mulţimile $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus \overline{A})$, $A \cap (\overline{A} \setminus B)$ ştiind că $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 9)(x + 1) > 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$.

A $\quad (x^2 - 9)(x+1) > 0$ $\qquad x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

$(x-3)(x+3)(x+1) > 0$

x	$-\infty$		-3		-1		3		∞
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$A = (-3, -1) \cup (3, \infty)$

B $\quad x^2 - 2x - 3 > 0$

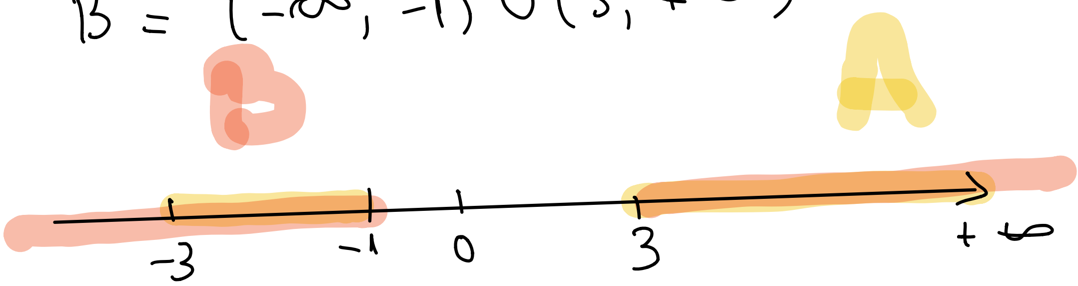
$x^2 - 3x + x - 3 > 0$

$x(x-3) + (x-3) > 0$

$(x-3)(x+1) > 0$

x	$-\infty$		-1		3		∞
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$B = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$



$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \qquad A \setminus B = \emptyset$

$\Rightarrow A \cup B = B$

$\overline{A} = (-\infty, -3] \cup [-1, 3]$

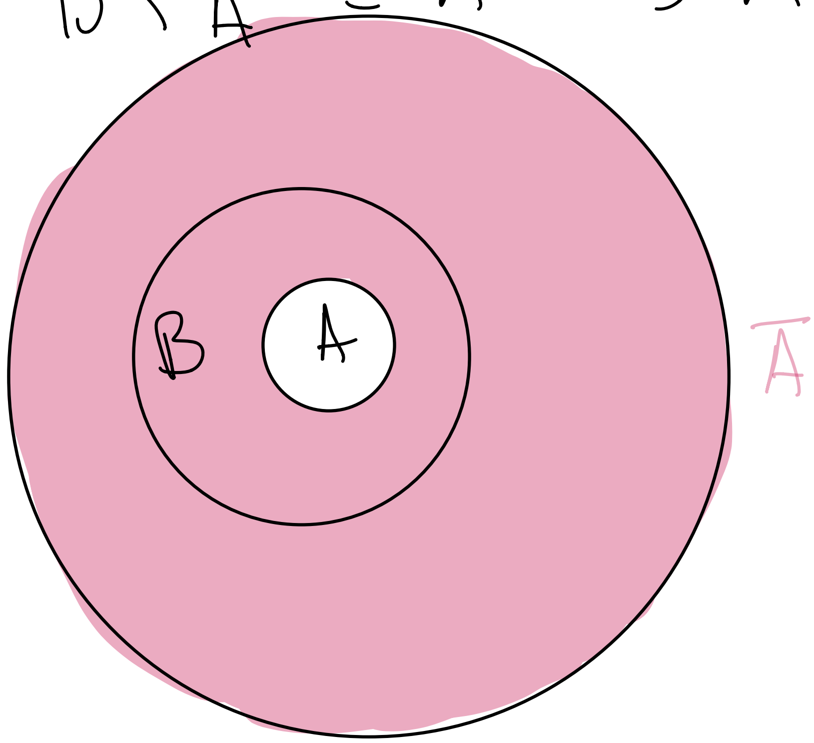
$\overline{B} = [-1, 3]$

$B \setminus A = (-\infty, -3]$

$A \cup (B \setminus \overline{A})$

$B \setminus \overline{A} = A \Rightarrow A \cup \underbrace{(B \setminus \overline{A})}_{A} =$

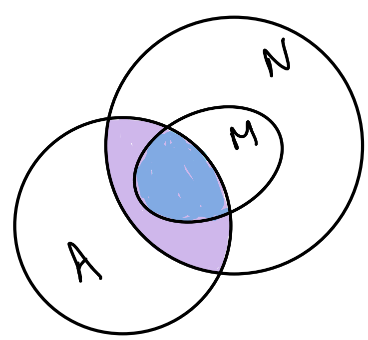
$A \cup A = A$



$M \cap N \Rightarrow$

$A \cap M \subset$

$A \cap N$



$A \cap (\underbrace{\overline{A} \setminus B}_{\subset \overline{A}}) = \emptyset$

$\overline{A} \setminus B \subset \overline{A}$

S1.3 Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră relaţia binară notată cu "div" şi definită prin

$$a \operatorname{div} b \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } b = a \cdot c.$$

1) Arătaţi că relaţia "div" este relaţie de ordine pe $\mathbb{N}^*$. Este relaţia "div" totală?
2) Să se determine mulţimea majoranţilor, mulţimea minoranţilor, inf, sup, min, max pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Relații de ordine $\quad \rho \subseteq \underbrace{A \times A}$

- Reflexivă $\quad \forall x \in A, \ x \rho x$

  $\forall$ ↓ oricare ar fi

- Antisimetrică $\quad \forall x, y \in A$
  Dacă $x \rho y$ și $y \rho x$
  atunci $x = y$

- Tranzitivitatea $\quad \forall x, y, z \in A$
  Dacă $x \rho y$ și $y \rho z$
  atunci $x \rho z$

O relație este totală dacă

$\forall x, y \in A \quad x \rho y$ sau $y \rho x$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y$ sau $y \leq x$

1. R div reflexivă $\quad \forall a \in \mathbb{N}^*$

$\exists c = 1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = a \cdot 1 \Rightarrow$

există

div reflexivă

A div antisimetrică

$\forall a, b \in \mathbb{N}^*$

$a \text{ div } b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot c$

și

$b \text{ div } a \Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a = b \cdot d$

$$b = a \cdot c = b \cdot d \cdot c \Rightarrow d \cdot c = 1$$

$$\Rightarrow d = c = 1$$

$$b = a \cdot 1 \Rightarrow \boxed{b = a}$$

T div tranzitivă

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$

$a \text{ div } b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot x$

$b \text{ div } c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}^*$ a.î. $c = b \cdot y$

a div $c \Leftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{N}^*$ a.î. $c = a \cdot z$

$$c = b \cdot y = a \cdot \underbrace{x \cdot y}_{z}$$

$\Rightarrow a$ div $c \Rightarrow$ div tranzitivă

R, A, T $\Rightarrow$ div este relație de ordine

Relația div nu e totală

$\exists\, a, b \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$\neg(a \text{ div } b)$ și $\neg(b \text{ div } a)$

$\neg(2 \text{ div } 3)$ și $\neg(3 \text{ div } 2)$

$(X, \leq)$ X mulțime ordonată

$(\mathbb{R}, \leq)$ $A = (3, 4]$

$A \subseteq X$

- **minorant**

$x \in X$ este minorant pt A dacă $\forall a \in A \quad x \leq a$

ex: 0 pt A 3 pt A

- **inf**

$x \in X$ este infimum pt A dacă $\forall a \in A \quad x \leq a$

și $\forall y \in X \quad y \leq a \ \forall a \in A$

$\Rightarrow y \leq x$ este unic dacă există

- **min**

ex: 3 pt A

$a \in A$ este minim pt A dacă $\forall b \in A \quad a \leq b$

ex: $\nexists$ minim pt A

dacă $\inf \in A \Rightarrow$ $\min = \inf$

- **majorant**

$x \in X$ este majorant pt A dacă $\forall a \in A \quad a \leq x$

ex: 5 pt A, 4 pt A

- **sup**

$x \in X$ este supremum pt A dacă $\forall a \in A \quad a \leq x$

și $\forall y \in X \quad a \leq y \ \forall a \in A$

$\Rightarrow x \leq y$

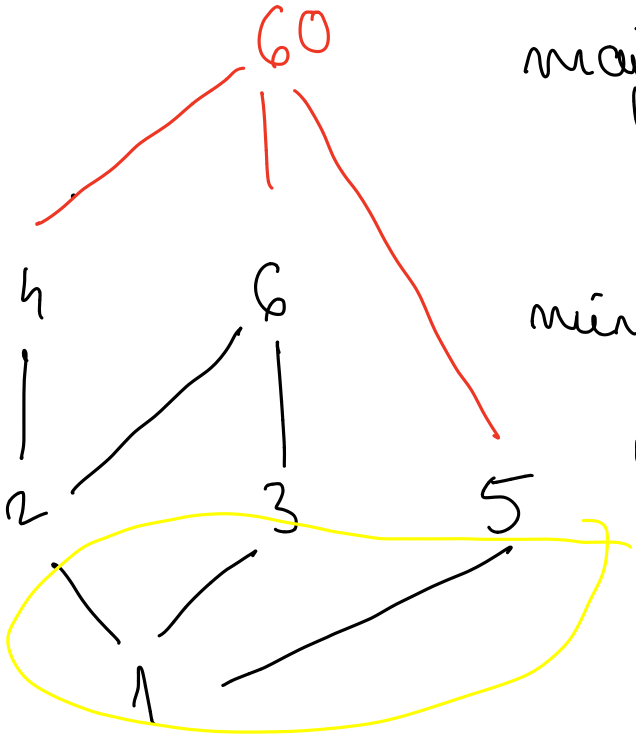
ex: 4 pt A este unic dacă există

- **max**

$a \in A$ este maxim pt A dacă $\forall b \in A \quad b \leq a$

ex: 4 pt A

dacă $\sup \in A \Rightarrow$ $\max = \sup$



$\text{maj } A = \mathcal{M}_{60} = \{60, 120, \dots\}$

$\text{minor } A = \mathcal{D}_1 = \{1\}$

$\inf A = 1$

$\sup A = 60$

$\min A = 1$

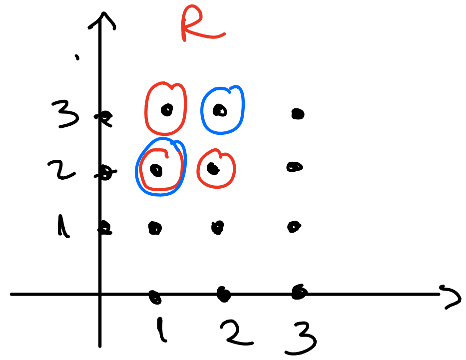
$\nexists \max A$

S1.4 Fie $X = \{1, 2, 3\}$ şi, în raport cu X, relaţiile binare

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\} \subseteq X \times X, \quad S = \{(1, 2), (2, 3)\}. \subseteq X \times X$$

Să se determine domeniul, codomeniul şi inversa fiecăreia dintre relaţiile date. Să se verifice apoi egalitatea

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$



$Dom(R) = \{1, 2\}$

$Im(R) = \{2, 3\}$

$Dom(S) = \{1, 2\}$

$Im(S) = \{2, 3\}$

$g(f(x))$

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2)\} =$

$\{(2,1), (2,2), (3,1)\}$

$S^{-1} = \{(2,1), (3,2)\}$

$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ $\quad (AB)^t = B^t \cdot A^t$

$S \circ R = \{(1,3), (2,3)\}$

$(S \circ R)^{-1} = \{(3,1), (3,2)\}$

$||$

$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(3,1), (3,2)\}$

S1.5 Utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi, să se resoluţioneze exerciţiul **S1.1**.

a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Funcţia caracteristică

$$\chi_A : X \to \{0, 1\} \qquad A \subseteq X$$

$$\chi_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y \notin A \\ 1, & \text{dacă } y \in A \end{cases}$$

$$\chi_A^2 = \chi_A$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

$$\chi_{(A \cup B) \setminus B} = \chi_{(A \cup B)} - \underbrace{\chi_{A \cup B}}\chi_B$$

$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B -$$

$$(\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B)\chi_B$$

$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B -$$

$$\chi_A \chi_B - \chi_B^2 + \chi_A \chi_B^2 =$$

$$= \chi_A + \cancel{\chi_B} - \chi_A \cdot \chi_B -$$

$$\chi_A \cancel{\chi_B} - \cancel{\chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_B}$$

$$= \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B =$$

$$\chi_{A \setminus B}$$

2. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$$\chi_{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\setminus C} - \chi_{A\setminus B}\,\chi_{A\setminus C} =$$

$$\chi_A - \chi_A\cdot\chi_B + \chi_A - \chi_A\cdot\chi_C - (\chi_A - \chi_A\cdot\chi_B)(\chi_A - \chi_A\cdot\chi_C)$$

$$= \cancel{2}\chi_A - \chi_A\cdot\cancel{\chi_B} - \chi_A\cdot\cancel{\chi_C} - \cancel{\chi_A} + \chi_A\cancel{\chi_C} + \chi_A\cancel{\chi_B} - \chi_A\cdot\chi_B\cdot\chi_C =$$

$$\chi_A - \chi_A\cdot\chi_B\cdot\chi_C =$$

$$\chi_A - \chi_A\cdot\chi_{B\cap C} =$$

$$\chi_{A\setminus(B\cap C)}$$

3. $\underline{A \setminus (B \cup C)} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\chi_{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)} = \chi_{A \setminus B} \cdot \chi_{A \setminus C} =$

$= (\chi_A - \chi_A \chi_B)(\chi_A - \chi_A \chi_C)$

$= \chi_A - \chi_A \chi_B - \chi_A \chi_C +$

$\chi_A \chi_B \chi_C =$

$\chi_A - \chi_A(\chi_B + \chi_C - \chi_B \chi_C)$

$= \chi_A - \chi_A \chi_{B \cup C} =$

$\chi_{A \setminus (B \cup C)}$

4. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$\chi_{(A \setminus C) \cap (B \setminus C)} = \chi_{A \setminus C} \cdot \chi_{B \setminus C} =$

$(\chi_A - \underline{\chi_A \chi_C})(\chi_B - \chi_B \chi_C)$

$= \chi_A \chi_B - \chi_A \chi_B \chi_C - \cancel{\chi_A \chi_B \chi_C} +$

$\chi_A \chi_B \chi_C = \chi_{A \cap B} - \chi_{A \cap B} \chi_C =$

$\chi_{(A \cap B) \setminus C}$

5. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

$\chi_{(A \cap C) \setminus (B \cap C)} = \underline{\chi_{A \cap C}} -$
$\chi_{A \cap C} \chi_{B \cap C} =$

$\chi_A \chi_C - (\chi_A \chi_C)(\chi_B \chi_C)$

$= \underline{\chi_A \chi_C - \chi_A \chi_B \chi_C}$

$\chi_{(A \setminus B) \cap C} = \chi_{A \setminus B} \chi_C =$
$(\chi_A - \chi_A \chi_B) \chi_C =$
$\underline{\chi_A \chi_C - \chi_A \chi_B \chi_C}$

$\chi_{(A \cap C) \setminus (B \cap C)} = \chi_{(A \setminus B) \cap C} \Rightarrow$
$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$

6. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$$\chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - 2\chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} =$$

$$\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_A\chi_C =$$

$$\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C$$

$$\chi_{A\cap(B\Delta C)} = \chi_A\chi_{B\Delta C} =$$

$$\chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C)$$

$$= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C$$

$$\chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = \chi_{A\cap(B\Delta C)} \Rightarrow$$

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C) = A\cap(B\Delta C)$$

S1.6 Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru următoarele funcţii:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \underline{\arcsin(\ln x)} + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

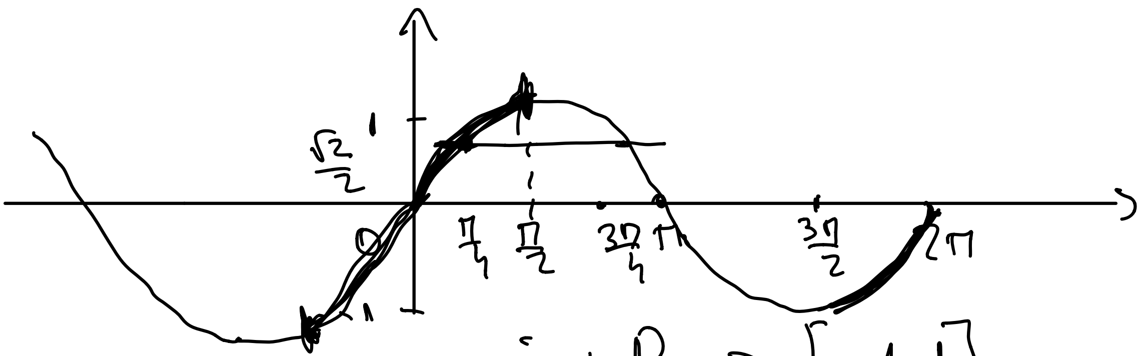
b) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \ln((1 - y)x)$;

c) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$;

d) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^{zy}$;

e) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2-9}$.

a) CE $\quad \arcsin : \underline{[-1, 1]} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

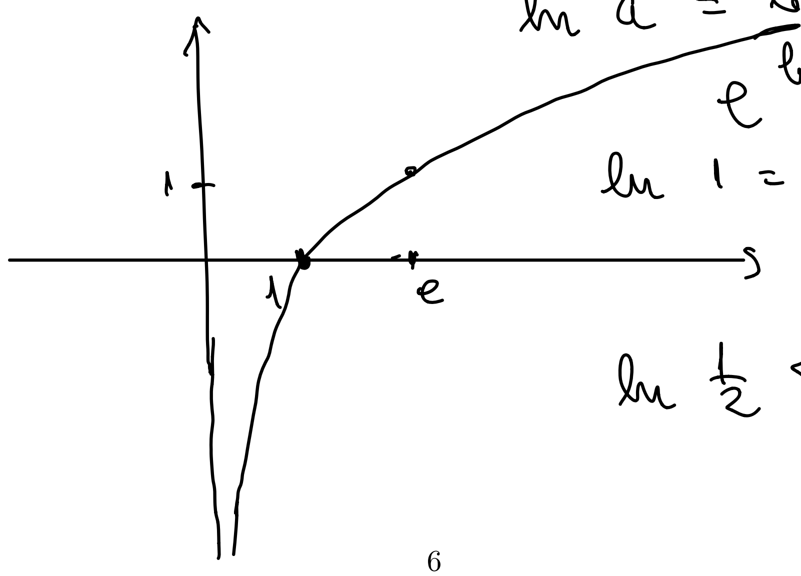


$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\ln : \underline{(0, \infty)} \to \mathbb{R}$

$\ln a = b \Leftrightarrow$



$e^b = a$

$\ln 1 = 0 \qquad e^0 = 1$

$\ln \frac{1}{2} < 0$

$\sqrt{\ } : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\ln x \Rightarrow D \subset \text{Dom } \ln = (0, \infty)$

$$\frac{-1 \leq \ln x \leq 1}{e^{-1} \leq e^{\ln x} \leq e^{1}} \Big| e$$

$\frac{1}{e} \leq x \leq e \Rightarrow \underline{D \subset [\frac{1}{e}, e]}$

$D = [\frac{1}{e}, e]$

$\sqrt{1-\ln^2 x} \Rightarrow 1-\ln^2 x \geq 0 \Rightarrow$

$1 \geq \ln^2 x \Rightarrow$

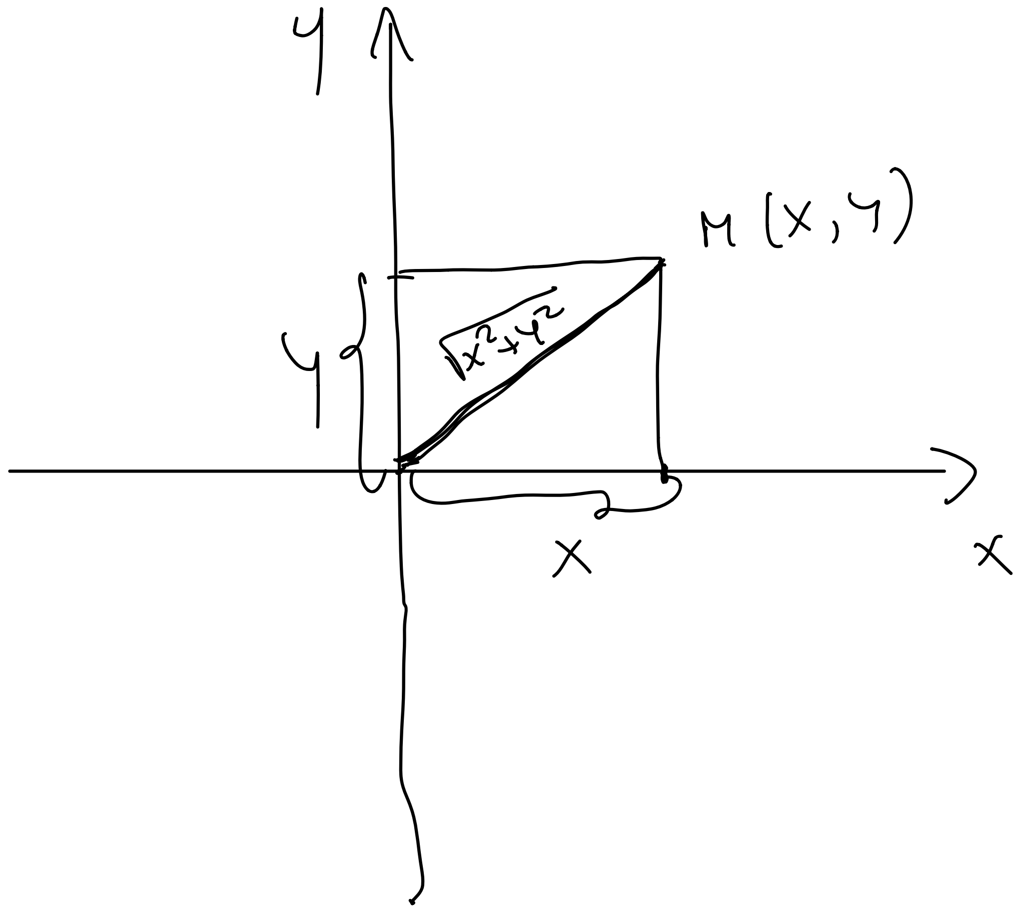
$\ln x \in [-1, 1]$

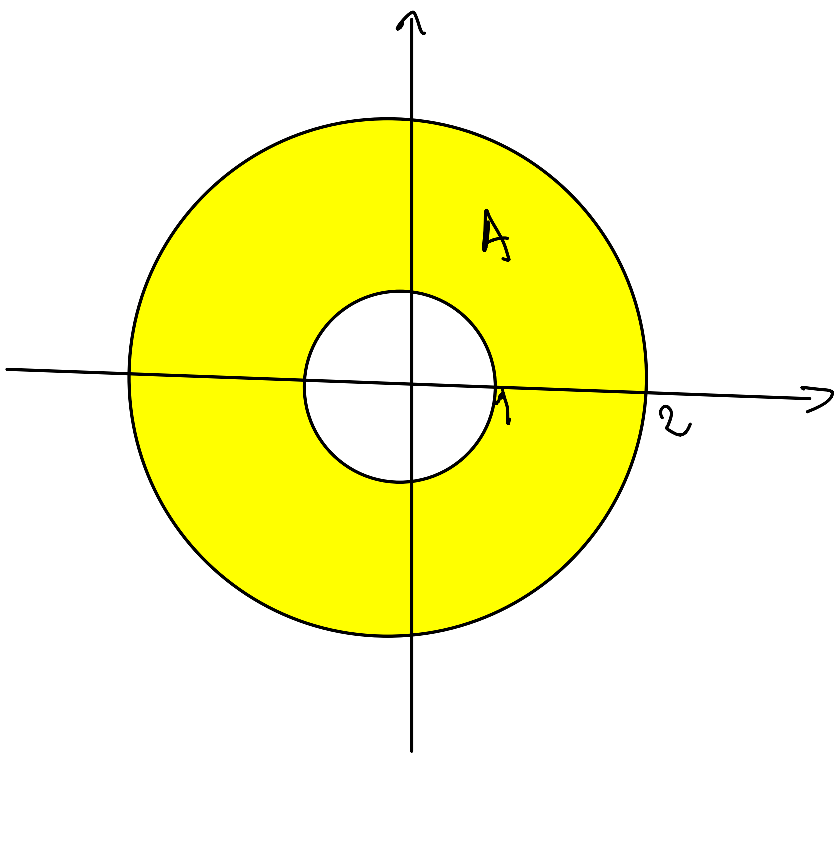
c) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2-1}, \sqrt{4-x^2-y^2})$

$x^2+y^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1$

$4-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2+y^2$


y
M (x, y)
$\sqrt{x^2+y^2}$
y
x
x


A
1
2

S1.7 Să se arate că dacă mulţimile A, B şi C satisfac, simultan, relaţiile

$$A \cup B = C, \tag{1}$$

$$(A \cup C) \cap B = C, \tag{2}$$

$$(A \cap C) \cup B = A, \tag{3}$$

atunci ele sunt egale.

S1.8 Pentru oricare două submulţimi, A şi B, ale unei mulţimi E, are loc relaţia:

$$(C_A \Delta C_B) \cap C_{B \setminus A} = A \setminus B.$$

S1.9 Arătând în prealabil că, în $\mathcal{P}(E)$, avem

$$A\Delta B = C \Longleftrightarrow B = A\Delta C,$$

să se rezolve ecuaţia

$$A\Delta X = B$$

în cazul în care $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{b, d, e\}$.

S1.10 Considerându-se relaţiile binare $\rho = \{(3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi $\delta = \{(b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $\rho \circ \delta = 1_{\mathbb{R}}$.

S1.11 Fie $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ şi $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci şi g este surjectivă.

S1.12 Două mulţimi nevide A şi B se numesc echipotente dacă există măcar o bijecţie $f : A \to B$. Să se arate că relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă.

S1.13 Fie $G = \{(z, u) \mid z, u \in \mathbb{C},\ u = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Este G o relaţie de tip funcţie?

S1.14 Fie $X \neq \varnothing$ o mulţime cu cel puţin două elemente şi $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. Pentru oricare $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, se consideră relaţia "$\preccurlyeq$" definită prin:

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X.$$

Să se arate că $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \preccurlyeq)$ este o mulţime ordonată, dar nu şi total ordonată.

S1.15 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este bijectivă dacă şi numai dacă

$$C_{f(A)} = f(C_A), \ \forall \ A \in \mathcal{P}(X).$$

S1.16 a) Cunoscută fiind mulţimea $A \in \mathcal{P}(E)$, să se rezolve (în $\mathcal{P}(E)$) ecuaţia:

$$X \cap A = X \cup A.$$

b) Să se arate că:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B, \ \forall \ A, B \in \mathcal{P}(E).$$

Bibliografie recomandată

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică.Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

4. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică.Exerciţii şi probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

5. R. Gologan, A. Halanay ş.a. - *Probleme de examen. Analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

6. W. Weiss - *An introduction to Set Theory*, 2008

7. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis,* Pearson Education Publ., 2009

8. J. Goudsmit, R. Iemhoff - *On sets, functions and relations*, 2012.