Seminar 1

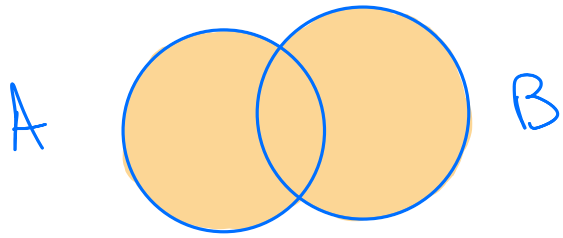
***Exerciţii recomandate:** S1.1(a,e,f), S1.2, S1.3, S1.4, S1.5, S1.6
***Rezerve:** S1.8, S1.13, S1.14, S.15

S1.1 Să se arate că, pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

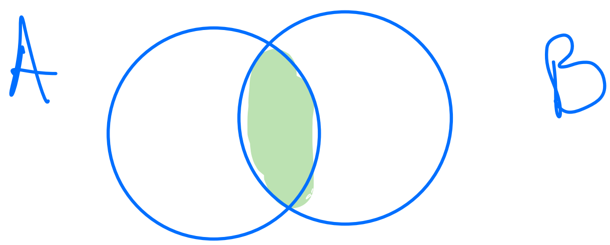
a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Operații cu mulțimi

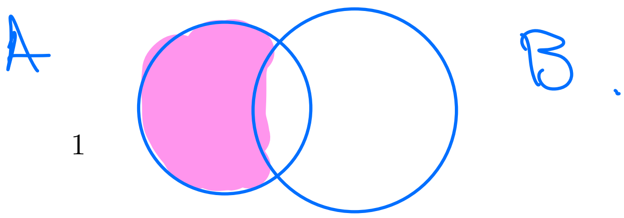
reuniune $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$



intersecție $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$

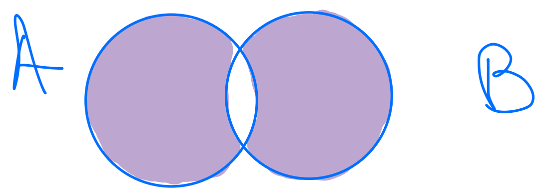


diferența $A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$



diferența simetrică

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Tip: Porniți cu mulțimea "mai complicată"

a) $(x \in A \cup B) \wedge (x \notin B) \iff$

$$(\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}) \wedge (\underbrace{x \notin B}_{r}) \iff$$

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Analogie:

$$(3+2) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5$$

dem:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{0} \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow$$

$$x \in A \setminus B$$

(0 nu influențează val de adevăr la "sau": $p \vee 0 \equiv p$)

Alternativ

$$(x \in A \setminus B) \cup (x \in \underbrace{B \setminus B}_{\emptyset})$$

$$x \in A \setminus B$$

e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

$$x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \cap C) \wedge (x \notin B \cap C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B \cap C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$ poate fi dem cu tabel de adevăr

$$\underbrace{(x \in A \wedge x \in C)}_{p} \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Analogie :

$$2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$$(x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in \underbrace{C \wedge x \notin C}_{0}) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$x \in A \setminus B \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$x \in (A \setminus B) \cap C$$

f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$$x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C) \Leftrightarrow$$

$$x \in ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap \underline{C}) \setminus (A \cap \underline{\underline{B}})) \Leftrightarrow$$

(folosim e)

$x \in ((B \setminus C) \cap A) \cup ((C \setminus B) \cap A) \Leftrightarrow$

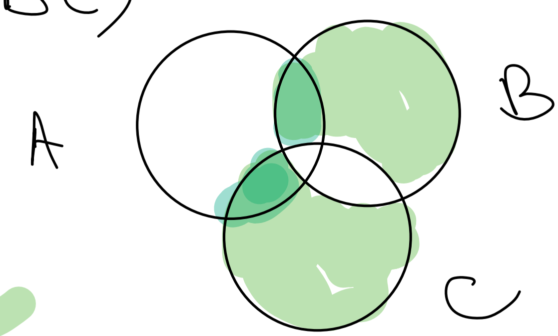
Analogie

$2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = (2+4) \cdot 3$

$x \in \underbrace{((B \setminus C) \cup (C \setminus B))}_{} \cap A \Leftrightarrow$

$x \in (B \Delta C) \cap A \Leftrightarrow$

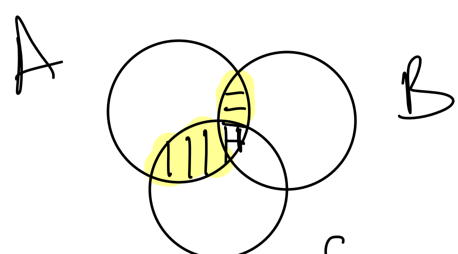
$x \in A \cap (B \Delta C)$



B Δ C

$A \cap B$ ≡

$A \cap C$ |||



$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$ doar una dintre hașurări

S1.2 Să se determine mulţimile $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus \overline{A})$, $A \cap (\overline{A} \setminus B)$ ştiind că $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 9)(x + 1) > 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$.

Complementara se calculează în raport cu $\mathbb{R}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

A

$(x^2 - 9)(x+1) > 0$

$(x-3)(x+3)(x+1) > 0$

x	-3 $\quad$ -1 $\quad$ 3
$x-3$	$-\ -\ -\ -\ 0\ +$
$x+3$	$-\ -\ 0\ +\ +\ +\ +$
$x+1$	$-\ -\ -\ 0\ +\ +\ +$
$(x-3)(x+3)(x+1)$	$-\ \ 0\ +\ 0\ -\ 0\ +\ +$

$A = (-3, -1) \cup (3, \infty)$

B

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$

$\dfrac{2 \pm 4}{2}$ → $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

$x^2 - 3x + x - 3 > 0$

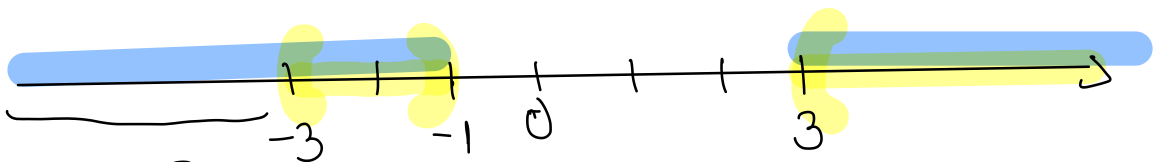
$x(x-3) + (x-3) > 0$

$(x-3)(x+1) > 0$

Coef lui $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$

în afara rădăcinilor

$B = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$



$A \subset B$

$\Rightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow A \cup B = B$

$\overline{A}$ (complementara lui $A = \mathbb{R} \setminus A$)

$\overline{A} = (-\infty, -3] \cup [-1, 3]$

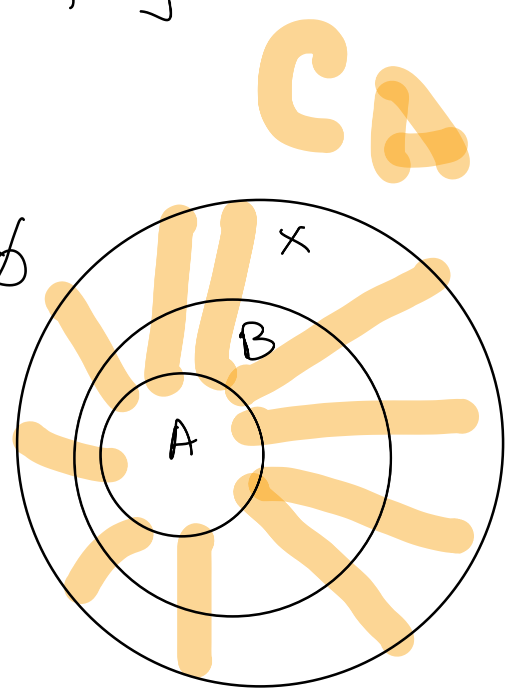
$\overline{B} = [-1, 3]$

$A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

$B \setminus A \Rightarrow (-\infty, -3]$

$A \cup (B \setminus \overline{A})$

$A \subset B \Rightarrow B \setminus \overline{A} = A$



$$A \cup (B \setminus \bar{A}) = A$$

$$A \cap \underbrace{(\bar{A} \setminus B)}_{\subset \bar{A}} = \emptyset$$ (nu depinde de mulțimile efective)

S1.3 Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră relaţia binară notată cu "div" şi definită prin

$$a \,\text{div}\, b \iff \exists\ c \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } b = a \cdot c.$$

a) Arătaţi că relaţia "div" este relaţie de ordine pe $\mathbb{N}^*$. Este relaţia "div" totală?
b) Să se determine mulţimea majoranţilor, mulţimea minoranţilor, inf, sup, min, max pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Relații binare

Cele mai des întâlnite tipuri de relații binare sunt
- echivalență
- ordine

exemple: egalitatea, paralelismul, congruența

Fie $\rho \subseteq X \times X$

Prop:

Reflexivitate: $\forall\, x \in X \quad x \rho x$

$1_X \subseteq \rho$

$\shortparallel$
$\{(x, x) \mid x \in X\}$

ex: $x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

, cuantificatori

$\forall$ - oricare ar fi

"pt toate"

$\exists$ - există

măcar unul

cex: "<" Niciun număr nu e mai mic decât el însuși

Simetrie: $\forall x, y \in X$

Dacă $x \rho y$, atunci $y \rho x$

ex: $x = y \Rightarrow y = x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

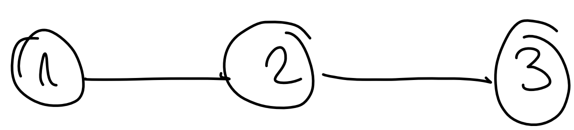
cex: $2 < 3 \not\Rightarrow 3 < 2$

Tranzitivitate $\forall x, y, z \in X$

Dacă $x \rho y$ și $y \rho z$, atunci $x \rho z$

ex: $\left.\begin{array}{l} 2 \le 3 \\ 3 \le 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \le 4$

cex: Vf 1 vecin cu 2, 2 vecin cu 3 $\Big\} \not\Rightarrow$ 1 vecin cu 3



O relație este de echiv. dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă

O relație este de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă

Antisimetrie $\forall x, y \in S$

Dacă $x S y$ și $y S x$, atunci $x = y$

ex: $x \leq y$ și $y \leq x$ $\Rightarrow x = y$

S1.3 Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră relaţia binară notată cu "div" şi definită prin

$$a \operatorname{div} b \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } b = a \cdot c.$$

a) Arătaţi că relaţia "div" este relaţie de ordine pe $\mathbb{N}^*$. Este relaţia "div" totală?
b) Să se determine mulţimea majoranţilor, mulţimea minoranţilor, inf, sup, min, max pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Reflexivitate: Caut $c \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a = a \cdot c$

$\forall a\ \exists\ 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a = a \cdot c \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \operatorname{div} a$ $\forall a \in \mathbb{N}^*$

Antisimetrie:

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$\begin{cases} a \text{ div } b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, c \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } b = a \cdot c \quad (1) \\ b \text{ div } a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, d \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } a = b \cdot d \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$a \overset{(2)}{=} b \cdot d \overset{(1)}{=} a \cdot c \cdot d \quad \Big| : a \neq 0$$

$$1 = c \cdot d \Rightarrow c = d = 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} b = a$$

Tranzitivitatea:

Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$\begin{cases} a \text{ div } b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, x \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } b = a \cdot x \quad (3) \\ b \text{ div } c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, y \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } c = b \cdot y \quad (4) \end{cases}$$

$$c \overset{(4)}{=} b \cdot y \overset{(3)}{=} a \cdot \underbrace{x \cdot y}_{z}$$

$$\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{N}^* \quad z = x \cdot y \quad \text{a.î. } c = a \cdot z \Rightarrow$$

a div c

$R + A + T \Rightarrow$ div este relație de ordine

Este totală?

Totală: $\underline{\forall x, y \in X}$ are loc

$x \mathcal{S} y$ <u>sau</u> $y \mathcal{S} x$

<u>ex</u>: $\leq$ pe $\mathbb{R}$

Negarea faptului că o relație e totală presupune a găsi măcar x, y a.î.

$\neg(x \text{ div } y)$ și $\neg(y \text{ div } x)$

$\neg(2 \text{ div } 3)$ și $\neg(3 \text{ div } 2)$

$\Rightarrow$ div nu e totală.

b) Fie $\leq \subset X \times X$ o relație de ordine pe X și fie $A \subset X$

<u>min A</u>: $\forall a \in A$

$\min A \leq a$

<u>minoranții lui A</u>

$x \in X$ se numește

max A: $\forall a \in A$

$a \leq \max A$

<u>majoranții lui A</u>

$x \in X$ se numește

minorant pt A dacă

$\forall a \in A \quad x \le a$

infimum $A \in X$

inf A este cel mai mare dintre minoranți

majorant pt A dacă

$\forall a \in A \quad a \le x$

supremum $A \in X$

sup A este cel mai mic dintre majoranți

$\forall a \in A \quad \inf A \le a$

$\forall$ maj $\in X$ a.î. maj $\le a \ \forall a$

atunci maj $\le \inf A$

$X = \mathbb{N}^*$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

din

Opțional* Laticea divizorilor

2 divizori

min A = 1

$\nexists$ max A

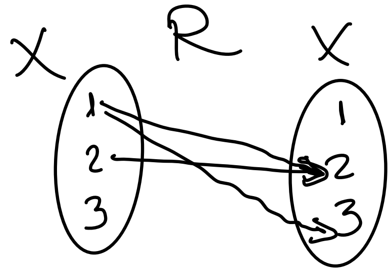
majoranții lui A

$= \{60, 120, \dots\}$

minoranții lui $A = \{1\}$

$\sup A = 60$ $\qquad$ $\sup A \cap A = \max A$

$\inf A = 1$ $\qquad$ $\inf A \cap A = \min A$



S1.4 Fie $X = \{1, 2, 3\}$ şi, în raport cu X, relaţiile binare

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}, \quad S = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Să se determine domeniul, codomeniul şi inversa fiecăreia dintre relaţiile date. Să se verifice apoi egalitatea

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$

O relație f pe mulțimile A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$

relație binară pe $A \times A$.

$X = \{1, 2, 3\}$

$X \times X = \{(1,1), (1,2), (1,3),$
$(2,1), (2,2), (2,3),$
$(3,1), (3,2), (3,3)\}$

$f : A \to B$ $\quad \forall a\ \exists b\ f(a) = b$ $\quad (a, b)$

Fct = caz particular de relații

Domeniul = mulțimea tuturor elementelor de pe prima poziție

$\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2\}$

Domeniul

Codomeniul = Imag

Codomeniul = mulțimea elementelor de pe a doua poziție

$Im(R) = \{2, 3\}$

pt relația inversă, scriem toate perechile invers

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2)\}$

$R^{-1} = \{(2,1), (2,2), (3,1)\}$

pt estetica scriem

$$S = \{(1,2), (2,3)\}.$$

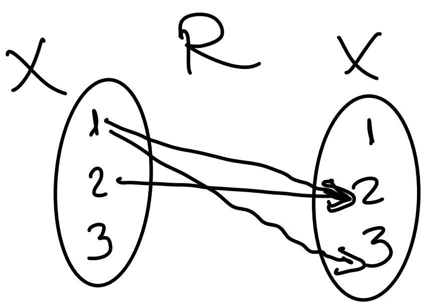
$Dom(S) = \{1, 2\}$

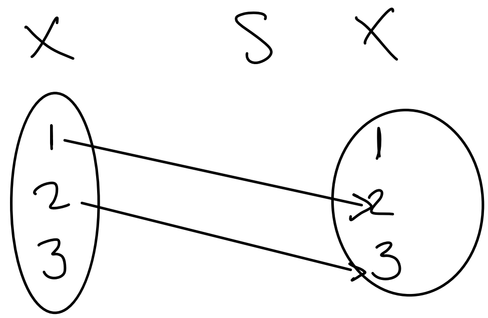
$Im(S) = \{2, 3\}$

$S^{-1} = \{(2,1), (3,2)\}$

$$(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$$

Analogie cu matrici $= (A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$





$$1 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{S} 3$$

$$S\circ R = \{(1,3),(2,3)\}$$

$$f\circ g = \underset{S}{f}(\underset{R}{g}(x))$$

$$(S\circ R)^{-1} = \{(3,1),(3,2)\}$$

$$3 \xrightarrow{S^{-1}} 2 \xrightarrow{R^{-1}} 1$$

$$R^{-1}\circ S^{-1} = \{(3,1),(3,2)\}$$

S1.5 Utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi, să se resoluţioneze exerciţiul **S1.1**.

a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Fct. caracteristică

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

$$\chi_A^{\alpha} = \chi_A \quad \forall \alpha > 0$$

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$$

a) $\chi_{(A \cup B) \setminus B} =$

$\chi_{A \cup B} -$

$\chi_{A \cup B}\chi_B =$

$\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

$- (\chi_A + \chi_B -$

$\chi_A \chi_B)\chi_B =$

$\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B -$

$\chi_A \chi_B - \chi_B^2 + \chi_A \chi_B^2 =$

$\chi_A + \cancel{\chi_B} - \chi_A \chi_B - \cancel{\chi_A \chi_B} - \cancel{\chi_B} +$

$\cancel{\chi_A \chi_B} = \chi_A - \chi_A \chi_B = \chi_{A \setminus B}$

b) $\chi_{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\setminus C} -$

$\chi_{A\setminus B}\chi_{A\setminus C} =$

$\chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A - \chi_A\chi_C -$

$(\chi_A - \chi_A\chi_B)(\chi_A - \chi_A\chi_C) =$

$\chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A - \chi_A\chi_C -$

$(\chi_A^2 - \chi_A^2\chi_B - \chi_A^2\chi_C +$

$\chi_A^2\chi_B\chi_C) =$

$\chi_A - \cancel{\chi_A\chi_B} + \cancel{\chi_A} - \cancel{\chi_A\chi_C} -$

$\cancel{\chi_A} + \cancel{\chi_A\chi_B} + \cancel{\chi_A\chi_C} -$

$\chi_A\chi_B\chi_C =$

$\chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C$

$\chi_{A\setminus(B\cap C)} = \chi_A - \chi_A\chi_{B\cap C} =$

$\chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\chi_{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)} = \chi_{A\setminus(B\cap C)} \Rightarrow$$

$$(A\setminus B)\cup(A\setminus C) = A\setminus(B\cap C)$$

S1.6 Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru următoarele funcţii:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

b) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \ln((1 - y)x)$;

c) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$;

d) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^{zy}$;

e) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2-9}$.

S1.7 Să se arate că dacă mulţimile A, B şi C satisfac, simultan, relaţiile

(1) $$A \cup B = C,$$

(2) $$(A \cup C) \cap B = C,$$

(3) $$(A \cap C) \cup B = A,$$

atunci ele sunt egale.

S1.8 Pentru oricare două submulţimi, A şi B, ale unei mulţimi E, are loc relaţia:

$$(C_A \Delta C_B) \cap C_{B \setminus A} = A \setminus B.$$

S1.9 Arătând în prealabil că, în $\mathcal{P}(E)$, avem

$$A\Delta B = C \Longleftrightarrow B = A\Delta C,$$

să se rezolve ecuaţia

$$A\Delta X = B$$

în cazul în care $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{b, d, e\}$.

S1.10 Considerându-se relaţiile binare $\rho = \{(3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi $\delta = \{(b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $\rho \circ \delta = 1_{\mathbb{R}}$.

S1.11 Fie $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ şi $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci şi g este surjectivă.

S1.12 Două mulţimi nevide A şi B se numesc echipotente dacă există măcar o bijecţie $f : A \to B$. Să se arate că relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă.

S1.13 Fie $G = \{(z, u) \mid z, u \in \mathbb{C},\ u = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Este G o relaţie de tip funcţie?

S1.14 Fie $X \neq \varnothing$ o mulţime cu cel puţin două elemente şi $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. Pentru oricare $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, se consideră relaţia "$\preccurlyeq$" definită prin:

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X.$$

Să se arate că $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \preccurlyeq)$ este o mulţime ordonată, dar nu şi total ordonată.

S1.15 a) Cunoscută fiind mulţimea $A \in \mathcal{P}(E)$, să se rezolve (în $\mathcal{P}(E)$) ecuaţia:

$$X \cap A = X \cup A.$$

b) Să se arate că:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B, \ \forall \ A, B \in \mathcal{P}(E).$$

Bibliografie recomandată

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică.Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

4. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică.Exerciţii şi probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

5. R. Gologan, A. Halanay ş.a. - *Probleme de examen. Analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

6. W. Weiss - *An introduction to Set Theory*, 2008

7. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis,* Pearson Education Publ., 2009

8. J. Goudsmit, R. Iemhoff - *On sets, functions and relations*, 2012.