Sem11-A5

Monday, 14 December 2020 10:01

$S, \alpha \models \varphi$

φ satisfiabilă în S ddacă există o S-atribuire α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

φ satisfiabilă ddacă există o structura S și există o S-atribuire α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

φ validă în S ddacă pt. orice S-atribuire α avem $S, \alpha \models \varphi$

φ validă ddacă pt orice structură S și pt orice S-atribuire α avem $S, \alpha \models \varphi$

Ex 82 $\varphi = \forall x. \exists y. P(x, y)$ - nu este validă

ddacă există o structura S și există o S-atribuire α a.î. $S, \alpha \not\models \varphi$

Explicităm $S, \alpha \models \varphi$

$S, \alpha \models \forall x. \exists y. P(x, y)$ ddacă

pt orice $u \in D$ avem $S, \alpha[x \mapsto u] \models \exists y. P(x,y)$ ddacă

pt orice $u \in D$, există $v \in D$ a.î. $S, \underbrace{\alpha[x \mapsto u][y \mapsto v]}_{\alpha_1} \models P(x, y)$ ddacă

pt orice $u \in D$, există $v \in D$ a.î. $P^S(\overline{\alpha_1}(x), \overline{\alpha_1}(y))$

ddacă pt orice $u \in D$, există $v \in D$ a.î. $P^S(u, v)$

căutăm S și α a.î. nu are loc

$\Sigma = (\{P\}, \{f, i, e\})$

$S = (N, \{>\}, \{+, s, 0\})$

$\alpha : X \to N$, $\alpha(x) = 1$ pt orice $x \in X$

pt. orice $u \in N$, există $v \in N$ a.î. $u > v$ "F"

pt. $u = 0$, nu există $v \in N$ a.î. $0 > v$

$\Rightarrow \varphi$ nu este validă

Ex 81 $\varphi = \underbrace{(\forall x. P(x, x))}_{\varphi_1} \to \underbrace{\exists x_2. P(x_1, x_2)}_{\varphi_2}$ - validă

ddacă pt orice structură S și pt orice S-atribuire α avem $S, \alpha \models \varphi$

Fie S, α - arbitrare.

$S, \alpha \models \varphi$

ddacă $S, \alpha \not\models \forall x. P(x, x)$

sau

$S, \alpha \models \exists x_2. P(x_1, x_2)$

ddacă NU pt orice $u \in D$, avem $S, \alpha[x \mapsto u] \models P(x, x)$

sau

există $v \in D$ a.î. $S, \alpha[x_2 \mapsto v] \models P(x_1, x_2)$

ddacă NU pt orice $u \in D$, avem $P^S(\overline{\alpha[x \mapsto u]}(x), \overline{\alpha[x \mapsto u]}(x))$

sau

există $v \in D$ a.î. $P^S(\overline{\alpha[x_2 \mapsto v]}(x_1), \overline{\alpha[x_2 \mapsto v]}(x_2))$

ddacă NU pt orice $u \in D$, avem $P^S(u, u)$ (1)

sau

există $v \in D$ a.î. $P^S(\alpha(x_1), v)$ (2)

caz 1 : dacă (1) este "A" $\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$

caz 2 : dacă (1) este "F" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pt. orice $u \in D$, avem $P^S(u, u)$

$\alpha(x_1) = w$ arbitrar

există $v \in D$ a.î. $P^S(w, v)$? (2)

v: $\alpha(x_1) = w$

$\Rightarrow$ (2) adevarat $\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$

Din caz 1, caz 2 $\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$ pt orice S, α

$\Rightarrow \varphi$ validă

Substitutie $\sigma : X \to T$ a.î. $\sigma(x) \neq x$ pt nr finit de variabile.

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = i(x_2) \\ \sigma(x_2) = e \\ \sigma(x_3) = f(e, e) \\ \sigma(x) = x \text{ pt orice } x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\} \end{cases}$$

$\sigma = \{x_1 \mapsto i(x_2), x_2 \mapsto e, x_3 \mapsto f(e, e)\}$

$dom(\sigma) = \{x_1, x_2, x_3\}$

$t = f(x_1, x_2) \longrightarrow t' = f(i(x_2), e)$

$\sigma(x_1)$ $\sigma(x_2)$

$\sigma^\#(f(x_1, x_2)) = f(\sigma^\#(x_1), \sigma^\#(x_2))$

$= f(\sigma(x_1), \sigma(x_2))$

$= f(i(x_2), e)$

$\sigma^b : LP1 \to LP1$ - înlocuiesc aparițiile libere cu σ...

$\varphi = \underbrace{(\exists x_1. P(x_1, x_2))}_{\sigma^b} \land \underbrace{P(x_1, x_3)}_{\sigma^b}$

$\sigma^b(\varphi) = (\exists x_1. \rho^b(P(x_1, x_2))) \land P(i(x_2), f(e,e))$

$\rho = \sigma|_{dom(\sigma) \setminus \{x_1\}} = \sigma|_{\{x_2, x_3\}}$

$\rho = \{x_2 \mapsto e, x_3 \mapsto f(e, e)\}$

$\sigma^b(\varphi) = (\exists x_1. P(x_1, e)) \land P(i(x_2), f(e,e))$

$\varphi[x_1 \mapsto i(x_2), x_2 \mapsto e, x_3 \mapsto f(e,e)]$

Deductia naturala

$$\exists i \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x. \varphi}$$ aparitie libere ale lui x sunt înlocuite cu t

k. $\Gamma \vdash P(\underbrace{f(e,y)}_{t}, e)$

k+1. $\Gamma \vdash \exists x. \underbrace{P(x, e)}_{\varphi}$ $(\exists i, k)$

$$\lor e \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\exists e \frac{\Gamma \vdash \exists x. \varphi \qquad \Gamma, \varphi[x \mapsto x_0] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \; x_0 \notin vars(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\forall e \frac{\Gamma \vdash \forall x. \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}$$

$$\forall i \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto x_0]}{\Gamma \vdash \forall x. \varphi} \; x \notin var(\Gamma, \varphi)$$

Ex 129

(5)

1. j_1. $\Gamma \vdash Q(a)$ (ip)
2. k_1. $\Gamma \vdash P(a) \to \forall x. P(x)$ (ip)
3. k_2 $\Gamma \vdash P(a)$ (ip)
4. j_2 $\Gamma \vdash \forall x. P(x)$ $(\to i, 2, 3)$
5. n. $\underbrace{P(a) \to \forall x. P(x), P(a), Q(a)}_{\Gamma} \vdash Q(a) \land \forall x. P(x)$ $(\land i, 1, 4)$

(9)

l_2 $\Gamma', Q(a) \vdash \bot$ — ca linia l_1

k_2 $\Gamma' \vdash \neg Q(a)$ $(\neg i, l_2)$

$\Gamma', P(a) \vdash P(a)$ (ip)

$\vdash P(a) \lor Q(a)$ $(\lor i_1,$

$\vdash \neg(P(a) \lor Q(a))$ (ip)

l_1 $\Gamma', P(a) \vdash \bot$ $(\neg e,$

k_1 $\Gamma' \vdash \neg P(a)$ $(\neg i, l_1)$

k_3. $\Gamma' \vdash \neg P(a) \land \neg Q(a)$ $(\land i, k_1, k_2)$

k_4. $\Gamma' \vdash \neg(\neg P(a) \land \neg Q(a))$ (ip)

j_1. $\overbrace{\Gamma, \neg(P(a) \lor Q(a))}^{\Gamma'} \vdash \bot$ $(\neg e, k_3, k_4)$

j_2. $\Gamma \vdash \neg\neg(P(a) \lor Q(a))$ $(\neg i, j_1)$

n. $\underbrace{\neg(\neg P(a) \land \neg Q(a))}_{\Gamma} \vdash P(a) \lor Q(a)$ $(\neg\neg e, j_2)$

Ex 130

(2)

j_1. $\Gamma \vdash P(a)$ (ip)

2. $\Gamma \vdash \forall x. \underbrace{Q(x)}_{\varphi}$ (ip)

j_2 $\Gamma \vdash Q(a)$ $(\forall e, 2, x \mapsto a)$

n. $\underbrace{\forall x. Q(x), P(a)}_{\Gamma} \vdash P(a) \land Q(a)$ $(\land i, j_1, j_2)$

(3)

$\vdots$

j. $\Gamma \vdash P(x_0) \land Q(x_0)$

n. $\underbrace{\forall x. P(x), \forall x. Q(x)}_{\Gamma} \vdash \forall x \underbrace{(P(x) \land Q(x))}_{\varphi}$ $(\forall i, j)$