Spații liniar / vectorial

Fie K un corp $(K = \mathbb{R})$

Un spațiu liniar V este o mulțime

cu 2 operații $+$, $\cdot$

$(V, +)$ grup comutativ

$\cdot : K \times V \longrightarrow V$

cu 4 prop
$$\begin{cases} 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \\ (\alpha+\beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v} \\ \alpha(\bar{v}+\bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w} \\ (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \end{cases}$$

$\forall\, \bar{v}, \bar{w} \in V$

$\forall\, \alpha, \beta \in K$

$W \subseteq V$: W subspațiu liniar al lui V

dacă W este spațiu liniar. $\Leftrightarrow$ $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in W$ $\bar{u} - \bar{v} \in W$; $\forall\, \alpha \in K$, $\bar{u} \in W$ $\alpha\bar{u} \in W$

O bază în V este o mulțime $= \{v_1, \dots, v_k\}$ care este

1) • liniar indep

2) • sistem de generatori

Multe din spațiile în care lucrăm sunt $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1) $\Leftrightarrow$ rang $[v_1 \dots v_k] = k$

În $\mathbb{R}^n$ baza canonică este

$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad \in \mathbb{R}^n$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Orice bază dintr-un spațiu liniar finit are același nr de elemente.

$\Rightarrow$ Dacă în $\mathbb{R}^n$ aleg n vectori e suficient să verific prima cond

$\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ l.i $\Leftrightarrow$ rang $[\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] = n$

$\Leftrightarrow \det(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \neq 0$

$\mathbb{R}^n$

Alt ex de sp liniare $\mathcal{M}_{a \times b}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{a \times b}$

Seminar 5

$\mathcal{M}_{3,2} \simeq \mathbb{R}^{3\times 2} = \mathbb{R}^6$

$(1,0,0,0,0,0)$
$\vdots$
$(0,0,0,0,0,1)$

***Exerciţii recomandate:** 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6
***Rezerve:** 5.9, 5.10, 5.13, 5.17

S5.1 Fie $M := \left\{ A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}, \underline{a = b + c} \right\}$. $\subseteq \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

Am fixat 2 elemente $\Rightarrow$ ele nu mai influențează baza.

a) Să se arate că M este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
b) Să se afle o bază a lui M şi $dim(M)$.
c) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este o bază a lui M. Să se găsească coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

$a = b + c \rightarrow a$ dep de b și c

$\rightarrow$ Pornesc cu 3 elemente

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad a_1 = b_1 + c_1 \\[2ex] A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad a_2 = b_2 + c_2 \end{array}\right\} \in M$$

$$A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & d_1 - d_2 \end{bmatrix}$$

Mai trebuie verificat că $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 + c_1 - c_2$

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1 \\ a_2 &= b_2 + c_2 \end{aligned} \quad \ominus$$

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 + c_1 - c_2$$

$\Rightarrow A_1 - A_2 \in M \quad (1)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A_1 = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \\ 0 & \lambda d_1 \end{bmatrix}$$

$a_1 = b_1 + c_1 \quad | \cdot \lambda$

$\lambda a_1 = \lambda(b_1 + c_1) \xrightarrow[\text{înmulțirii față de adunare}]{\text{distributiv}} \lambda b_1 + \lambda c_1$

$\Rightarrow \lambda A_1 \in M \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow M \leq \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

Alternativ $\forall \lambda, \mu \quad \forall A_1, A_2 \in M$

$\lambda A_1 + \mu A_2 \in M$

Intuitiv, am 3 componente independente: b, c, d

Găsesc o bază construind elem pt $\Rightarrow b = 1, c = 0, d = 0$

$\Rightarrow b = 0, c = 1, d = 0$

$\Rightarrow b = 0, c = 0, d = 1$

O bază nu e unică

Fie $\mathcal{B} = \{B_b, B_c, B_d\}$

$$B_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trebuie să verificăm că $\mathcal{B}$ bază

$\Leftrightarrow$ 1. $\mathcal{B}$ l. indep

2. $\mathcal{B}$ s. gen

$\mathcal{B}$ l. i. dacă $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$

$\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

1. L.I. $\alpha B_b + \beta B_c + \mu B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \beta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ s.l.i} \Rightarrow$$

2. S. GEN

$B = \{\bar{v_1}, \dots, \bar{v_n}\}$ s.gen dacă $\forall \bar{v} \in V$

$\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n$ a.î

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v_1} + \dots + \alpha_n \bar{v_n}$$

Ponim cu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M \quad a = b + c$

Caut coef a.î $A = \alpha B_b + \beta B_c + \mu B_d$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mu = d \qquad a = b + c = \alpha + \beta$

$\beta = c$

$\alpha = b$

$\Rightarrow$ Eg are loc pt coef găsiți.

B s.gen

B s.l.i + B s.gen $\Rightarrow$ B bază $\Rightarrow$
dim M = card B = 3

c)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se găsească coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

Eu știu de la pct b că o bază în M are 3 elemente $\Rightarrow$ oricare altă bază are 3 elemente. Pt $\{A_1, A_2, A_3\}$ e suficient să verificăm doar una dintre condiții:

Verificăm liniara independență:

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\beta & -\alpha+\beta+\mu \\ \alpha+\beta-\mu & 0 \\ 0 & \alpha-\beta+\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ -\alpha+\beta+\mu = 0 \Rightarrow -\alpha+\mu = 0 \\ \alpha+\beta-\mu = 0 \Rightarrow \alpha-\mu = 0 \\ \alpha-\beta+\mu = 0 \rightarrow \alpha+\mu = 0 \end{cases} \quad (+)$$

$$2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$\rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \text{ l.i } \xRightarrow[=3]{\dim M} \{A_1, A_2, A_3\} \text{ base}$$

Caut $C = m A_1 + n A_2 + p A_3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 = 2n \\ 2 = -m + n + p \\ 2 = m + n - p \\ 1 = m - n + p \end{cases}$$

$\Rightarrow n = 2$

$\to -m + \cancel{2} + p = \cancel{2} \to -m + p = 0$

$\to 2 = m + 2 - p \to m - p = 0$

$1 = m - 2 + p \to m + p = 3$

$$\left.\begin{array}{l} m + p = 3 \\ m = p \end{array}\right\} \to$$

$$m = p = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{3}{2} A_1 + 2 A_2 + \frac{3}{2} A_3$$

Coord lui $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ în baza $\{A_1, A_2, A_3\}$

S5.2 Să se analizeze liniara dependenţă / independenţă a următoarelor mulţimi şi să se stabilească, în caz de dependenţă liniară a lor, relaţia de dependenţă în cauză.

a) $\{\overbrace{(1,1,1)}^{v_1}, \overbrace{(1,-2,3)}^{v_2}, \overbrace{(-1,11,-9)}^{v_3}\} \subset \mathbb{R}^3$; $\Rightarrow$ liniar dependenţi

b) $\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

c) $\{(1,-1,3), (-1,1,4), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

d) $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos^2 x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$

$f_2(x) = 2f_3(x) - f_1(x)$

$\Rightarrow$ lin dep

a) Am 3 vectori în $\mathbb{R}^3$

Plec cu

$$\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \mu \bar{v}_3 = \bar{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \mu = 0 \\ \alpha - 2\beta + 11\mu = 0 \\ \alpha + 3\beta - 9\mu = 0 \end{cases}$$

sist liniar omogen (toţi termenii liberi sunt 0) cu 3 ec, 3 nec.

Există întotdeauna soluţia $\alpha = \beta = \mu = 0$

Pt ca ea să fie unică cos

$$\det[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \bar v_1 & \bar v_2 & \bar v_3 \end{matrix} \xrightarrow[C_2 = C_2 + C_3]{C_1 = C_1 + C_3}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 12 & 9 & 11 \\ -8 & -6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 = \frac{1}{3} C_2]{C_1 = \frac{1}{4} C_1}$$

$$\det 12 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 11 \\ -2 & -2 & -9 \end{pmatrix} = 0$$

$C_1 = C_2$ cm

$\frac{1}{4} C_1 = \frac{1}{3} C_2$

$\frac{1}{4}(C_1 + C_3) = \frac{1}{3}(C_2 + C_3)$

$3C_1 + 3C_3 = 4C_2 + 4C_3$

$3C_1 - 4C_2 - C_3 = 0$

$3\bar v_1 - 4\bar v_2 - \bar v_3 = 0$

Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 3$ un minor nenul

β și μ nec pp

α sec $\quad \alpha = x$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \mu = 0 \\ \alpha - 2\beta + 11\mu = 0 \\ \alpha + 3\beta - 9\mu = 0 \end{cases}$$

$\beta - \mu = -x \quad | \cdot 2$

$-2\beta + 11\mu = -x$

$2\beta - 2\mu = -2x$ $\oplus$

$9\mu = -3x$

$\mu = -\frac{x}{3}$

$\beta = -x + \mu = -x - \frac{x}{3} = -\frac{4x}{3}$

$(\alpha, \beta, \mu) = \{ (x, -\frac{4x}{3}, -\frac{x}{3}) | x \in \mathbb{R} \}$

Aleg pe $x = 3 \Rightarrow$ $\alpha = 3$

$\beta = -4$

$\mu = -1$

<u>Rel de liniară dep:</u>

$3\bar{v}_1 - 4\bar{v}_2 - \bar{v}_3 = \bar{0}$

$\to \bar{v}_3 = 3\bar{v}_1 - 4\bar{v}_2$

Dacă $x = 1 \Rightarrow$ $\alpha = 1$

$\beta = -\frac{4}{3}$

$\mu = -\frac{1}{3}$

$\bar{v}_1 - \frac{4}{3}\bar{v}_2 - \frac{1}{3}\bar{v}_3 = 0$

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

$$\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

sp lin
infinit
dimensional

$\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathbf{0}(x) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Fie $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \mathbf{0}$ (eg de fct)

Are loc egalitatea

$$(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha e^{2x} + \beta x e^{-x} + \gamma x^2 e^x = 0$$

Pt $x = 0$ $\quad \alpha \cdot \underbrace{e^{2 \cdot 0}}_{1} + \underbrace{\beta \cdot 0\, e^{-0}}_{0} + \underbrace{\gamma \cdot 0^2 \cdot e^0}_{0} = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$x = 1 \qquad \underbrace{0 \cdot e^2}_{0} + \underbrace{\beta \cdot 1 \cdot e^{-1}} + \mu \cdot 1 \cdot e^1 = 0$

$\frac{\beta}{e} + \mu e = 0 \quad | \, e^2$

$\beta e + \mu e^3 = 0$

$x = -1 \qquad 0 \cdot e^2 + \beta \cdot (-1) e^1 + \mu \cdot (-1)^2 \cdot e^{-1} = 0$

$-\beta e + \frac{\mu}{e} = 0 \quad (+)$

$\mu e^3 + \frac{\mu}{e} = 0$

$\mu \left(\underbrace{e^3 + \frac{1}{e}}_{e > 0} \right) = 0$

$\neq 0$

$\Rightarrow \mu = 0$

$\Rightarrow \beta e = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \mu = 0 \Rightarrow$ Multimea e liniar indep c)

$\{\underbrace{(1,-1,3)}_{\bar{v}_1}, \underbrace{(-1,1,4)}_{\bar{v}_2}, \underbrace{(1,1,1)}_{\bar{v}_3}\} \subset \mathbb{R}^3;$

Avem 3 vectori în $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$

Studiul l.i $\Leftrightarrow$ a studia dacă

$$\det[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 = C_2 + C_3}{\overset{C_1 = C_1 + C_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 = \frac{1}{2} C_2}{\overset{C_1 = \frac{1}{7} C_1}{=\!=}}$$

$$1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow$$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ l. indep

S5.3

$\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3$

1°. Să se arate că $B = \{(3, 1, 5), (3, 6, 2), (-1, 0, 1)\}$ formează o bază pentru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, la fel orientată ca baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

$\bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{w}_3$

2°. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât mulţimea $B' = \{(m, 2, -3), (1, 1, -1), (m, 1, 3)\}$ să fie o bază a lui $\mathbb{R}^3$, contrar orientată bazei canonice a lui $\mathbb{R}^3$.

3°. Pentru valorile lui m determinate la 2°, să se afle matricea S a schimbării de bază de la B la B'.

4°. Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})}_{\text{în baza canonică}}$ în baza B.

1. 3 vectori în $\mathbb{R}^3$

nr vectori = dim sp $\Leftrightarrow$

a studia dacă e bază $\Leftrightarrow$

a studia lin. indep $\Leftrightarrow$

a studia dacă $\det[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$ e $\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{L_1 = L_1 + L_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$\underline{43 > 0} \rightarrow$

B bază la fel orientată cu B_c

2. A dem că B' e bază $\Leftrightarrow$

card B' = dim $\mathbb{R}^3$

a găsi $\det[\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}] \neq 0$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} m-3 & 0 & m+3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \overbrace{\overbrace{(-1)}^{-1} \cdot \overbrace{(-1)^{3+2}}^{-1}}^{1} \begin{vmatrix} m-3 & m+3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4(m-3) - (-1)(m+3) =$$

$$4m - 12 + m + 3 =$$

$$5m - 9$$

Vrem ca $5m - 9 < 0 \Leftrightarrow$

$$m < \frac{9}{5} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{9}{5}\right)$$

$$\begin{tikzcd} B_c \arrow[r, "S_{CB}"] \arrow[dr, "S_{CB'}"'] & B \arrow[d, "S_{BB'} = ?"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

3.

$$S_{CB} \cdot S_{BB'} = S_{CB'}$$

$$\rightarrow S_{BB'} = (S_{CB})^{-1} \cdot S_{CB'}$$

$$S_{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{CB}^{-1}$$

$$S_{CB}' = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_{CB}^{t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{CB}^{*} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 6 & (-1)^{1+2}\cdot 5 & (-1)^{1+3}\cdot 6 \\ (-1)^{2+1}\cdot 1 & (-1)^{2+2}\cdot 8 & (-1)^{2+3}\cdot 1 \\ (-1)^{3+1}\cdot(-28) & \underline{(-1)^{3+2}(-9)} & (-1)^{3+3}\cdot 15 \end{pmatrix}$$

$$S_{CB}^{-1} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} \cdot 6 & -5 & 6 \\ -1 & \cdot 8 & -1 \\ \cdot -28 & 9 & \cdot 15 \end{pmatrix}$$

$$S_{BB'} = (S_{CB})^{-1} \cdot S_{CB'}$$

$$S_{BB'} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 6m-28 & -5 & 6m+13 \\ -m+19 & 8 & -m+5 \\ -28m-27 & -34 & -28m+54 \end{pmatrix}$$

3. $\bar{x}$ în baza B

$$\bar{x} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3)(S_{CB})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3)\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ -1 & 8 & -1 \\ -28 & 9 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \underbrace{(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3)}_{\text{în baza } B}\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -10 \\ 16 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = S_{CB} \cdot (S_{CB})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

S5.4 Să se arate că aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

$<,>$ un produs scalar dacă

1. $<\bar{x}, \bar{x}> \geq 0 \quad \forall \bar{x}$

   şi $<\bar{x}, \bar{x}> = 0 \iff \bar{x} = 0$

2. $<x, y> = <y, x>$

3. • $<\alpha x, y> = \alpha <x, y>$
   • $<x+z, y> = <x, y> + <z, y>$
   • $<x, \alpha y> = \alpha < x, y>$
   • $<x, y+z> = <x, y> + <x, z>$

Dacă verific 2 cităţi e suf să le verific pe primele 2

$<x, x> = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 + 5x_3^2$

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \qquad = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2$

$= x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2$

$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 5x_3^2 \geq 0$

$x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + 5x_3^2 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\bar{x} = 0$

$<\bar{y},\bar{x}> = 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + \cancel{y_2x_2} + \cancel{5y_3x_3}$

$<\bar{x},\bar{y}> = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \cancel{x_2y_2} + \cancel{5x_3y_3}$

$\Rightarrow <\bar{x},\bar{y}> = <\bar{y},\bar{x}>$

3. Alternativ

$$A = \begin{pmatrix} \text{coef lui } x_1y_1 & \text{coef lui } x_1y_2 & \text{coef } x_1y_3 \\ \text{coef lui } x_2y_1 & \text{coef lui } x_2y_2 & \text{coef } x_2y_3 \\ \text{coef lui } x_3y_1 & \text{coef lui } x_3y_2 & \text{coef } x_3y_3 \end{pmatrix}$$

Dacă are loc:

$$<x,y> = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ biliniară

Practic dacă apar în sumă doar produse de tip x_iy_j și nu apar puteri sau termeni, aplic e biliniară

$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3$

A simetrică $\Leftrightarrow A = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\langle \ , \ \rangle$ <u>bi</u>liniară

A simetrică $\Rightarrow$ $\langle \ , \ \rangle$ simetrică

$\bar{v_1}$ $\bar{v_2}$ $\bar{v_3}$

S5.5 Fie spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$, dotat cu produsul scalar euclidian. Să se analizeze ortogonalitatea sistemului de vectori $U = \{(1,-1,1),(0,1,1),(-2,-1,1)\}$. Să se calculeze apoi $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{w})$ şi $\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})$, unde $\mathbf{u} = (-1,1,2)$, $\mathbf{v} = (-1,1,1)$ şi $\mathbf{w} = (1,2,3)$.

Produs scalar canonic

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

Dacă $\langle , \rangle$ produs scalar

$$\cos \sphericalangle(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

$\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$$

Caz special

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0 \iff$

$\cos(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ LA

$\sphericalangle(\bar{x}, \bar{y}) = 90^\circ / \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \bar{x} \perp \bar{y}$ $\quad \bar{x}, \bar{y}$ ortogonali

$\langle \bar{v_1}, \bar{v_2} \rangle =$

$1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 +$

$1 \cdot 1 =$

$0 - 1 + 1 = 0$,

$\bar{v_1} \perp \bar{v_2}$

Analog

$\bar{v_1} \perp \bar{v_3}$

$\bar{v_2} \perp v_3$

$$\cos \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$$

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$
$= 4$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{4}{\sqrt{6 \cdot 3}} =$$

$$\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

U ortogonal $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \overline{v_1} \perp \overline{v_2} \\ \overline{v_1} \perp \overline{v_3} \\ \overline{v_2} \perp \overline{v_3} \end{cases}$$

S5.6 Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, dotat cu produsul scalar canonic. Folosind procedeul de ortonormalizare al lui Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată B', plecând de la baza

$$B = \{(1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

S5.7 Se consideră sistemul de vectori $C = \{(1,4,3,2),(1,1,-1,1),(-3,0,7,6)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Să se determine $S = Sp(C)$ şi $S^{\perp}$.

b) Să se afle proiecţiile ortogonale ale vectorului $\mathbf{w} = (14,-3,-6,-7)$ pe S şi pe $S^{\perp}$. Să se verifice că avem

$$||\mathbf{w} - pr_S(\mathbf{u})|| \leq ||\mathbf{w} - \mathbf{u}||, \forall\ \mathbf{u} \in C,$$

unde $pr_S(\mathbf{u})$ este notaţia pentru proiecţia ortogonală a vectorului $\mathbf{u}$ pe S, care, prin definiţie, înseamnă acel vector $\mathbf{v} \in S$, pentru care $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in S^{\perp}$.

S5.8 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, se definesc operaţiile $\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $x \oplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ este un spaţiu liniar.

S5.9 (R) Fie $\langle \cdot\ ,\cdot \rangle$ un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ şi fie $||\cdot||$ norma indusă de acesta. Să se arate că $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, au loc:

i) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$ (Euler)

ii) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ (Hilbert).

S5.10 (R) Fie W un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : W \to \mathbb{R}$, o funcţie astfel încât

$$\{\mathbf{x} \in W \mid f(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$$

şi

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Definim aplicaţia $< \cdot\, , \cdot >: W \times W \to \mathbb{R}$, prin:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

a) Să se arate că W este un spaţiu prehilbertian.

b) Să se arate că orice două elemente ale lui W, diferite de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, sunt liniar dependente ($\dim(W) = 1$).

S5.11 Care dintre mulţimile de mai jos este un subspaţiu liniar?

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 + x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det(A) = 0\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

S5.12 Să se studieze, după valorile parametrului real m, dependenţa liniară a următoarelor sisteme de vectori. În caz de dependenţă liniară, să se găsească relaţia de dependenţă respectivă.

i) $\{(3, 1, 4), (-1, 1, 2), (1, 3, m)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

ii) $\{(6, 1, 8, 3), (2, 3, 0, 2), (4, -1, -8, -2), (1, 1, 1, m)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

iii) $\{f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^x, f_3(x) = \text{sh}x\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S5.13 (R) În spaţiul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, se consideră:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) Să se scrie matricea S a schimbării de la B_1 la B_2;

c) Să se afle coordonatele matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ în cele două baze B_1 şi B_2.

S5.14 Să se arate că aplicaţia $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + 2 x_3 y_3, \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.15 Fie $U = \{(0,1,1,0), (0,2,-2,1), (2,1,-1,-4), (9,-1,1,4)\}$ o submulţime a spaţiului liniar $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Să se arate că U este un sistem ortogonal de vectori în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^4$ şi să se calculeze unghiul dintre ultimii doi vectori din U.

S5.16 Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^4$, plecând de la

$$B = \{(0,1,1,0), (0,4,0,1), (1,-1,1,0), (1,3,0,1)\}.$$

S5.17 (R) Fie $\mathbb{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic şi $U = \{(-3,0,1,2), (1,-1,0,1)\}$. Să se calculeze $Sp(U)$ şi $U^{\perp}$, precum şi proiecţiile ortogonale ale vectorului $(2,1,2,1)$ pe U şi $U^{\perp}$.

S5.18

a) Folosind inegalitatea lui Minkowski, să se arate că aplicaţia $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$, definită prin

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

b) Să se arate că $||\mathbf{x}||_\infty \overset{def}{=} \max\limits_{1\le k\le n} |x_k| = \lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

c) Să se demonstreze că: $||\mathbf{x}||_\infty \le ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_1 \le \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2 \le n||\mathbf{x}||_\infty$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Să se arate că inegalitatea lui Hölder se poate reda sub forma

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > |_c \le ||\mathbf{x}||_p \cdot ||\mathbf{y}||_q, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},$$

pentru orice $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
În particular, când $p = q = 2$, inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz se poate rescrie în forma:

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_c | \le ||\mathbf{x}||_2 \cdot ||\mathbf{y}||_2, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Bibliografie selectivă

1. Veronica T. Borcea, Cătălina I. Davideanu, Corina Forăscu - *Probleme de algebră liniară*, Ed. "Gheorghe Asachi", Iaşi, 2000.

2. Şt. O. Tohăneanu, Rodica Dăneţ - *Curs practic de algebră liniară cu 327 de exerciţii şi probleme rezolvate,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

3. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Cioară - *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.

5. N. Crainic - *Elemente de algebră liniară,* Colectia "Universitaria", Edit. Institutului European, 2011

6. G. I. Shilov - *An Introduction to the Theory of Linear Spaces (Kindle Edition)*, Dover Publications, 2013.

7. J. Hefferon - *Linear Algebra. Extensive exercise sets, with worked answers to all exercises*, Saint Michael's College, 2014.

8. Y. Tsumura - *Practice Problems for Linear Algebra*, Ohio State University, 2016.