$$\varphi = \left(\left(\forall x . P(x, e) \right) \vee Q(i(y)) \right)$$

$$\Sigma = \left(\{P, Q\}, \{f, i, e\} \right)$$

$ar(P) = 2$ $\quad ar(f) = 2$

$ar(Q) = 1$ $\quad ar(i) = 1$

$ar(e) = 0$

Σ-structură $\quad S_1 = \left(\mathbb{Z}, \{<, Par\}, \{+, -, 0\} \right)$

$P^{S_1} \quad Q^{S_1} \quad f^{S_1} \quad i^{S_1} \quad e^{S_1}$

atribuire : $\alpha : \mathcal{X} \to D$ $\qquad \overline{\alpha} : \mathcal{T} \to D$

S_1-atribuire $\alpha_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{Z}$

$$\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(x) & , t = x \in \mathcal{X} \\ c^{S_1} & , t = c \in \mathcal{F}_0 \\ f^{S_1}(\overline{\alpha}(t_1), \ldots \overline{\alpha}(t_n)) & , t = f(t_1, \ldots t_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = 1 \\ \alpha_1(y) = -2 \\ \alpha_1(z) = 5 \\ \alpha_1(x') = 0 \quad \text{pt orice } x' \in \mathcal{X} \setminus \{x, y, z\} \end{cases}$$

α_1

$\alpha_1(x) = 1$

$\alpha_1(y) = -2$

$\alpha_1(z) = 5$

$\alpha_1(x') = 0$ pt orice $x' \in \mathcal{X} \setminus \{x, y, z\}$

$\alpha_1[x \mapsto 7]$ $\quad \alpha'$

$\alpha_1[x \mapsto 7](x) = 7$

$(y) = -2$

$(z) = 5$

$(x') = 0 \ldots$

$$S_1, \alpha_1 \models \varphi$$

$S_1, \alpha_1 \models \exists x . P(x, y)$ ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $S_1, \overset{\alpha'}{\overbrace{\alpha_1[x \mapsto u]}} \models P(x, y)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $P^{S_1}\left(\overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(x), \overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(y) \right)$ (are loc)

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha_1[x \mapsto u](x) < \alpha_1[x \mapsto u](y)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $u < \alpha_1(y)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $u < -2$ $\qquad$ "A"

$u = -3 \qquad -3 < -2$

α	α'	α''
$x \to 1$	$x \to u$	$x \to u$
$y \to -2$	$y \to -2$	$y \to v$
$z \to 5$	$z \to 5$	$z \to 5$
oric $x' \to 0$	$x' \to 0$	$x' \to 0$

$$S_1, \alpha_1 \models \overbrace{\forall x . \underbrace{\exists y . P(x,y)}_{}}^{\varphi}$$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem $\overbrace{S_1, \alpha_1[x \mapsto u]}^{\alpha'} \models \exists y . P(x,y)$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $S_1, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto u][y \mapsto v]}_{\alpha''} \models P(x,y)$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $P^{S_1}\left(\overline{\alpha''}(x), \overline{\alpha''}(y)\right)$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha''(x) < \alpha''(y)$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $u < v$ "A"

φ satisf în S fixată ddacă există S-atrib. α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

φ satisf ddacă există S și există o S-atrib α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

φ validă în S fixată ddacă pt orice S-atrib α avem $S, \alpha \models \varphi$

φ validă ddacă pt orice S și pt orice S-atrib α avem $S, \alpha \models \varphi$

$$S_2 = (\mathbb{N}, \{ \overset{P^{S_2}}{>}, Par \}, \{ +, succ, 0 \}) \qquad \alpha_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{N} \quad \alpha_2(x) = 0$$

pt orice $u \in \mathbb{N}$, există $v \in \mathbb{N}$ a.î. $u > v$ "F"

$u = 0$ $\qquad v = ?$ $\qquad 0 > v$

φ nu este valid deoarece există S_2 și α_2 a.î. $S_2, \alpha_2 \not\models \varphi$

$$S_1, \alpha_1 \models ((\exists x . P(x,y)) \wedge Q(x))$$

ddacă $\left\{ \begin{array}{l} S_1, \alpha_1 \models \exists x . P(x,y) \\ \text{și} \\ S_1, \alpha_1 \models Q(x) \end{array} \right.$ ddaca $\left\{ \begin{array}{l} \text{există } u \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } S_1, \alpha_1[x \mapsto u] \models P(x,y) \\ \text{și} \\ S_1, \alpha_1 \models Q(x) \end{array} \right.$

$$\text{ddacă}\begin{cases}\text{există } u \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } u < -2\\ \text{și}\\ Q^{S_1}\left(\overline{\alpha}_1(x)\right)\end{cases} \quad \text{ddacă}\begin{cases}\text{există } u \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } u < -2\\ \text{și}\\ \text{Par}\left(\alpha_1(x)\right)\end{cases}$$

$$\text{ddacă}\begin{cases}\text{există } u \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } u < -2 \quad \text{"A"}\\ \text{și} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{"F"} \quad \Rightarrow\\ \text{Par}\left(1 \right) \quad \text{"F"}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1, \alpha_1 \not\models \left(\left(\exists x. P(x, y)\right) \wedge Q(x) \right)$$

Ex 38

1) $\varphi_1 = \left(\left(\forall x. \underbrace{\left(P(x,x) \wedge P(x,y)\right)}_{\text{Dom de viz pt } \forall x} \right) \wedge P(x, z) \right)$ $\qquad \forall x. \varphi$

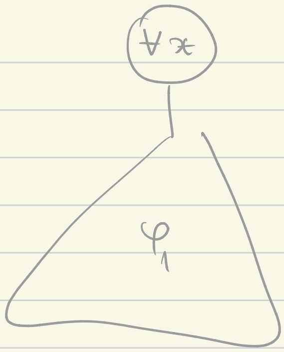
$\varphi_1 = \left(\forall x. \underbrace{P(x,x) \wedge P(x,y)}\right) \wedge P(x,z)$

deschisă înainte de $\forall x$

$\varphi_2 = \left(\forall x. \underbrace{\left(P\left(f(x,x), i(x)\right) \wedge \left(\exists y. \underbrace{\left(P(x,y) \wedge P(y,z)\right)}_{\text{dom de viz pt } \exists y} \right) \right)}_{\text{dom de viz pt } \forall x} \right)$

$\left(\forall x. \left(\underbrace{P\left(f(x,x), i(x)\right)}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{\left(\exists y. \left(P(x,y) \wedge P(y,z)\right)\right)}_{\varphi_2} \right) \right)$

$(\forall x. \varphi)$ $\qquad (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ $\qquad \perp \; \neg \; \wedge \; \vee \; \rightarrow \; \leftrightarrow \; \forall \; \exists$



<u>Ex 40</u> $A = \{p, q, r, \dots\}$ - var. prop.

$\Sigma_{LP} = (A, \phi)$

$\Sigma = (\{P, Q, R, \dots\}, \phi)$ (p, q, r written above P, Q, R)

$ar(P) = 0$

$ar(Q) = 0$ ...

1) pt orice $\varphi \in LP$ avem $\varphi \in LP1$ (peste Σ_{LP})

Fie $\varphi \in LP$ fixat arbitrar $P(\varphi)$ proprietate mate.

Dem prin ind structurală (pp. $P(\varphi')$ are loc pt subformule și dem $P(\varphi)$)

CB: $\varphi \in A$ $\varphi = p \in LP1$ simb pred de aritate 0

CI 1: $\varphi = \neg\varphi_1$

$\varphi_1 \in LP$ $\dfrac{\text{pp. că } \varphi_1 \in LP1}{\varphi = \neg\varphi_1 \in LP1}$ "A" conform def sintaxei LP1 (caz ind a)

CI 2: $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

$\varphi_1 \in LP$
$\varphi_2 \in LP$ $\dfrac{\text{pp. } \varphi_1 \in LP1 \quad \varphi_2 \in LP1}{\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in LP1}$ "∧" conform def sintaxei LP1 (caz ind b)

CI 3: $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_3)$

caz ind 3 din def.

Din CB, CI 1, CI 2, CI 3 $\Rightarrow \varphi \in LP1$ (pt orice $\varphi \in LP$)