Consultant2
Mercredi 11 décembre 2024 14:00

Ex 8a

1. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x)$ (1)
2. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ $\frac{P(x)}{P(x) \vee P(x)}$
3. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ $\frac{P(x) \vee P(x)}{P(x) \vee P(x) \vee P(x)}$
4. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x)$ (2)
5. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ $\frac{P(x) \vee P(x)}{P(x) \vee P(x) \vee P(x)}$
6. $P \models \forall x P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ $\frac{P(x) \vee P(x) \vee P(x)}{\forall x P(x) \vee P(x) \vee P(x)}$
7. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x)$ (3)
8. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ (3)
9. $P, P(x) \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ (3)
10. $P \models P(x) \vee P(x) \vee P(x)$ (4)
11. $P(x) \models \{x, m, m\}$
12. $P(x) \models \{x, x\}$
13. $P \models \{x\}$ $\{m, m\}$
14. $\{m\} \models \{x\}$ $\frac{\{m\} \models \{x\}}{\{m\} \models \{x\}}$ $\{x, y\}$

Ex 8b

1. $P' \models \forall x P(x)$ (1)
2. $P', P(x) \models P(x)$ $\frac{P(x) \models P(x)}{P', P(x) \models P(x)}$ $\frac{P', P(x) \models P(x)}{P' \models P(x) \to P(x)}$ $\frac{P' \models P(x) \to P(x)}{P' \models \forall x (P(x) \to P(x))}$ $\{x\}$
3. $P', P(x) \models P(x)$ $\frac{P(x) \models P(x)}{P', P(x) \models P(x)}$ $\frac{P', P(x) \models P(x)}{P' \models P(x) \to P(x)}$ $\frac{P' \models P(x) \to P(x)}{P' \models \forall x (P(x) \to P(x))}$ $\{x, y\}$
4. $P \models \forall x P(x)$ (1)
5. $P, P(x) \models P(x)$ (1)
6. $P, P(x) \models P(x)$ (1)
7. $P, P(x) \models P(x)$ $\{x, x\}$
8. $P, P(x) \models \bot$ $\{x, y, z\}$
9. $P \models \bot$ $\frac{\bot}{P(x)}$ $\{x, y, z\}$
10. $P \models P(x) \to P(x)$ $\{x, y, z\}$
11. $P \models \forall x (P(x) \to P(x))$ $\{x, y\}$

Check on rechercher une non décision

Pb mon résultat? Une démonstration obtenue sans substitut plus

Conclusion non sub obtenue sans sub nécessitant plus

$\text{sub}(\bot) = \emptyset$ sub substitut.

$\text{sub}(\top) = \emptyset$ sub vrai.

$\text{sub}(\neg\varphi) = \text{sub}\ \neg\varphi$.

$\text{sub}(\varphi) =$ nécessitant sub.

$\forall \varphi_1 \left(\text{sub}(\varphi) \to \exists y_1 \ldots \exists y_n \text{sub}(\varphi) \right)$

Ex $\Sigma = \{\forall x P, \exists f(x,x)\}$

$S = \{\forall x P, \exists f(x,x)\}$

$\forall \varphi \ \exists \{f(f(x,x), f(y))\}$ subst in S ?

obtenir $\forall x P$ et $\exists f(x,x)$ $\forall \varphi$ subst in S

Conclusion α S-substitution α a.i. $S, \alpha \models \varphi$

$S, \alpha \models \exists f(f(x,x), f(y))$

obtenir $\exists f(f(x,x), f(y))$

obtenir $\exists f(f(x,x), f(y))$

obtenir $\exists f(f(x,x), f(y))$

$\forall$ subst in S

$\forall$ subst in S

définition

$\alpha : X \to T$

$\bar{\alpha} : T \to T$

$\bar{\alpha}$: variable/terme

substitution

$\sigma : X \to T$ $\alpha : X \to T$

$\begin{cases} \sigma(y) = z(y) \\ \sigma(z) = c \\ \sigma(z) = z \text{ si pas } z \in \{y\} \cup \{z\} \end{cases}$

$\sigma^* : T \to T$

définition : σ terme variable conform σ σ

$\sigma^* : L^2 \to L^2$

définition : variable obtenir

σ terme variable conform σ

$\bar{\alpha}(\alpha(x))$

$\bar{\alpha}(z) = \alpha(x)$

$\bar{\alpha}(f(x, z)) = f^T(\bar{\alpha}(x), \bar{\alpha}(z))$

Ex $= X \to Z$

$\alpha(x) = 0$ $\sigma(x) = 0$

$\alpha(y) = 0$ $\sigma(y) = 0$

$\alpha(z) = 0$ $\sigma(z) = 2$

$\alpha(x_1) = 0$ si pas $x, z \in X \setminus \{x, y, z\}$

$\sigma = 0$

$\sigma(x) = 0$

$\sigma(y) = 0$

$\sigma(z) = 2$

Vérifiant : $-0 + 0 = -0$ "A" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ on trouvé σ S-substitution α a.i. $S, \alpha \models \varphi$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall$ substitutable in S

Ex 8d

$\forall \varphi = (\forall x. \forall (x)) \to \exists y. \forall (x, y)$ substit obtenir

si pas structure S & si pas fonctionnel α $S, \alpha \models \forall$

$\Rightarrow$ φ structure substitution α S S-substitution substitution

$S, \alpha \models \forall$

obtenir $\begin{cases} S, \alpha \not\models \forall x. \forall (x) \\ \text{ou} \\ S, \alpha \models \exists y. \forall (x, y) \end{cases}$

obtenir $\begin{cases} \text{NO si pas } x \in D \text{ avec } S, \alpha[x \mapsto a] \models \forall (x) \\ \text{ou} \\ \text{existe } a \in D \text{ a.i. } S, \alpha[x \mapsto a] \models \forall (x, y) \end{cases}$

obtenir $\begin{cases} \text{NO si pas } x \in D \text{ avec } P^S\left(\alpha[x \mapsto a](x), \alpha[x \mapsto a](x)\right) \\ \text{ou} \\ \text{existe } a \in D \text{ a.i. } P^S\left(\alpha[x \mapsto a](x), \alpha[x \mapsto a](y)\right) \end{cases}$

obtenir $\begin{cases} \text{NO si pas } x \in D \text{ avec } P^S\left(\alpha(x), \alpha(x)\right) & (1) \\ \text{ou} \\ \text{existe } a \in D \text{ a.i. } P^S\left(\alpha(x), a\right) & (2) \end{cases}$ "A"

a) (1) "A" $\Rightarrow$ (1) ou (2) $\Rightarrow$ $S, \alpha \models \varphi$

b) (1) "$\bar{A}$" $\Rightarrow$

~~NO FAU~~ si pas $x \in D$ avec $P^S(\alpha, \alpha)$ (1)

existe $a \in D$ a.i. $P^S\left(\alpha(x), a\right)$ "A" (2)

Conclusion $a = \alpha(x)$

$\Rightarrow$ (1) ou (2) "A" $\Rightarrow$ $S, \alpha \models \varphi$

$\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$ si S, α substitution $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ φ substitut

Exercice

$\forall = (p \to (p \to p))$

p_1

$p_0 \leftrightarrow \neg p_1$

$p_2 \leftrightarrow (p \to p_1)$ $\equiv (p_1 \to (p_1 \to p_1)) \wedge ((p \to p_1) \to p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee \neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg(p \to p_1) \vee p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee \neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg(\neg p \vee p_1) \vee p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee \neg p_1 \vee p_1) \wedge (p \wedge \neg p_1) \vee p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee \neg p_1 \vee p_1) \wedge (p \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_1)$

$p_3 \leftrightarrow (p \vee 2) \equiv (p_1 \to (p \vee 2)) \wedge (p \vee 2) \to p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee p \vee 2) \wedge (\neg(p \vee 2) \vee p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee p \vee 2) \wedge (\neg p \wedge \neg 2) \vee p_1)$

$\equiv (\neg p_1 \vee p \vee 2) \wedge (\neg p \vee p_1) \wedge (\neg 2 \vee p_1)$

$\varphi_1 = p_0 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p \vee p_1) \wedge (p \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_1)$
$\wedge (\neg p_1 \vee p \vee 2) \wedge (\neg p \vee p_1) \wedge (\neg 2 \vee p_1) \wedge \ldots$

φ_1 satisfiabilité ou $\forall$

$\forall \leftrightarrow \varphi_1$ $\models (\forall \leftrightarrow \varphi_1)$

Ex 3a

(1) $\forall = \neg \exists x. Q(x) \to (\exists x. \neg Q(x))$ substit

obtenir $\neg \forall$ insatisfiabilité

Preuve par FN ou SNSC

1. $\neg \forall$ (1)

$\neg \forall = \left(\neg \left(\neg \exists x. Q(x) \right) \to \left(\exists x. \neg Q(x) \right) \right)$

$\equiv \neg \left(\neg \exists x. Q(x) \vee \left(\exists x. \neg Q(x) \right) \right)$

$(a \to b) \to \bot \equiv a \wedge (\bar{b} \to \bot)$

$\equiv \neg \left(\neg \exists x. Q(x) \vee \left(\exists x. \neg Q(x) \right) \right)$

$\neg(a \to b) \equiv a \wedge \neg b$

$\equiv \exists x. \neg \left(\neg \exists x. Q(x) \right) \wedge \left(\exists x. \neg Q(x) \right)$

$\neg \exists x. \neg \equiv \exists x$

$\equiv \exists x. \neg \left(\neg \exists x. Q(x) \right) \wedge \left(\exists x. \neg Q(x) \right)$

$\neg \neg \exists x. \equiv \exists x$

$\equiv \exists x. \exists x. Q(x) \wedge \exists x. \neg Q(x)$

$\exists x. \exists x. \equiv \exists x$

$\equiv \exists x. \exists x. \left(Q(x) \wedge \neg Q(x) \right)$

$\exists x. \exists x. \equiv \exists x$

$\equiv \exists x. \exists x. \bot$

$\exists x. \bot \equiv \bot$

$\equiv \bot$

2. Satisfiabilité satisfiabilité ✓ ($\forall$ satisfait)

3. Skolémisation

c : symbol fonctionnel sans de variable c

$\forall_1 = \forall y. \exists \left(Q(c) \wedge \neg \exists Q(y) \right)$ — FNS

$\forall_1$ subsumé $\forall_1$ ✓

4. FNC

$\forall_2 = \forall y. \left(\neg Q(c) \wedge \neg \exists Q(y) \right)$

$\forall_2 = \forall y. \left(\neg Q(c) \wedge Q(y) \right)$ — FNSC

$\neg Q(c) \wedge Q(y) \equiv \neg \bot$

$\forall_2$ subsumé $\forall$

5. $\square$ RS 2.1 $\forall = \text{mgu}(\{y \geq c\}) = \{y \mapsto c\}$ fonct FNS

$P = \{y \geq c\}$ fonct FNS

$\forall_2$ insatisfiabilité $\Rightarrow \forall$ insatisfiabilité $\Rightarrow$

$\forall_2$ subsumé $\forall$ $\Rightarrow \forall$ satisfiable

---

Ex 3b

1. $\neg \forall$ (1)
2. $Q(c)$ (1)
3. $\square$ RS 2.1 $\forall = \text{mgu}(\{y \geq c\}) = \{y \mapsto c\}$ fonct FNS

$P = \{y \geq c\}$ fonct FNS

$\forall_2$ insatisfiabilité $\Rightarrow \forall$ insatisfiabilité $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall$ satisfiable

$\forall_2$ subsumé $\forall$