$\Phi(x, i(x), e)$ $\qquad$ $\hat{\iota}(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ $\qquad$ $\cancel{\varphi_1 + \varphi_2}$

$\cancel{P(\boxed{Q(x)})}$ $\qquad$ $\cancel{\underbrace{\hat{\iota}(\varphi_1)}_{\in\{0,1\}} \vee \hat{\iota}(\varphi_2)}$

φ - validă

Raționament semantic

φ validă ddacă p/ orice S, α avem $S, \alpha \models \varphi$

Raț. Sintactic

φ validă ddacă $\neg\varphi$ nesat + Rezoluția.

LP

Există o inf de nr naturale numai dacă nu trec la logică și merg cu avionul.

p : există o inf de nr nat.

q : trec la logică

r : merg cu avionul

$$(p \to (\neg q \wedge r))$$

Dacă $\overbrace{\text{orice nr nat este nr prim}}^{\text{antecedent}}$, atunci $\overbrace{\text{0 este nr prim.}}^{\text{consecvent}}$

Prim(u) : u este prim.

$$\varphi = ((\forall x. (Nat(x) \to Prim(x))) \to Prim(0))$$

Oricum am alege un nr prim, există un nr prim > el.

$\forall$

$$\forall x.\left(Prim(x) \rightarrow \exists y.\left(Prim(y) \wedge \underset{>(y,x)}{y > x}\right)\right)$$

Există un nr nat numai dacă Ion trece la logică

și sora lui merge cu avionul.

$$\left(\left(\exists x.\ Nat(x)\right) \longrightarrow \left(Trece(i) \wedge MergeAv(s(i))\right)\right)$$

$Nat(u)$: u este nr natural

$ar(Nat) = 1$

i : Ion

$ar(i) = 0$

$s(u)$: sora lui u

$ar(s) = 1$

$Trece(u)$: u trece la Logică

$ar(Trece) = 1$

$MergeAv(u)$: u merge cu avionul

$ar(MergeAv) = 1$

$$\Sigma = (\{Nat, Trece, MergeAv\}, \{i, s\})$$

Suma a oricăror două nr pare este nr par.

$$\left(\forall x.\forall y.\left(\left(Par(x) \wedge Par(y)\right) \longrightarrow Par(+(x,y))\right)\right)$$

Ex 81 $\quad \varphi = (\forall x. P(x, x)) \to \exists x_2. P(x_1, x_2)$ validă

Raționament semantic

φ - validă ddacă pt orice structură S și pt orice S-atr α avem $S, \alpha \models \varphi$

Fie S și α fixate arbitrar.

Arătăm că $S, \alpha \models \varphi$

$S, \alpha \models \varphi$ ddacă $\left\{ \begin{array}{l} S, \alpha \not\models \forall x. P(x, x) \\ \text{sau} \\ S, \alpha \models \exists x_2. P(x_1, x_2) \end{array} \right.$

simb pred.

ddacă $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nu-i adv. că pt orice } u \in D, \; S, \overbrace{\alpha[x \mapsto u]}^{\alpha_1} \models P(x, x) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \overbrace{\alpha[x_2 \mapsto v]}^{\alpha_2} \models P(x_1, x_2) \end{array} \right.$

ddacă $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nu-i adv. că pt orice } u \in D, \; P^S(\bar{\alpha}_1(x), \bar{\alpha}_1(x)) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } P^S(\bar{\alpha}_2(x_1), \bar{\alpha}_2(x_2)) \end{array} \right.$

predicat

$\alpha(x) = \ldots$	$\alpha_1(x) = u$	$\alpha_2(x) = \alpha(x)$
$\alpha(x_1) = \ldots$	$\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$	$\alpha_2(x_1) = \alpha(x_1)$
$\alpha(x_2) = \ldots$	$\alpha_1(x_2) = \alpha(x_2)$	$\alpha_2(x_2) = v$
$\alpha(y) = \ldots$	$\alpha_1(y) = \alpha(y)$	$\alpha_2(y) = \alpha(y)$

$\alpha : X \to D \qquad \bar{\alpha} : T \to D$

$\cancel{\alpha(i(x_1))} \qquad \bar{\alpha}(i(x_1)) = i^S(\bar{\alpha}(x_1)) = i^S(\alpha(x_1))$

ddacă $\begin{cases} \text{Nu-i adv. că pt orice } u \in D \quad P^S(u, u) \ (1) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } P^S(\alpha(x_1), v) \ (2) \end{cases}$ (*) "A"??

Caz 1

Dacă (1) este adev $\Rightarrow$ (*) este adev $\Rightarrow$ $S, \alpha \models \varphi$

Caz 2

Dacă (1) este falsă $\Rightarrow$ pt orice $u \in D$, $P^S(u, u)$

există $v \in D$ a.î. $P^S(\underbrace{\alpha(x_1)}_{w}, v)$ "A" pt $v = \alpha(x_1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2) este adev

$\Rightarrow$ (*) este adev $\Rightarrow$

$\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$

$\Rightarrow S, \alpha \models \varphi$ pt S, α alese arbitrar (cazurile acoperă toate posibilitățile)

$\Rightarrow$ pt orice S, α avem $S, \alpha \models \varphi$ $\Rightarrow$ φ validă

Raționament sintactic

φ validă ddacă $\neg\varphi$ nesat.

$$\neg\varphi = \neg\Big(\big(\forall x. P(x, x)\big) \to \exists x. P(x_1, x)\Big)$$

punem $\neg\varphi$ în FNSC

1. FNP

$$\neg\varphi \equiv \neg\Big(\neg\big(\forall x. P(x, x)\big) \vee \exists x\, P(x_1, x)\Big)$$

$$\equiv \neg\neg\big(\forall x. P(x, x)\big) \wedge \underline{\neg\exists x. P(x_1, x)}$$

$\neg \exists x . \varphi \equiv \forall x . \neg \varphi$

$$\equiv \left(\forall x . \underbrace{P(x, x)}_{\varphi_1}\right) \wedge \left(\forall x . \underbrace{\neg P(x_1, x)}_{\varphi_2}\right)$$

$$(\forall x . \varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x . (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \quad \text{dacă } x \notin free(\varphi_2)$$

$$free(\varphi_2) = \{x_1\}$$

$$\equiv \forall x . \left(\underbrace{P(x, x)}_{} \wedge \underbrace{(\forall x . \neg P(x_1, x))}_{}\right)$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$$

$$\equiv \forall x . \left(\overbrace{(\forall x . \underbrace{\neg P(x_1, x)}_{\varphi_1})}^{LR} \wedge \underbrace{P(x, x)}_{\varphi_2}\right)$$

$$x \in free(P(x,x)) = \{x\}$$

$$\equiv \forall x . \left((\forall y . \neg P(x_1, y)) \wedge P(x, x)\right)$$

$$y \notin free(P(x,x))$$

$$\equiv \forall x . \forall y . \left(\neg P(x_1, y) \wedge P(x, x)\right) = \varphi_1 \quad \text{— FNP}$$

- închiderea existențială

$$\varphi_2 = \exists x_1 . \forall x . \forall y . \underbrace{\left(\neg P(x_1, y) \wedge P(x, x)\right)}_{} \quad \text{— echivalent } \varphi_1$$

- skolemizare

Fie a un simbol fct nou de aritate 0

$\forall x . \exists y . \varphi$

g de ar 1

$\sigma^{b}(\varphi)$

$\sigma = \{y \mapsto g(x)\}$

$$\varphi_3 = \forall x . \forall y . \underbrace{\left(\neg P(a, y) \wedge P(x, x)\right)}_{\varphi' \text{ — FNC}} \quad \text{— FNS}$$

φ_3 echisat φ_2

$$\varphi_1 = \forall x.\forall y.\exists z.\left(P(x,y)\land\neg P(x,z)\right)$$

h simb fct de ar 2

$$\varphi_2 = \forall x.\forall y.\left(P(x,y)\land\neg P(x,h(x,y))\right)$$

φ_3 este în FNSC.

1. $\neg P(a,y)$
2. $P(x,x)$
3. $\square$ RB, 2, 1

$$\mathbb{P} = \{x \doteq a,\ x \doteq y\} \xrightarrow{ELIM}$$

$$\{y \doteq a,\ x \doteq y\} \xrightarrow{ELIM}$$

$$\{y \doteq a,\ x \doteq a\}$$ formă rez

$$\sigma^\#(a) = \sigma^\#(x)$$

$$\sigma^\#(y) = \sigma^\#(x)$$

$$\sigma = mgu(\mathbb{P}) = \{y \mapsto a,\ x \mapsto a\}$$

$\Rightarrow \varphi_3$ nesatisfiabilă, φ_3 echisat φ_2 $\Rightarrow \varphi_2$ nesatisf, φ_2 echisat φ_1 $\Rightarrow \varphi_1$ nesat, $\varphi_1 \equiv \neg\varphi$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\varphi$ nesatisf $\Rightarrow \varphi$ validă

$$\forall x.\left(Q(i(x))\land\neg Q(e)\right)$$

1. $Q(i(x))$
2. $\neg Q(e)$
3. RB, 1, 2

$$\mathbb{P} = \{i(x) \doteq e\} \xrightarrow{conflict} \perp$$

i: simb fct ar 1; e: simb fct ar 0

nu putem aplica RB 1,2

$$S = (\mathbb{N}, \{Par\}, \{+, s, 0\})$$

Par: 1, 2, ...

$\neg Par$: 0

Ex 143

10) $\underbrace{\exists x.(P(x,x) \wedge Q(x))}_{\varphi_1} \not\equiv \underbrace{(\exists x. P(x,x)) \wedge (\exists x. Q(x))}_{\varphi_2}$

$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem

$S, \alpha \models \varphi_1$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_2$

$\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$ ddacă există S și o S-atr α a.î.

$$\left.\begin{array}{c} (S, \alpha \not\models \varphi_1 \text{ și } S, \alpha \models \varphi_2) \\ \text{sau} \\ (S, \alpha \models \varphi_1 \text{ și } S, \alpha \not\models \varphi_2) \end{array}\right\} (*)$$

Căutăm o structură S și o S-atr α a.î. (*)

$S, \alpha \models \varphi_1$ ddacă există $u \in D$ a.î. $S, \alpha[x \mapsto u] \models P(x,x) \wedge Q(x)$

ddacă există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} S, \alpha[x \mapsto u] \models P(x,x) \\ \text{și} \\ S, \alpha[x \mapsto u] \models Q(x) \end{cases}$

ddacă există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} P^S(\overline{\alpha[x \mapsto u]}(x), \overline{\alpha[x \mapsto u]}(x)) \\ \text{și} \\ Q^S(\overline{\alpha[x \mapsto u]}(x)) \end{cases}$

ddacă există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} P^S(u, u) \\ \text{și} \\ Q^S(u) \end{cases}$ (1)

$S, \alpha \models \varphi_2$ ddacă $\begin{cases} S, \alpha \models \exists x. P(x,x) \\ \text{și} \\ S, \alpha \models \exists x. Q(x) \end{cases}$

ddacă $\begin{cases} \text{există } u \in D \text{ a.î. } S, \alpha[x \mapsto u] \models P(x,x) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \alpha[x \mapsto v] \models Q(x) \end{cases}$

ddacă $\begin{cases} \text{există } u \in D \text{ a.î. } P^S\left(\overline{\alpha[x \mapsto u]}(x), \overline{\alpha[x \mapsto u]}(x)\right) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } Q^S\left(\overline{\alpha[x \mapsto v]}(x)\right) \end{cases}$

ddacă $\begin{cases} \text{există } u \in D \text{ a.î. } P^S(u, u) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } Q^S(v) \end{cases}$ (2)

Fie $S = (\{3, 4, 5\}, \{\underset{P^S}{\text{Times2}}, \underset{Q^S}{\text{Prim}}\}, \{+, 1, 3\})$

$+$: ad $\%3 + 3$

$x + y = (x+y)\%3 + 3$

$D = \{ \_ \ \underset{P^S(u,u)}{u} \ \_ \ \underset{Q^S(v)}{v} \ \_ \}$

$D = \{3, 4, 5\}$

$Q^S = \text{Prim}$

$P^S(u, u) = u$ este Par.

$P^S(u, u)$ "A" ddacă u par.

$\lfloor u/2 \rfloor * 2 = u$

$P^S(u, v)$ "A" ddacă $\lfloor u/2 \rfloor * 2 = v$

Times2

$\alpha : X \to D$, $\alpha(x) = 3$ pt orice $x \in X$.

(1) este "F"
(2) este "A"

$\Rightarrow \varphi_1 \not\equiv \varphi_2$

Luni 10^{00}