Seminar 6

***Exerciţii recomandate:** 6.1(i, iii), 6.2, 6.3, 6.4

***Rezerve:** 6.1(ii), 6.6(iii), 6.7(i)

S6.1 Să se decidă care dintre aplicaţiile date în continuare sunt liniare şi care nu:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 4x_3 + 1)$;

O aplicație $f : V \to W$ este aplicație liniară dacă

aditivă $f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$ $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$

omogenă $f(\alpha \bar{a}) = \alpha f(\bar{a})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \bar{a} \in V$.

Intuitiv, verificăm dacă aplicația are pe componente sume de monoame de gradul 1. Dacă nu, nu e liniară.

Intuitiv 1 are gradul 0, deci vrem să arătăm că f nu e liniară.

$f(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_2, \underline{4\alpha x_3 + 1})$

$\alpha f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1 - x_2, 4x_3 + 1) = (\alpha x_1 - \alpha x_2, \underline{4\alpha x_3 + \alpha})$

Pt $\alpha = 2$ $f(\alpha x) \neq \alpha f(x)$

$f(0,0,0) = (0,1)$

$f(2(0,0,0)) = f(0,0,0) = (0,1)$

$2f(0,0,0) = 2(0,1) = (0,2)$ $\neq$

$\Rightarrow f$ nu e liniară

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\underbrace{-x}_{\deg 1}, \underbrace{4x}_{\deg 1}, \underbrace{7x^2}_{\deg 2})$;

$\Rightarrow$ Intuim că f nu e liniară

$f(x) = (-x, 4x, 7x^2)$

$f(\alpha x) = (-\alpha x, 4\alpha x, 7(\alpha x)^2) =$

$(-\alpha x, 4\alpha x, 7\alpha^2 x^2)$

$\alpha f(x) = \alpha(-x, 4x, 7x^2) = (-\alpha x, 4\alpha x, 7\alpha x^2)$

Pt $\alpha = 2$ $f(2x) \neq 2f(x) \Rightarrow f$ nu e liniară

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$;

Pot verifica fie • aditivitate + omogenitate

fie • $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}^2$

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Sol 1

$x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Aditivitatea: $f(x+y) = f(x_1+y_1, x_2+y_2) = (2(x_1+y_1) - (x_2+y_2), -3(x_1+y_1) + (x_2+y_2))$

$= (2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2, -3x_1 - 3y_1 + x_2 + y_2)$

$f(x) + f(y) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2) + (2y_1 - y_2, -3y_1 + y_2)$

$= (2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2, -3x_1 + x_2 - 3y_1 + y_2)$

Omogenitate $f(\alpha x) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, -3\alpha x_1 + \alpha x_2)$

$\alpha f(x) = \alpha(2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, -3\alpha x_1 + \alpha x_2)$

$\Rightarrow$ f liniară

Sol 2 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x+\beta y) = f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2) =$$

$$(2(\alpha x_1+\beta y_1) - (\alpha x_2+\beta y_2), -3(\alpha x_1+\beta y_1) + (\alpha x_2+\beta y_2)) =$$

$$(2\alpha x_1 + 2\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2, -3\alpha x_1 - 3\beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$\parallel$$

$$\alpha f(x)+\beta f(y) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, -3\alpha x_1 + \alpha x_2) + (2\beta y_1 - \beta y_2, -3\beta y_1 + \beta y_2)$$

$$= (2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\beta y_1 - \beta y_2, -3\alpha x_1 + \alpha x_2 - 3\beta y_1 + \beta y_2)$$

$\Rightarrow f$ liniară

Sol 3)

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f \text{ liniară}$$

-3α

-3α

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (-4x_1 + 3x_2, x_1 + x_2, 5x_1 - 6x_2)$.

S6.2 Fie $T : \underline{\mathbb{R}^3} \to \underline{\mathbb{R}^3}$ un <u>endomorfism</u> a cărui matrice în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este următoarea:

interior

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

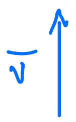
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

i) Să se calculeze $T(1, -2, 3)$.

$$T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 3\\ 3\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot 3\\ 2\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}$$

ii) Să se determine matricea lui T în baza $\{(2, 3, -1), (0, -2, 1), (-1, -1, 1)\}$.

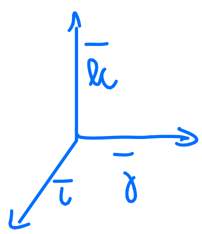
$\mathcal{V}^3$ $\quad\quad$ $\mathcal{V}^3$



$$T(\bar{v}) = -2\bar{v}$$

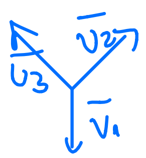
$$\bar{v} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$$

$$-2\bar{v} = -2x_1\bar{i} - 2x_2\bar{j} - 2x_3\bar{k}$$



$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = a_1\bar{v_1} + a_2\bar{v_2} + a_3\bar{v_3}$$



$f(\underline{\text{mamă}}) = \text{copil}$

$f(\text{mother}) = \text{child}$

$B = \{\bar{v}_1 = (2,3,-1),\ v_2 = (0,-2,1),\ v_3 = (-1,-1,1)\}$

$\underline{T(x) = y}$

$$x = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$y = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(v_1\ v_2\ v_3)}_{B} = \underbrace{(e_1\ e_2\ e_3)}_{C} \cdot S_{cB}$$

$$(e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (e_1\ e_2\ e_3) \cdot S_{cB}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S_{cB}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Similar $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_{CB} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

În Baza C: $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{S_{CB} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{} = A \cdot S_{CB} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{S_{CB}^{-1} \cdot A \cdot S_{CB}}_{} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$A_B = S_{CB}^{-1} \cdot A \cdot S_{CB}$$

$B = \{ \bar{v}_1 = (2, 3, -1),\ v_2 = (0, -2, 1),\ v_3 = (-1, -1, 1) \}$

$$S_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det S_{CB} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3]{L_1 = L_1 + L_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$S_{CB}^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ det obținut tăind linia i și col j

$$S_{CB}^{*} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

S_{CB}^{*} - adjuncta lui S_{CB}

$$S_{CB}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_B = S_{CB}^{-1} \cdot A \cdot S_{CB} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 22 & -4 & -4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 47 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

iii) Să se afle $Im(T)$ şi $rang(T)$.

$Im(T) \leq$ codomeniului

$Im(T) = < T(e_1), \dots, T(e_n) >$

$Im(T) = < T(e_1), T(e_2), T(e_3) >$

$$T(e_1) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T(e_1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T(e_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T(e_3) = m\, T(e_2)$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1,\ m = 2$ F

$\{ \alpha T(e_1) + \underbrace{\beta T(e_2) + \mu T(e_3)} \mid \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R} \}$

Verific dacă $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ liniar independenţi.

Teoretic iau o combinaţie $\alpha T(e_1) + \beta T(e_2) + \mu T(e_3) = \bar{0}$

și vreau să arăt că $\alpha = \beta = \mu = 0$

Studiez det sist : $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_2 = C_2 + C_1]{C_3 = C_3 + 2C_1}$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3 = \frac{1}{5} C_3]{C_2 = \frac{1}{3} C_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Caut relație de liniară dependentă.

Aleg $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

Nec pp : β, μ

sec : α

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta + 2\mu = \alpha \\ \beta + \mu = -2\alpha \end{cases} \quad \ominus$$

$$\mu = 3\alpha$$

$$\beta + 3\alpha = -2\alpha$$

$$\Rightarrow \beta = -5\alpha$$

Aleg $\alpha = 1$

$$T(e_1) + (-5)T(e_2) + 3T(e_3) = \overline{0}$$

$\Rightarrow \quad T(e_1) = 5T(e_2) - 3T(e_3)$

Verific dacă $T(e_2)$ și $T(e_3)$ sunt l.i.

$$\underbrace{\delta T(e_2) + \varepsilon T(e_3) = \bar{0}}$$

Dacă $T(e_2)$ și $T(e_3)$ nu sunt l.i atunci măcar unul dintre δ și $\varepsilon \neq 0$

Pp, fără a restrânge generalitatea, că $\delta \neq 0 \Rightarrow T(e_2) + \frac{\varepsilon}{\delta} T(e_3) = 0$

$$\underbrace{T(e_2)} = -\underbrace{\frac{\varepsilon}{\delta} T(e_3)}$$

$\varepsilon \neq 0$

$\frac{\delta}{\varepsilon} T(e_2) = T(e_3)$

Coord nu sunt prop

$\Rightarrow T(e_2), T(e_3)$ l.i.

$$\text{Im}(T) = \{ \beta T(e_2) + \mu T(e_3) \mid \beta, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$\{T(e_2), T(e_3)\}$ bază

$$\text{dim}\ \underset{\substack{\| \\ 2}}{\text{Im}(T)} = \text{rang}\ T = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\text{rang}\ A} \ (\Delta_1 \text{ de ord } 2)$$

iv) Să se afle $Ker(T)$ şi $def(T)$.

$$Ker(T) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = \bar{0} \}$$

$$A x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det A = 0$$

Considerăm un minor

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = x_1 \\ x_2 + x_3 = -2x_1 \end{cases}$$

$$x_3 = 3x_1$$

$$x_2 + 3x_1 = -2x_1 \Rightarrow x_2 = -5x_1$$

$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -5x_1, 3x_1)$

$\operatorname{Ker} T = \{\alpha(1, -5, 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{def} T = \dim \operatorname{Ker} T = 1$

T fct. injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\overline{0}\}$ $(\Rightarrow)$

rang A = max

= min (nr. linii, nr. coloane)

S6.3 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin:

$$T(x_1, x_2) = (\overbrace{x_1 - x_2}^{y_1}, \overbrace{x_1 + x_2}^{y_2}, \overbrace{2x_1 + 3x_2}^{y_3})\,.$$

a) Să se arate că T este o aplicaţie liniară şi să se scrie matricea corespunzătoare în perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T \text{ liniară}$$

A 3 linii × 2 col

dim codom × dim dom

b) Să se afle matricea operatorului T în raport cu bazele $\hat{B} = \{\overbrace{(1, -1)}^{v_1}, \overbrace{(2, 3)}^{v_2}\}$ şi $\hat{B}' = \{\underbrace{(1, 2, 3)}_{w_1}, \underbrace{(-2, 1, 3)}_{w_1}, \underbrace{(1, -1, 1)}_{w_3}\}$.

$T(x) = y$

$$x = (e_1 \;\; e_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (v_1 \;\; v_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (\bullet)$$

$C_2 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ bază în $\mathbb{R}^2$

$C_3 = \{\bar{f}_1 \; \bar{f}_2 \; \bar{f}_3\}$ bază în $\mathbb{R}^3$

$$y = (f_1 \;\; f_2 \;\; f_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (w_1 \;\; w_2 \;\; w_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\bullet\bullet)$$

$T(x) = y$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\square)$$

$$\mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$$

C_2 $\quad$ C_3

$\hat{B}$ $\quad$ $\hat{B}'$

$$(v_1 \quad v_2) = (e_1 \quad e_2) \cdot S_{C_2\hat{B}} \quad (1)$$

$$(w_1 \quad w_2 \quad w_3) = (f_1 \quad f_2 \quad f_3) \cdot S_{C_3\hat{B}'} \quad (2)$$

Din $(\bullet)$ și $(1) \Rightarrow (e_1 \quad e_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2) S_{C_2\hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S_{C_2\hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \quad (*)$$

Din $(\bullet\bullet)$ și $(2) \Rightarrow (f_1 \quad f_2 \quad f_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (f_1 \, f_2 \, f_3) S_{C_3\hat{B}'} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_{C_3\hat{B}'} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}} \quad (**)$$

Inlocuind $(*)$, $(**)$ in (I)

$$S_{C_3\hat{B}'} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A \, S_{C_2\hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(S_{C_3\hat{B}'}\right)^{-1} A \, S_{C_2\hat{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Matricea operatorului în noile baze

este $A_{\hat{B}\hat{B}'} = \underbrace{S_{C_3\hat{B}'}^{-1} \cdot A \cdot S_{C_2\hat{B}}}$

$$S_{C_3\hat{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{\underbrace{(1,2,3)}_{w_1}, \underbrace{(-2,1,3)}_{w_1}, \underbrace{(1,-1,1)}_{w_3}\}.$

Activitate indep:

calc $A_{\hat{B}\hat{B}'} = ?$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -13 & 99 \\ -5 & 60 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_{C_2\hat{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_{C_3\hat{B}'}^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

S6.4 Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3)\,,\ \forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se determine valorile proprii ale lui T şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

O matrice A, în anumite condiții, admite formă diagonală, adică $\exists$ S a.î.

$$A = S D S^{-1}$$

unde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$

$$A^3 = S D \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I_3} D \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I_3} D S^{-1} =$$

$$S D^3 S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valorile proprii ale matricii A = sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$\det(A - \lambda I_n)$

S este formată din a pune pe coloană vectorii proprii. Aceștia sunt soluțiile

$$(A - \lambda I_n)\, v = \overline{0}$$
$$\uparrow$$
$$\mathbb{R}^n$$

a) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$, $\forall\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

matricea lui T: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Polinomul caracteristic: $\det(A - \lambda I_3)$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 = C_1 - C_2 - C_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -2 \\ \lambda - 1 & -2-\lambda & 1 \\ -(1-\lambda) & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 + L_1 \\ \hline L_3 = L_3 + L_1 \end{array}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot(\lambda-1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((3-\lambda)(-1-\lambda)+4\right)$$

$$(1-\lambda)(-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4)$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (1-\lambda)^3$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

Valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic: $\lambda_1 = 1$

$m_1 = 3$

Determinăm vectorii proprii / subspațiile proprii

$$\underline{(A - \lambda_1 I_3)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I_3) = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$ sol

$\det(A - I_3) = 0$

$$\underbrace{(A - I_3)}_{\det = 0} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nec pp x_2, x_3

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 = 2x_1 \\ -x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$3x_1 + x_3 = 2x_1 \Rightarrow$

$x_3 = -x_1$

Subspațiu propriu:

$$\underbrace{V_1 = \{ (x_1, -x_1, -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}}$$

Vector propriu:

$v_1 = (1, -1, -1)$

b) Să se precizeze dacă matricea lui T poate fi adusă la forma diagonală şi, în caz afirmativ, să se găsească o bază faţă de care matricea lui T are forma diagonală.

O matrice are formă diag dacă: toate răd pol car sunt reale ✓

pt toate val proprii din $V_\lambda = m_\lambda$

La noi $1 \neq 3$ → T nu are matrice diag

S6.5 Fie endomorfismele

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\,,$$

$$\forall\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

şi

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători;

b) Să se afle subspaţiile proprii şi dimensiunile lor;

c) Să se analizeze posibilitatea diagonalizării lui T_1 şi T_2. În caz afirmativ, să se afle baza în care se manifestă forma diagonală, matricea schimbării de bază în cauză, precum şi forma diagonală ca atare.

S6.6 Fie $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismul care, în raport cu baza alcătuită din $b_1 = (1, -1)$ şi $b_2 = (0, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, fie $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfism care, faţă de vectorii $v_1 = (2, 1)$ şi $v_2 = (-1, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea endomorfismului $T_2 - T_1$ în raport cu sistemul de vectori $\{v_1, v_2\}$, precum şi matricea lui $T_2 \circ T_1$ faţă de baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$.

S6.7 Care dintre endomorfismele date mai jos este diagonalizabil? În caz afirmativ, să se determine forma diagonală în cauză.

i) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{L_1=L_1+L_2+L_3}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -\lambda & -\lambda\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2=C_2-C_1]{C_3=C_3-C_1}-\lambda\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -3-\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$-\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)$$

Valorile proprii: $\lambda_1=0 \quad m_0=1$

$\lambda_2=-1 \quad m_{-1}=1$

$\lambda_3=-3 \quad m_{-3}=1$

Subspațiile proprii

$V_0 \quad A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to V_0=\{\alpha(1,1,1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

$v_0=(1,1,1)$

$V_{-1} \quad (A+I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to V_{-1}=\{\alpha(-1,0,1)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

$v_1=(-1,0,1)$

$$V_{-3} = (A + 3I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_{-3} = \{\alpha(1,-2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim V_0 = 1 = m_0 \\ \dim V_{-1} = 1 = m_{-1} \\ \dim V_{-3} = 1 = m_{-3} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ diagonalizabilă}$$

în baza $B = \{v_0, v_{-1}, v_{-3}\}$

$$S_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Forma diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_2 - 2x_3), \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

iii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3), \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S6.8* Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste $\mathbb{R}$ şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Să se arate că

$$rang(T \circ T) + def(T|_{Im(T)}) = rang(T).$$

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (cap.IV)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

2. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iaşi, 2000.

3. O. Dogaru, Cristina Stamin - *Algebră liniară. Calcul vectorial (exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

4. Kenneth Kuttler - *Solutions Manual in Linear Algebra,* The Saylor Foundation, 2013.

5. Erling Stormer - *Positive Linear Maps of Operator Algebras*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2014.