Închideri

Def Fie ρ relație binară pe A

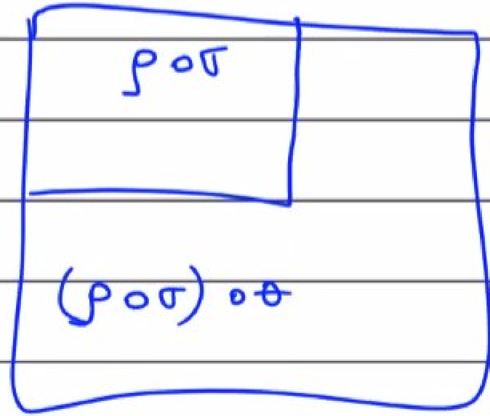
1) $r(\rho)$ - închiderea reflexivă a lui ρ = cea mai mică relație binară reflexivă ce include ρ
2) $s(\rho)$ " sim. " = " sim. "
3) $t(\rho)$ " tranz = " tranz "

$A = B = \{0, 1\}$

$$\rho = \{(\overset{a}{0}, \overset{b}{1}), (1,0)\} \qquad \sigma = \{(\overset{c}{1}, \overset{d}{1}), (0,1)\}$$

$$\rho \circ \sigma = \{(0,1), (1,1)\}$$

(a,c) (b,d)



Exerciții

1. Fie ρ, σ, θ relații binare, demonstrați că:

a) $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta$

(a,c) (b,a)

$(\rho\circ\sigma)\circ\theta$

Exerciții

1. Fie ρ, σ, θ relații binare, demonstrați că:

a) $\rho\circ(\sigma\circ\theta) = (\rho\circ\sigma)\circ\theta$

Fie $(a,b) \in (\rho\circ\sigma)\circ\theta \Rightarrow (\exists c)\big((a,c)\in(\rho\circ\sigma) \wedge (c,b)\in\theta\big) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\exists c)(\exists d)\big((a,d)\in\rho \wedge (d,c)\in\sigma\big) \wedge (c,b)\in\theta \Leftrightarrow (\exists d)\,(a,d)\in\rho \wedge (\exists c)\underbrace{\big((d,c)\in\sigma \wedge (c,b)\in\theta\big)}_{\circ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists d)\,(a,d)\in\rho \wedge (d,b)\in(\sigma\circ\theta) \Rightarrow (a,b)\in\rho\circ(\sigma\circ\theta)$

$\rho\circ \underbrace{\boxed{}}_{\{(\,,\,),(\,,\,),(\,,\,)..\}} = \boxed{}\circ\theta$

ρ $\boxed{(\ ,\ )}$ σ $\boxed{(\ ,\ )}$

Fie ρ, σ, θ relatii binare, demonstrati că

a) $\rho\circ(\sigma\circ\theta) = (\rho\circ\sigma)\circ\theta$ asociativitate

$(a,b) \Rightarrow$

$(a,c)\in\rho\circ\sigma \Rightarrow (\exists b)(a,b)\in\rho \wedge (b,c)\in\sigma$

$\Rightarrow$: Fie $(a,b)\in\rho\circ(\sigma\circ\theta) \Rightarrow (\exists c)(a,c)\in\rho \wedge (a,b)\in(\sigma\circ\theta) \Leftrightarrow (\exists c)(a,c)\in\rho \wedge (\exists d)((c,d)\in\sigma \wedge (d,b)\in\theta)$

$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)((a,c)\in\rho \wedge (c,d)\in\sigma) \wedge (d,b)\in\theta \Leftrightarrow (\exists d)(a,d)\in\rho\circ\sigma \wedge (d,b)\in\theta$

$\Leftrightarrow (a,b)\in(\rho\circ\sigma)\circ\theta$ $\Longleftarrow$ sens direct

b

$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)\ \big((a,c)\in\rho \wedge (c,d)\in\sigma\big) \wedge (d,b)\in\theta \Leftrightarrow (\exists d)(a,d)\in\rho\circ\sigma \wedge (d,b)\in\theta$

$\Leftrightarrow (a,b)\in(\rho\circ\sigma)\circ\theta$

b) $\rho\circ(\sigma\cup\theta) = (\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\theta)$ distributivitate

$\cup \quad \cap$

$\vee \quad \wedge$

$\Rightarrow$: Fie $(a,b)\in\rho\circ(\sigma\cup\theta) \Rightarrow (\exists c)(a,c)\in\rho \wedge (c,b)\in(\sigma\cup\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists c)(a,c)\in\rho \wedge \big((c,b)\in\sigma \vee (c,b)\in\theta\big) \Rightarrow (\exists c)(a,c)\in\rho \wedge (c,b)\in\sigma \vee (a,c)\in\rho\wedge(c,b)\in\theta$

$\Rightarrow (a,b)\in\rho\circ\sigma \vee (a,b)\in\rho\circ\theta \Rightarrow (a,b)\in(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\theta)$

$\sigma\cup\theta$

σ	θ

$\Leftarrow$: Fie $(a,b)\in(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\theta) \Rightarrow (a,b)\in\rho\circ\sigma \vee (a,b)\in(\rho\circ\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists c)\ (a,c)\in\rho \wedge (c,b)\in\sigma \vee (\exists d)\ (a,d)\in\rho \wedge (d,b)\in\theta$

$\Rightarrow (\exists c)\ (a,c)\in\rho \wedge (c,b)\in(\sigma\cup\theta) \vee (\exists d)(a,d)\in\rho \wedge (d,b)\in(\sigma\cup\theta)$

$\Rightarrow (a,b)\in\rho\circ(\sigma\cup\theta)\ \cancel{\vee\ (a,b)\in\rho\circ(\sigma\cup\theta)}$

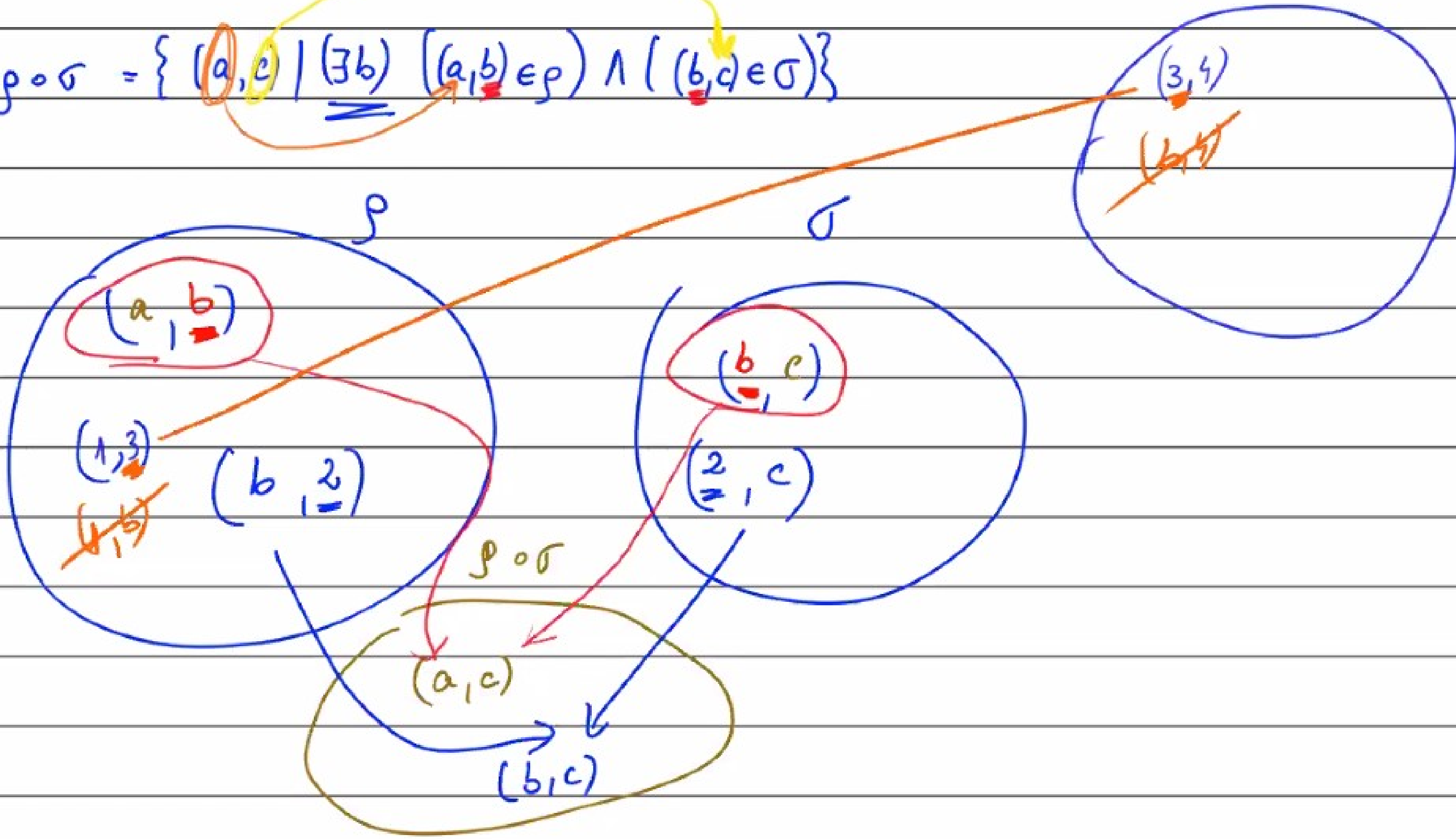
A_3	A_4
•	*
• $\in A_3$	Adev
• $\in A_4$	~~Adev~~
• $\in A_3\cup A_4$	Adev

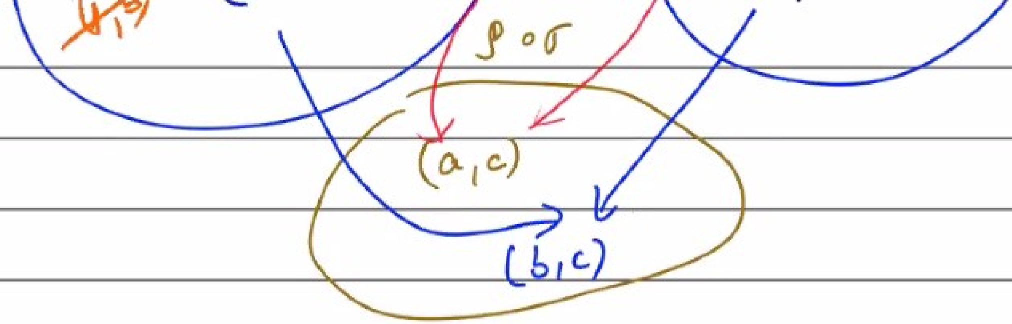
$\rho = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ $\rho \subseteq A \times B$ $(a,b) \in \rho$ $a \rho b$

$\sigma = \{(1,3),(1,4),(2,3)\}$

θ

$\rho \circ \sigma = \{(a,c) \mid (\exists b)\ ((a,b) \in \rho) \wedge ((b,c) \in \sigma)\}$





$\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$

Proprietăți relații binare

1) ρ reflexivă dacă $\forall a \in A$ $(a,a) \in \rho$
2) ρ simetrică dacă $\forall a,b \in A$ $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$
3) ρ antisimetrică dacă $\forall a,b \in A$ $(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$
4) ρ tranzitivă dacă $\forall a,b,c \in A$ $(a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$
5) ρ relație de preordine : ρ reflexivă și tranzitivă
6) ρ relație de ordine parțială: ρ reflexivă, tranz. și antisimetrică
7) ρ rel. de echivalență: ρ reflex., sim, tranz.

$$\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$$

Proprietăți relații binare

1) ρ reflexivă dacă $\forall a \in A$ $(a,a) \in \rho$
2) ρ simetrică dacă $\forall a,b \in A$ $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$
3) ρ antisimetrică dacă $\forall a,b \in A$ $(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$
4) ρ tranzitivă dacă $\forall a,b,c \in A$ $(a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$
5) ρ relație de preordine : ρ reflexivă și tranzitivă
6) ρ relație de ordine parțială: ρ reflexivă, tranz. și antisimetrică
7) ρ rel. de echivalență: ρ reflex., sim, tranz.

Prop. 1

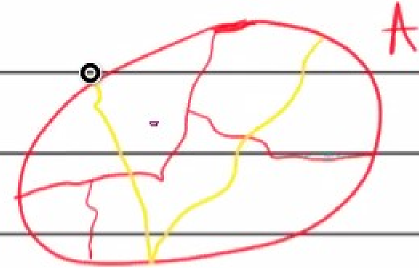
1) ρ reflexivă $\iota_A \subseteq \rho$
2) ρ simetrică $\rho = \rho^{-1}$
3) ρ tranzitivă $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

$$\boxed{\iota_A = \{(a,a) \mid a \in A\}}$$

$(\cdot, =)$ $(=, \cdot\cdot)$ $(\cdot, \cdot\cdot)$

Def. $A \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ s.n. partiție a lui A dacă:

1) $B \in \mathcal{A} \quad B \neq \emptyset$
2) $\forall B, C \in \mathcal{A}, \ B \neq C, \quad B \cap C = \emptyset$
3) $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$



Def. clasa de echivalență a lui a: $\quad [a]_\rho = \{ b \in A \mid (a,b) \in \rho \}$

mulț. cât relativ la ρ: $\quad A/_\rho = \{ [a]_\rho \mid a \in A \}$

unde $A \neq \emptyset$, $\rho \subseteq A \times A$, rel. de echiv. pe A

Închideri

Def Fie ρ relație binară pe A

1) $r(\rho)$ - închiderea reflexivă a lui ρ = Cea mai mică relație binară reflexivă
2) $s(\rho)$ " sim. " = ce include ρ " ——— sim. "
3) $t(\rho)$ " tranz = ——— " ——— tranz "

a b c d