Limite

În $\mathbb{R}$: $\lim_{x \to x_0} f(x)$

- limită la stg
- limită la dr
- limită bilaterală

• limită de o variabilă

→ Același tip de limită (cu eventuale restricții asupra variabilei)

În $\mathbb{R}^n$ → aleg pt simplitatea scrierii studiez în $(0, 0, \ldots, 0)$

• limite de o variabilă

→ limite parțiale → ∃ n limite parțiale

fixez n-1 valori (în cazul nostru egale cu 0) și las doar variabila după care fac limita să varieze

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x+y=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}$

pe y l-am fixat 0

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0+x^2+0}{x+0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} (x+1) = 1$$

→ limite iterate (iterăm / repetăm limita pt fiecare variabile) și limite

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0} (1+x) = 1$$

→ limite direcționale

Se alege o direcție → poate fi precizată

→ dacă nu

e precizată, trebuie calculată pt

o direcție oarecare.

O direcție este dată printr-un

vector nenul. Verificăm că un

vector e nenul $\Leftrightarrow$ norma lui >0.

Evident trebuie eliminate direcțiile

care nu există în domeniu.

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}$$

Fie $(u,v) \neq (0,0)$

$(u,v) \neq c(1,-1)$ în $(0,0)$

$$\lim_{t \to 0} f((0,0) + t(u,v)) =$$

$$\lim_{t \to 0} f((tu, tv)) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{tu - tv + t^2u^2 + t^2v^2}{tu + tv} =$$ (t

$$\lim_{t \to 0} \frac{u - v + t(u+v)}{u+v} =$$

$$\frac{u-v}{u+v}$$

- ==limita globală== Se fac simultan toate variabilele să tindă la punctul dat.

Dacă aveți de calculat limite globală singurul candidat e orice limită de o var

Dacă ∃ limita globală, atunci obligatoriu toate limitele anterioare trebuie să fie egale și limita globală va fi egală cu ele. Inclusiv limitele direcționale nu depind de direcție.

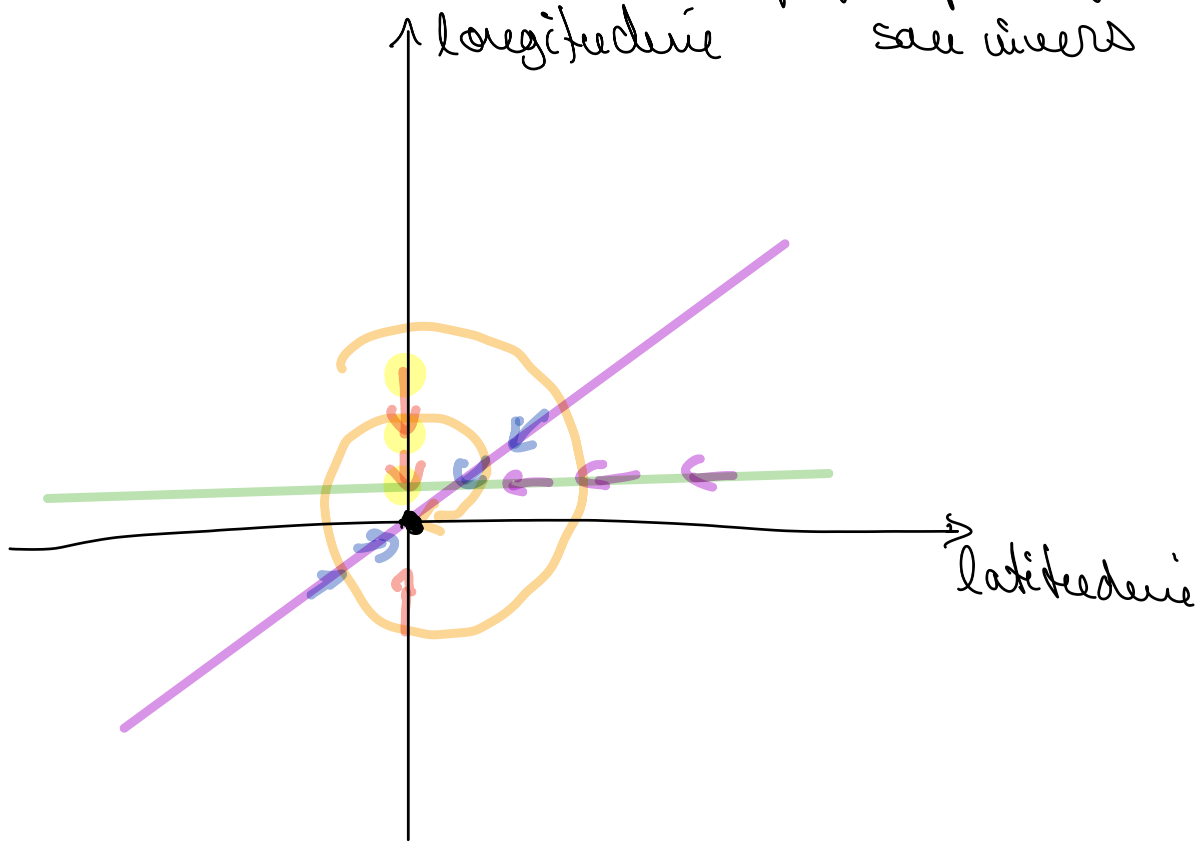
Dacă ∃ 2 limite de 1 var ≠, limita globală ∄

Se poate întâmpla ca toate limitele de o variabilă să existe și să fie egale și limita globală să nu existe.

ex intuitiv

f (latitudine, longitudine) =
altitudinea (latitudinea, longitudinea)

limite parțiale : fixez latitudinea și mă apropii pe longitudine sau invers



limite direcționale : fixez un drum care trece prin pct
(limite parțiale = caz particular de limite direcționale pt vectorii bazei canonice)

limite iterate: fixez inițial latitudinea ("aproape" de pct) și mă apropii în longitudinea și apoi mă apropii cu latitudinea

limita globală: mă apropii în orice mod de punct

Moduri de a calcula limita globală

→ 1. limita globală poate fi scrisă ca operații de limite de o variabilă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{y\to 0} y = 0 \cdot 0 = 0$$

→ 2. pot să renotez argumentul reducând la o limită de o variabilă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \frac{z = x^2+y^2}{z \to 0}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \quad (\text{limită fundam})$$

→ 3, prin inegalități (încadrea limite între 2 limite care pot fi calculate).

Ineg mediilor: $x, y \geq 0$

$$\min(x,y) \leq \underbrace{\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}_{m \text{ armonică}} \leq \underbrace{\sqrt{xy}}_{m \text{ geometrică}} \leq \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{m \text{ aritmetică}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}_{m \text{ pătratică}} \leq \max(x,y)$$

Pt cazul în care vreau să arăt că limita e 0, pot studia modulul fct

$$\boxed{f(x,y) \to 0 \iff |f(x,y)| \to 0}$$

merge doar pt 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} =$$

Studiez $\frac{|x^3y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3|y|^3}{x^2+y^2}$

Din ineg mediilor

$$\sqrt{|x||y|} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Big|^2$$

$$|x||y| \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\frac{|x||y|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$$

$$0 \le \frac{|x^3y^3|}{x^2+y^2} \le \quad x^2y^2\frac{|x||y|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{2}$$

$$\le \frac{|x^3y^3|}{x^2} \le |x|y^3$$

fiind modul

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{y\to 0} y^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}(0\cdot 0) = 0$$

→ O fct are limită în x_0

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

O fct este cont în x_0 dacă

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$

produs → media geom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

suma de pătrate media pătratică

$$\sqrt{\frac{|x|^2+|y|^4}{2}} \geq \sqrt{|x|y^2}$$

Cât e a a.î f continuă?

$$x^2+y^4 = x^2+(y^2)^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

$$\frac{|x|^2+|y|^4}{2} \geq |x|y^2$$

Din ineg mediilor

$$\sqrt{|x||y^2|} \le \sqrt{\frac{x^2+y^4}{2}} \quad \Big|^2 \qquad \Bigg| \quad \frac{x^2+y^4}{2} \ge \sqrt{x^2y^4} = |x||y|^2$$

$$|x|y^2 \le \frac{x^2+y^4}{2}$$

$$\frac{|x|y^2}{x^2+y^4} \le \frac{1}{2}$$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y^3|}{x^2+y^4} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = 0$$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

Pt ca f cont $a = 1$

Cum arăt că limita globală $\nexists$?

→ limitele de o var nu sunt egale

sau

→ limita direcțională depinde de

direcție

sau

$\to$ $\exists$ 2 șiruri a.î. aplicând limita

obținem valori diferite

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$y \geq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}} = \lim$$

$m_a \geq m_g$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |x| \cdot y \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq |x|y$$

$$\to \frac{|x|y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{|x|y}{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Big| \cdot \sqrt{|x|}$$

$$0 \le \sqrt{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}} \le \sqrt{\frac{|x|}{2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{|x|}{2}} = 0$$

Derivate

• În $\mathbb{R}$

- derivata de o variabilă

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

• În $\mathbb{R}^n$

- derivate parțiale
  - privesc celelalte argumente drept constante și derivez doar în raport cu var dată

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Gradientul este vectorul format din toate deriv parțiale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se consideră $(x,0) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3 \cdot 0^3}{x^4 + 0^4} - 0}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Dacă nu avem pct problemă, pt deriv parțiale aplic reguli de derivare (cele din tabele)

Cum identificăm pct problemă:

→ Dacă fct e definită pe ramuri în pct respectiv

→ Dacă apare la numitor o expresie care tinde la 0.

Deriv direcționale

Cu aceleași precizări ca la limita direcționale

$(u, v) \neq (0,0)$

$f'((x_0, y_0); (u, v))$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(u, v)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Din nou, dacă nu există pct problemă

$$f'((x_0, y_0); (u, v)) = \underset{\uparrow}{<} \nabla f(x_0, y_0), (u, v)>$$

produs scalar

Dat un punct (x_0, y_0) eu pot să definesc derivata direcțională după orice direcție

$$\underbrace{f'((x_0, y_0), \cdot): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}_{\text{funcție din } \mathbb{R}^2 \text{ în } \mathbb{R}}$$

$g(u, v)$

Dacă $f'((x_0, y_0), \cdot)$ este definită pt orice direcție (orice u, v) spunem că f este diferențiabilă Gateaux în (x_0, y_0).

Dacă funcția obținută $g(u,v)$ este liniară în fiecare argument $\Rightarrow$ f este derivabilă Gateaux în (x_0, y_0)

În acest caz, derivata Gateaux este produs scalar dintre gradient și (u,v)

Diferențiala Fréchet:

~~Este~~ o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

care verifică

scrie pt 2 var

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0),(y-y_0)\|} = 0 \quad (*)$$

Deci trebuie să găsesc T (liniar) și apoi să verific limita

Dacă diferențiala Fréchet ∃ (verificând)
spunem că f diferențiabilă Fréchet
în (x_0, y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

diferențiala Fréchet se mai notează $df(x_0)$
Diferențiala Fréchet este o aplicație / funcț de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$, deci are 2 arg.

Diferențiabilă Fréchet $\Longrightarrow$ f derivabilă Gateaux

$$(df)(x_0, y_0)(u, v) = f'(x_0, y_0)(u, v)$$

Singurul candidat pt diferențiala Fréchet este derivata Gateaux.

În practică, calculez gradientul (toate deriv parțiale).

Verific dacă derivata Gateaux este liniară. Dacă nu, fct nu este derivabilă Gateaux $\Rightarrow$ nu e dif Fréchet

Dacă derivata Gateaux e liniară, verific limita (*) să fie = 0. Dacă e egală cu 0, fct e diferențiabilă Fréchet.

Dacă fct este   , sigur e diferențiabilă

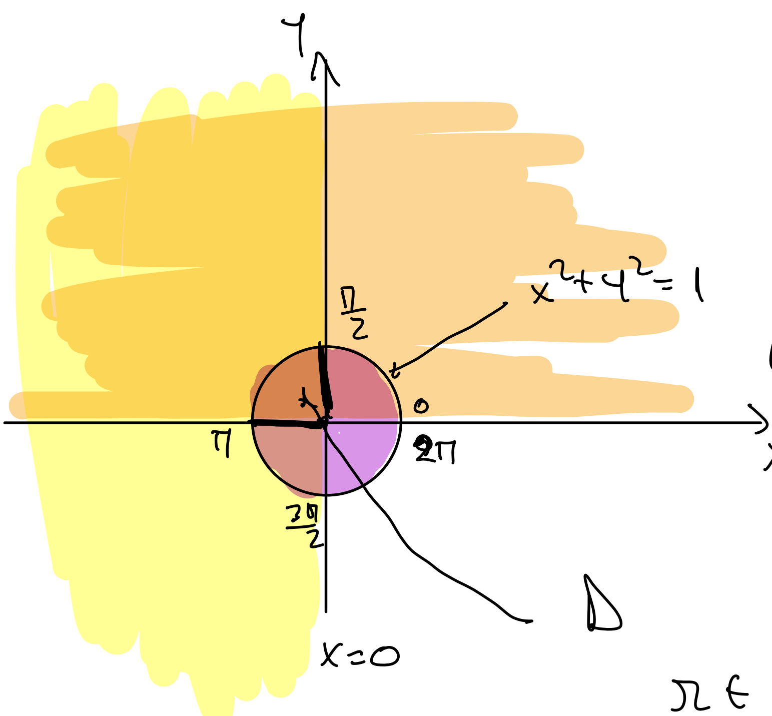
$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 1,\; x\le 0,\; y\ge 0\right\}$$

Punem:

și desenăm



$(0,0)$ în int

$0^2+0^2=0\le 1$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$r\in[0,1]$

$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Aceeași ca de cav.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

linia coresp lui x

$\dfrac{\partial \text{ variabilă veche}}{\partial \text{ variabilă}}$

linia coresp lui y

Jacobianul (întotdeauna este pătrat)

coloana coresp lui r

coloana coresp lui θ

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) =$$

$$r\cos^2\theta + r\sin^2\theta =$$

$$r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\frac{(r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} \cdot r \, d\theta \, dr =$$

Înmulțim integrala inițială cu Jacobianul

$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} \cdot r \, d\theta \, dr$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{\cancel{r^2}}} \sqrt{\cos^2\theta \sin\theta} \cdot \cancel{r} \, d\theta \, dr$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underline{\sqrt{r^3}\sqrt{\cos^2\theta \sin\theta}} \, d\theta \, dr =$$

$$\int_0^1 \sqrt{r^3} \, dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\cos^2\theta \sin\theta} \, d\theta$$

$$\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}\,dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos\theta\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$$

$$\sin\theta = t$$

$$\cos\theta\,d\theta = dt$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\theta = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}\,dr \int_1^0 (-)\sqrt{t}\,dt$$

$$\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}\,dr \int_0^1 \sqrt{t}\,dt =$$

$$\left.\frac{r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 \cdot \left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 =$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

Nu pot desface în 2 integrale

de 1. var dacă

→ domeniul este simplu în raport cu una dintre axe capetele de integrare depind de 1 var

→ f ct nu e produs de tipul $f(x) \cdot g(y)$

Dacă $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$\underbrace{\iint g(x,y)\,dx\,dy}_{\text{pot face schimbare 2 var}} \int h(z)\,dz$

scale

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}} \qquad (x,y) = (0,0) + t(4,3)$$

$$t > 0$$

$$(u,v) = (4,3)$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\sqrt{\dfrac{t^2 \cdot 16 \cdot t \cdot 3}{t^2 \cdot 16 + t^2 \cdot 9}}}{t} =$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\sqrt{t^3} \cdot \sqrt{48}}{5t^2}$$