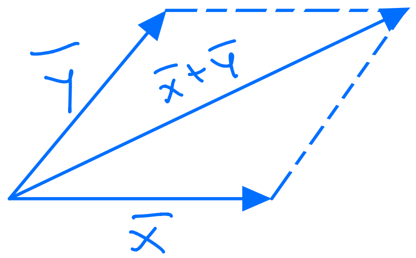
Spații liniare / vectoriale

Perspective: (A). geometrică

Vectori în plan (V^2). Pe V^2 putem considera 2 operații:

1. Adunarea vectorilor

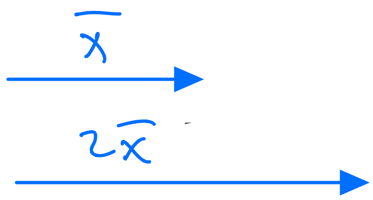


$+ : V^2 \times V^2 \to V^2$

$(V^2, +)$ grup comutativ

- $+$ asociativă
- $+$ comutativă
- 0 element neutru
- $\forall$ element e inversabil

2. Înmulțirea vectorilor cu un scalar



$\cdot : \underbrace{\mathbb{R}} \times V^2 \to V^2$

corpul de scalari

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V^2$

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x} \\ \alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} \\ (\alpha\beta)\bar{x} = \alpha(\beta\bar{x}) \\ 1\cdot\bar{x} = \bar{x} \end{cases}$$

$5\bar{x} = 2\bar{x} + 3\bar{x}$

$2(\bar{x}+\bar{y}) = 2\bar{x} + 3\bar{y}$

$6\bar{x} = 2(3\bar{x})$

$1\cdot\bar{x} = \bar{x}$

(B) Algebrică

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

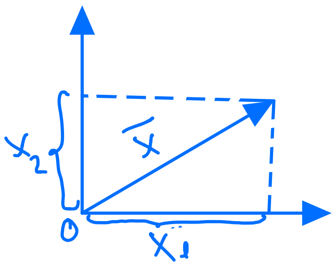
$\overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \overline{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

Legătura dintre cele 2 : $V_2 \cong \mathbb{R}^2$



Alte exemple de spații vectoriale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$

ex: $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longleftrightarrow (a\ b\ c\ d)$

Reluăm: V spațiu vectorial

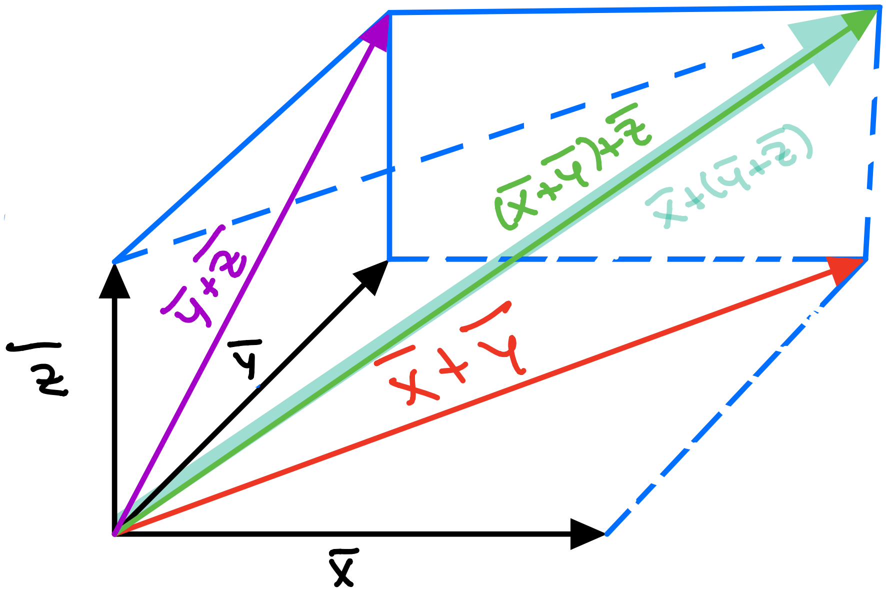
$(V, +)$ grup

$\forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$

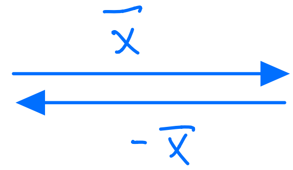
1. $\overline{x} + \overline{y} \in V$ Suma a 2 vectori e tot vector
2. $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ Pot rearanja parantezele oricum
3. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ Pot rearanja termenii
4. $\overline{x} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$ Adunarea cu vectorul nul nu influențează rezultatul
5. $\exists\, -\overline{x}$ Fiecare element e inversabil

   $\overline{x} + (-\overline{x}) = (-\overline{x}) + \overline{x} = \overline{0}$

3.

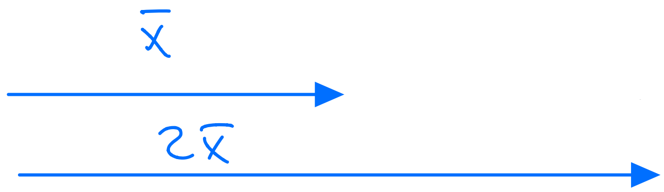


5.



4. $\bar{0}$

Corp de scalari $K = \mathbb{R} / \mathbb{C}$



Înmulțirea cu scalari = operație externă

- $\cdot : \mathbb{R} \times \underline{V^2} \longrightarrow \underline{V^2}$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Seminar 5

***Exerciţii recomandate:** 5.1, 5.2(a,b), 5.3, 5.4, 5.5, 5.6
***Rezerve:** 5.9, 5.10, 5.13, 5.17

S5.1 Fie $M := \left\{ A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = b + c \right\}$.

a) Să se arate că M este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

b) Să se afle o bază a lui M şi $dim(M)$. Am găsit o bază a lui M cu 3 elemente
$\Rightarrow \dim M = 3$

c) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este o bază a lui M. Să se găsească coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

Dat un spaţiu liniar,
o mulţime $W \subseteq V$ este subspaţiu liniar al lui
V dacă W spaţiu liniar.
Practic, trebuie verificat doar că $\forall \bar{x}, \bar{y} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\bar{x} + \bar{y} \in W$
$\alpha \bar{x} \in W$

a) $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \in M \quad a_1 = b_1 + c_1 \quad (\cdot)$

$A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \in M \quad a_2 = b_2 + c_2 \quad (\cdot\cdot)$

$A_1 + A_2 \in M$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} \underline{a_1 + a_2} & \underline{\underline{b_1 + b_2}} \\ \underline{\underline{c_1 + c_2}} & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a_1 + a_2} \overset{(\circ)}{\underset{(\circ\circ)}{=}} (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) = \underline{\underline{(b_1 + b_2)}} + \underline{\underline{(c_1 + c_2)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_1 + A_2 \in M}} \quad (*)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$+$

$\alpha A_1 \in M$

$+$

$$\alpha A_1 = \begin{bmatrix} \underline{\alpha a_1} & \underline{\underline{\alpha b_1}} \\ \underline{\underline{\alpha c_1}} & 0 \\ 0 & \alpha d_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha a_1 \overset{(\circ)}{=} \alpha(b_1 + c_1) = \alpha b_1 + \alpha c_1$$

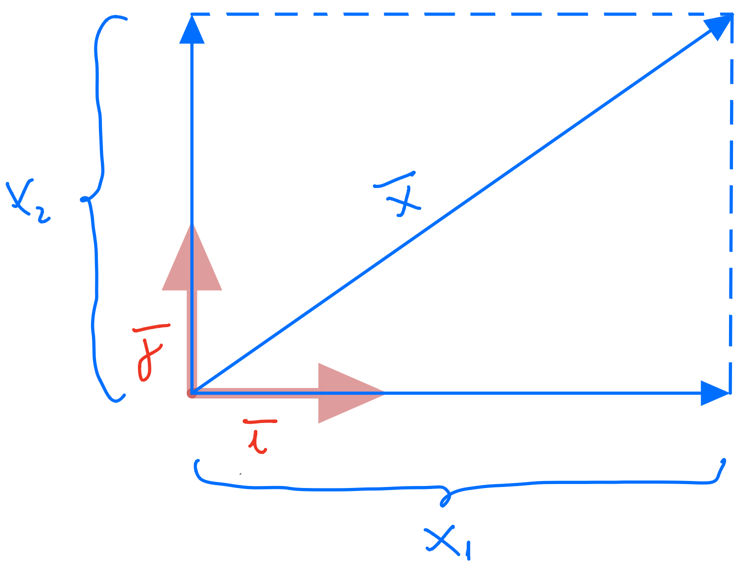
$$\Rightarrow \alpha A_1 \in M \quad (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow M$ subspațiu liniar al lui $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$M \leq \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

b) Bază

ex: În V^2 $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ este o bază



$$\bar{x} = (x_1, x_2) = x_1 \underbrace{(1,0)}_{\bar{i}} + x_2 \underbrace{(0,1)}_{\bar{j}}$$

$$(1,1) = \bar{i} + \bar{j}$$

În general,

Bază = sistem liniar independent (s.l.i) + sistem de generatori (s. gen) sistem liniar independent — intuiție

nu am prea mulți vectori

sistem generatori — intuiție

nu am prea puțini vectori

Formal Fie $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\} \subset V$

s.l.i Dată $\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n = \bar{0}_V$ combinație liniară

trebuie să demonstrez că

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \in \mathbb{R}$$

s.gen Dat $\bar{v} \in V$ găsesc $\beta_1, \dots, \beta_n$

a.î. $\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta \bar{b}_n$

$\dim_{\mathbb{R}} V = \text{card}(B) = n$

Orice altă bază are tot n elemente

Fie $M := \left\{ A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = b + c \right\}.$

b) Să se afle o bază a lui M şi $dim(M)$.

c) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este o bază a lui M. Să se găsească coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

b) Fie $\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset M$

$\mathcal{B}$ sistem generatori

Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M \qquad b + c = a$

$$A = b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_3}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ sistem generatori (1)

$\mathcal{B}$ s.l.i

$$f_1 B_1 + f_2 B_2 + f_3 B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ f_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 + f_2 & \underline{f_1} \\ \underline{\underline{f_2}} & 0 \\ 0 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0} \\ \underline{\underline{0}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f_1 = 0$

$f_2 = 0$ $\Rightarrow$ B sistem liniar

$f_3 = 0$ independent (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ B bază

$\dim M = \operatorname{card} B = 3$

c) $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ formează bază

$\dim M = 3$

$\Rightarrow$ E suficient să verific una din condiții pt $\mathbb{B}$

Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ $a = b + c$

Caut e_1, e_2, e_3 a.î.

$M \ni A = e_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e_2 & -e_1 + e_2 + e_3 \\ e_1 + e_2 - e_3 & 0 \\ 0 & e_1 - e_2 + e_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2e_2 \\ b = -e_1 + e_2 + e_3 \\ c = e_1 + e_2 - e_3 \\ d = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$$

$\oplus$ $b + c = 2e_2 \Rightarrow$ $e_2 = \frac{1}{2}(b + c)$

$\oplus$ $c + d = 2e_1 \to$ $e_1 = \frac{c+d}{2}$

$b + d = 2e_3 \to e_3 = \frac{b+d}{2}$

$$e_1 = \frac{c+d}{2}, \quad e_2 = \frac{b+c}{2}, \quad e_3 = \frac{b+d}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B} \text{ s.gen} \xRightarrow{\text{card } \mathcal{B} = \dim M} \mathcal{B} \text{ bază}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_c &= 4 \\ b_c &= 2 \\ c_c &= 2 \\ d_c &= 1 \end{aligned}$$

$$e_1 = \frac{3}{2}, \quad e_2 = 2, \quad e_3 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 1$$

S5.2 Să se analizeze liniara dependenţă / independenţă a următoarelor mulţimi şi să se stabilească, în caz de dependenţă liniară a lor, relaţia de dependenţă în cauză.

a) $\{(1,1,1),(1,-2,3),(-1,11,-9)\} \subset \mathbb{R}^3$;

b) $\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

c) $\{(1,-1,3),(-1,1,4),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

d) $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos^2 x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$\dim \mathbb{R}^n = n$

a) $$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \mu = 0 \\ \alpha - 2\beta + 11\mu = 0 \\ \alpha + 3\beta - 9\mu = 0 \end{cases}$$

sistem liniar de 3 ecuații cu 3 nec.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

$C_1 = C_1 + C_3$

$C_2 = C_2 + C_3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 12 & 9 & 11 \\ -8 & -6 & -9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Sistemul nu are soluție unică $\Rightarrow$

găsesc o combinație liniară în care nu toți sunt nuli $\Rightarrow$

Vectorii sunt liniar dependenți

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \mu \\ \alpha - 2\beta = -11\mu \end{cases} \quad \ominus$$

$$3\beta = 12\mu \rightarrow \beta = 4\mu$$

$$\alpha = \mu - 4\mu = -3\mu$$

$$\alpha = -3\mu$$
$$\beta = 4\mu$$
$$\mu = \mu$$

Dacă aleg $\mu = 1$

$\rightarrow \alpha = -3$

$\beta = 4$

$\mu = 1$

Puteți alege orice valoare nenulă

$$-3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e) $0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$$\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2 e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

$\alpha f_1 + \beta f_2 + \mu f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\alpha f_1 + \beta f_2 + \mu f_3 = 0$ $\quad 0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$0(x) = 0$

$(\alpha f_1 + \beta f_2 + \mu f_3)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\alpha f_1 + \beta f_2 + \mu f_3)(0) = 0$

$\alpha \cdot e^0 + \underbrace{\beta \cdot 0 \cdot e^{-0}}_{0} + \underbrace{\mu \cdot 0 \cdot e^0}_{0} = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$(\beta f_2 + \mu f_3)(1) = 0$

$\beta \cdot 1 e^{-1} + \mu 1 \cdot e^1 = 0$

$\frac{\beta}{e} + \mu \cdot e = 0 \mid \cdot e \Rightarrow \beta + \mu e^2 = 0 \mid e^2$

$\beta e^2 + \mu e^4 = 0$

$(\beta f_2 + \mu f_3)(-1) = 0$

$-\beta \cdot e + \mu \cdot (-1)^2 \cdot e^{-1} = 0$ $\quad \oplus$

$-\beta e + \frac{\mu}{e} = 0 \Rightarrow -\beta e^2 + \mu = 0$

$\mu e^4 + \mu = 0$

$\mu(e^4 + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ l. indep $\quad \mu = 0 \Rightarrow \beta = 0$

S5.3 1°. Să se arate că $B = \{(3,1,5),(3,6,2),(-1,0,1)\}$ formează o bază pentru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, la fel orientată ca baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

2°. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât mulţimea $B' = \{(m,2,-3),(1,1,-1),(m,1,3)\}$ să fie o bază a lui $\mathbb{R}^3$, contrar orientată bazei canonice a lui $\mathbb{R}^3$.

3°. Pentru valorile lui m determinate la 2°, să se afle matricea S a schimbării de bază de la B la B'.

4°. Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{x} = (\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{1})$ în baza B.

1°

$\left.\begin{array}{l}\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{card } B = 3\end{array}\right\} \Rightarrow$ E suf să arăt că B este s. lin indep.

$$\alpha \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}}_{v_2} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (\cdot)$$

Dacă B este lin indep $\Leftrightarrow$ $(\cdot)$ are soluţie unică $\alpha = \beta = \mu = 0$ $\Leftrightarrow$

det sist $(\cdot)$ este nenul $\Leftrightarrow$

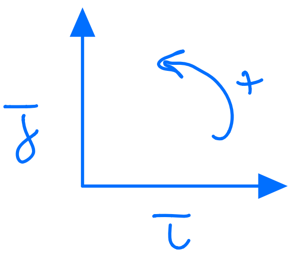
$$\begin{vmatrix}3 & 3 & -1\\1 & 6 & 0\\5 & 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

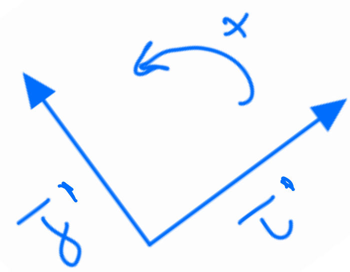
$$\begin{vmatrix}3 & 3 & -1\\1 & 6 & 0\\5 & 2 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{L_1 = L_1 + L_3} \begin{vmatrix}8 & 5 & 0\\1 & 6 & 0\\5 & 2 & 1\end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix}8 & 5\\1 & 6\end{vmatrix} =$$

$48 - 5 = 43$

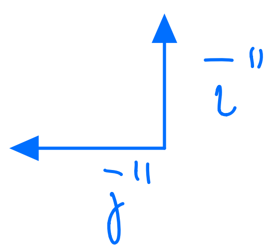
$\Rightarrow$ B s lin indep $\Rightarrow$ B bază

ex: V^2





$\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ la fel orientată cu $\{\bar{i}, \bar{j}\}$



$\{\bar{i}'', \bar{j}''\}$ invers orientată cu $\{\bar{i}, \bar{j}\}$

Practic, 2 baze sunt la fel orientate dacă matricea schimbării de bază are det > 0

în $\mathbb{R}^n$

$$C_{\mathbb{R}^n} = \{\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\bar{e}_1}, \underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{\bar{e}_2}, \dots, \underbrace{(0,0,\dots,0,1)}_{\bar{e}_n}\}$$

bază canonică

$$C_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

bază canonică

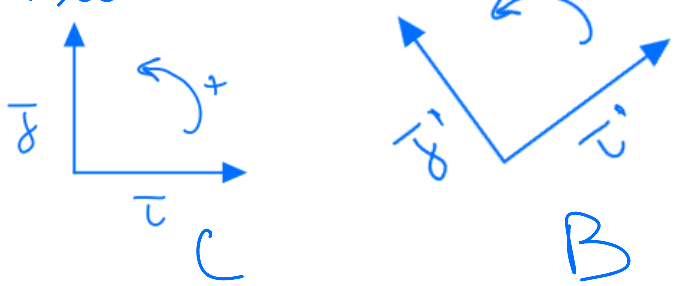
$$S_{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

B la fel orientată cu C $\Leftrightarrow$

$$\det S_{CB} > 0$$
$$\|$$
$$43 > 0 \Rightarrow B \text{ la fel orientată cu } C.$$

Matricea schimbării de bază

Fie



$$\bar{i}' = \bar{i} + \bar{j}$$
$$\bar{j}' = -\bar{i} + \bar{j}$$

Vrem să scriem matriceal:

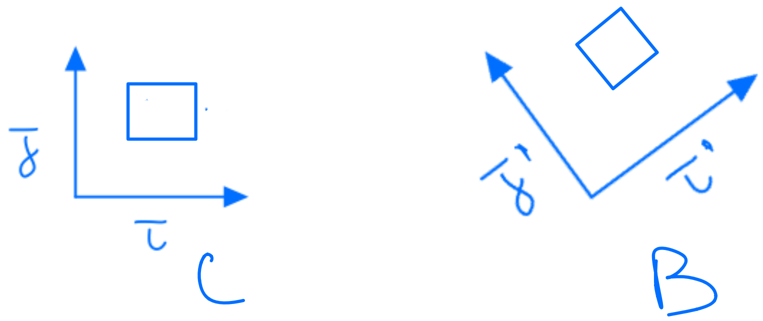
$$\begin{cases} \bar{i}' = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} \\ \bar{j}' = -1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} \end{cases} \Rightarrow (\bar{i}' \ \bar{j}') = (\bar{i} \ \bar{j}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$(\bar{i}', \bar{j}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{i}', \bar{j}') = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \bar{i}' & \;\;\bar{j}' \end{array} \end{array}$$

Când trec de la baza canonică la o nouă, matricea schimbării de bază este obținută prin a pune pe coloane vectorii noii baze.



2' $\quad B' = \{\overbrace{(m,2,-3)}^{\overline{w_1}}, \overbrace{(1,1,-1)}^{\overline{w_2}}, \overbrace{(m,1,3)}^{\overline{w_3}}\}$

B' bază a lui $\mathbb{R}^3$ contrar orientată bazei canonice

card $B' = 3 \xrightarrow[]{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3}$ este suf să arăt că este sistem liniar independent $\Leftrightarrow$

$$\alpha \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

are soluția unică $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(< 0 pt că vrem contrar orientată)

$L_1 = L_1 + L_3$

$L_2 = L_2 + L_3$

$$\begin{vmatrix} m-3 & 0 & m+3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} m-3 & m+3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

col 2 lin 3

$$= \begin{vmatrix} m-3 & m+3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-3) + m+3 =$$

$$5m - 9 < 0$$

$$m < \frac{9}{5}$$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dashed] \\ C \arrow[ur, "S_{CB}"] \arrow[r, "S_{CB'}"'] & B' \end{tikzcd} \qquad S_{BB'} = ?$$

$$\det S_{CB} \neq 0$$

$$B = C \cdot S_{CB} \Rightarrow B \cdot S_{CB}^{-1} = C$$

$$B' = C \cdot S_{CB'} \Rightarrow B' = B \cdot \left(S_{CB}^{-1} \cdot S_{CB'}\right)$$

$$B' = B \cdot S_{BB'} \qquad S_{BB'} = S_{CB}^{-1} \cdot S_{CB'}$$

$$S_{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 43$$

$$S_{CB}^{t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{CB}^{*} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ -1 & 8 & -1 \\ -28 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\left(S_{CB}\right)^{-1} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ -1 & 8 & -1 \\ -28 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$S_{BB'} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ -1 & 8 & -1 \\ -28 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_{BB'} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 6m-10-18 & 6-5-6 & 6m-5+18 \\ -m+16+3 & -1+8+1 & -m+8-3 \\ -28m+18-45 & -28+9-15 & -28m+9+45 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 6m-28 & -5 & 6m-13 \\ -m+19 & 8 & -m+5 \\ -28m-27 & -34 & -28m+54 \end{pmatrix}$$

Verificare

$$B' = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{v_1} & \underbrace{\quad}_{v_2} & \underbrace{\quad}_{v_3} \end{matrix} \end{array} \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 6m-28 & -5 & 6m+13 \\ -m+19 & 8 & -m+5 \\ -28m-27 & -34 & -28m+54 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 18m-84-3m+57+28m+28 & -15+24+34 & 18m+3\cancel{9}-3m+\cancel{15}+28m-\cancel{54} \\ 6\cancel{m}-28-6\cancel{m}+114 & -5+48 & 6\cancel{m}+13-\cancel{6}m+30 \\ 30\cancel{m}-140-2\cancel{m}+38-2\cancel{8}m-27 & -25+16-34 & 3\cancel{0}m+65-\cancel{2}m+10-\cancel{28}m+54 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43m & 43 & 43m \\ 86 & 43 & 43 \\ -129 & -43 & 129 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} m & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{\bar{w}_1} & \underbrace{\quad}_{\bar{w}_2} & \underbrace{\quad}_{\bar{w}_3} \end{matrix} \end{array} \quad \checkmark$$

4°. $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{\bar{x} = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3)\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

$$(\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3) = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3)\, S_{CB} \Rightarrow$$

$$(\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3) = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3)\, S_{CB}^{-1}$$

$$\bar{x} = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3)\, \underbrace{S_{CB}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ -1 & 8 & -1 \\ -28 & 9 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{43}\begin{pmatrix} \cancel{6} - 10 - \cancel{6} \\ -\cancel{1} + 16 + \cancel{1} \\ -28 + 18 - 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} -10 \\ 16 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$\bar{x} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{\underbrace{}_{v_1}\ \underbrace{}_{v_2}\ \underbrace{}_{v_3}} \begin{pmatrix} -10 \\ 16 \\ -25 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} -30 + 48 + 25 \\ -10 + 96 \\ -50 + 32 - 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43 \\ 86 \\ -43 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

S5.4 Să se arate că aplicaţia $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

Produs scalar:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$

2) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

4) Aplicație liniară

1) $\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + \underline{x_1x_2} + \underline{x_2x_1} + x_2^2 + 5x_3^2 =$

$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2$

$x_1^2 + \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} + 5x_3^2$

$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 5x_3^2 \geq 0$

2) Egalitate cu 0 am dacă și numai dacă $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = -x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x} = 0$

3) $\langle y, x\rangle = 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_2 +$
$5y_3x_3 = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 +$
$x_2y_2 + 5x_3y_3 = \langle x, y\rangle$

4) Aplicatie liniară. Verif $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \underline{(x_1 \quad x_2 \quad x_3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\overline{b_1}$ $\overline{b_2}$ $\overline{b_3}$

S5.5 Fie spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$, dotat cu produsul scalar euclidian. Să se analizeze ortogonalitatea sistemului de vectori $U = \{(1,-1,1),(0,1,1),(-2,-1,1)\}$. Să se calculeze apoi $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{w})$ şi $\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})$, unde $\mathbf{u} = (-1,1,2)$, $\mathbf{v} = (-1,1,1)$ şi $\mathbf{w} = (1,2,3)$.

În $\mathbb{R}^n$ produsul scalar canonic este dat de:

Fie $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

$$\cos(\sphericalangle\, \overline{x}, \overline{y}) = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \|\overline{y}\|}$$

unde norma unui element este dată de

$$\|\overline{x}\| = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Spunem că x ortogonal cu y dacă

$$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow (\sphericalangle\, \overline{x}, \overline{y}) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0$$

$$\overline{b_1} \perp \overline{b_2} \Leftrightarrow \langle \overline{b_1}, \overline{b_2} \rangle = 0$$

$$\langle \overline{b_1}, \overline{b_2} \rangle = \underbrace{1 \cdot 0}_{0} + \underbrace{(-1) \cdot 1}_{-1} + \underbrace{1 \cdot 1}_{1} = 0 \Rightarrow \overline{b_1} \perp \overline{b_2}$$

$$\cos(\sphericalangle\, \overline{u}, \overline{v}) = \frac{\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle}{\|\overline{u}\| \|\overline{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

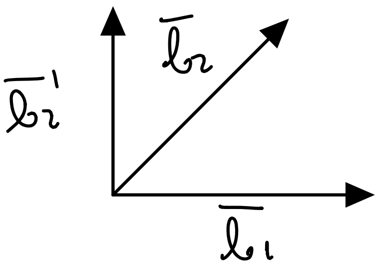
$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{1} + \underbrace{1 \cdot 1}_{1} + \underbrace{2 \cdot 1}_{1} = 4$$

S5.6 Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, dotat cu produsul scalar canonic. Folosind procedeul de ortonormalizare al lui Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată B', plecând de la baza

$$B = \{\underbrace{(1,2,-1,0)}_{\bar{b}_1}, \underbrace{(1,-1,1,1)}_{\bar{b}_2}, \underbrace{(-1,2,1,1)}_{\bar{b}_3}, \underbrace{(-1,-1,0,1)}_{\bar{b}_4}\}.$$

Dată o bază

$B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4\}$



se găsesc

$\{\bar{b}_1'', \bar{b}_2'', \bar{b}_3'', \bar{b}_4''\}$ a.î.

$$\begin{cases} \bar{b}_1'' \perp \bar{b}_2'' \quad \bar{b}_2'' \perp \bar{b}_3'' \quad \bar{b}_3'' \perp \bar{b}_4'' \\ \bar{b}_1'' \perp \bar{b}_3'' \quad \bar{b}_2'' \perp \bar{b}_4'' \\ \bar{b}_1'' \perp \bar{b}_4'' \\ \text{şi} \\ \|\bar{b}_1''\| = \|\bar{b}_2''\| = \|\bar{b}_3''\| = \|\bar{b}_4''\| \end{cases}$$

- $\bar{b}_1' = \bar{b}_1 \qquad \bar{b}_1'' = \dfrac{1}{\|\bar{b}_1'\|}\bar{b}_1' = \dfrac{1}{\|\bar{b}_1\|}\bar{b}_1$

$$\|\bar{b}_1\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{6}$$

$$\bar{b}_1'' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0)$$

- Aleg
$$\overline{b_2}' = \overline{b_2} - \alpha \overline{b_1}'$$

a.î $\overline{b_2}' \perp \overline{b_1}' \iff \langle \overline{b_2}', \overline{b_1}' \rangle = 0 \iff$

$$\langle \overline{b_2} - \alpha \overline{b_1}', \overline{b_1}' \rangle = 0 \iff$$

$$\langle \overline{b_2}, \overline{b_1}' \rangle - \alpha \langle \overline{b_1}', \overline{b_1}' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\langle \overline{b_2}, \overline{b_1}' \rangle}{\langle \overline{b_1}', \overline{b_1}' \rangle}$$

$$\Rightarrow \overline{b_2}' = \overline{b_2} - \frac{\langle \overline{b_2}, \overline{b_1}' \rangle}{\langle \overline{b_1}', \overline{b_1}' \rangle} \overline{b_1}'$$

$\overline{b_2}' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

- $\overline{b_2}'' = \frac{1}{\|\overline{b_2}'\|} \overline{b_2}'$

$\overline{b_2}'' = \frac{1}{\sqrt{30}}(4, -1, 2, 3)$

Similar

$$\overline{b_3}' = \overline{b_3} - \frac{\langle \overline{b_2}', \overline{b_3} \rangle}{\|\overline{b_2}'\|^2} \overline{b_2}' - \frac{\langle \overline{b_1}', \overline{b_3} \rangle}{\|\overline{b_1}'\|^2} \overline{b_1}'$$

$$\overline{b_3}' = \frac{1}{10}(-12, 13, 14, 11)$$

$$\overline{b_4}' = \overline{b_4} - \frac{\langle \overline{b_3}', \overline{b_4} \rangle}{\|\overline{b_3}'\|^2} \overline{b_3}' - \frac{\langle \overline{b_2}', \overline{b_4} \rangle}{\|\overline{b_2}'\|^2} \overline{b_2}' - \frac{\langle \overline{b_1}', \overline{b_4} \rangle}{\|\overline{b_1}'\|^2} \overline{b_1}'$$

$$\overline{b_4}' = 13\left(-\frac{1}{42}, -\frac{1}{63}, -\frac{1}{18}, \frac{4}{63}\right)$$

S5.7 Se consideră sistemul de vectori $C = \{(1,4,3,2),(1,1,-1,1),(-3,0,7,6)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Să se determine $S = Sp(C)$ şi $S^{\perp}$.

S5.8 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, se definesc operaţiile $\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $x \oplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ este un spaţiu liniar.

S5.9 (R) Fie $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ şi fie $||\cdot||$ norma indusă de acesta. Să se arate că $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, au loc:

i) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$ (Euler)

ii) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ (Hilbert).

S5.10 (R) Fie W un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : W \to \mathbb{R}$, o funcţie astfel încât

$$\{\mathbf{x} \in W \mid f(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$$

şi

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Definim aplicaţia $< \cdot\,, \cdot >: W \times W \to \mathbb{R}$, prin:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

a) Să se arate că W este un spaţiu prehilbertian.

b) Să se arate că orice două elemente ale lui W, diferite de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, sunt liniar dependente ($\dim(W) = 1$).

S5.11 Care dintre mulţimile de mai jos este un subspaţiu liniar?

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 + x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det(A) = 0\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

S5.12 Să se studieze, după valorile parametrului real m, dependenţa liniară a următoarelor sisteme de vectori. În caz de dependenţă liniară, să se găsească relaţia de dependenţă respectivă.

i) $\{(3,1,4), (-1,1,2), (1,3,m)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

ii) $\{(6,1,8,3), (2,3,0,2), (4,-1,-8,-2), (1,1,1,m)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

iii) $\{f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^x, f_3(x) = \text{sh}x\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S5.13 În spaţiul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, se consideră:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) Să se scrie matricea S a schimbării de la B_1 la B_2;

c) Să se afle coordonatele matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ în cele două baze B_1 şi B_2.

S5.14 Să se arate că aplicaţia $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3, \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.15 Fie $U = \{(0, 1, 1, 0), (0, 2, -2, 1), (2, 1, -1, -4), (9, -1, 1, 4)\}$ o submulţime a spaţiului liniar $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Să se arate că U este un sistem ortogonal de vectori în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^4$ şi să se calculeze unghiul dintre ultimii doi vectori din U.

S5.16 Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^4$, plecând de la

$$B = \{(0, 1, 1, 0), (0, 4, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}.$$

S5.17 Fie $\mathbb{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic şi $U = \{(-3, 0, 1, 2), (1, -1, 0, 1)\}$. Să se calculeze $Sp(U)$ şi $U^{\perp}$.

S5.18 a) Folosind inegalitatea lui Minkowski, să se arate că aplicaţia $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$, definită prin

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

b) Să se arate că $||\mathbf{x}||_\infty \stackrel{def}{=} \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k| = \lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

c) Să se demonstreze că: $||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1 \leq \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2 \leq n||\mathbf{x}||_\infty$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Să se arate că inegalitatea lui Hölder se poate reda sub forma

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > |_c \leq ||\mathbf{x}||_p \cdot ||\mathbf{y}||_q, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},$$

pentru orice $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
În particular, când $p = q = 2$, inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz se poate rescrie în forma:

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_c | \leq ||\mathbf{x}||_2 \cdot ||\mathbf{y}||_2, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Bibliografie selectivă

1. Veronica T. Borcea, Cătălina I. Davideanu, Corina Forăscu - *Probleme de algebră liniară*, Ed. "Gheorghe Asachi", Iaşi, 2000.

2. Şt. O. Tohăneanu, Rodica Dăneţ - *Curs practic de algebră liniară cu 327 de exerciţii şi probleme rezolvate,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

3. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Cioară - *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.