Ex 81 $\varphi = \underbrace{(\forall x. P(x,x))}\rightarrow \exists x_2. P(x_1, x_2)$ este validă

ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem $S, \alpha \models \varphi$

ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem $\begin{cases} S,\alpha \not\models \forall x. P(x,x) \\ \text{sau} \\ S,\alpha \models \exists x_2. P(x_1,x_2) \end{cases}$

ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem $\begin{cases} \text{NU pt orice } u \in D \text{ avem } S, \underbrace{\alpha[x \mapsto u]}_{\alpha_1} \models P(x,x) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \underbrace{\alpha[x_2 \mapsto v]}_{\alpha_2'} \models P(x_1, x_2) \end{cases}$

ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem $\begin{cases} \text{NU pt orice } u \in D \text{ avem } P^S(\overline{\alpha_1}(x), \overline{\alpha_1}(x)) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } P^S(\overline{\alpha_2}(x_1), \overline{\alpha_2}(x_2)) \end{cases}$

$\alpha(x) = \dots$	$\alpha_1(x) = u$	$\alpha_2(x) = \alpha(x)$
$\alpha(x_1) = \dots$	$\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$	$\alpha_2(x_1) = \alpha(x_1)$ -
$\alpha(x_2) = \dots$	$\alpha_1(x_2) = \alpha(x_2)$	$\alpha_2(x_2) = v$ -
$\alpha(y) = \dots$ pt orice $y \in X \setminus \{x, x_1, x_2\}$	$\alpha_1(y) = \alpha(y)$	$\alpha_2(y) = \alpha(y)$

ddacă pt orice S și pt orice S-atr α avem (*) $\begin{cases} \text{NU pt orice } u \in D \text{ avem } P^S(u,u) \quad (1) \\ \text{sau} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } P^S(\alpha(x_1), v) \quad (2) \end{cases}$

P^S nu este reflexivă

Fie S o structură arbitrară și α o S-atribuire arbitrară

Caz 1: P^S este reflexivă $\Rightarrow$ pt orice $u \in D$ avem $P^S(u,u)$

"există $v \in D$ a.î. $P^S(\alpha(x_1), v)$" este "A" deoarece alegem $v = \alpha(x_1)$

și avem $P^S(\alpha(x_1), \alpha(x_1))$ "A" (P^S este reflexiv)

$\Rightarrow$ (*) este "A".

Caz 2: P^S nu este reflexivă $\Rightarrow$ NU pt orice $u \in D$ avem $P^S(u,u) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*) este "A".

$\mathbb{N}$ $0 > -$

$\Rightarrow \varphi$ validă.

<u>Ex 84</u> $\varphi = \forall x. (\neg P(x, x) \wedge (\exists x. P(x, x)))$ nu este satisf

ddacă NU există S și există o S-atr α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

ddacă NU există S și există o S-atr α a.î. pt orice $u \in D$ avem $S, \overbrace{\alpha[x \mapsto u]}^{\alpha_1} \models \neg P(x, x) \wedge \exists x. P(x, x)$

ddacă NU există S și există o S-atr α a.î. pt orice $u \in D$ avem $\begin{cases} S, \alpha_1 \models \neg P(x, x) \\ \text{și} \\ S, \alpha_1 \models \exists x. P(x, x) \end{cases}$

ddacă NU există S și există o S-atr α a.î. pt orice $u \in D$ avem $\begin{cases} S, \alpha_1 \not\models P(x, x) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto v]}_{\alpha_2} \models P(x, x) \end{cases}$

$\alpha(x) = \ldots$ | $\alpha_1(x) = u$ | $\alpha_2(x) = v$

$\alpha(y) = \ldots$ pt orice $y \in X \setminus \{x\}$ | $\alpha_1(y) = \alpha(y)$ | $\alpha_2(y) = \alpha_1(y) = \alpha(y)$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, NU pt orice $u \in D$ avem $\begin{cases} S, \alpha_1 \not\models P(x, x) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto v]}_{\alpha_2} \models P(x, x) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, există $u \in D$ a.î. NU $\begin{cases} S, \alpha_1 \not\models P(x, x) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } S, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto v]}_{\alpha_2} \models P(x, x) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} \text{NU } S, \alpha_1 \not\models P(x, x) \\ \text{sau} \\ \text{NU există } v \in D \text{ a.î. } S, \alpha_2 \models P(x, x) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} S, \alpha_1 \models P(x, x) \\ \text{sau} \\ \text{pt orice } v \in D \text{ avem } S, \alpha_2 \not\models P(x, x) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} P^S(\overline{\alpha_1}(x), \overline{\alpha_1}(x)) \\ \text{sau} \\ \text{pt orice } v \in D, \text{ NU avem } P^S(\overline{\alpha_2}(x), \overline{\alpha_2}(x)) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, există $u \in D$ a.î. $\begin{cases} P^S(u, u) \\ \text{sau} \\ \text{pt orice } v \in D \text{ NU avem } P^S(v, v) \end{cases}$

ddacă pt orice S, pt orice S-atr α, $\begin{cases} \text{există } u \in D \text{ a.î. } P^S(u, u) \\ \text{sau} \\ \text{pt orice } v \in D, \text{ Nu avem } P^S(v, v) \end{cases}$ "A"

NU există $u \in D$ a.î. $P^S(u, u)$

$\Rightarrow \varphi$ nu este satisf.

φ satisf ddacă ....

ddacă există S, există S-atr α a.î. $\begin{cases} \text{pt orice } u \in D, \text{ Nu avem } P^S(u, u) \\ \text{și} \\ \text{există } v \in D \text{ a.î. } P^S(v, v) \end{cases}$ "F"

$\Rightarrow \varphi$ nu este satisf.

$\Sigma = (\{\underset{2}{P}\}, \{\underset{2}{f}, \underset{1}{i}, \underset{0}{e}\})$

Ex 74, 7) $S_1 = (\mathbb{Z}, \{\underset{P^{S_1}}{=}\}, \{\underset{f^{S_1}}{+}, \underset{i^{S_1}}{-}, \underset{e^{S_1}}{0}\})$

$\alpha_2 : X \to \mathbb{Z}$, $\alpha_2(x_1) = 6$
$\alpha_2(x_2) = 5$
$\alpha_2(x_3) = 6$
$\alpha_2(x) = 0$ pt orice $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$

$S_1, \alpha_2 \models \forall x_2. \exists x_3. P(x_2, i(x_3))$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem $S_1, \underbrace{\alpha_2[x_2 \mapsto u]}_{\alpha'} \models \exists x_3. P(x_2, i(x_3))$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $S_1, \underbrace{\alpha'[x_3 \mapsto v]}_{\alpha''} \models P(x_2, i(x_3))$

$\alpha_2(x_1) = 6$	$\alpha'(x_1) = 6$	$\alpha''(x_1) = 6$
$\alpha_2(x_2) = 5$	$\alpha'(x_2) = u$	$\alpha''(x_2) = u$
$\alpha_2(x_3) = 6$	$\alpha'(x_3) = 6$	$\alpha''(x_3) = v$
$\alpha_2(x) = 0$ ...	$\alpha'(x) = 0$	$\alpha''(x) = 0$ pt orice $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $P^{S_1}\left(\overline{\alpha''}(x_2), \overline{\alpha''}(i(x_3))\right)$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha''(x_2) = i^{S_1}\left(\overline{\alpha''}(x_3)\right)$

$\alpha : X \to D$

$\overline{\alpha} : T \to D$

$$\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(x) & , t = x \in X \\ c^S & , t = c \in F_0 \\ f^S(\overline{\alpha}(t_1), \ldots, \overline{\alpha}(t_n)), & t = f(t_1, \ldots, t_n), \; n \geq 1 \end{cases}$$

ddacă pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $u = -v$ "A" $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_1, \alpha_2 \models \forall x_2. \exists x_3. P(x_2, i(x_3))$

6) $S_1, \alpha_1 \models \exists x_3. \forall x_2. P(x_2, x_3)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $S_1, \overbrace{\alpha_1[x_3 \mapsto u]}^{\alpha'} \models \forall x_2. P(x_2, x_3)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. pt orice $v \in \mathbb{Z}$ avem $S_1, \overbrace{\alpha'[x_2 \mapsto v]}^{\alpha''} \models P(x_2, x_3)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. pt orice $v \in \mathbb{Z}$ avem $P^{S_1}\left(\overline{\alpha''}(x_2), \overline{\alpha''}(x_3)\right)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. pt orice $v \in \mathbb{Z}$ avem $\alpha''(x_2) = \alpha''(x_3)$

$\alpha_1 : X \to \mathbb{Z}$		
$\alpha_1(x_1) = 5$	$\alpha'(x_1) = 5$	$\alpha''(x_1) = 5$
$\alpha_1(x_2) = 5$	$\alpha'(x_2) = 5$	$\alpha''(x_2) = v$
$\alpha_1(x_3) = 6$	$\alpha'(x_3) = u$	$\alpha''(x_3) = u$
$\alpha_1(x) = 0$ pt orice $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$	$\alpha'(x) = 0$	$\alpha''(x) = 0$ pt orice $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. pt orice $v \in \mathbb{Z}$ avem $v = u$ "F"

$u = \cancel{5}$ a.î.

$v = -2$

$v = -1$

$v = 0$

$v = 1$

$\Rightarrow S_1, \alpha_1 \not\models \exists x_3. \forall x_2. P(x_2, x_3)$

$\{\varphi_1, \dots \varphi_n\} \models \varphi$ — cons semantică

$S, \alpha \models \varphi$ — "satisface"

78 φ - satisf în S_1
— nu fie satisf în S_3

$$S_1 = (\mathbb{Z}, \{=\}, \{+, -, 0\})$$

(P^{S_1} ; f^{S_1}, i^{S_1}, e^{S_1})

$$S_3 = (\mathbb{N}, \{=\}, \{+, s, 0\})$$

φ satisf în S ddacă există S-atr α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

$$\varphi = \forall x. \exists y. P(x, i(y))$$

φ satisf în S_1 ddacă există S_1-atr α_1 a.î. $S_1, \alpha_1 \models \varphi$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. pt orice $u \in \mathbb{Z}$ avem $S_1, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto u]}_{\alpha_1'} \models \exists y. P(x, i(y))$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $S_1, \underbrace{\alpha_1'[y \mapsto v]}_{\alpha_1''} \models P(x, i(y))$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $P^{S_1}(\overline{\alpha_1''}(x), \overline{\alpha_1''}(i(y)))$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha_1''(x) = i^{S_1}(\overline{\alpha_1''}(y))$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. pt orice $u \in \mathbb{Z}$, există $v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha_1''(x) = -\alpha_1''(y)$

$\alpha_1(x) = \dots$	$\alpha_1'(x) = u$	$\alpha_1''(x) = u$
$\alpha_1(y) = \dots$	$\alpha_1'(y) = \alpha_1(y)$	$\alpha_1''(y) = v$,
$\alpha_1(z) = \dots$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$	$\alpha_1'(z) = \alpha_1(z)$	$\alpha_1''(z) = \alpha_1(z)$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

ddaca există S_1-atr α_1 a.î. $\underline{\text{pt orice } u \in \mathbb{Z}, \text{ există } v \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } u = -v}$ "A"

"A" pt orice α_1

$u = -2$ $\quad v = -2$

$u = -3$ $\quad v = -3$

φ satisf în S_3 ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. $S_3, \alpha_3 \models \varphi$

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î pt orice $u \in \mathbb{N}$ avem $S_3, \underbrace{\alpha_3[x \mapsto u]}_{\alpha_3'} \models \exists y. P(x, i(y))$

α_3''

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. pt orice $u \in \mathbb{N}$, există $v \in \mathbb{N}$ a.î. $S_3, \alpha_3'[y \mapsto v] \models P(x, i(y))$

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. pt orice $u \in \mathbb{N}$, există $v \in \mathbb{N}$ a.î. $P^{S_3}\left(\overline{\alpha_3''}(x), \overline{\alpha_3''}(i(y))\right)$

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. pt orice $u \in \mathbb{N}$, există $v \in \mathbb{N}$ a.î. $\alpha_3''(x) = i^{S_3}\left(\overline{\alpha_3''}(y)\right)$

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. pt orice $u \in \mathbb{N}$, există $v \in \mathbb{N}$ a.î. $\alpha_3''(x) = s\left(\alpha_3''(y)\right)$

$\alpha_3 : X \to \mathbb{N}$

$\alpha_3(x) = \ldots$	$\alpha_3'(x) = u$	$\alpha_3''(x) = u$
$\alpha_3(y) = \ldots$	$\alpha_3'(y) = \alpha_3(y)$	$\alpha_3''(y) = v$
$\alpha_3(z) = \ldots$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$	$\alpha_3'(z) = \alpha_3(z)$	$\alpha_3''(z) = \alpha_3(z)$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

ddacă există o S_3-atr α_3 a.î. $\underline{\text{pt orice } u \in \mathbb{N}, \text{ există } v \in \mathbb{N} \text{ a.î. } u = s(v)}$ "F" $\Rightarrow$

"F" pt orice α_3

$u = 0$ există $v = ?$ $0 = s(v)$

$\Rightarrow \varphi$ nu este satisf în S_3

$S, \alpha \models \forall x. (P(x, y) \land \exists x. Q(x))$

$\alpha(y)$