$\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge \ldots \wedge C_n$

$p \vee q \vee r$

$\{p, q, r\}$

$$\text{RB} \quad \frac{\overbrace{C \cup \{a\}}^{C_i} \qquad \overbrace{D \cup \{\neg a\}}^{C_j}}{\underbrace{C \cup D}_{C \vee D}} \leftarrow \text{rezolvent}$$

$a \vee (\ldots)$ — C

$\neg a \vee (\ldots)$ — D

$\forall \tau : A \to B$

a.î. $\begin{cases} \hat{\tau}(C \vee a) = 1 \Leftrightarrow \hat{\tau}(C) + \tau(a) = 1 \\ \hat{\tau}(D \vee \neg a) = 1 \Leftrightarrow \hat{\tau}(D) + \hat{\tau}(\neg a) = 1 \end{cases}$

- $\tau(a) = 0 \Rightarrow \hat{\tau}(\neg a) = 1$

sau $\quad \hat{\tau}(C) + 0 = 1 \Rightarrow \hat{\tau}(C) = 1$

- $\tau(a) = 1 \rightarrow \hat{\tau}(\neg a) = 0$

$\hat{\tau}(D) + 0 = 1 \Rightarrow \hat{\tau}(D) = 1$

Th corect Dacă există o dem prin rez pt C φ $\square$ plecând de la $C_1 \ldots C_n$ $\varphi_1 \ldots \varphi_n$

atunci $C_1 \ldots C_n \models C$

nu există $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(C_1) = \hat{\tau}(C_2) = \ldots = \hat{\tau}(C_n) = 1$

$\Rightarrow$ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ nesatisfiabile

Th complet Dacă $C_1 \ldots C_n \models C$

atunci există o dem prin rez pt C din $C_1 \ldots C_n$

$\underbrace{p}_{C_1}, \underbrace{q}_{C_2} \models \underbrace{(p \wedge q)}_{C}$ $\sim$ NU are loc.

Th complet refutațională

Dacă $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ nesatisf, atunci există o dem prin rez pt C plecând de la $C_1 \ldots C_n$.

$\varphi = (p \vee \neg q) \wedge q \wedge (\neg q \vee r)$

Clauzele lui φ: $\{p, \neg q\}$, $\{q\}$, $\{\neg q, r\}$

1. $\{p, \neg q\}$ (prem) $= D \cup \{\neg q\}$, $\{p\}$
2. $\{q\}$ (prem) $= C \cup \{q\}$, $\emptyset$
3. $\{p\}$ (RB, 2, 1, a=q)
4. $\{\neg q, r\}$ (prem)
5. $\{r\}$ (RB, 2, 4, a=q)

① φ - FNC dem că φ nesatisf

aplicând rez pe clauzele lui φ și obținem $\square$ $\overset{\text{Th corect}}{\Longrightarrow}$ φ nesatisf

② φ - oarecare $\in LP_{\neg\wedge\vee\to\leftrightarrow}$ dem nesatisf.

$\varphi \equiv \ldots\ldots \equiv \varphi_1$ FNC

arăt φ_1 nesat (pct 1), $\varphi_1 \equiv \varphi$ $\Rightarrow$ φ nesat.

③ φ validă ddacă $\neg\varphi$ nesat.

$\neg\varphi \equiv \ldots\ldots \equiv \varphi_1$ FNC

arăt φ_1 nesat (pct 1), $\varphi_1 \equiv \neg\varphi$ $\Rightarrow$ $\neg\varphi$ nesat $\Rightarrow$ φ validă

④ $\underbrace{\varphi_1 \ldots \varphi_n}_{\in LP_{\neg\wedge\vee\to\leftrightarrow} \text{ oarecare}} \vDash \varphi$ ddacă $\underbrace{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi \text{ validă}}_{\text{pct } 3}$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ → pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi_1) = \dots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$ atunci $\hat{\tau}(\varphi) = 1$

dem semantică

→ ddacă $(\varphi_1 \land \dots \land \varphi_n) \to \varphi$ valid

$\Leftrightarrow \neg(\quad)$ nesat

rezoluția

dem sintactică

$\varphi_1 = p \land \neg q \land q \land \neg p$

Clauzele lui φ_1: $\{p\}, \{\neg q\}, \{q\}, \{\neg p\}$

1. $\{p\}$ (prem)
2. $\{\neg p\}$ (prem)
3. $\square$ (RB. 1, 2, a=p)

$\Rightarrow \varphi_1$ nesatisf.

$[0. \{\neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$ (ip)

Ex 108 2)

1. $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \neg p$ (ip)
2. $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$ $(\lor i_1, 1)$
3. $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$ (ip) (ext 0)

4 ~~x~~ $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \bot$ $(\neg e, 2, 3)$

5 ~~i_1~~ 1. $\{\neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash p$ (RBC, ~~x~~ 4)

6 ~~j1~~. $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg q\} \vdash \neg q$ (ip)

7 ~~j2~~. $\{$ —— // —— $\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$ $(\lor i_2, \cancel{j1}\ 6)$

8 ~~j3~~ $\{$ —— // —— $\} \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$ (ip) (ext 0)

9 ~~k_1~~ $\{\neg(\neg p \lor \neg q), \neg q\} \vdash \bot$ $(\neg e, \cancel{j2}\ 7, \cancel{j3}\ 8)$

10 ~~k_2~~ $\{\neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash \neg\neg q$ $(\neg i, \cancel{k_1}\ 9)$

11 ~~i_2~~ $\{\neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash q$ $(\neg\neg e, \cancel{k_2}\ 10)$ (PBC, k_1)

12 ~~x~~. $\underbrace{\{\neg(\neg p \lor \neg q)\}}_{\Gamma} \vdash (\underbrace{p}_{\varphi_1} \land \underbrace{q}_{\varphi_2})$ $(\land i, \cancel{i_1}\ 5, \cancel{i_2}\ 11)$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \lor \varphi_2)} \lor i_1 \quad \text{orice}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma' \vdash \bot} \neg e$$

$(\neg p \lor \neg q)$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \neg i$$

$\neg q$, $\neg\neg q$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \land \varphi_2)}$$

PBC $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$

$\left[\begin{array}{l} \Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \\ \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \end{array}\right.$

MT $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi') \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi'}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$

1. $\cancel{k_1}$. $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi')$
2. $\cancel{k_2}$. $\Gamma \vdash \neg\varphi'$

obținute.

3. $\cancel{x_3}$. $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi'$ (ext, $\cancel{k_2}$ 2)
4. $\cancel{x_2}$. $\Gamma, \varphi \vdash (\varphi \to \varphi')$ (ext $\cancel{k_1}$ 1)
5. $\cancel{y_1}$. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (ip)
6. $\cancel{y_2}$. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi'$ ($\to e$, $\cancel{x_2}$ 4, $\cancel{y_1}$ 5)
7. $\cancel{x_1}$. $\underbrace{\Gamma, \varphi}_{\Gamma'} \vdash \bot$ ($\neg e$, $\cancel{y_2}$ 6, $\cancel{x_3}$ 3)

$\neg e$ $\dfrac{\Gamma' \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi_1}{\Gamma' \vdash \bot}$

8. $\cancel{n}$. $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ($\neg\neg e$, $\cancel{x_1}$ 7)

Ex 108

1) $\{\neg(p \land q)\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$

1. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \neg p$ (ip)
2. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$ ($\lor i_1$, 1)
3. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$ (ip)

a_2. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q), \neg p\} \vdash \bot$ ($\neg e$, 2, 3)

a_1. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash p$ (PBC, a_2)

~~$\{\neg(p\land q), p\} \vdash \bot$~~
~~$\{\neg(p\land q)\} \vdash \neg p$ ($\neg i$~~
~~$\{\neg(p\land q)\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$ ($\lor i_1$~~

identic cu a_1

b_1. $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash q$

y_1 $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash (p \land q)$ ($\land i$, a_1, b_1) (ext 12 ex 108 2)

y_2 $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash \neg(p\land q)$ (ip)

x_1 $\{\neg(p\land q), \neg(\neg p \lor \neg q)\} \vdash \bot$ ($\neg e$, y_1, y_2)

x_2 $\{\neg(p\land q)\} \vdash \neg\neg(\neg p \lor \neg q)$ ($\neg i$, x_1)

n. $\{\neg(p\land q)\} \vdash (\neg p \lor \neg q)$ ($\neg\neg e$, x_2)

Ex 53 Pt orice φ dacă $\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ inconsistentă

atunci $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \vDash \varphi$

Fie φ arbitrar fixată

Def: $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ consistentă ddacă există $\tau: A \to B$ a.î. $\underbrace{\hat{\tau}(\varphi_1) = \hat{\tau}(\varphi_2) = \dots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1}_{\tau \text{ model pt toate } \varphi_i}$

Din ip. $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ inconsistentă $\Rightarrow$ nu există $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi_1) = \dots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$

(ip)

Tb dem $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \vDash \varphi$ ddacă pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi_1) = \dots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$

avem și $\hat{\tau}(\varphi) = 1$

τ model pt toate φ_i

$X = \emptyset$ (din ip)

toate el : $\hat{\tau}(\varphi) = 1$

$(*)$

pt orice $\tau: A \to B$ dacă $\hat{\tau}(\varphi_1) = \dots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$ Fals

atunci $\hat{\tau}(\varphi) = 1$ "Adev"

Din ip $\to$ nu există $\tau: A \to B$ a.î. $(*)$ $\Rightarrow \{\varphi_1, \dots \varphi_n\} \vDash \varphi$

Ex 78 3)

$\underbrace{\text{Lucrurile merg bine în țară}}_{\varphi_2}$ dacă $\overbrace{\text{(la conducerea țării nu sunt hoți și economia este sănătoasă.)}}^{\varphi_1}$

p : Lucrurile merg bine în țară

q : la conducerea țării sunt hoți

r : economia este sănătoasă

Dacă φ_1 atunci φ_2

$\varphi_1 \to \varphi_2$

$((\neg q \wedge r) \to p)$

φ_3 φ_4

Oamenii pleacă în străinătate dacă și numai dacă lucrurile nu merg bine în țară.

s: oamenii pleacă în străinătate

φ_3 dacă și numai dacă φ_4

$(s \longleftrightarrow \neg p)$

Economia este sănătoasă, dar oamenii pleacă în străinătate.

și

$(r \wedge s)$

Ex 77 Sau trec la logică sau nu trec.

p: trec la logică

$((p \vee \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg p))$

0 1

1 0

sau φ_1 sau φ_2

sau exclusiv

$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

0 1 0 1

1 0 1 0

$\neg\varphi$ ~~satisf~~ valid ddacă $\varphi \models \perp$

"$\Rightarrow$" $\neg\varphi$ ~~satisf~~ valid $\Rightarrow$ ~~există~~ pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\neg\varphi) = 1$ $\Rightarrow$

$\varphi \models \perp$ ~~există~~ pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 0$

$\varphi \models \perp$ ddacă pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 1$, atunci $\hat{\tau}(\perp) = 1$ $\Leftrightarrow$

imposibil

$\Leftrightarrow$ nu există $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow$ pt orice $\tau: A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi) = 0$, (*) (ip)

"$\Leftarrow$" $\varphi \models \perp$ ddacă (*)

$\neg\varphi$ ~~valid~~ satisf.

(En) Ex 110 3) $((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p \vdash r$

1. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash ((p\wedge\neg r)\to q)$ (ip)

2. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash p$ (ip)

3. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash \neg r$ (ip)

4 $\cancel{y}$. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash (p\wedge\neg r)$ $(\wedge_i, 2, 3)$

5 $\cancel{x_1}$ $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash q$ $(\to_e, 1, \overset{4}{\cancel{y}})$

6 $\cancel{x_2}$. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash \neg q$ (ip)

7 $\cancel{j_1}$. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p, \neg r\} \vdash \bot$ $(\neg e, \overset{5}{\cancel{x_1}}, \overset{6}{\cancel{x_2}})$

8 $\cancel{j_2}$. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p\} \vdash \neg\neg r$ $(\neg i, \overset{7}{\cancel{j_1}})$

9 $\cancel{w}$. $\{((p\wedge\neg r)\to q), \neg q, p\} \vdash r$ $(\neg\neg e, \underset{8}{\cancel{j_2}})$ (PBC, 7)

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi_1\to\varphi_2 \qquad \Gamma\vdash\varphi_1}{\Gamma\vdash\varphi_2}$$

$$\neg_i\ \frac{\Gamma, \overset{\neg r}{\varphi} \vdash \bot}{\Gamma\vdash\neg\varphi}$$