Algoritmul de eliminare Gauss fără pivotare

$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5 \quad / * (-2) + ec.\ 2$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2$$

Pasul 1: Se înmulțește ecuația 1 cu $-\frac{4}{2} = -2$ și se adună la ecuația 2. Sistemul devine:

$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5$$
$$2x_2 + 4x_3 = 2 \quad / * (-1) + ec.\ 3$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2$$

Pasul 2 Se înmulțește ecuația 2 cu $-\frac{2}{2} = -1$ și se adună la ecuația 3

$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5$$
$$2x_2 + 4x_3 = 2$$
$$2x_3 = 0$$

Se rezolvă sistemul superior triunghiular obținut cu metoda substituției inverse

Din ultima ecuație

$$x_3 = 0/2 = 0$$

Din penultima ecuație:

$$x_2 = (2 - 4x_3)/2 = (2 - 4 \cdot 0)/2 = 1$$

Din prima ecuație:

$$x_1 = (4.5 - 0.5x_2 - 2x_3)/2$$

$$= (4.5 - 0.5 \cdot 1 - 2 \cdot 0)/2 = 2$$

Algoritmul de eliminare Gauss cu pivotare parțială

Fie sistemul

$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11$$
$$0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2$$

<u>Pasul 1</u>

<u>Pivotare</u> : $\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} =$

$= \max\{|2|, |4|, |0|\} = 4$

Se interschimbă ecuația 1 cu ecuația 2

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11 \quad / * (-0.5) + ec.2$$
$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2$$

Transformarea coloanei 1 în formă superior triunghiulară

Se înmulțește ecuația 1 cu $-\frac{2}{4} = -0.5$ și se adună la ecuația 2

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11$$
$$-x_2 - 2x_3 = -1$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2$$

<u>Pasul 2</u>

<u>Pivotare</u> $\max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} =$
$\max\{|-1|, |2|\} = 2$

Se interschimbă ecuația 2 cu ecuația 3

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2 \quad | * 0.5 + ec\ 3$$
$$-x_2 - 2x_3 = -1$$

<u>Transformarea</u> coloanei 2 în formă superior triunghiulară

Se înmulțește ecuația 2 cu $-\frac{(-1)}{2} = 0.5$ și se adună la ecuația 3.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11 \\ 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ – sistem în formă superior triunghiulară

Soluția

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = (2 - 6x_3)/2 = 1$$

$$x_1 = (11 - 3x_2 - 8x_3)/4 = 2$$

Algoritmul de eliminare Gauss cu pivotare totală

$$2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11$$
$$2x_2 + 6x_3 = 2$$

Pasul 1

Pivotare totală : $\max \{ |a_{ij}| ; i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3} \} =$
$= 8 = |a_{23}|$

Se interschimbă ecuația 1 cu ecuația 2
Se interschimbă coloana 1 cu coloana 3

$$8x_3 + 3x_2 + 4x_1 = 1 \quad | * (-0,25) + ec2 \ ; \ * (-0.75) + ec.3$$
$$2x_3 + 0.5x_2 + 2x_1 = 4.5$$
$$6x_3 + 2x_2 = 2$$

Transformarea coloanei 1 în formă sup. triungh.
Se înmulțește ec. 1 cu $-2/8 = -0.25$ și se adună ec 2
Se înmulțește ec. 1 cu $-6/8 = -0,75$ și se adună ec.3

$$8x_3 + 3x_2 + 4x_1 = 11$$
$$-0.25x_2 + x_1 = 1.75$$
$$-0.25x_2 - 3x_1 = -6.25$$

Pasul 2

Pivotare totală: $\max\{|a_{22}|, |a_{32}|, |a_{23}|, |a_{33}|\}$
$= 3 = |a_{33}|$

Se interschimbă ec. 2 cu ec. 3.
Se interschimbă coloana 2 cu coloana 3.

$$8x_3 + 4x_1 + 3x_2 = 11$$
$$-3x_1 - 0.25x_2 = -6.25$$
$$x_1 - 0.25x_2 = 1.75$$

Transformarea coloanei 2 în formă sup. triungh.
Se înmulțește ecuația 2 cu $-1/(-3) = 1/3$ și se adună ec. 3.

$$8x_3 + 4x_1 + 3x_2 = 11$$
$$-3x_1 - 0.25x_2 = -6.25$$
$$-0.(3)x_2 = -0.(3)$$

Rezolvarea sistemului superior triunghiular

$$x_2 = \frac{-0.(3)}{-0.(3)} = 1$$

$$x_1 = \left(-6.25 + 0.25x_2\right) / (-3) =$$

$$\left(-6.25 + 0.25 \cdot 1\right) / (-3) = 2$$

$$x_3 = \left(11 - 4x_1 - 3x_2\right) / 8$$

$$= (11 - 4 * 2 - 3 * 1) / 8 = 0$$

Algoritmul de eliminare Gauss $\longleftrightarrow$ descompunere LU

$$\begin{cases} 2x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 4.5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 11 \\ \quad\quad 2x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

Fără pivotare:

Pasul 1:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pasul 2 :

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 * (T_1 * A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_2(T_1 b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 T_1 A = U \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(T_1^{-1} T_2^{-1}\right) U = L * U$$

$$L = T_1^{-1} T_2^{-1}$$

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = T_1^{-1} T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L * U = A$$

Pivotare parțială

$I_{pq} = [e_1 \dots e_{p-1}\ e_q\ e_{p+1} \dots\ e_{q-1}\ e_p\ e_{q+1} \dots e_n]$

= matricea I_n în care coloanele p și q sunt interschimbate

$$I_{pq}^{-1} = I_{pq}$$

$I_{pq} A$ = interschimbă liniile p și q ale matricii A

$A I_{pq}$ = intersch col. p și q ale matr. A

Pasul 1

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{0}{\cancel{1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 I_{12} A =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \quad = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T_1 I_{12} b = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pasul 2

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad I_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 I_{23} (T_1 I_{12} A) = U$$

$$T_2 I_{23} (T_1 I_{12} A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 I_{23} (T_1 I_{12} b) = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 \underbrace{I_{23} T_1 I_{23}}_{T_1'} I_{23} I_{12} A = U$$

$$T_1' = I_{23} T_1 I_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{23} I_{12} A = (T_1')^{-1} T_2^{-1} U = L * U$$

$$L = (T_1')^{-1} T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Cu pivotare totală:

EXERCIȚIU

Matrice singulară

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Pasul 1: Pivotare parțială

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = |a_{31}| = 2$$

Se intersch lin 1 cu lin. 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} * (-0.5) + \text{lin } 2 \;;\; * (-0.5) + \text{lin } 3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} / * 1 + \text{lin } 3$$

Pasul 2

Pivotare parțială:

$$\max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = 1 = |a_{22}|$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_{12} A = L * U$$

$\det L = 1$

$\det U = 0$

$\det I_{12} = -1$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner