Matematică

Calcul diferenţial şi integral

Curs - Anul I(Ro)

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAŞI

Echipa

Titulari curs

- Lect. dr. Andreea Arusoaie
- Conf. dr. Zălinescu Adrian

Seminarii

- Lect. dr. Andreea Arusoaie
- Conf. dr. Adrian Zalinescu
- Conf. dr. Corina Forăscu
- Dr. Eduard Curcă
- Asist. Iulia Pleșca

Structura cursului

- Arusoaie Andreea: andreea.arusoaie@info.uaic.ro
  - *Curs 1* - Mulțimi. Relații. Funcții
  - *Curs 2* - Șiruri de numere reale. Polinoame
  - *Curs 3-4* - Serii de numere reale
  - *Curs 5-7* - Spațiul $\mathbb{R}^n$. Aplicații liniare, biliniare și pătratice
  - *Săptămâna 8 - Examen parțial - T1 (C1-C7)*
- Adrian Zălinescu: adrian.zalinescu@info.uaic.ro
  - *Curs 8* Cadrul metric pentru $\mathbb{R}^n$
  - *Curs 9* Continuitatea funcțiilor de mai multe variabile
  - *Curs 10-11* Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile. Aplicații.
  - *Curs 12-13* Integrarea funcțiilor reale. Integrale multiple
  - *Săptămâna 15-17 - Examen - T2 (C8-C13)*

Modalitatea de evaluare

Nota finală va fi alcătuită din

- Prezență 10p - 1 punct = 1 prezență
- Evaluare prin examene 80p - 2 examene scrise în săptămânile de evaluare (S8, S15)
  Cele 80 de puncte sunt distribuite după formula:
  $$80\text{p} = 4 * \mathbf{T1} + 4 * \mathbf{T2}$$
  unde

  T1 - nota obținută la examenul parțial din S8
  T2 - nota obținută la examenul din sesiune
- Evaluare pe parcurs 10p - acordate de către profesorul de seminar.
- Bonus pentru participare meritorie la concursuri studențești de matematică - 10p

Modalitatea de evaluare

Condiții de promovare

- **Media evaluărilor T1** și **T2** $\geq$ **4.5**
- **Punctajul total** $\geq 45\mathrm{p}$

Observații:

- În cazul în care studentul nu îndeplinește criteriile minimale, poate opta în sesiunea de reexaminare pentru refacerea lucrărilor **T1** și/sau **T2**.

CURS 1

MULŢIMI. RELAŢII. FUNCŢII

Andreea Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

27 Septembrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAŞI

Structura cursului

1. Mulțimi
   - Ce este o mulțime?
   - Operații cu mulțimi
2. Relații
   - Definiție. Proprietăți
   - Relații de echivalență
   - Relații de ordine
   - Mulțimea numerelor reale
3. Funcții
   - Definiție. Proprietăți
   - Exemple de funcții

Structura cursului

1. Mulțimi
   - Ce este o mulțime?
   - Operații cu mulțimi
2. Relații
   - Definiție. Proprietăți
   - Relații de echivalență
   - Relații de ordine
   - Mulțimea numerelor reale
3. Funcții
   - Definiție. Proprietăți
   - Exemple de funcții

Ce este o mulțime?

Mulțime - colecție de obiecte **bine determinate** și **distincte** în care dispunerea elementelor nu are importanță. (Georg Cantor, 1872)

Obiectele din care este constituită mulțimea se numesc **elementele** mulțimii.

Mulțimi

Noțiunile de mulțime și element sunt legate prin relația de **apartenență**:

Dacă x este un obiect, iar A este o mulțime, spunem că

- $x \in A$, dacă x este element al lui A;
- $x \notin A$, dacă x nu este element al lui A.

Vom spune că două mulțimi sunt **egale** dacă acestea sunt formate din aceleași elemente.

Interpretare: Dacă A și B sunt mulțimi, atunci

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B.$$

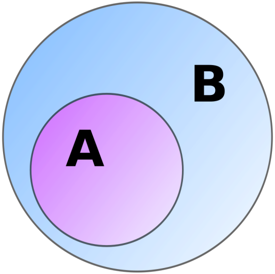
Exemple de mulțimi remarcabile

- mulțimea vidă, notată $\varnothing$, și definită astfel $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$;
- mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$;
- mulțimea numerelor întregi:
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n-1, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1 \ldots\}$;
- mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$;
- mulțimea numerelor reale: $\mathbb{R}$;
- mulțimea numerelor complexe: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definiție

Fie A și B două mulțimi.

- $A \subseteq B$ (A este **submulțime** a lui B): $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$;
- $A \subsetneq B$ (A este **submulțime proprie** a lui B): $A \subseteq B$ și $A \neq B$.



Diagramă reprezentând faptul că A este o submulțime a lui B
(Photo credit: Wikipedia)

Notație: Prin $\mathcal{P}(A)$, vom nota **mulțimea tuturor părților mulțimii** A, adică

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A.$$

$A = \{1, 2\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Observație: $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Propoziție (Proprietățile incluziunii)

Dacă X este o mulțime oarecare, iar $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, atunci:

i) $A \subseteq A$ (*reflexivitate*);

ii) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (*antisimetrie*);

iii) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (*tranzitivitate*);

Operații cu mulțimi

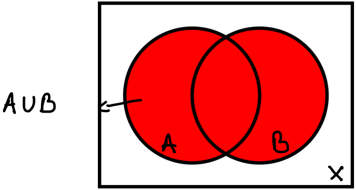
Fie X o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

a) Se numește **reuniune** a mulțimilor A și B, mulțimea

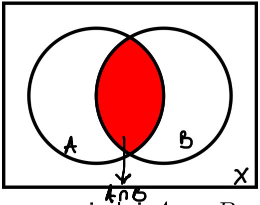
$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\};$$

b) Se numește **intersecție** a mulțimilor A și B, mulțimea

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\};$$



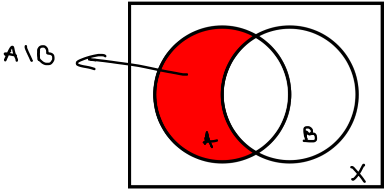
Reuniunea lui A cu B



Intersecția lui A cu B

c) Se numește **diferența mulțimilor** A și B, mulțimea

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \land x \notin B\};$$



Operații cu mulțimi

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă. Atunci pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, avem:

1. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
2. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (idempotența);
3. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate);
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitate);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitate);
6. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ (absorbție);
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
   $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
8. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
   $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

Operații cu mulțimi

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă. Atunci pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, avem:

1. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
2. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (idempotența);
3. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate);
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitate);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitate);
6. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ (absorbție);
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
   $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
8. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
   $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(2) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Fie $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \notin B}_{q}) \wedge (\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \notin C}_{r})$

$(p \wedge q) \wedge (p \wedge r) = p \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge [\underbrace{\neg(x \in B)}_{\neg p} \wedge \underbrace{\neg(x \in C)}_{\wedge \neg q}]$

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg$ not

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C)$

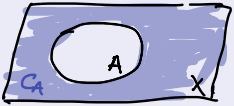
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

Operații cu mulțimi

Definiție

Fie X o mulțime nevidă și $A \in \mathcal{P}(X)$.
Se numește **complementara mulțimii** A, mulțimea

$$C_A = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\};$$



Propoziție

Fie X o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

i) $C_{C_A} = A$;

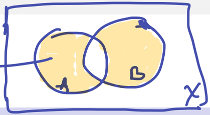
ii) $A \cup C_A = X$; $A \cap C_A = \varnothing$;

iii) **legile lui De Morgan:** $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B$

$$C_{A \cap B} = C_A \cup C_B.$$

Operații cu mulțimi

$A \Delta B$



Definiție

Fie X o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(X)$.
Se numește **diferența simetrică** a mulțimilor A și B, mulțimea

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă. Atunci pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, avem:

1. $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta \varnothing = A$;
2. $A \Delta B = B \Delta A$;
3. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Operații cu mulțimi

Definiție

Se numește **produsul cartezian** al mulțimilor nevide A și B, mulțimea

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă și $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Atunci au loc egalitățile:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Operații cu mulțimi

Generalizare:

Fie X o mulțime nevidă, I o mulțime nevidă de indici, iar $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$. Atunci

- **reuniunea mulțimilor** A_i este definită prin

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in I \underbrace{:}_{\text{astfel încât}} x \in A_i\}$$

- **intersecția mulțimilor** A_i este definită prin

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$$

Dacă $I = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci vom nota $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și respectiv $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Operații cu mulțimi

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă, $B \in \mathcal{P}(X)$ și $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$. Atunci au loc următoarele:

i) $A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ și $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq A_i$, pentru orice $i \in I$;

ii) $B \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \cap A_i)$; $B \cup \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \cup A_i)$;

iii) $X \setminus \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$; $X \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$.

Pentru un număr finit de mulțimi nevide $\{A_i \mid i \in \overline{1,n}\}$, produsul cartezian al mulțimilor A_i este definit prin

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Dacă $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, atunci vom nota $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ cu A^n

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\} \overset{not}{=} \mathbb{R}^3$

Structura cursului

1. Mulțimi
   - Ce este o mulțime?
   - Operații cu mulțimi
2. Relații
   - Definiție. Proprietăți
   - Relații de echivalență
   - Relații de ordine
   - Mulțimea numerelor reale
3. Funcții
   - Definiție. Proprietăți
   - Exemple de funcții

Relații

Definiție

Fie A și B două mulțimi.

O submulțime $R \subseteq A \times B$ se numește **relație (binară)** între elementele lui A și elementele lui B.

Terminologie:

Dacă $R \subseteq A \times B$ și $(x, y) \in R$, unde $x \in A$ și $y \in B$, atunci

- spunem că x **este în relația** R **cu** y;
- vom nota xRy. sau $(x,y) \in R$

Relații

Definiție

Fie A și B două mulțimi nevide și relația binară $R \subseteq A \times B$.

- Se numește **domeniul** relației R, mulțimea

$$\mathrm{Dom}(R) := \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\};$$

- Se numește **imaginea (codomeniul)** relației R, mulțimea

$$\mathrm{Im}(R) := \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\}.$$

- Se numește **inversa** relației R, relația de la B la A definită prin

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}.$$

Exercițiu:

Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{4, 5\}$ și fie relațiile $R = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$ și $S = \{(1, 4), (1, 5)\}$. Să se determine $\mathrm{Dom(R)}, \mathrm{Dom(S)}, \mathrm{Im(R)}, \mathrm{Im(S)}, \mathrm{R}^{-1}$, S^{-1}.

Soluție:

$\mathrm{Dom(R)} = \{1, 2, 3\} = \mathrm{A}$, $\quad \mathrm{Dom(S)} = \{1\}$, ✓

$\mathrm{Im(R)} = \{4, 5\} = \mathrm{B}$, $\quad \mathrm{Im(S)} = \{4, 5\} = \mathrm{B}$, ✓

$R^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ $\quad S^{-1} = \{(5, 1), (4, 1)\}$.

$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \text{ a.î. } \underbrace{(x,y) \in R}_{xRy}\} =$

$R^{-1} = \{(y,x) \mid xRy\}$

$R^{-1} = \{(5,1), (4,2), (4,3)\}$

Relații

Definiție

Fie A, B, C mulțimi nevide și fie $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq C \times D$.
Compusa relațiilor S și R, este relația de la A la D definită prin

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times D \mid \exists y \in B \cap C : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Exercițiu:

$\subseteq \{1,2\} \times \{3,4,5\}$

Fie $A = \{1, 2\}$ și $B = \{3, 4, 5\}$ și fie relațiile $R = \{(1, 5), (2, 3), (2, 4)\}$ și $S = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$. Să se determine $S \circ R, R \circ S, R \circ R^{-1}$.

$\subseteq \{3,4\} \times \{1,2\}$

Soluție: $R \subseteq A \times B$ iar $S \subseteq B \times A$, rezultă că $S \circ R \subseteq A \times A$.
$S \circ R = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
$(1, 5) \in R$, însă în S nu avem nici o pereche cu prima componenta 5;
$x=$
$(2, 3) \in R \Rightarrow (3, 1), (3, 2) \in S \Rightarrow (2, 1), (2, 2) \in S \circ R$;
$x=2$ $y=3$
$(2, 4) \in R \Rightarrow (4, 1), (4, 2) \in S \Rightarrow (2, 1), (2, 2) \in S \circ R$;
Rezultă $S \circ R = \{(2, 1), (2, 2)\}$
Similar, $R \circ S \subseteq B \times B, R \circ S = \{(3, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 3), (4, 4)\}$
$R^{-1} = \{(5, 1), (3, 2), (4, 2)\} \subseteq B \times A, R \circ R^{-1} = \{(5, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

$R \circ S = \{(x,z) \mid \exists y \text{ ai } (x,y) \in S \wedge (y,z) \in R\} = \{(3,5),(3,3),(3,4),$
$(4,5),(4,3),(4,4)\}$

- $(\underbrace{3}_{x},\underbrace{1}_{y}) \in S \quad (1,5) \in R$
- $(3,2) \in S \quad (2,3),(2,4) \in R$
- $(4,1) \in S \quad (1,5) \in R$
- $(\underline{4},2) \in S \quad (2,\underline{3}),(2,4)$

Relații

Definiție

Fie A o mulțime. Numim **identitate** pe A, relația $1_A := \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă și fie $R \subseteq A \times A$ o relație pe A. Spunem că R este:

- (R) **reflexivă** dacă $xRx, \forall x \in A$, adică $1_A \subseteq R$;
- (S) **simetrică** dacă $(xRy \Rightarrow yRx), \forall x,y \in A$, adică $R^{-1} = R$;
- (AS) **antisimetrică** dacă $((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y), \forall x,y \in A$, adică $R \cap R^{-1} = 1_A$;
- (T) **tranzitivă** dacă $((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz), \forall x,y,z \in A$, altfel scris $R \circ R \subseteq R$.

$\mathbb{R}$, "$\leq$" : reflexivă? $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (A)

(S): $x \leq y \overset{?}{\Rightarrow} y \leq x$ (NU)

(AS): $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

(T): $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Relații

Definiție

Fie A o mulțime nevidă și fie $R \subseteq A \times A$. Spunem că R este o **relație de echivalență** pe A dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiție

Fie R o relație de echivalență pe mulțimea A.
Clasa de echivalență a elementului $x \in A$ este mulțimea

$$[x]_R = \widehat{x}_R := \{y \in A \mid xRy\}.$$

Mulțimea claselor de echivalență determinate de R, se numește **mulțime cât** și se notează

$$A_{/R} = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

Exercițiu: Considerăm pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relația $x\rho y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$. Arătați că ρ este o relație de echivalență și determinați clasele de echivalență $[x]_\rho$.

$\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$: $x \rho y \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^*$.

• ρ" rel. de echivalență:

• (R) $x\rho x$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$x\rho x \Leftrightarrow x\cdot x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

• (S) $x\rho y \Rightarrow y\rho x$

$x\rho y \Leftrightarrow x\cdot y>0 \Leftrightarrow y\cdot x>0 \Leftrightarrow y\rho x$

• (T) $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

$$\left.\begin{array}{l} x\rho y \Leftrightarrow x\cdot y>0 \\ y\rho z \Leftrightarrow y\cdot z>0 \end{array}\right| \Rightarrow x\cdot \overbrace{y^2}^{>0}\cdot z>0 \Rightarrow x\cdot z>0 \Rightarrow x\rho z$$

$x,y,z\in\mathbb{R}^*$

(R) + (S) + (T) $\Rightarrow \rho$ rel. de echiv

$[x]_\rho=\{y \mid x\rho y\}$

$=\{y \mid x\cdot y>0\}$

• dacă $x>0$ $[x]_\rho=(0,\infty)$

• dacă $x<0$ $[x]_\rho=(-\infty,0)$

$\mathbb{R}^*/_\rho=\{(-\infty,0),(0,\infty)\}$

Relații

Definiție

Fie $R \subseteq A \times A$. Spunem că:

i) R este o **relație de ordine (parțială)** pe A dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;

ii) R este o **relație de preordine** pe A dacă este reflexivă și tranzitivă;

iii) O relație de ordine R se numește **totală** dacă are loc

$$xRy \vee yRx, \forall x, y \in A;$$

iv) Dacă A este o mulțime și R este o relație de preordine/ordine/ordine totală pe A, atunci perechea (A, R) se numește **mulțime preordonată/ ordonată/total ordonată**.

Notație:

- relațiile de ordine le vom nota prin: $\leq, \preceq$, etc.,
- Dacă $\preceq$ este o relație de preordine pe A, atunci $\prec$ va nota relația $\preceq \setminus 1_A$, adică $x \prec y \Rightarrow (x \preceq y) \wedge (x \neq y), \forall x, y \in A$.

Definiție

Fie o mulțime ordonată $(A, \preceq)$ și $B \subseteq A$ o mulțime nevidă.

i) Un element $x \in A$ se numește **majorant** pentru B dacă $y \preceq x, \forall y \in B$.

ii) Un element $x \in A$ se numește **minorant** pentru B dacă $x \preceq y, \forall y \in B$.

iii) Dacă B admite minorant, majorant sau ambii, spunem că B este mărginită inferior, mărginită superior, respectiv mărginită.

iv) Dacă $x \in A$ este un minorant pentru A, atunci x se numește **cel mai mic element** al lui A și se notează cu $\min_R A$.

v) Dacă $y \in A$ este un majorant pentru A, atunci y se numește **cel mai mare element** al lui A și se notează cu $\max_R A$.

Ex: $B = (1, 2]$ $A = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \leq)$

• ~~ex~~ maj pt B : 2, $y \leq 2$, $\forall y \in B$, Maj $= \{2, 2.5, ...\}$

• minorant pt B : $\overset{1}{\underset{2}{}}$: $1 \leq y$ $\forall y \in (1, 2]$

max = 2

min nu există $(1 \notin (1,2])$

Mulțimea numerelor reale

Definiție

Se numește **mulțime de numere reale** o mulțime $\mathbb{R}$, înzestrată cu două operații algebrice: $+$ (adunarea) și $\cdot$ (înmulțirea), precum și cu o relație de ordine: $\leq$, în raport cu care sunt îndeplinite următoarele trei grupe de axiome:

I. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ , adică au loc:

$(+_1)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
$(+_2)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
$(+_3)$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$;
$(+_4)$ $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
$(\times_1)$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
$(\times_2)$ $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
$(\times_3)$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
$(\times_4)$ $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

Definiție (continuare)

II. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un corp total ordonat , adică:

(O_1) $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;
(O_2) $(x \leq y) \vee (y \leq x), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(O_3) $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(O_4) $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow x \leq z, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
(O_5) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
(O_6) $((x \leq y) \wedge (0 \leq z)) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

III. (**Axioma de completitudine Cantor-Dedekind**) Orice submulțime nevidă și majorată $A \subseteq \mathbb{R}$ admite o cea mai mică margine superioară (numită $\sup$) în $\mathbb{R}$.

Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, definim următoarele operații auxiliare:

- *scăderea*:

$$x - y := x + (-y), x, y \in \mathbb{R};$$

- *împărțirea*

$$\frac{x}{y} := x \cdot (y^{-1}), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Observație:

Plecând de la mulțimea numerelor reale, se pot construi următoarele mulțimi

- Mulțimea numerelor naturale:
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1, (1+1)+1, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\};$$
- Mulțimea numerelor întregi:
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\};$$
- Mulțimea numerelor raționale:
$$\mathbb{Q} = \{x \cdot y^{-1} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}^*\}$$

Așadar, între submulțimile remarcabile ale lui $\mathbb{R}$, avem următoarele relații

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Valoarea absolută a unui număr real

Definiție

Pentru $x \in \mathbb{R}$, definim **valoarea absolută** a lui x prin

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propoziție

Au loc următoarele proprietăți:

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

iv) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Supremum și infimum

Teorema

Fie A o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$.

1. Un element $\alpha \in \mathbb{R}$ este **margine superioară** $(\sup)$ a mulțimii A, dacă și numai dacă:
   (i) $x \leq \alpha,\ \forall\, x \in A$; (α- majorant)
   (ii) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. (cel mai mic)
2. Un element $\beta \in \mathbb{R}$ este **margine inferioară** $(\inf)$ a mulțimii A, dacă și numai dacă:
   (i) $\beta \leq x,\ \forall\, x \in A$; (β- minorant)
   (ii) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$. (cel mai mare)

Observație:
Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, atunci

$$\sup[a,b] = \underline{\sup[a,b)} = \sup(a,b] = \sup(a,b) = b$$
$$\inf[a,b] = \inf[a,b) = \inf(a,b] = \inf(a,b) = a$$

max A = sup A $\cap$ A

Dreapta reală extinsă

Cum nu orice submulțime a lui $\mathbb{R}$ posedă o margine superioară și o margine inferioară, vom considera două simboluri, numite **plus infinit** și **minus infinit**, notate cu $+\infty$ și respectiv $-\infty$. Vom nota prin

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

și vom numi această mulțime, **dreapta reală extinsă** .
Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, astfel

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vom considera lipsite de sens, fiind nedeterminate, operațiile următoare:

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ (-\infty) - (-\infty),$$
$$0 \cdot (-\infty),\ 0 \cdot (+\infty),\ (+\infty) \cdot 0,\ (-\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Elucidarea sensului acestor operații are loc, de regulă, pe seama expresiilor din care provin.

Structura cursului

1. Mulțimi
   - Ce este o mulțime?
   - Operații cu mulțimi
2. Relații
   - Definiție. Proprietăți
   - Relații de echivalență
   - Relații de ordine
   - Mulțimea numerelor reale
3. Funcții
   - Definiție. Proprietăți
   - Exemple de funcții

Funcții

Definiție

Fie A și B două mulțimi nevide.
O relație $f \subseteq A \times B$ se numește **funcție** (sau **relație funcțională**) dacă satisface următoarele condiții:

1) $\mathrm{Dom(f)} = \mathrm{A}$ (altfel scris, $\forall x \in A, \exists y \in B$, astfel încât $(x, y) \in f$);
2) $(x, y) \in f$ și $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$, $\forall x \in A$, $\forall y, z \in B$.

Vom nota funcția $f \subseteq A \times B$, astfel $f : A \to B$.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției f, iar mulțimea B se numește **codomeniul** lui f.

Din definiția de mai sus rezultă că pentru orice $x \in A$ există un unic $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$. Elementul y se numește *imaginea lui x prin f*, și se notează $f(x)$.

Definiție

i) Se numește **graficul funcției** $f : A \to B$, mulțimea $G_f \subseteq A \times B$ definită prin

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

ii) Spunem că două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A = C$.

Definiție

Fie funcția $f : A \to B$.

a) Dacă $C \subseteq A$, atunci funcția $f_{|C} := f \cap (C \times B)$ (adică $f_{|C}(x) = f(x),\ \forall x \in C$), se numește **restricția** lui f la mulțimea C.

b) Dacă $C \subseteq A$, atunci numim **imagine** a mulțimii C prin f, mulțimea

$$f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C : y = f(x)\}.$$

c) Dacă $D \subseteq B$, atunci numim **preimaginea lui** D prin f (sau **imaginea inversă**) mulțimea

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in D : y = f(x)\}.$$

Funcții

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. Funcția $1_A : A \to A$ definită prin

$$1_A(x) = x, \forall x \in A$$

se numește **funcția identică**.

Definiție

Fie A și B două mulțimi nevide. Atunci funcția $f : A \to B$ se numește:

i) **injectivă** dacă $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;

ii) **surjectivă** dacă $\mathrm{Im}(f) = B$ (altfel scris, $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$);

iii) **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă;

iv) **inversabilă** dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Dacă există funcția g, acesta se numește **inversa** lui f și se notează cu f^{-1}.

Propoziție

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții.

i) Dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;

ii) Dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;

ii) Dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;

ii) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;

ii) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

Propoziție

O funcție $f : A \to B$ este bijectivă dacă și numai dacă este inversabilă.
În acest caz, $f^{-1} : B \to A$, și $f \circ f^{-1} = 1_B$ și $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Funcții. Funcția caracteristică

Definiție

Fie X o mulțime nevidă și $A \subseteq X$. Se numește **funcție caracteristică (indicatoare)** a mulțimii A, funcția $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definită prin

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dacă $A = \varnothing$, atunci $\chi_A \equiv 0$.

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă și fie $A, B \subseteq X$. Atunci au loc următoarele proprietăți:

i) $\chi_A^\alpha = \chi_A, \ \forall \alpha > 0$;

ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$,

iii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$;

iv) $\chi_{C_A} = 1 - \chi_A$;

v) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

vi) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$;

vii) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$;

viii) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$.

Propoziție

Fie X o mulțime nevidă și fie $A, B \subseteq X$. Atunci au loc următoarele proprietăți:

i) $\chi_A^\alpha = \chi_A, \ \forall \alpha > 0;$

ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B,$

iii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B;$

iv) $\chi_{C_A} = 1 - \chi_A;$

v) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B;$

vi) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B;$

vii) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B;$

viii) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B.$

χ - chi

$$\chi_{C_A} = \begin{cases} 1 & x \in C_A \\ 0 & x \notin C_A \end{cases}$$

Exercițiu: Fie A, B, C trei mulțimi nevide. Demonstrați cu ajutorul funcției caracteristice următoarele proprietăți:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \Leftrightarrow \chi_{A \setminus (B \cup C)} = \chi_{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

Exemple de funcții reale

1. *Funcții elementare de bază*:
   - *funcția constantă*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$;
   - *funcția identitate*: $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
   - *funcția exponențială de bază* a, $a > 0$: funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$,$\forall x \in \mathbb{R}$;
   - *funcția logaritm de bază* $a > 0, a \neq 1$: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$;
   - *funcția putere de exponent* $a \in \mathbb{R}$: $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
   - *funcții trigonometrice* (directe): $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$;
   - *funcții trigonometrice inverse*: $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$.
2. *Funcții elementare*: adică o funcție obținută prin aplicarea uneia sau a mai multor operații de bază cu funcțiile elementare de bază: *adunarea, scăderea, înmulțirea* și *împărțirea*.

Exemple de funcții reale

3. *Funcții speciale:*
   - *funcția parte întreagă*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \overset{def}{=} \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$;
   - *funcția parte fracționară*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f(x) = \{x\} = x - [x]$;
   - *funcția semn*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f(x) = \mathrm{sgn(x)} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$;
   - *funcția valoare absolută*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad ;$$

Exemple de funcții reale

3. *Funcții speciale:*

   - *funcția parte pozitivă*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = x^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$;
   - *funcția parte negativă*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = x^- = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$;
   - *funcția lui Dirichlet*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
   - *funcția lui Heaviside*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$;
   - *funcția lui Riemann*, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q},\ (p, q) = 1 \end{cases}.$$

Bibliografie

- A. Precupanu, *Bazele analizei Matematice*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1993.
- F.L. Țiplea, *Introducere în teoria mulțimilor*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura Fair Partners, București, 2011.
- G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/)
- G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.