CURS 5

SPAŢII LINIARE

A. Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

25 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAȘI

Structura cursului

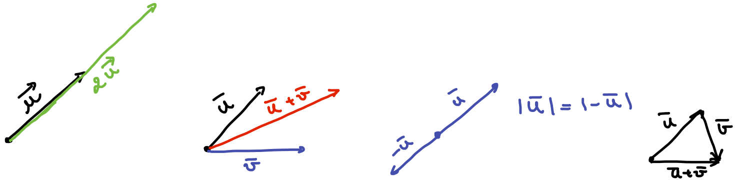
1. Definiții. Proprietăți
2. Combinații liniare
   - Liniară dependență și independență
   - Dimensiunea unui spațiu liniar
   - Bază algebrică
   - Schimbarea coordonatelor
3. Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$
4. Baze ortonormale
   - Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Structura cursului

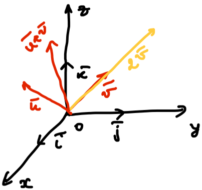
1. Definiții. Proprietăți
2. Combinații liniare
   - Liniară dependență și independență
   - Dimensiunea unui spațiu liniar
   - Bază algebrică
   - Schimbarea coordonatelor
3. Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$
4. Baze ortonormale
   - Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Un **spațiu liniar (spațiu vectorial)** este o colecție de obiecte, numite *vectori*, ce pot fi adunate între ele și înmulțite cu numere, numite *scalari*.

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



Spații liniare

Cele mai utilizate spații liniare sunt **spațiile Euclidiene**:

- $\mathbb{R}$ - *dreapta reală* - spațiu liniar 1-dimensional
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - *planul real* - spațiu liniar 2-dimensional
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - *spațiul real* - spațiu liniar 3-dimensional
- $\mathbb{R}^n,\ n \geq 4$ - *hiperspațiul real* - spațiu liniar $n-$dimensional

Spații liniare

Fie $V \neq \emptyset$ și K un corp comutativ. În general, vom considera $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

Definiție

Se numește **spațiu liniar (vectorial)** peste corpul K, o mulțime V, înzestrată cu

- **o lege internă** $" + " : V \times V \to V, (\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{x} + \bar{y},\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V,$
- **o lege externă** $" \cdot " : K \times V \to V,\ (\alpha, \bar{x}) \to \alpha \cdot \bar{x}, \forall \alpha \in K, \bar{x} \in V,$

așa încât sunt îndeplinite următoarele cerințe (axiome):

i) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$; (asoc)

ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$; (com)

iii) $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} :\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$; (el. neutru)

iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \exists (-\mathbf{x}) \in \mathbf{V} :\ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(V,+) grup com.

v) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y},\ \forall \alpha \in K,\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;

vi) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x},\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \mathbf{x} \in V$;

vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x},\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \mathbf{x} \in V$;

viii) $1_K \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in V$, unde 1 este elementul unitate din K.

α, β - scalari

$\bar{x}, \bar{y}$ - vectori

Spații liniare

- elementele K-spațiului liniar V sunt numite *vectori*;
- elementele lui K se numesc *scalari*;
- operația $+$ se numește *adunarea vectorilor*;
- operația $\cdot$ se numește *multiplicarea cu scalari*.
- elementul neutru $\mathbf{0} \in V$ se numește *vector nul*;
- vectorul $-\mathbf{x} \in V$ se numește *vectorul opus* lui $\mathbf{x} \in V$;
- când $K = \mathbb{R}$, V se mai numește *spațiul liniar real*;
- când $K = \mathbb{C}$, V se mai numește *spațiu liniar complex*.

Spațiul euclidian

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de n ori}}$.

Definim operațiile $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ și $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prin

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot \mathbf{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

Atunci $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ este un spațiu liniar.

- Operațiile de mai sus se numesc *operații canonice*.
- Dacă $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci vom numi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *coordonatele* lui $\mathbf{x}$.

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ spațiu liniar real

Fie $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$

- $(\mathbb{R}^n, +)$ grup com:
  - $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$

    $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n))$

    $\overset{(\mathbb{R},+)\text{ grup}}{=} ((x_1 + y_1) + z_1, \dots (x_n + y_n) + z_n) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$
  - $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$: $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$
  - $\exists\, 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ a.î. $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$
  - $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists (-\bar{x}) = (-x_1, \dots, -x_n)$ a.î. $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$
- $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$
- $(\alpha + \beta)\bar{x} = ((\alpha + \beta) x_1, \dots, (\alpha + \beta) x_n) = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $(\alpha \cdot \beta)\bar{x} = (\alpha (\beta x_1), \dots, \alpha (\beta x_n)) = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
- $1_{\mathbb{R}} \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sp. lin. real.

Exemple de spații liniare

1. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - mulțimea matricilor reale cu m linii și n coloane. Fie operațiile

   $+$ - adunarea uzuală a matricelor;

   $\cdot$ - înmulțirea matricelor cu numere reale.

   Atunci $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este un spațiu liniar real.

   $\cdot\ (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ gr. com.
   $\cdot\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   $\cdot\ (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) A$ — " —
   $1 \cdot A = A$

2. Fie $\mathbb{R}[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți reali. Dacă

   $+$ - notează adunarea polinoamelor;

   $\cdot$ - reprezintă înmulțirea polinoamelor cu numere reale,

   atunci $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este un spațiu liniar real.

$\mathbb{R}[X] = \{ f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots \mid a_i \in \mathbb{R} \}$

$(\mathbb{R}[X], +)$ gr. com: (el neutru: $\exists\, 0 = 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X + 0 X^2 + \ldots$ aî $f + 0 = 0 + f = f$
el sim: $\forall f \in \mathbb{R}[X], \exists (-f) \in \mathbb{R}[X]$ aî $f + (-f) = 0$

3. Fie $X \neq \emptyset$, $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \to V\}$. Definim operațiile

$$+ : \mathcal{F}(X, V) \times \mathcal{F}(X, V) \to \mathcal{F}(X, V)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X, V) \to \mathcal{F}(X, V)$$

prin

$$(f + g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x}), \forall \bar{x} \in X\ f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$
$$(\alpha \cdot f)(\bar{x}) = \alpha \cdot f(\bar{x}), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in X,\ f \in \mathcal{F}(X, V),$$

atunci $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ formează un spațiu liniar peste $\mathbb{R}$.

Exemple de spații liniare

Particularizând X și V definiți în 3., obținem diverse exemple de spații vectoriale:

- Dacă $X = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ și $V = \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ atunci obținem spațiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- Dacă $X \subseteq \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}$, se obține spațiul liniar $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ al funcțiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X.
- Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ și $V = \mathbb{R}^m$, atunci $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m), +, \cdot)$ este spațiul liniar real al funcțiilor de n variabile cu valori în $\mathbb{R}^m$.
- Dacă $X = \mathbb{N}$ și $V = \mathbb{R}$, mulțimea $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ spațiul liniar real al șirurilor de numere reale.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real. Atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și orice $\mathbf{x} \in V$:

i) $0_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$;

ii) $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}$;

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x}$;

iv) $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ sau $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și W o submulțime nevidă a lui V.
Spunem că $(W, +, \cdot)$ este este **subspațiu liniar** al lui $(V, +, \cdot)$ dacă

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, \text{ avem } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W \text{ și } \alpha \cdot \mathbf{x} \in W.$$

Cu alte cuvinte, spunem că W este un subspațiu liniar al lui V dacă și numai dacă

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Exemple de subspații liniare

1) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulțimea $M = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ și înmulțirea lor cu scalari din $\mathbb{R}$, un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ subsp. lin dacă $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in M \quad \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in M$

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = (0, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (0, y_2, \ldots, y_n)$

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha \cdot 0, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta \cdot 0, \beta y_2, \ldots, \beta y_n) = (0, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) \in M$

2) Mulțimea *funcțiilor pare*, definită prin

$$M = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

este un subspațiu liniar al spațiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in M \quad f(x) = f(-x) \quad g(x) = g(-x)$

$\alpha f + \beta g \in M$

$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$ ✓

Exemple de subspații liniare

3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toți nuli (adică, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}$). Mulțimea

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0\}$$

este un subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, numit *hiperplan*.

Propoziție

Fie W_1 și W_2 două subspații liniare ale lui $(V, +, \cdot)$. Atunci

i) $W_1 \cap W_2$ este tot un subspațiu liniar al lui V.

ii) $W_1 \cup W_2$ nu este întotdeauna un subspațiu liniar al lui V.

Structura cursului

1. Definiții. Proprietăți
2. Combinații liniare
   - Liniară dependență și independență
   - Dimensiunea unui spațiu liniar
   - Bază algebrică
   - Schimbarea coordonatelor
3. Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$
4. Baze ortonormale
   - Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Combinații liniare

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar.
O **combinație liniară** a vectorilor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ este un vector $\mathbf{y} \in V$ ce se poate scrie ca

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Observație: Dacă W este un subspațiu liniar al lui V, atunci orice combinație liniară a vectorilor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in W$ este tot din W.

Combinații liniare

Definiție

Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar și U o submulțime nevidă a lui V.
Mulțimea *tuturor combinațiilor liniare* de elemente din U,

$$\{\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{x}_n \mid n\in\mathbb{N}^*, \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}, \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\in U\}$$

se numește *subspațiul liniar generat de U*, notat $Lin(U)$ sau $Span(U)$.

- $Lin(U)$ este un subspațiu liniar al lui $(V,+,\cdot)$. În plus, are loc $U\subseteq Lin(U)$.
- $Lin(U)$ este cel mai mic subspațiu al lui V care îl conține pe U.

Exemplu: Dacă $V=\mathbb{R}^3$, subspațiul liniar generat de $U=\{(1,-2,1)\}$ este dreapta $\{(\alpha,-2\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\} = Lin\ U = Lin\{(1,-2,1)\}$

Liniară dependență și independență

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$.

a) Elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se numesc *liniar dependente* dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dintre care cel puțin unul nenul, astfel încât

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

b) Elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se numesc *liniar independente* dacă ecuația

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

are soluție unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

c) O submulțime U a lui V se numește *liniar independentă* dacă pentru orice vectori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in U$, *distincți*, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sunt liniar independenți.

Liniară dependență și independență

Figure: Vectori liniari dependenti în $\mathbb{R}^3$

Liniară dependență și independență

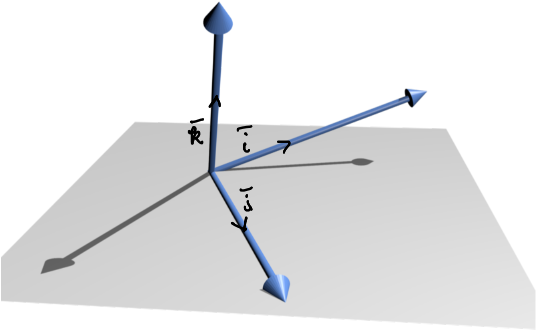


Figure: Vectori liniari independenti în $\mathbb{R}^3$

Exemplu: Liniară dependență - Liniară independență

O persoană descrie o anume locație astfel:

Acest hotel este la 3 km nord și 4 km est de centrul orașului.

- Avem suficientă informație să identificăm locația, deoarece pot considera sistemul de coordonate ca un spațiu vectorial 2- dimensional (ignorând altitudindea si curvatura Pământului)

Dacă persoana adaugă

Locația este la 5 km nord-est de centru.

- Desi afirmația este corectă, nu putem să ne dăm seama exact de locație.

- 3 km nord și 4 km est sunt vectori liniar independenți; (Vectorul nord nu poate fi scris in funcție de est)
- 5 km nord-est este o combinație liniară a doi vectori, deci este liniar dependent

Dacă am considera și altitudinea, acesta ar fi un al treilea vector liniar independent. În general, pentru a descrie locația într-un spațiu n-dimensional, avem nevoie de n vectori liniar independenți.

Liniară dependență și independență

Teorema

Vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ai unui spațiu liniar sunt liniar dependenți dacă și numai dacă unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Exemple

1. Mulțimea $\{\mathbf{0}\}$ este liniar dependentă deoarece are loc $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. Fie spațiul liniar $\mathbb{R}^n$, și sistemul de vectori

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}. \subseteq \mathbb{R}^n$$

   Atunci, B este liniar independentă .

B lin ind: $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

$\alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \alpha_n) =$

$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow$ B. lin ind.

3. Fie spațiul liniar al tuturor polinoamelor de grad cel mult n. Atunci polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent.

$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ lin ind

$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \ldots + \alpha_n x^n = 0_{pol. nul} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n \Rightarrow \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$

Dimensiunea unui spațiu liniar

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar.

i) Se numește **dimensiune** (**algebrică**) a spațiului liniar V numărul maxim de elemente liniar independente din V. Vom nota dimensiunea spațiului V cu $dim(V)$.

ii) Spațiul liniar V este numit **infinit-dimensional** dacă există cel puțin o submulțime infinită și liniar independentă a lui V. În caz contrar, V este numit **spațiu liniar finit-dimensional**.

Exemple:

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

Bază algebrică

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie B o submulțime nevidă a lui V.

B se numește **bază algebrică** a lui V dacă B este o submulțime liniar independentă și $Lin(B) = V$.

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci mulțimea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, este o bază a lui $\mathbb{R}^n$, numită **baza canonică** a lui $\mathbb{R}^n$.

- $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ sist lin ind în $\mathbb{R}^n$
- $Lin(\{\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$: $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ aî $\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n$

(sist de generatori)

Fie $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$

$\exists\, \alpha_i = x_i \in \mathbb{R}$ aî $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots 0) + (0, x_2, \ldots 0) + \ldots + (0, \ldots, x_n) = x_1 \bar{e}_1 + \ldots + x_n \bar{e}_n$

Bază algebrică

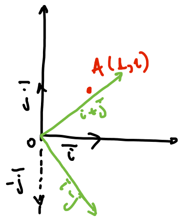
În cazul unui spațiu liniar n-dimensional V, o bază a lui V este o mulțime B alcătuită din n elemente, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, liniar independente, din V.

Fiecare element $\mathbf{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{b}_k,$$

Scalarii $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ se numesc *coordonatele lui $\mathbf{x}$ în baza B* .

Orice bază a unui spațiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V.



$(u,v) = u\cdot\bar{i} + v\bar{j}$

$(u,v) = u\cdot(1,0) + v(0,1) = u\cdot\bar{e_1} + v\cdot\bar{e_2}$

$\bar{i}\cdot\bar{i} = 1$

$\bar{i}\cdot\bar{j} = 0$

$B_c = \{\bar{i}, \bar{j}\} = \{(1,0),(0,1)\}$

$B = \{\bar{i}+\bar{j}, \bar{i}-\bar{j}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

card $B = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow B$ bază dacă B lin ind.

$\Rightarrow \alpha_1(\bar{i}+\bar{j}) + \alpha_2\cdot(\bar{i}-\bar{j}) = 0\cdot\bar{i} + 0\bar{j} \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \Rightarrow B$ baza

coord lui $x = (1,1)$ în baza B

$(1,1) = \beta_1\cdot(\bar{i}+\bar{j}) + \beta_2(\bar{i}-\bar{j})$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 - \beta_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 0$

$\Rightarrow (1,1) = 1\cdot(\bar{i}+\bar{j}) + 0\cdot(\bar{i}-\bar{j})$

Bază algebrică

Dacă notăm

- $X_B \overset{not}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în baza B;
- $\tilde{B} \overset{not}{=} [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ldots \mathbf{b}_n^T] \in \mathcal{M}_{n,n}$ matricea ce are pe coloana k coordonatele lui $\mathbf{b}_k$,

atunci relația

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{b}_k$$

se poate reda, *matriceal*, sub forma:

$$\mathbf{x}^T = \tilde{B} \cdot X_B = [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ldots \mathbf{b}_n^T] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Bază algebrică

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar cu $\dim(V) = n$. Atunci

1. Orice mulțime de m elemente din V, cu $m > n$, este liniar dependentă;
2. Orice mulțime de n elemente din V este bază a lui V dacă și numai dacă este mulțime liniar independentă.
3. Orice mulțime de n vectori din V este bază a lui V dacă și numai dacă mulțimea este un sistem de generatori al lui V.

Definiție

Se numește *rang al unei mulțimi* U, de vectori din spațiul vectorial $(V, +, \cdot)$, dimensiunea subspațiului generat de U, adică

$$rang(U) := dim\left(Lin(U)\right).$$

Bază algebrică

Exemplu:

Să se arate că mulțimea $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ este o bază a spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$. Determinați coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în această bază.

$B \subseteq \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \text{card } B = 3 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow B$ bază dacă B lin. indep.: $\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ ← sist liniar și omogen.

(are soluție nulă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dacă $\det A \neq 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_2 = 0$

$L_3 \to L_3 + L_1$ ($4+L_3$)

$\Rightarrow B$ lin independentă
card $B = \dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow B$ bază a lui $\mathbb{R}^3$.

Coord lui $\bar{v} = (1,2,3)$ în $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ coord lui $\bar{v}$ în baza B)

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3$

$\Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_3) = (1,2,3)$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 3 \end{cases}$ $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow$ sist Cramer

sist liniar

$\alpha_3 = 3 + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\alpha_2 = 2 - \alpha_3 = 2 - 3 - \alpha_1 = -1 - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 2$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + 2(-1-\alpha_1) = 1 \Rightarrow -\alpha_1 - 2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = -3$

Coord lui $\bar{v}$ în baza B sunt $-3, 2, 0$

$\bar{v} = -3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 0 \cdot \bar{v}_3$

Schimbarea bazei

Definiție

Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar cu $dim(V)=n\in\mathbb{N}^*$, fie $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V și fie $B'=\{\mathbf{b}'_1,\mathbf{b}'_2,\ldots,\mathbf{b}'_m\}$ o mulțime de m vectori din V.

Se numește *matrice de trecere (schimbare)* de la baza B la sistemul de vectori B', matricea

$$S_{B,B'}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1m}\\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nm}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,m}$$

unde, pentru $1\le k\le m$, $s_{1k},\ldots,s_{nk}$, sunt coordonatele vectorului $\mathbf{b}'_k$, în raport cu $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$.

Cu alte cuvinte, s_{ij} sunt astfel încât

$$\begin{cases} \mathbf{b}'_1 & = & s_{11}\mathbf{b}_1 + s_{21}\mathbf{b}_2 + \ldots + s_{n1}\mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}'_2 & = & s_{12}\mathbf{b}_1 + s_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + s_{n2}\mathbf{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}'_m & = & s_{1m}\mathbf{b}_1 + s_{2m}\mathbf{b}_2 + \ldots + s_{nm}\mathbf{b}_n \end{cases}.$$

Matriceal putem scrie

$$\widetilde{B'} = \tilde{B} \cdot S_{B,B'},$$

unde $\widetilde{B'} = [\mathbf{b}'^T_1 \ \mathbf{b}'^T_2 \ldots \mathbf{b}'^T_m]$ și $\tilde{B} = [\mathbf{b}^T_1 \ \mathbf{b}^T_2 \ldots \mathbf{b}^T_n]$.

$B_c = B \cdot S_{B B_c} = B \cdot S^{-1}_{B_c B}$

$B = B_c \cdot S_{B_c, B}$

$= (\bar{i} \ \ \bar{j})_{1,2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2,2}$

* $B = \{\bar{i}+\bar{j}, \bar{i}-\bar{j}\}$ $\quad B_c = \{\bar{i}, \bar{j}\}$

Schimb de la B_c la B

$\bar{i}+\bar{j} = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j}$ ✓

$\bar{i}-\bar{j} = 1 \ \bar{i} - 1 \ \bar{j}$ ✓

$S_{B_c, B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$

Schimbarea coordonatelor

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit-dimensional, cu $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ sunt două baze a lui V, iar $S_{B,B'}$ este matricea de trecere de la B la B', atunci matricea $S_{B,B'}$ este nesingulară $(\det S_{B,B'} \neq 0)$.

Mai mult, matricea $S^{-1}_{B,B'}$ *este matricea de trecere de la baza B' la B* , adică are loc

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}' \cdot S^{-1}_{B,B'}.$$

Schimbarea coordonatelor

În plus, dacă $\mathbf{x} \in V$, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu baza B, iar $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ sunt coodonatele lui $\mathbf{x}$ în baza B', atunci

$$X_{B'} = S^{-1}_{B,B'} \cdot X_B,$$

unde $X_B \stackrel{not}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$, iar $X_{B'} \stackrel{not}{=} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$.

- Spunem că bazele B și B' sunt *la fel orientate* dacă determinantul matricii $S_{B,B'}$ de trecere de la B la B' este pozitiv.
- Spunem că bazele B și B' sunt *contrar orientate* dacă $det(S_{B,B'}) < 0$.

Structura cursului

1. Definiții. Proprietăți
2. Combinații liniare
   - Liniară dependență și independență
   - Dimensiunea unui spațiu liniar
   - Bază algebrică
   - Schimbarea coordonatelor
3. Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$
4. Baze ortonormale
   - Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real.

a) Se numește **produs scalar** pe V o aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, care satisface următoarele proprietăți:

(PS1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este *pozitiv definită*, adică

- $\star$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0,\ \forall\, \mathbf{x} \in V$
- $\star$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in V$;

(PS2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este *simetrică*, adică

- $\star$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,\ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;

(PS3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este *biliniară*, adică

- $\star$ $\langle \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$,
- $\star$ $\langle \mathbf{x}, \alpha \cdot \mathbf{y} + \beta \cdot \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

b) Perechea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, în care V este un spațiu liniar real, iar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe V se numește **spațiu prehilbertian** (spațiu euclidian).

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\langle (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{x}), (\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_n}_{y}) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$
$$\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

Atunci $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$, numit *produsul scalar euclidian* (canonic).

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Definiție

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian și fie U o submulțime nevidă a lui V.

1) Doi *vectori* $\mathbf{x} \in V$ și $\mathbf{y} \in V$ se numesc *ortogonali*, și notăm $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

2) Spunem $\mathbf{x} \in V$ este *ortogonal pe mulțimea* U, și notăm $\mathbf{x} \perp U$, dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \ \forall\, \mathbf{y} \in U.$$

3) Vom numi U *sistem ortogonal* dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \text{ cu } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

4) Dacă $U \subseteq V$, atunci prin *suplimentul ortogonal al lui* U, înțelegem mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe U. Altfel scris

$$U^{\perp} := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp U\}$$

$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 1\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

$\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0$

Definiție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Unghiul dintre vectorii $\mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}$, notat prin $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sau $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, se definește prin relația:

$$\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}.$$

$\langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \cos(\sphericalangle x, y)$

Observație: Se poate observa cu ușurință că $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \widehat{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ și că $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \dfrac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real. Spunem că aplicația $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ este o *normă* pe V dacă

N1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in V$

N2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

N3) $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathbf{x} \in V$ (omogenitate);

N4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (inegalitatea triunghiulară).

Perechea $(V, \|\cdot\|)$ se numește *spațiu normat*.

Propoziție

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian. Atunci aplicația $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definită de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall\, \mathbf{x} \in V$$

este o normă pe V numită **norma indusă de produsul scalar** $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Norma indusă de produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$, definită prin

$$\underline{\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

se numește *norma euclidiană*.

Definiție

Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $\mathrm{x} \in V$. Elementul x se numește **versor** dacă $\|\mathrm{x}\| = 1$.

$\| \bar{e}_1 \| = \sqrt{\langle \bar{e_i}, \bar{e_i} \rangle} = 1$

Structura cursului

1. Definiții. Proprietăți
2. Combinații liniare
   - Liniară dependență și independență
   - Dimensiunea unui spațiu liniar
   - Bază algebrică
   - Schimbarea coordonatelor
3. Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$
4. Baze ortonormale
   - Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Baze ortonormale

Definiție

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian.

a) O submulțime nevidă $U \subseteq V$ se numește *sistem ortonormal* dacă U este un sistem ortogonal și fiecare element al lui U este un versor.

b) Dacă B este o bază a lui V și B este un sistem ortogonal, atunci B se numește bază ortogonală a lui V.

c) Dacă B este o bază a lui V și B este un sistem ortonormal, atunci B se numește bază ortonormală a lui V.

Cu alte cuvinte, U este *un sistem ortonormal* dacă și numai dacă, pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{când } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Bineînteles, baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, a lui $\mathbb{R}^n$, este o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^n$.

Baze ortonormale

Definiție

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ și fie $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V. Se numește **determinantul Gram** asociat unei baze B, numărul $\det G \in \mathbb{R}$, unde

$$G = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1\rangle & \langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\rangle & \dots & \langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_n\rangle \\ \langle\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1\rangle & \langle\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2\rangle & \dots & \langle\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle\mathbf{b}_n,\mathbf{b}_1\rangle & \langle\mathbf{b}_n,\mathbf{b}_2\rangle & \dots & \langle\mathbf{b}_n,\mathbf{b}_n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

- G este o matrice simetrică și nesingulară;
- B este ortonormală dacă și numai dacă G este matricea unitate I_n;
- B este ortogonală dacă și numai dacă matricea G este diagonală, adică

$$g_{ij} = 0, \forall\, i,j \in \overline{\{1,n\}}, i \neq j$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Teorema

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci există o bază ortonormală $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$, astfel încât

$$Lin(\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_k\}) = Lin(\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_k\}), \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Demonstrație: Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian și $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui.
Plecând de la B, se poate construi o bază $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiași spațiu V, utilizând **algoritmul lui Gram-Schmidt**, după cum urmează:

Pasul 1: Fie $\mathrm{b}'_1 = \mathrm{b}_1$.

Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, așa încât vectorul $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 + \lambda_1 \mathrm{b}'_1$ să fie ortogonal pe b'_1, adică să avem $0 = \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle + \lambda_1 \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle$. Așadar,

$$\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 - \frac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}\mathrm{b}'_1.$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 și μ_2 din $\mathbb{R}$, așa încât $\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 + \mu_1 \mathrm{b}'_1 + \mu_2 \mathrm{b}'_2$ să fie ortogonal pe sistemul $\{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2\}$, adică să avem $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_1 \rangle = 0$ și $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_2 \rangle = 0$.
Găsim $\mu_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1 \rangle}$ și $\mu_2 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2 \rangle}$. Prin urmare, avem:

$$\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 - \frac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1 \rangle} \mathrm{b}'_1 - \frac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2 \rangle} \mathrm{b}'_2.$$

Pasul k: Continuând procedeul, obținem formula generală:

$$\mathrm{b}'_k = \mathrm{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_k \rangle}{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_i \rangle} \mathrm{b}'_i, k = \overline{2, n}.$$

Așadar, am găsit baza ortogonală B'.
Pentru a obține o bază ortonormală, vom considera $B'' = \{\mathbf{b}''_1, \mathbf{b}''_2, \ldots, \mathbf{b}''_n\}$, unde

$$\mathbf{b}''_k = \frac{\mathbf{b}'_k}{\|\mathbf{b}'_k\|}, k = \overline{1, n}$$

iar $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, considerat pe V.

Bibliografie

- D. Bușneag, D. Piciu - *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
- Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalități. Idei și metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
- S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.
- F. L. Țiplea - *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar in algebra superioară*, Matrix Rom București, 2012.
- J. Harcet, L Heinrichs, P. M. Seiler - *Mathematics. Higher Lever*, Oxford Univ. Press, 2012.
- R. Solomon - *Notes on Ordinals and Cardinals*, math.uconn.edu, 2014.