Sintaxa LP1 $\longrightarrow$ $\overset{\text{cum scriu}}{\checkmark}$ formule peste o signatură $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$

<u>Variabilele unei formule</u> $\qquad vars : LP1 \longrightarrow 2^{\mathcal{X}}$

$\mathcal{X}$ – mulțimea de var.

$$vars(\forall x. P(y, z)) = \{x, y, z\}$$

$\tau \quad \hat{\tau}$

$$vars : \mathcal{T} \to 2^{\mathcal{X}}$$

$$vars(t) = \begin{cases} \{x\}, & t = x \in \mathcal{X} \\ \emptyset, & t = c \in \mathcal{F}_0 \\ \bigcup\limits_{i=\overline{1,n}} vars(t_i), & t = f(t_1, \dots t_n), \ f \in \mathcal{F}_n, \ t_1, \dots t_n \in \mathcal{T} \end{cases}$$

$$vars(+(2, x)) = vars(2) \cup vars(x)$$
$$= \emptyset \cup \{x\} = \{x\}$$

$: \mathcal{T} \to 2^{\mathcal{X}}$

$$vars(\varphi) = \begin{cases} \bigcup\limits_{i=\overline{1,n}} vars(t_i), & \varphi = P(t_1, \dots t_n) \\ vars(\varphi_1), & \varphi = \neg \varphi_1 \\ vars(\varphi_1) \cup vars(\varphi_2), & \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \\ & \text{sau} \\ & \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \\ & \text{sau} \\ & \varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2) \\ & \text{sau} \\ & \varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \\ \{x\} \cup vars(\varphi_1), & \varphi = \forall x. \varphi_1 \\ & \text{sau} \\ & \varphi = \exists x. \varphi_1 \end{cases}$$

$\bot \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad \forall \quad \exists$

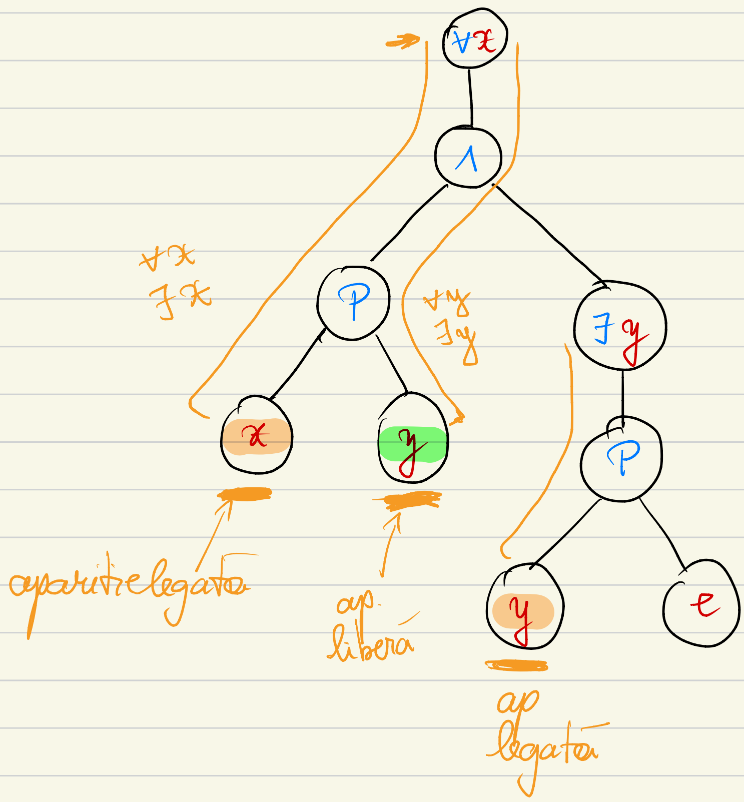
$$(\forall x. (\exists y. (P(x,y) \wedge (\exists x. Q(x)))))$$

Apariții libere / legate.

(noduri din arborele de sintaxă abstract

$$\varphi = (\forall x. (P(x,y) \wedge (\exists y. P(y,e))))$$

simbol constant



$free(\varphi) = \{y\}$

$bound(\varphi) = \{x, y\}$

Variabile libere / legate.

(elemente din $\mathcal{X}$

variabile libere : $free : \mathbb{LP}1 \rightarrow 2^{\mathcal{X}}$

↳ variabilele cu cel puțin o apariție liberă variabile legate : bound : $LP1 \to 2^{\mathcal{X}}$

↳ variabilele cuantificate.

$$bound((\forall x.\, Q(y))) = \{x\}$$

Semantică

$$\varphi = ((\forall x.\, P(x, e)) \wedge Q(i(x)))$$ – peste o signatură Σ $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$

- Σ-structură $S = (D, Pred, Fun)$
  1. D – domeniu $\neq \emptyset$
  2. pt fiecare $P \in \mathcal{P}$ există un predicat $P^S \in Pred$ de aceiași aritate
  3. pt fiecare $f \in \mathcal{F}$ există o funcție $f^S \in Fun$ de aceiași aritate.

$$\Sigma = (\{P, Q\}, \{f, i, e\})$$

$ar(P) = 2$ $\quad ar(f) = 2$

$ar(Q) = 1$ $\quad ar(i) = 1$

$ar(e) = 0$

$$S_1 = (\mathbb{Z}, \{=, Par\}, \{+, -, 0\})$$

f^{S_1}

S-Atribuire $\quad \alpha : \mathcal{X} \to \underline{D}$

$\alpha_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{Z}$

S_1-atribuire

$\alpha_1(x) = 5$

$\alpha_1(y) = 6$

$\alpha_1(z) = 0$ pt orice $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$

$$\overline{\alpha} : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$$

$$\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} c^S & , t = c \in \mathcal{F}_0 \\ \alpha(x) & , t = x \in X \\ f^S(\overline{\alpha}(t_1), \dots \overline{\alpha}(t_n)), & t = f(t_1, \dots t_n) \end{cases} \qquad (e^{S_1} = 0)$$

$$\overline{\alpha_1}(f(i(x), e)) = f^{S_1}(\overline{\alpha_1}(i(x)), \overline{\alpha_1}(e)) =$$

$$= \overline{\alpha_1}(i(x)) + \overline{\alpha_1}(e) =$$

$$= i^{S_1}(\overline{\alpha_1}(x)) + e^{S_1}$$

$$= -\alpha_1(x) + 0$$

$$= -5 + 0 = -5$$

Actualizarea unei atribuiri

$$\underbrace{\alpha[x \mapsto u]}_{\alpha'} : X \to \mathcal{D} \quad \text{a.î.} \quad \alpha[x \mapsto u](x) = u$$

$$\alpha[x \mapsto u](y) = \alpha(y)$$

pt orice $y \in X \setminus \{x\}$

$\alpha_1(x) = 5$	$\alpha_1[y \mapsto 2](x) = 5$
$\alpha_1(y) = 6$	$\alpha_1[y \mapsto 2](y) = 2$
$\alpha_1(z) = 0$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$	$\alpha_1[y \mapsto 2](z) = 0$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

	α_1	$\overbrace{\alpha_1[x \to 2]}^{\alpha'}$	$\overbrace{\alpha_1[x \mapsto 2][y \mapsto 0]}^{\alpha''}$
x	$\to \cancel{5}$	2	$\alpha''(x) = 2$
y	$\to 6$	$\cancel{6}$	$\alpha''(y) = 0$
orice z	$\to 0$	0	$\alpha''(z) = 0$ pt orice $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$

Valoarea de adevăr a unei formule din LP1.

$\mathcal{S}, \alpha \models \varphi$ (φ "adevărat" în structura $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{S}$-atrib. α)

$\mathcal{S}, \alpha \not\models \varphi$

Ex 1. $\mathcal{S}_1, \alpha_1 \models P(x, i(y))$

ddacă $P^{\mathcal{S}_1}(\overline{\alpha_1}(x), \overline{\alpha_1}(i(y)))$ are loc.

ddacă $\alpha_1(x) = i^{\mathcal{S}}(\overline{\alpha_1}(y))$

ddacă $5 = -\alpha_1(y)$

ddacă $5 = -6$ "F" $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{S}_1, \alpha_1 \not\models P(x, i(y))$

Ex 2. $\mathcal{S}_1, \alpha_1 \models \exists x . (Q(f(x, e)) \land P(x, y))$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $\mathcal{S}_1, \underbrace{\alpha_1[x \mapsto u]}_{\alpha'} \models (Q(f(x,e)) \land P(x, y))$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $\begin{cases} \mathcal{S}_1, \alpha_1[x \mapsto u] \models Q(f(x,e)) \\ \text{și} \\ \mathcal{S}_1, \alpha_1[x \mapsto u] \models P(x, y) \end{cases}$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $\begin{cases} Q^{S_1}\left(\overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(f(x,e))\right) & \text{are loc} \\ \text{și} \\ P^{S_1}\left(\overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(x), \overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(y)\right) \end{cases}$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $Par\left(f^{S_1}\left(\underbrace{\overline{\alpha_1[x \mapsto u]}}_{\alpha'}(x), \overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(e)\right)\right)$

și

$\overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(x) = \overline{\alpha_1[x \mapsto u]}(y)$

ddacă există $u \in \mathbb{Z}$ a.î. $Par(u + 0)$ "A"

$"6$

și

$u = \underbrace{6}_{\alpha_1(y)}$

Satisfiabilitate

φ satisfiabilă în S ddacă există S-atrib. α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

φ satisfiabilă ddacă există S și există S-atrib α a.î. $S, \alpha \models \varphi$

Validitate.

φ validă în S ddacă pt orice S-atrib α avem $S, \alpha \models \varphi$

φ validă ddacă pt orice struct S și pt orice S-atrib α, avem $S, \alpha \models \varphi$

Consecința semantică

φ cons. sem din $\varphi_1 \dots \varphi_n$ în S fixat $\left(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models_S \varphi\right)$

ddacă pt orice S-atrib α a.î. $S, \alpha \models \varphi_1$ și ... $S, \alpha \models \varphi_n$

avem și $S, \alpha \models \varphi$

φ cons sem din $\varphi_1 \dots \varphi_n$ $\left(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi \right)$

ddacă pt orice structură S avem $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \models_S \varphi$