

## CURSUL 8

### LIMITE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE. FUNCȚII CONTINUE

#### 1. SPAȚII METRICE

În spațiul fizic uzual, noțiunea de *distanță* sau *lungime* este un concept familiar. Astfel, dacă  $P$  și  $Q$  sunt două puncte în spațiu având coordonatele carteziene  $(x_P, y_P, z_P)$ , respectiv  $(x_Q, y_Q, z_Q)$ , distanța între  $P$  și  $Q$  (sau lungimea segmentului  $PQ$ ) este

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Scopul nostru este de a extinde acest concept la spații mai generale, numite *spații metrice*. Vom vedea că în astfel de spații putem defini noțiuni precum *convergența* și *continuitatea*, la fel ca pentru dreapta reală. Ca în cursul precedent, exemplele predilecte vor veni din spațiul euclidian  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIȚIE.** Fie  $X$  o mulțime nevidă. O funcție  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  se numește *distanță* sau *metrică* pe  $X$  dacă:

- (D<sub>1</sub>)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$ ;
- (D<sub>2</sub>)  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$  (*simetrie*);
- (D<sub>3</sub>)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$  (*inegalitatea triunghiulară*).

În acest caz, cuplul  $(X, d)$  se numește *spațiu metric*.

**Propoziția 1.1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Atunci:

- i)  $d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ ;
- ii)  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X$ ;
- iii)  $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$  (*inegalitatea cuadrilaterală*).

**DEMONSTRAȚIE.**

- i) Pentru  $n = 2$ , această proprietate este inegalitatea triunghiulară din definiția distanței (pentru  $n = 1$ , este o egalitate trivială).

Pentru a o arăta în cazul  $n \geq 3$ , apelăm la inducția matematică. Să presupunem că este adevărată pentru un  $n \geq 2$  și să luăm  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$ . Atunci, din inegalitatea triunghiulară pentru  $d$  și din ipoteza de inducție, obținem

$$d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_n) + d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}).$$

- ii) Fie  $x, y, z \in X$ . Cum  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  și  $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$  (inegalitatea triunghiulară), găsim, datorită simetriei lui  $d$ ,

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \text{ și } d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y),$$

ceea ce implică

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

- iii) Pentru  $x, y, x', y' \in X$  avem

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x', y')| &= |(d(x, y) - d(x', y)) + (d(x', y) - d(x', y'))| \\ &\leq |d(x, y) - d(x', y)| + |d(x', y) - d(x', y')|. \end{aligned}$$

Datorită punctului precedent, avem

$$|d(x, y) - d(x', y')| + |d(x', y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

obținând rezultatul precedent.

□

În spații liniare, unele distanțe provin din norme, ce au fost introduse în cursurile anterioare.

**DEFINIȚIE.** Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat. Atunci funcția  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$  definită de

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in V$$

este o metrică, numită *metrica indusă* de norma  $\|\cdot\|$ .

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A \subseteq X$  o submulțime nevidă a sa. Spunem că mulțimea  $A$  este *mărginită* dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât

$$d(x, y) \leq M, \quad \forall x, y \in A.$$

Se observă ușor că într-un spațiu normat  $(V, \|\cdot\|)$ , o submulțime nevidă  $A \subseteq V$  este mărginită dacă și numai dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

**Exemple.**

1. Pe  $\mathbb{R}$ , funcția  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  definită de

$$d(x, y) := |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

este o distanță, numită *distanța canonică* în  $\mathbb{R}$ .

2. Pe  $\mathbb{R}^n$ , metrica indusă de norma euclidiană se numește *metrica euclidiană* pe  $\mathbb{R}^n$  și se notează  $d_2$ . Avem

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

pentru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

3. Fie, pentru  $p \in [1, +\infty)$ , aplicația  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  definită de

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci  $\|\cdot\|_p$  este o normă (în cazul  $p = 2$ , știm deja asta, deoarece  $\|\cdot\|_p$  coincide cu norma euclidiană, ce este indusă de produsul scalar euclidian). Într-adevăr, primele proprietăți din definiția unei norme sunt ușor de demonstrat, în timp ce ultima, inegalitatea triunghiulară, este echivalentă cu

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}, \quad \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$$

care este inegalitatea lui Minkowski (formulată în cursul 2).

Putem de asemenea introduce o normă pe  $\mathbb{R}^n$  chiar în cazul  $p = +\infty$ , prin

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Din nou, primele proprietăți se pot deduce ușor. Pentru a arăta inegalitatea triunghiulară, fie  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  în  $\mathbb{R}^n$ . Atunci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|). \quad (1)$$

Deoarece pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$  și  $|y_i| \leq \|\mathbf{y}\|_\infty$ , avem

$$|x_i| + |y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Aceasta înseamnă că  $\max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$ . Combinată cu (1), obținem  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$ .

Metrica indusă pe  $\mathbb{R}^n$  de norma  $p$  se numește *distanța Minkowski* și se notează cu  $d_p$ . Avem deci

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \begin{cases} \left( |x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}, & p \in [1, +\infty); \\ \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, & p = +\infty, \end{cases}$$

pentru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Metrica  $d_1$  se mai numește câteodată *distanța taxi-cab* sau *distanța Manhattan*, în timp ce metrica  $d_\infty$  se mai numește *distanța Chebyshev*.

Dacă  $n = 1$ , toate aceste distanțe coincid:  $d_p(x, y) = |x - y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\forall p \in [1, +\infty]$ .

4. Funcția  $\tilde{d} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definită de

$$\tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

pentru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  este o distanță pe  $\mathbb{R}^n$ , dar nu este indusă de vreo normă, deoarece funcției  $\mathbf{x} \mapsto \tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  îi lipsește proprietatea de omogenitate.

5. Fie  $X$  o mulțime nevidă. Funcția  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definită de

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

pentru  $x, y \in X$ , este o metrică pe  $X$ , numită *metrica discretă* pe  $X$ .

6. Pe dreapta reală extinsă putem considera metrica  $d : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definită de

$$d(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \quad x, y \in \bar{\mathbb{R}}$$

(am extins funcția  $\operatorname{arctg}$  la  $\bar{\mathbb{R}}$  prin  $\operatorname{arctg}(-\infty) := -\pi/2$ ,  $\operatorname{arctg}(+\infty) := \pi/2$ ).

O normă importantă pe un spațiu de funcții este următoarea:

**DEFINIȚIE.** Fie  $E$  o mulțime nevidă și  $\mathcal{B}(E)$  spațiul liniar al funcțiilor mărginite  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  (adică  $\operatorname{Im} f$  este o mulțime mărginită). Definim  $\|\cdot\|_{\sup} : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$  prin

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Atunci  $\|\cdot\|_{\sup}$  este o normă pe  $\mathcal{B}(E)$ , numită *norma uniformă* sau *norma supremum*. Metrica indusă de  $\|\cdot\|_{\sup}$  se numește *distanța uniformă*, notată  $d_{\sup}$ .

Faptul că  $\|\cdot\|_{\sup}$  este o normă poate fi arătat în același mod ca pentru  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Într-adevăr,

- $\|f\|_{\sup} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow f = 0$ ;
- $\|\lambda \cdot f\|_{\sup} = \sup_{x \in E} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in E} [|\lambda| |f(x)|] = |\lambda| \sup_{x \in E} [|f(x)|] = |\lambda| \|f\|_{\sup}$ ;
- $\|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup} = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| \geq \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| = \|f + g\|_{\sup}$ .

**DEFINIȚIE.**

- a)** Fie  $X$  o mulțime nevidă. Spunem că două metrici  $d$  și  $d'$  pe  $X$  sunt *echivalente* dacă există două constante  $c_1, c_2 > 0$  astfel încât

$$c_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2 d'(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

- b)** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar. Spunem că două norme  $\|\cdot\|$  și  $\|\cdot\|'$  sunt *echivalente* dacă există două constante  $c_1, c_2 > 0$  astfel încât

$$c_1 \|\mathbf{x}\|' \leq \|\mathbf{x}\| \leq c_2 \|\mathbf{x}\|', \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Două norme pe  $V$  sunt echivalente dacă și numai dacă metricile induse sunt echivalente.

**Teorema 1.2.** Pe  $\mathbb{R}^n$ , toate normele  $\|\cdot\|_p$  cu  $p \in [1, +\infty]$  sunt echivalente.

**DEMONSTRAȚIE.** Arătăm mai întâi că dacă  $p \in [1, +\infty)$ , atunci metricile  $\|\cdot\|_p$  și  $\|\cdot\|_{\infty}$  sunt echivalente. Într-adevăr, pentru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  avem

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\|_{\infty}^p \right)^{1/p} = (n \|\mathbf{x}\|_{\infty}^p)^{1/p} = n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{\infty}.$$

și

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \geq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \left( \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_{\infty}.$$

Aceasta înseamnă că în precedenta definiție putem lua  $c_1 = 1$  și  $c_2 = n^{1/p}$ .

Să arătăm acum că oricare două norme  $\|\cdot\|_p$  și  $\|\cdot\|_{p'}$ , cu  $p, p' \in [1, +\infty)$ , sunt echivalente. Datorită precedentelor inegalități avem, pentru  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{1}{n^{1/p'}} \|\mathbf{x}\|_{p'} \leq \|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{p'}. \quad (2)$$

Inegalitatea (2) se poate îmbunătăți, datorită inegalității lui Hölder. Într-adevăr, dacă  $p \leq p'$  și  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , avem

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n (|x_i|^p \cdot 1) \leq \left[ \sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{\frac{p'}{p}} \right]^{\frac{p}{p'}} \left[ \sum_{i=1}^n 1^q \right]^{\frac{1}{q}} = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} \right]^{\frac{p}{p'}} n^{\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_{p'}^p,$$

unde  $q$  este ales astfel încât  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = 1$ , adică  $q = \frac{p'}{p' - p}$ . Acest lucru implică

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|\mathbf{x}\|_{p'}.$$

Pe de altă parte,  $|x_i| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . De aceea, presupunând că  $x \neq 0$ ,

$$\|x\|_{p'}^{p'} = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} = \|x\|_p^{p'} \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^{p'} \leq \|x\|_p^{p'} \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p = \|x\|_p^{p'-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^{p'},$$

de unde

$$\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p.$$

Deoarece această inegalitate are loc și pentru  $x = 0$ , obținem în final

$$\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|x\|_{p'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

pentru orice  $p, p' \in [1, +\infty)$  și  $p \leq p'$ . Din demonstrația rezultatului de mai sus, putem permite ca  $p$  și/sau  $p'$  să ia valoarea  $+\infty$ .

## 2. ȘIRURI ÎN SPAȚII METRICE

Fie  $X$  o mulțime nevidă. Precum în cazul șirurilor reale, un *șir*  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  în  $X$  este pur și simplu o funcție  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Toată terminologia legată de șiruri de numere reale poate fi translatată în acest caz. Dacă  $d$  este o metrică pe un spațiu  $X$ , următoarele noțiuni pot fi introduse:

**DEFINIȚIE.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir în  $X$ .

- a) Spunem că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este *mărginit* dacă mulțimea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginită.
- b) Spunem că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este *convergent* dacă există  $x \in X$  astfel încât  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

În acest caz, vom nota  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $x_n \xrightarrow{d} x$ ,  $x_n \xrightarrow{X} x$  sau chiar  $x_n \rightarrow x$ ; elementul  $x$  va fi numit *limita* lui  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- c) Spunem că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este *Cauchy* sau *fundamental* dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_\varepsilon : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

sau, echivalent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* : d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Precum în cazul șirurilor reale, limita unui șir într-un spațiu metric este unică. Într-adevăr, dacă un șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are două limite  $x$  și  $x'$  în  $X$ , atunci  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și  $d(x_n, x') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Deoarece  $d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x')$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x') = 0$ , de unde obținem  $d(x, x') = 0$  și deci  $x = x'$ .

**Propoziția 2.1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir convergent în  $X$ . Atunci  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este Cauchy.

**DEMONSTRAȚIE.** Deoarece  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent, există  $x \in X$  astfel încât  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . În consecință, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $d(x_n, x) < \varepsilon/2$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . De aceea, luând  $m, n \geq n_\varepsilon$  avem

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deoarece  $\varepsilon > 0$  a fost ales în mod arbitrar, obținem ceea ce am dorit. □

Reciproca acestui rezultat nu mai este adevărată, adică nu orice șir Cauchy într-un spațiu metric arbitrar este convergent. De exemplu, în spațiul  $X = (0, 1)$  dotat cu metrica uzuală ( $d(x, y) := |x - y|$ ,  $x, y \in X$ ), șirul  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este Cauchy (deoarece este Cauchy în  $\mathbb{R}$ ), dar nu este convergent (limita lui este de obicei luată în  $\mathbb{R}$ , nu în  $(0, 1)$ ).

Să arătăm acum că proprietățile unui șir într-un spațiu euclidian pot fi reduse la proprietățile șirurilor coordonatelor.

**Teorema 2.2.** Fie  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  cu metrica euclidiană  $d_2$  și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir în  $\mathbb{R}^m$  cu

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- i) Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit dacă și numai dacă toate șirurile  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sunt mărginite.
- ii) Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent dacă și numai dacă toate șirurile  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sunt convergente. În acest caz, dacă  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $x^i := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , atunci  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ .
- iii) Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este Cauchy dacă și numai dacă toate șirurile  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sunt Cauchy.

DEMONSTRAȚIE.

i) Șirul  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit dacă și numai dacă există  $r > 0$  astfel încât  $\|\mathbf{x}_n\|_2 \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dacă  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit de  $r > 0$ , atunci pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem

$$|x_n^k| \leq \|\mathbf{x}_n\|_2 = \sqrt{|x_n^1|^2 + |x_n^2|^2 + \dots + |x_n^m|^2}, \forall k \in \{1, \dots, m\},$$

de unde  $|x_n^k| < r, \forall k \in \{1, \dots, m\}, \forall n \in \mathbb{N}$ , adică fiecare șir  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$ , este mărginit.

Reciproc, dacă fiecare șir  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}, 1 \leq i \leq m$ , este mărginit, putem găsi  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}_+^*$  astfel încât

$$|x_n^k| \leq r_k, \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$

În consecință,

$$\|\mathbf{x}_n\|_2^2 = |x_n^1|^2 + |x_n^2|^2 + \dots + |x_n^m|^2 < r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2, \forall n \in \mathbb{N},$$

ceea ce implică faptul că  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit.

ii) Să presupunem că  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent la un vector  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ . Atunci  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Deoarece

$$|x_n^k - x^k| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2, \forall k \in \{1, \dots, m\},$$

obținem că  $|x_n^k - x^k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pentru toți  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Reciproc, dacă fiecare șir  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent la un  $x^k \in \mathbb{R}$ , avem

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_n^1 - x^1|^2 + |x_n^2 - x^2|^2 + \dots + |x_n^m - x^m|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

unde  $\mathbf{x} := (x^1, x^2, \dots, x^m)$ .

iii) Demonstrația acestui punct urmează pe cea a punctului precedent, așa că o vom omite.

□

### 3. LIMITE DE FUNCȚII

În cele ce urmează, presupunem că cititorul este familiarizat cu conceptele de limită și continuitate pentru funcții reale de o variabilă. Scopul nostru este de a extinde aceste noțiuni la funcții reale sau vectoriale de mai multe variabile, sau, mai general, la funcții între spații metrice.

Pentru a introduce noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, dăm mai întâi următoarea definiție:

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă. Spunem că un punct  $x \in X$  este punct de acumulare pentru  $A$  dacă există un șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x\}$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă, o funcție  $f : A \rightarrow Y$  și  $x_0 \in A'$ . Spunem că un element  $l \in Y$  este limita lui  $f$  în  $x_0$  dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon.$$

Ca și în cazul limitelor de șiruri, putem arăta că limita unei funcții într-un punct, dacă există, este unică. Spunem că funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  dacă există  $l \in Y$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

În cazul particular în care  $X$  și  $Y$  sunt spații normate, avem:

**Propoziția 3.1.** Fie  $(X, \|\cdot\|)$  și  $(Y, \|\cdot\|')$  spații normate,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și o funcție  $f : A \rightarrow Y$ . Un element  $l \in Y$  este limita lui  $f$  într-un punct  $x_0 \in A'$  dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|' < \varepsilon.$$

Cu ajutorul șirurilor convergente putem da o caracterizare importantă a limitelor de funcții.

**Teorema 3.2.** Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și o funcție  $f : A \rightarrow Y$ . Un element  $l \in Y$  este limita lui  $f$  într-un punct  $x_0 \in A'$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

**Observații.**

1. Dacă dorim să arătăm că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$ , este de ajuns să găsim un șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  ce converge la  $x_0$  astfel încât  $f(x_n)$  nu converge la  $l$ .

2. Dacă, mai mult, dorim să arătăm că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nu există, este de ajuns să găsim două șiruri  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  în  $A \setminus \{x_0\}$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \ell'$ , cu  $\ell \neq \ell'$ .

**Exemplu.** Fie funcția  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definită de

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Atunci  $(0, 0) \in A'$ , unde  $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Dacă luăm un șir  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $x_n := \frac{1}{n}$ ,  $y_n := \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  și

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă luăm șirul  $(x'_n, y'_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  definit de  $x'_n := \frac{1}{n}$ ,  $y'_n := \frac{1}{n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  și

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{n}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Concluzia este că  $f$  nu are limită în punctul  $(0, 0)$ .

Ca și în cazul limitelor de șiruri, următoarele criterii se aplică pentru limitele de funcții.

**Propoziția 3.3.** Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă, funcțiile  $f : A \rightarrow Y$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  și  $x_0 \in A'$ ,  $l \in Y$ . Dacă

- (i)  $d'(f(x), l) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in A$ ;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,

atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Teorema 3.4.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $(Y, \|\cdot\|)$  un spațiu normat,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă,  $x_0 \in A'$  și o funcție  $f : X \rightarrow Y$ .

- i) Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\|$ .
- ii) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$ .
- iii) Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| > 0$ , atunci există  $\delta > 0$  astfel încât  $f(x) \neq \mathbf{0}_Y$ ,  $\forall x \in B(x_0; \delta) \setminus \{x_0\}$ .

Pentru funcții cu valori într-un spațiu normat, adunarea și înmulțirea cu scalari sunt închise în raport cu limitele. Mai precis, avem:

**Teorema 3.5.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $(Y, \|\cdot\|)$  un spațiu normat,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și  $x_0 \in A'$ .

- i) Dacă  $f, g : X \rightarrow Y$  sunt funcții astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in Y$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in Y$  există, atunci avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

- ii) Dacă  $f : X \rightarrow Y$  și  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in Y$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}$  există, atunci avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) f(x) = \alpha l.$$

În cazul spațiilor euclidiene, limitele funcțiilor se pot determina pe componente:

**Teorema 3.6.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o submulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $x_0 \in A'$ . Atunci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$  dacă și numai dacă pentru orice  $k \in \{1, \dots, m\}$  există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$ , unde  $f_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  sunt cele  $m$  componente ale funcției  $f$ . Mai mult, în acest caz,  $l = (l_1, \dots, l_m)$ .

Următorul rezultat arată cum să calculăm limitele funcțiilor compuse:

**Teorema 3.7 (principiul substituției).** Fie  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  și  $(Z, d'')$  trei spații metrice,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  submulțimi nevide, funcțiile  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow Z$  și  $x_0 \in A'$ ,  $y_0 \in B'$ . Dacă

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ;
- (ii)  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \in Z$ ;
- (iii)  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall x \in X : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \neq y_0$ ,

atunci  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(f(x)) = l$ .

O greșeală des întâlnită atunci când calculăm limite de funcții de mai multe variabile este să *iterăm* limita. Să exemplificăm această greșeală prin considerarea funcției  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definite de

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Atunci, fixând un  $y \in \mathbb{R}^*$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Lăsând acum  $y$  să tindă la 0, obținem *limita iterată*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Prin simetrie, deducem cealaltă *limită iterată*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Totuși,  $f$  nu are o limită în  $(0, 0)$ , deoarece  $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  și  $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Pe de altă parte, o funcție  $f$  poate să aibă o limită într-un punct, dar nu limite iterate. Pentru aceasta, fie  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definită de

$$f(x, y) := (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}.$$

Atunci  $|f(x, y)| \leq g(x, y) := |x| + |y|$ . Deoarece  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0$ , avem, datorită propoziției 3.3 că  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ . Pe de altă parte, dacă încercăm să calculăm  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  pentru un  $y \in \mathbb{R}^*$ , obținem  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$  (deoarece  $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ), dar  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  nu are limită în 0. De aceea, deoarece

$$f(x, y) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right) \sin \frac{1}{y} + \left(\sin \frac{1}{x}\right) \left(y \sin \frac{1}{y}\right),$$

$f(x, y)$  nu are limită pentru  $x \rightarrow 0$  dacă  $\sin \frac{1}{y} \neq 0$ , adică  $y \neq \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Este clar acum că problema existenței limitei iterate  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  are un răspuns negativ.

Considerațiile de mai sus pot fi extinse cu ușurință la cazul mai multor variabile.

Să vedem acum ce se întâmplă dacă cerem ca limitele să fie luate după o direcție prestabilită (într-un spațiu liniar).

**DEFINIȚIE.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- a) Spunem că o funcție  $f$  are *limită* în  $\mathbf{x}_0$  *în direcția*  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  dacă  $0 \in \{t \geq 0 \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\}'$  (adică există  $t_n \searrow 0$  astfel încât  $\mathbf{x}_0 + t_n \mathbf{u} \in A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ) și există limita funcției  $(0, +\infty) \ni t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$  în  $t = 0$ :

$$l_{\mathbf{u}} := \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}).$$

- b) Spunem că  $f$  are (a  $k$ -a) *limită parțială* în  $\mathbf{x}_0$  dacă  $f$  are limită în  $\mathbf{x}_0$  în direcția  $\mathbf{e}_k$ , pentru  $k \in \{1, \dots, n\}$ , unde  $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0)$ .

Existența unei limite globale implică existența limitelor direcționale. Mai precis, avem:

**Propoziția 3.8.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{x}_0 \in A'$  astfel încât există  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ . Dacă  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$  este astfel încât  $0 \in \{t \geq 0 \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\}'$ , atunci există limita lui  $f$  în  $\mathbf{x}_0$  în direcția  $\mathbf{u}$  și este egală cu  $\mathbf{l}$ .

Reciproca acestui rezultat nu este adevărată; de fapt, chiar dacă limitele în toate direcțiile există și sunt egale, s-ar putea ca o limită globală să nu existe, așa cum arată următorul exemplu:

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită de

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Fie  $(u, v)$  o direcție în  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Atunci, pentru  $t > 0$ ,

$$f((0, 0) + t(u, v)) = f(tu, tv) = \frac{t^3 uv^2}{t^2(u^2 + t^2 v^4)} = \frac{tuv^2}{u^2 + t^2 v^4}.$$

Deoarece  $\lim_{t \searrow 0} f((0,0) + t(u,v)) = 0$ , adică limita lui  $f$  în  $(0,0)$  în direcția  $(u,v)$  există și este egală cu 0. Bineînțeles, acest lucru are loc chiar dacă  $(u,v) = (0,0)$ .

Totuși,  $f$  nu are limită globală în  $(0,0)$  deoarece  $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$ .

Când  $f$  este o funcție de o variabilă, singurele direcții nenule posibile (până la multiplicarea cu un scalar) sunt  $-1$  și  $1$ . În acest caz, vom vorbi de limitele la *stânga* și la *dreapta*.

DEFINIȚIE. Fie  $A \subseteq \mathbb{R}$  o mulțime nevidă.

- Spunem că  $x_0 \in \mathbb{R}$  este un *punct de acumulare la stânga* (punct de acumulare la dreapta) a lui  $A$  dacă  $x$  este punct de acumulare pentru mulțimea  $A \cap (-\infty, x_0)$  ( $A \cap (x_0, +\infty)$ ).
- Dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  este o funcție și  $x_0$  este un punct de acumulare la stânga (punct de acumulare la dreapta) a lui  $A$ , spunem că  $f$  are *limită la stânga* (*limită la dreapta*) în  $x_0$  dacă există limita lui  $f$  în  $x_0$  în direcția  $-1$  ( $1$ ). În acest caz, vom nota această limită cu  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ ,  $f(x_0 - 0)$  sau  $f(x_0^-)$  ( $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ ,  $f(x_0 + 0)$  sau  $f(x_0^+)$ ).

În cazul  $n = 1$ , reciproca propoziției 3.8 are loc:

**Propoziția 3.9.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}$  o mulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $x_0$  un punct de acumulare atât la stânga, cât și la dreapta a lui  $A$ . Atunci limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există dacă și numai dacă ambele limite  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$  și  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$  există și sunt egale. În acest caz,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ .

La sfârșitul acestei secțiuni reamintim unele dintre cele mai importante limite de funcții reale:

- $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$ ;
- $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ );
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$  ( $a > 0$ );
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^r - 1}{t} = r$  ( $r \in \mathbb{R}$ );
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$ .

#### 4. FUNCȚII CONTINUE

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și o funcție  $f : A \rightarrow Y$ .

- Spunem că  $f$  este *continuă* într-un punct  $x_0 \in A$  dacă
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$
- Spunem că  $f$  este *discontină* într-un punct  $x_0 \in A$  dacă  $f$  nu este continuă în  $x_0$ ; în acest caz, spunem de asemenea că  $x_0$  este un *punct de discontinuitate* a lui  $f$ .
- Spunem că  $f$  este *continuă* dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , pentru orice  $x_0 \in A$ .

Putem vedea că noțiunea de continuitate într-un punct a unei funcții  $f$  este foarte apropiată de noțiunea de limită într-un punct. De fapt,  $f$  este continuă într-un punct  $x_0 \in A$  dacă și numai dacă fie  $x_0$  este un punct de acumulare a lui  $A$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , fie  $x_0$  este un *punct izolat* (adică nu este punct de acumulare pentru  $A$ ).

Continuitatea într-un punct poate fi caracterizată cu șiruri.

**Teorema 4.1.** Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă, o funcție  $f : A \rightarrow Y$  și  $x_0 \in A$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă, o funcție  $f : A \rightarrow Y$  și  $x_0 \in A'$ . Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in Y$ , atunci funcția  $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \rightarrow Y$  definită de

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\}; \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$



este continuă în  $x_0$  și se numește *extensia prin continuitate* a lui  $f$  în  $x_0$ .

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice.

- a) Spunem că o funcție bijectivă  $f : X \rightarrow Y$  este un *homeomorfism* dacă  $f$  și  $f^{-1}$  sunt ambele continue.
- b) Spunem că  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  sunt *homeomorfe* dacă există un homeomorfism între ele.
- c) Spunem că o funcție  $f : X \rightarrow Y$  este o *izometrie* între  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  dacă

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

**Observație.** Dacă  $f$  este o izometrie între  $(X, d)$  și  $(Y, d')$ , atunci  $f$  este continuă. Mai mult, dacă  $f$  este în plus bijectivă, atunci  $f$  este un homeomorfism.

Vom introduce acum câteva noțiuni mai tari de continuitate.

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice și  $f : X \rightarrow Y$  o funcție.

- a) Funcția  $f$  se numește *uniform continuă* dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- b) Funcția  $f$  se numește *Lipschitz-continuă* dacă există o constantă  $c_1 > 0$ , numită *constantă Lipschitz* a lui  $f$ , astfel încât

$$d'(f(x), f(y)) \leq c_1 d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

- c) Funcția  $f$  se numește *Hölder-continuă* de ordinul  $\alpha \in (0, 1]$  dacă există o constantă  $c_\alpha > 0$  astfel încât

$$d'(f(x), f(y)) \leq c_\alpha [d(x, y)]^\alpha, \quad \forall x, y \in X.$$

**Observație.**

1. O funcție uniform continuă este continuă.
2. O funcție Lipschitz continuă este o funcție Hölder-continuă de ordinul 1 (și reciproc).
3. Orice funcție Hölder continuă este uniform continuă (pentru  $\varepsilon > 0$ , e de ajuns să luăm  $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{c_\alpha}\right)^{1/\alpha}$ ).

**Teorema 4.2.** Fie  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  și  $(Z, d'')$  trei spații metrice,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  mulțimi nevide și funcțiile  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow Z$ .

- i) Dacă  $f$  este continuă într-un punct  $x_0 \in A$  și  $g$  este continuă în  $y_0 := f(x_0)$ , atunci  $g \circ f$  este continuă în  $x_0$ .
- ii) Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue, atunci  $g \circ f$  este continuă.

**Teorema 4.3.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $(Y, \|\cdot\|)$  un spațiu normat,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și  $x_0 \in A$ .

- i) Dacă funcțiile  $f, g : X \rightarrow Y$  sunt continue în  $x_0$ , atunci  $\alpha f + \beta g$  este continuă în  $x_0$ .
- ii) Dacă funcțiile  $f : X \rightarrow Y$  și  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue în  $x_0$ , atunci  $\varphi \cdot f$  este continuă în  $x_0$ .

DEFINIȚIE. Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Spunem că o submulțime  $K \subseteq X$  este *compactă* dacă orice șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  admite un subșir convergent la un element din  $K$ .

Datorită teoremei Bolzano-Weierstrass, submulțimile compacte ale lui  $\mathbb{R}$  sunt submulțimile închise ( $A$  *închisă* dacă  $A' \subseteq A$ ) și mărginite.

**Teorema 4.4.** Fie  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  spații metrice,  $K \subseteq X$  o submulțime compactă nevidă și  $f : K \rightarrow Y$  o funcție continuă. Atunci  $f[K]$  este compactă.

O consecință imediată a acestui rezultat este următorul:

**Teorema 4.5 (Weierstrass).** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $K \subseteq X$  o submulțime compactă și nevidă, iar  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci funcția  $f$  este mărginită și există  $x_0, x_1 \in K$  astfel încât  $f(x_0) = \min_{x \in K} f(x)$  și  $f(x_1) = \max_{x \in K} f(x)$ .

O altă proprietate importantă a submulțimilor compacte este faptul că orice funcție continuă definită pe o astfel de mulțime devine uniform continuă:

**Teorema 4.6 (Cantor).** Fie  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  spații metrice,  $K \subseteq X$  o submulțime compactă și nevidă, iar  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci  $f$  este uniform continuă.

Să analizăm acum continuitatea funcțiilor între spații euclidiene.

**Teorema 4.7.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o submulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $x_0 \in A$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă  $f_k$  este continuă în  $x_0$  pentru orice  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

**Propoziția 4.8.** Dacă  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este o aplicație liniară, atunci  $T$  este continuă.

DEFINIȚIE. Fie  $A \subseteq \mathbb{R}$  o mulțime nevidă și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

- a) Spunem că  $f$  este *continuă la stânga* (*continuă la dreapta*) în  $x_0 \in A$  dacă  $f|_{A \cap (-\infty, x_0]}$  ( $f|_{A \cap [x_0, +\infty)}$ ) este continuă în  $x_0$ .
- b) Spunem că  $f$  este *continuă la stânga* (*continuă la dreapta*) dacă  $f$  este continuă la stânga (*continuă la dreapta*) în orice  $x_0 \in A$ .

**Propoziția 4.9.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime nevidă,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $x_0 \in A$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă  $f$  este continuă și la stânga și la dreapta în  $x_0$ .

#### BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

- [1] C. Canuto, A. Tabacco, *Mathematical Analysis II (2nd ed.)*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [2] C. Drăgușin, O. Olteanu, M. Gavrilă, *Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- [3] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science, 2010.
- [4] R. Heath-Brown, *Analysis II. Continuity and Differentiability*, Hilary Term, 2016.
- [5] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- [6] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- [7] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
- [8] V. Postolică, *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- [9] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
- [10] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2009.