Cursul 6

Aplicaţii liniare pe $\mathbb{R}^n$. Vectori şi valori proprii

În cele ce urmează, vom considera $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, unde $n, m \in \mathbb{N}^*$, adică vom considera funcţii de forma
$$f : \mathrm{Dom(f)} \subseteq \mathrm{R^n} \to \mathrm{R^m}.$$
Dacă $n > 1$, acestea se vor numi *funcţii de n variabile (reale)*, iar dacă $n = 1$, le vom numi *funcţii de o variabilă (reală)*. În cazul în care $m = 1$ le vom numi *funcţii reale*, iar dacă $m > 1$, ele vor fi numite *funcţii vectoriale (sau cu valori în $\mathbb{R}^m$)*.

Dacă $m > 1$, atunci, dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom(f)}$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, are m componente, notate, de regulă astfel $f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \ldots, x_n)$. Aşadar, vom avea m funcţii de n variabile $f_k : \mathrm{Dom(f)} \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, astfel încât

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom(f)}.$$

Exemple de funcţii reale de mai multe variabile:

1) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{\sin\left(x_1^2 + x_2^2\right)}, (x_1, x_2) \in A,$$

unde

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin\left(x_1^2 + x_2^2\right) \geq 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} : 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi\}.$$

2) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_3)^{x_2}, (x_1, x_2, x_3) \in A,$$

unde

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0 \text{ şi } x_1 + x_3 > 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 + x_3 < 1 - x_2\}.$$

3) *Funcţia polinomială* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Numerele $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienţii* polinomului P. Fiecare termen $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, unde $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \neq 0$ se numeşte *monom* (al lui P). *Gradul* acestui monom este $i_1 + i_2 + \ldots + i_n \in \mathbb{N}$. Cum $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o sumă finită de monoame, numim *gradul polinomului* P ca fiind cel mai mare grad dintre gradele monoamelor ce îl compun.

Spunem că polinomul P este *omogen* dacă toate monoamele sale au acelaşi grad. Un exemplu de polinom omogen este următorul polinom de grad 1:

$$P(x_1, \dots x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Un polinom P de forma (1) se numeşte ***simetric*** dacă, pentru orice permutare

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

cu $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ şi $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{k_1,k_2,\dots,k_n} a_{i_1,i_2,\dots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{k_1,k_2,\dots,k_n} a_{i_1,i_2,\dots,i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \dots x_{\sigma(n)}^{i_n}.$$

Spre exemplu, funcţia $P(x_1, x_2) = a{x_1}^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ este un polinom simetric dacă şi numai dacă $a = c$.

Aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale

Definiţia 7.1 *Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare reale. O* ***aplicaţie*** *$T : V \to W$ se numeşte* ***liniară*** *dacă*

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *(aditivitate),*

(ii) $T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, $\forall\, \mathbf{u} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *(omogenitate).*

Vom utiliza de asemenea denumirile de *operator liniar* sau *transformare liniară* pentru o aplicaţie liniară.

Exemplu: Toate polinoamele omogene de grad 1(definite pe $\mathbb{R}^n$) sunt aplicaţii liniare între $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}$.

Propoziţia 7.2 *Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare reale. Aplicaţia $T : V \to W$ este liniară dacă şi numai dacă*

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie: Cum $T : V \to W$ este aplicaţie liniară, din Definiţia 7.1, avem:

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{u}) + T(\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, dacă T satisface $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rezultă că, pentru $\alpha = \beta = 1$ avem i), iar pentru $\beta = 0$, are loc ii). ◀

Observaţii:

1. Dacă $(V, +, \cdot)$, $(W, +\cdot)$ sunt două spaţii liniare, iar $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară bijectivă, atunci T se numeşte **izomorfism** între spaţiile liniare V si W.

2. Dacă $V = W$, aplicaţia liniară $T : V \to V$ se numeşte ***endomorfism liniar*** pe V. Funcţia identitate 1_V este un endomorfism liniar pe V.

3. Dacă endomorfismul liniar $T : V \to V$ este şi bijectiv, atunci el se numeşte ***automorfism liniar*** pe V.

4. Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$, atunci avem
$$T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathbf{u}_i) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n), \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci
$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W,$$
unde $\mathbf{0}_V$ şi $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V şi din W. Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \to W$ nu este liniară.

6. Se poate arăta că mulţimea $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$, a tuturor aplicaţiilor liniare de la spaţiul liniar V la spaţiul liniar W, formează un spaţiu liniar în raport cu operaţia de adunare a aplicaţiilor şi cu operaţia de înmulţire a unei aplicaţii cu un scalar din $\mathbb{R}$. Dacă $V = W$, vom nota mai simplu $\mathcal{L}(V)$, în loc de $\mathcal{L}(V, W)$.

7. Fie U, V şi W spaţii liniare reale. Dacă $T_1 : U \to V$ şi $T_2 : V \to W$ sunt aplicaţii liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \to W$ este tot o aplicaţie liniară.

Definiţia 7.3 *Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară.*

a) Mulţimea
$$Ker(T) \stackrel{not}{=} T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$
*se numeşte **nucleul aplicaţiei liniare** T.*

b) Mulţimea
$$Im(T) \stackrel{not}{=} T(V) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists\, \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$
*se numeşte **imaginea aplicaţiei liniare** T.*

Propoziţia 7.4 *Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci $Ker(T)$ este un subspaţiu liniar al lui V, iar $Im(T)$ un subspaţiu liniar al lui W.*

Demonstraţie: Ştim că $T : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă are loc:
$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W, \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Ker(T), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
adică, am obţinut $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pe de altă parte, $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$, există $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2 \in V$, astfel încât $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ şi $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Prin urmare, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$:
$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) \in T(V) = Im(T).$$

◀

Teorema 7.5 (Teorema dimensiunii) *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci $Im(T)$ este un subspaţiu finit dimensional al lui W şi are loc **relaţia dimensiunilor**:*
$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,.$$

Demonstraţie: Cum spaţiul liniar V este finit dimensional, rezultă că $Ker(T)$ este finit dimensional. Fie $m = \dim(Ker(T))$, cu $m \in \mathbb{N}$ şi fie $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ o bază a lui $Ker(T)$. Dacă $n = dim(V)$, atunci există vectorii $\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n \in V$ astfel încât $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ să fie o bază a lui V. Să demonstrăm că $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui $Im(T)$.

Fie $\mathbf{w} \in Im(T)$. Atunci există $\mathbf{v} \in V$ astfel încât $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Cum $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{b}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{b}_n,$$

de unde

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) &= T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{b}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{b}_n) \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{b}_1) + \ldots + \alpha_m T(\mathbf{b}_m) + \alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n) \end{aligned}$$

Cum $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in Ker(T)$, avem că $T(\mathbf{b}_1) = \ldots = T(\mathbf{b}_m) = 0$, adică $\mathbf{w} = \alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + ... + \alpha_n T(\mathbf{b}_n)$. Prin urmare, $Lin\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\} = Im(T)$.

Arătăm liniara independenţă. Presupunem că $\alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}_W$, pentru α_{m+1}, $\ldots$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Atunci $T(\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{b}_n) = \mathbf{0}_W$, deci $\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{b}_n \in Ker(T)$. Pe de altă parte, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ este bază a lui $Ker(T)$, deci există $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ astfel încât

$$\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{b}_m$$

adică

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{b}_m - \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} - \ldots - \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0}_V.$$

Cum $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, avem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$. Aşadar, mulţimea $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este liniar independentă.

Am demonstrat că mulţimea $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui $Im(T)$, deci $Im(T)$ este subspaţiu finit dimensional al lui W şi are dimensiunea $n - m$, adică $dim(V) - dim\,(Ker(T))$. Aşadar, are loc relaţia dimensiunilor. ◀

Definiţia 7.6 *Fie $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ două spaţii vectoriale, şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci,*

- *$dim\,(Ker(T))$ se numeşte* ***defectul lui*** *T şi se notează $def(T)$;*
- *$dim\,(Im(T))$ se numeşte* ***rangul lui*** *T şi se notează $rang(T)$.*

Aşadar, formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:

$$dim(V) = rang(T) + def(T). \tag{2}$$

Următoarele rezultate, ne oferă caracterizări ale injectivităţii, surjectivităţii şi a bijectivităţii aplicaţiilor liniare utilizând teorema dimensiunilor.

Propoziţia 7.7 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, şi $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) T este injectivă;

b) $def(T) = 0$;

c) $rang(T) = dim(V)$;

d) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem liniar independent în V, atunci $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este sistem liniar independent în W.

Propoziţia 7.8 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, şi $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) T este surjectivă;

ii) $rang(T) = dim(W)$;

iii) $Im(T) = W$;

iv) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem de generatori pentru V, atunci $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este un sistem de generatori pentru W.

Pe baza Propoziţiilor 7.7 şi 7.8, se poate vedea că are loc şi următorul rezultat:

Propoziţia 7.9 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, şi $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

j) T este bijectivă;

jj) $dim(V) = dim(W) = rang(T)$;

jjj) Pentru orice bază $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ a lui V, mulţimea $T(B) = \{T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui W.

Reprezentarea matriceală a aplicaţiilor liniare

Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare, finit-dimensionale cu $dim(V) = n$ şi $dim(W) = m$, şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, iar $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m\}$ este bază a lui W, atunci, pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$ putem scrie

$$T(\mathbf{b}_k) = a_{1k}\mathbf{b}'_1 + \ldots a_{mk}\mathbf{b}'_m,$$

unde $a_{1k}, \ldots, a_{mk} \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui $T(\mathbf{b}_k)$ în raport cu baza B'. Matricea $A_{B,B'} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, se numeşte ***matricea asociată*** aplicaţiei T în raport cu bazele B, B'.

Dacă $\mathbf{v} \in V$, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ în raport cu baza B, atunci

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(\alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{b}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n) \\ &= \alpha_1(a_{11}\mathbf{b}'_1 + \ldots a_{m1}\mathbf{b}'_m) + \ldots + \alpha_n(a_{1n}\mathbf{b}'_1 + \ldots a_{mn}\mathbf{b}'_m) \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{m1} + \ldots + \alpha_n a_{mn})\mathbf{b}'_m \end{aligned} \tag{3}$$

Adică $T(\mathbf{v}) \in W$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ în raport cu baza B', unde $\beta_k = \alpha_1 a_{k1} + \ldots + \alpha_n a_{kn}$.

Dacă $\mathbf{v} \in V$ are coordonatele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ în baza B iar $T(\mathbf{v}) \in W$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ în baza B', atunci putem scrie relaţia

$$X_{B'} = A_{B,B'} \cdot X_B,$$

unde

$$X_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X_{B'} = \begin{bmatrix} \beta 1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

Rangul aplicatiei liniare. Rangul matricii asociate:

Fie $r \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$ *rangul matricei* $A_{B,B'}$. Atunci avem $dim(Im(T)) \geq r$. Pe de altă parte, dacă presupunem că $dim(Im(T)) > r$, putem găsi $\mathbf{v} \in V$ astfel încât $T(\mathbf{b}_{k_1}), \ldots, T(\mathbf{b}_{k_r})$ şi $T(\mathbf{v})$ sunt liniar independenţi. Dar $T(\mathbf{v})$ este o combinaţie liniară a vectorilor $T(\mathbf{b}_1), \ldots T(\mathbf{b}_n)$. Cum pentru orice $k \notin \{k_1, \ldots, k_r\}$, $T(\mathbf{b}_k)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $T(\mathbf{b}_{k_1}), \ldots T(\mathbf{b}_{k_r})$, obţinem contradicţie. Aşadar, $dim(Im(T)) = r$, adică

$$rang(A_{B,B'}) = rang(T).$$

Schimbări de baze:

Vrem să vedem cum se schimbă matricea asociată aplicaţiei liniare T la schimbări de bază. Fie $\widetilde{B} = \{\widetilde{\mathbf{b}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}_n\}$ o altă bază a lui V şi $\widetilde{B}' = \{\widetilde{\mathbf{b}}'_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}'_m\}$ o altă bază a lui W. Vom nota cu $S_{B,\widetilde{B}} = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la baza B la baza $\widetilde{B}$ şi cu $S'_{B',\widetilde{B}'} = (s'_{ij})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathcal{M}_n(R)$ matricea de trecere de la B' la $\widetilde{B}'$.

Cu alte cuvinte, vom avea

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{b}}_k &= s_{1k}\mathbf{b}_1 + \ldots + s_{nk}\mathbf{b}_n, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \\ \widetilde{\mathbf{b}}'_\ell &= s'_{1\ell}\mathbf{b}'_1 + \ldots + s'_{m\ell}\mathbf{b}'_m, \forall \ell \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Fie $A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} := (\widetilde{a}_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, matricea asociată operatorului T în raport cu bazele $\widetilde{B}, \widetilde{B}'$. Atunci pentru orice $1 \leq k \leq n$ avem

$$\begin{aligned} T(\widetilde{\mathbf{b}}_k) &= \widetilde{a}_{1k}\widetilde{\mathbf{b}}'_1 + \ldots + \widetilde{a}_{mk}\widetilde{\mathbf{b}}'_m = \widetilde{a}_{1k}(s'_{11}\mathbf{b}'_1 + \ldots + s'_{m1}\mathbf{b}'_m) + \ldots + \widetilde{a}_{mk}(s'_{1m}\mathbf{b}'_1 + \ldots + s'_{mm}\mathbf{b}'_m) \\ &= (\widetilde{a}_{1k}s'_{11} + \ldots + \widetilde{a}_{mk}s'_{1m})\mathbf{b}'_1 + \ldots + (\widetilde{a}_{1k}s'_{m1} + \ldots + \widetilde{a}_{mk}s'_{mm})\mathbf{b}'_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Pe de altă parte, din (3) avem

$$T(\widetilde{\mathbf{b}}_k) = (s_{1k}a_{11} + \ldots + s_{nk}a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \ldots + (s_{1k}a_{m1} + \ldots + s_{nk}a_{mn})\mathbf{b}'_m.$$

Identificând coordonatele vectorilor $T(\widetilde{\mathbf{b}}_k)$ în raport cu baza B' obţinem

$$\widetilde{a}_{1k}s'_{j1} + \ldots + \widetilde{a}_{mk}s'_{jm} = s_{1k}a_{j1} + \ldots + s_{nk}a_{jn}, \forall 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

adică

$$S'_{B',\widetilde{B}'} \cdot A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} = A_{B,B'} \cdot S_{B,\widetilde{B}},$$

sau, echivalent

$$A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} = (S'_{B',\widetilde{B}'})^{-1} \cdot A_{B,B'} \cdot S_{B,\widetilde{B}}.$$

Matricea asociată compunerii a două aplicaţii:

Presupunem acum că $(W', +, \cdot)$ este un alt spaţiu finit dimensional având $dim(W') = m'$, şi fie $T' : W \to W'$ un operator liniar. Dacă $\widetilde{B}' = \{\widetilde{\mathbf{b}}'_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}'_m\}$ este o bază a lui W' şi $A_{B',\widetilde{B}'} \in \mathcal{M}_{m,m'}(\mathbb{R})$

este matricea asociată operatorului T' în raport cu B' şi $\widetilde{B}'$, se poate arăta că operatorul $T' \circ T : V \to W'$ are pe $A_{B',\widetilde{B}'} \cdot A_{B,B'}$ ca matrice asociată în raport cu B şi $\widetilde{B}'$.

Aşadar, vom putea spune că operatorul liniar T este bijectiv dacă şi numai dacă matricea sa asociată (în raport cu orice bază a lui V) este inversabilă.

Reciproc, dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, atunci se poate defini o funcţie $T : V \to W$ după formula (3):

$$T(\mathbf{v}) = (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{m1} + \ldots + \alpha_n a_{mn})\mathbf{b}'_m,$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui $\mathbf{v}$ în raport cu baza B. Se poate demonstra, cu uşurinţă, că T este o aplicaţie liniară numită ***operatorul liniar asociat*** lui A în raport cu bazele B şi B'. În acest caz, matricea asociată lui T în raport cu bazele B, B' este chiar A.

Caz particular: Dacă presupunem că $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar că B şi B' sunt bazele canonice în $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$, atunci formula (3) devine

$$T(\mathbf{v}) = A_{B,B'} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

unde am identificat vectorii din $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$, cu matricele coloană $\mathcal{M}_{n,1}$, respectiv $\mathcal{M}_{m,1}$.

Aşadar, un operator liniar între $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$ se poate identifica cu o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ prin formula

$$T(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

cu convenţia ca vectorii din spaţiile euclidiene să fie consideraţi ca matrice coloană.

Operatori adjuncţi

Definiţia 7.10 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ şi $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ spaţii prehilbertiene şi $T : V \to W$ un operator liniar.*

i) Un operator $T^* : W \to V$ care satisface

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle_W, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W,$$

*se numeşte **operatorul adjunct** al lui T.*

*ii) Dacă $V = W$, operatorul T se numeşte **autoadjunct** sau **simetric** dacă $T = T^*$, adică*

$$\langle T(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle_V, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

*ii) Dacă $V = W$, operatorul T se numeşte **antisimetric** dacă $T = -T^*$, adică*

$$\langle T(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = -\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle_V, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Observaţii:

1. Adjunctul unui operator este unic. Într-adevăr, dacă presupunem că T^* şi $\overline{T}^*$ sunt doi adjuncţi ai lui T, atunci
$$\langle T^*(\mathbf{w}) - \overline{T}^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = 0, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W,$$
adică $T^*(\mathbf{w}) - \overline{T}^*(\mathbf{w}) \in V^\perp$, pentru $\mathbf{w} \in W$. Însă, cum $V^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$, rezultă că $T^* = \overline{T}^*$.

2. Dacă $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ sunt spaţii prehilbertiene, finit-dimensionale, atunci adjunctul operatorului liniar $T : V \to W$ există întotdeauna. Într-adevăr, conform procedeului de ortonormalizare Gram-Schmidt, există baze ortonormale $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ şi $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$ în V, respectiv, în W. Fie $A_{B,B'}$ matricea asociată operatorului T în raport cu bazele B şi B'. Dacă $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ şi $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele a doi vectori $\mathbf{v} \in V$ şi $\mathbf{w} \in W$ în raport cu baza B, respectiv B', atunci obţinem din formula (3)

$$\begin{aligned}\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle_W &= \langle(\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha n a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{m1} + \ldots + \alpha n a_{mn})\mathbf{b}'_m, \beta_1\mathbf{b}'_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}'_n\rangle_W \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha n a_{1n})\beta_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{m1} + \ldots + \alpha n a_{mn})\beta_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j a_{ji}.\end{aligned}$$

Definind acum $T^* : W \to V$ ca operatorul asociat matricei $A^T_{B,B'} \in \mathcal{M}_{mn}$, observăm (schimbând rolurile lui V cu W) că

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_j a_{ji}.$$

Deci $\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle_W$, adică T^* este adjunctul lui T.

3. T este simetric dacă şi numai dacă matricea $A_{B,B}$ este simetrică, adică $A^T_{B,B} = A_{B,B}$. T este antisimetric dacă $A^T_{B,B} = -A_{B,B}$.

Definiţia 7.11 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ două spaţii prehilbertiene.*

*i) Spunem că o aplicaţie $f : V \to W$ este o **izometrie** dacă*

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_W = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

unde $\|\cdot\|_V$ reprezintă norma indusă de produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

*ii) Dacă aplicaţia $T : V \to V$ este un endomorfism liniar, atunci spunem că T este **ortogonal** dacă*

$$\|T(\mathbf{u})\|_V = \|\mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in V.$$

Observaţii:

1. Un endomorfism liniar $T \in \mathcal{L}(V)$ este o izometrie dacă şi numai dacă T este ortogonal.

2. Presupunem că V este finit dimensional, şi că $T \in \mathcal{L}(V)$ este un endomorfism ortogonal. Atunci T este bijectiv. Într-adevăr, dacă notăm $\widetilde{T} := T^* \circ T$, atunci avem

$$\langle\widetilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle(T^* \circ T)(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Prin urmare, $\langle\widetilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle = \|T(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2, \forall \mathbf{u} \in V$. Mai mult, avem $\langle\widetilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle\widetilde{T}(\mathbf{v}), \mathbf{u}\rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, adică $\widetilde{T}$ este autoadjunct. În consecinţă, putem scrie

$$4\langle\widetilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle\widetilde{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle - \langle\widetilde{T}(\mathbf{u}-\mathbf{v}), \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Deci $\widetilde{T}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, adică $\widetilde{T} = 1_V$. Prin urmare, T^* este inversa operatorului liniar T, deci T trebuie să fie bijectivă.

În plus, dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază ortonormală a lui V, se poate arăta că matricea $A = A_{B,B}$, asociată lui V în raport cu baza B, este ortonormală, adică

$$A^T A = AA^T = I_n.$$

Prin urmare, avem că A este inversabilă, cu $A^{-1} = A^T$ şi $\det A \in \{-1, 1\}$.

Vectori şi valori proprii

Definiţia 7.12 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi fie $T \in \mathcal{L}(V)$.*

*a) Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$, se numeşte **vector propriu** al lui T dacă*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}. \tag{5}$$

*Scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ se numeşte **valoare proprie** a lui T, corespunzătoare vectorului propriu $\mathbf{v}$.*

b) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T, atunci subspaţiul liniar

$$Ker\,(T - \lambda \cdot \mathbf{1}_V) = \{\mathbf{u} \in V \mid T(x) = \lambda \cdot \mathbf{u}\}$$

*se numeşte **subspaţiu propriu** (subspaţiul caracteristic) asociat lui λ.*

Observaţii:

1. Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ este vector propriu pentru T, corespunzător valorii proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $\mathbf{v} \in Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

2. *Spaţiul caracteristic* asociat unei valori proprii $\lambda \in \mathbb{R}$ este subspaţiul tuturor vectorilor proprii asociaţi lui λ, la care se adaugă $\mathbf{0}$, deci este un spaţiu strict mai mare ca $\{\mathbf{0}\}$. Aşadar, există mai mult de un vector propriu ce corespunde unei valori proprii, dar numai o valoare proprie ce corespunde unui vector propriu.

3. Spaţiul caracteristic $V_\lambda = Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)$, asociat unei valori proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, este invariant în raport cu T, adică $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$, atunci

$$T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot T(\mathbf{v}),$$

   deci $T(\mathbf{v}) \in V_\lambda$.

4. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sunt două valori proprii distincte, atunci $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$.

Propoziţia 7.13 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional şi fie $T \in \mathcal{L}(V)$. Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valori proprii distincte ale lui T, iar $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sunt vectorii proprii corespunzători, atunci $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie: Utilizăm induţia matematică: Pentru $n = 1$, este usor de observat, deoarece $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Presupunem că rezultatul are loc pentru $n \geq 1$ şi demonstrăm că are loc pentru n+1. Fie valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, şi vectorii proprii $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$. Presupunem că avem

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

pentru $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) + \alpha_{n+1} T(\mathbf{v}_{n+1}) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Înmulţind cu $-\lambda_{n+1}$ şi adăugând-o la egalitatea de mai sus, obţinem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Cum vectori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sunt liniar independenti (din ipoteza de inducţie), iar $\lambda_{n+1} \neq \lambda_k, 1 \leq k \leq n$, obţinem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Din (6) deducem şi că $\lambda_{n+1} = 0$. În concluzie, vectorii $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ sunt liniar independenţi. ◀

Presupunem că $(V, +, \cdot)$ este finit dimensional şi că $T \in \mathcal{L}(V)$. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, iar matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea asociată operatorului T în raport cu B. Atunci, orice valoare proprie $\lambda \in \mathbb{R}$ satisface ecuaţia

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

deoarece $A - \lambda I_n$ este matricea asociată operatorului $T - \lambda 1_V$, ce nu este bijectiv. Funcţia polinomială $\lambda \to P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte ***polinomul caracteristic*** al lui A.

Fie B' o altă bază a lui V, şi fie S matricea de trecere de la baza B la baza B' şi fie $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea asociată lui T în raport cu baza B'. Atunci, din formula schimbării de bază, avem

$$A' - \lambda I_n = S^{-1} \cdot (A - \lambda I_n) \cdot S, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, polinomul caracteristic este invariant la schimbări de bază, aşa că îl vom numi *polinomul caracteristic* al lui T.

Toate valorile proprii ale lui T sunt rădăcini reale ale polinomului caracteristic al lui T.

- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T, atunci numărul $def(T - \lambda I_n) = dim(Ker(T - \lambda \cdot 1_V))$ se numeşte ***multiplicitatea geometrică*** a lui λ.

- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului $P_A \in \mathbb{R}[X]$, vom numi ***multiplicitatea algebrică*** a lui λ, cel mai mare număr $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(X - \lambda)^m$ este un divizor al lui $P_A(X)$.

Observaţie Se poate arăta că multiplicitatea geometrică a unei valori proprii λ este mai mică decât multiplicitatea algebrică a lui λ în raport cu polinomul caracteristic al lui T. De aceea, dacă λ are multiplicitatea algebrică egală cu 1, atunci multiplicitatea geometrică λ trebuie să fie 1 (adică $dim(Ker(T - \lambda I_n)) = 1$).

Definiţia 7.14 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional, cu $dim(V) = n$, şi fie $T \in \mathcal{L}(V)$. Spunem că endomorfismul T este* ***diagonalizabil*** *dacă există B o bază a lui V în raport cu care matricea asociată lui T, este o matrice diagonală, adică există $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$A_{B,B} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.15 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit dimensional şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Atunci T este diagonalizabil dacă şi numai dacă mulţimea tuturor vectorilor proprii generează pe V.*

Demonstraţie: Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V şi matricea asociată lui T în raport cu B este $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, atunci $T(\mathbf{b}_k) = \lambda_k \mathbf{b}_k, 1 \leq k \leq n$. Deci vectorii $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sunt proprii, iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii corespunzătoare. Cum $Lin(B) = V$, cu atât mai mult mulţimea tuturor vectorilor proprii va genera pe V.

Reciproc, dacă mulţimea tuturor vectorilor proprii generează pe V, pot alege vectorii proprii $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ astfel încât $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ să fie o bază pentru V. Atunci, matricea asociată lui T în raport cu baza $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ este diagonală, şi are drept componente valorile proprii corespunzătoare vectorilor proprii $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. ◀ **Observaţii:**

1. Dacă un endomorfism T pe un spaţiu prehilbertian finit-dimensional este autoadjunct, atunci acesta este diagonalizabil.
2. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spaţiul liniar finit dimensional V dacă şi numai dacă ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile din $\mathbb{R}$, iar subspaţiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

În cazul $V = \mathbb{R}^n$, există o metodă practică pentru ***diagonalizarea endomorfismului*** $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

– Se consideră baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$. În raport cu această bază se găseşte matricea A asociată operatorului T, precum şi polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

– Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuaţiei algebrice caracteristice $P_A(\lambda) = 0$. Dacă toate cele n rădăcini ale lui P_A sunt reale, putem continua. Dacă nu, spunem că T nu este diagonalizabilă şi ne putem opri aici.

– Pentru fiecare valoare proprie calculăm $r_\lambda = rang(A - \lambda I_n)$ ($n - r_\lambda$ va fi multiplicitatea geometrică a lui λ). Dacă $r_\lambda = n - m_\lambda$, pentru orice valoare proprie λ, unde m_λ este multiplicitatea algebrică a lui λ în P, putem conchide că T este diagonalizabil. În caz contrar, concluzionăm că endomorfismul nu este diagonalizabil.

– Pentru fiecare valoare proprie λ, rezolvăm ecuaţia $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, unde vectorii $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sunt consideraţi matrice coloană. Cum $rang(A - \lambda I_n) = r_\lambda$, putem găsi vectorii liniari independenţi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ ce rezolvă ecuaţia. Mai mult, conform procedurii de ortonormalizare Gram-Schmidt, putem alege ca $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ să fie ortonormali.

– Baza B a lui V pentru care matricea lui T este diagonală este atunci mulţimea $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$, pentru toate valorile proprii λ. Matricea de trecere S de la $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la B este atunci matricea ce diagonalizează pe A, adică

$$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Bibliografie recomandată

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

2. D. Drăghici - *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

3. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

4. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. "Fair Partners", Buc., 2010.

5. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications,* The Saylor Foundation, 2013.

6. Sheldon Axler - *Linear Algebra Done Right,* Springer International Publishing AG, 2015.