Cursul 2

Şiruri de numere reale. Polinoame

Şiruri de numere reale

Definiţia 2.1 *Se numeşte* ***şir de numere reale*** *o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu x_n, valoarea funcţiei f în punctul $n \in \mathbb{N}$, adică $x_n = f(n)$.
Numerele $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se numesc ***termeni ai şirului***, iar x_n se numeşte ***termenul general al şirului*** f, sau ***termenul de rang*** n al şirului. Un şir cu termenul general x_n, se va nota $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 0}$.

Dacă primii k termeni ai şirului, $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, nu sunt definiţi, adică funcţia este definită pe mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$, atunci vom nota şirul prin $(x_n)_{n\geq k}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **şir constant** dacă mulţimea valorilor sale este formată dintr-un singur element, adică $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.2 *Spunem că un şir de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este:*

i) ***mărginit inferior*** *dacă există* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$*;*

ii) ***mărginit superior*** *dacă există* $\beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$*;*

iii) ***mărginit*** *dacă există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha \leq x_n \leq \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) ***nemărginit*** *dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu este mărginit (adică fie nu este mărginit superior, fie nu este mărginit inferior, sau fie nu este mărginit nici superior, nici inferior).*

Observaţie: Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

1. Şirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ este mărginit deoarece $|x_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Şirul $x_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, deoarece este mărginit inferior ($x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$), dar nu este mărginit superior.
3. Şirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nu este mărginit inferior, dar admite margine superioară ($x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
4. Şirul $x_n = (-1)^n 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nefiind mărginit superior şi nici inferior.

Definiţia 2.3 *Spunem că un şir de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este:*

i) ***crescător (strict crescător)*** *dacă* $x_{n+1} \geq x_n$ *(respectiv* $x_{n+1} > x_n$*), pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

ii) ***descrescător (strict descrescător)*** *dacă* $x_{n+1} \leq x_n$ *(respectiv* $x_{n+1} < x_n$*), pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

iii) ***(strict) monoton*** *dacă este sau (strict) crescător, sau (strict) descrescător.*

Exemple:

1. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este strict crescător.
2. Şirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este şir strict descrescător.
3. Şirul $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ nu este monoton.
4. Şirul $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, unde c este o constantă reală, este simultan crescător şi descrescător.

Definiţia 2.4 *Spunem că un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***convergent*** *dacă există un element* $l \in \mathbb{R}$, *numit* ***limita*** *şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *astfel încât:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

În acest caz spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* l, *şi scriem* $x_n \to l$, *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Definiţia 2.5 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Spunem că:*

i) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $+\infty$ *dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$;

ii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $-\infty$, *dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Definiţia 2.6 *Spunem că şirul de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***divergent*** *dacă nu este convergent, adică dacă fie nu are limită, fie are limita* $+\infty$ *sau* $-\infty$.

Teorema 2.7 *Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.*

Demonstraţie: Presupunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la două elemente $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Fie $\varepsilon := \dfrac{|x-y|}{2} > 0$. Atunci, conform definiţiei 2.4, există $n_\varepsilon, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - y| < \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon$. Aşadar, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n''_\varepsilon$ să avem

$$|x-y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < 2\varepsilon = |x-y|,$$

ceea ce este absurd, întrucât $|x-y| > 0$. Prin urmare, nu putem avea $x \neq y$. □

Propoziţia 2.8 *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie: Fie $x_n \to x$. Atunci, pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < 1$, pentru orice $n \geq n_1$. Aşadar, putem scrie

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \forall n \geq n_1.$$

Dacă fixăm $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_1-1}|, 1 + |x|\}$, atunci avem $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. □

Exerciţiul 1: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este convergent la 0.

Soluţie: Vom folosi Definiţia 2.4. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Observăm că are loc relaţia

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

cu condiţia ca $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Atunci, aleg $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$, şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exerciţiul 2: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{2n+4}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ este convergent având limita 2.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci are loc:

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n+4}{n+3} - 2\right| = \frac{2}{n+3} < \varepsilon$$

cu condiţia ca $\dfrac{2}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 3 > \dfrac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{2}{\varepsilon} - 3$.

Atunci, $n_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 3\right] + 1 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] - 2$, iar pentru $n \geq n_\varepsilon, |x_n - 2| < \varepsilon$, de unde, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Exerciţiul 3: Să se arate că şirul $x_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}$ are limita $+\infty$.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Observăm că $x_n = 3n - 2 > \varepsilon$ dacă $n > \dfrac{\varepsilon + 2}{3}$.

Aşadar, luând $n_\varepsilon = \left[\dfrac{\varepsilon+2}{3}\right] + 1$, obţinem că $x_n > \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Definiţia 2.9 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte* ***subşir*** *al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 2.10 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir convergent la $x\in\mathbb{R}$. Dacă $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge la x.*

Demonstraţie: Fie x_n un şir convergent la $x\in\mathbb{R}$. Atunci $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $|x_n-x|<\varepsilon,\forall n\geq n_\varepsilon$. Pe de altă parte, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător, deci există $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$n_k\geq n_\varepsilon,\forall k\geq k_\varepsilon.$$

Aşadar, $|x_{n_k}-x|<\varepsilon,\forall k\geq k_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. □

Corolarul 2.11 *i. Dacă un şir are un subşir divergent, atunci acel şir este divergent.*

ii. Dacă un şir conţine două subşiruri convergente cu limite diferite, atunci şirul este divergent.

Exemple:

1. Şirul $x_n=(-1)^n, n\in\mathbb{N}^*$, este divergent. Acesta conţine subşirul $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ cu limita 1 şi subşirul $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}*}$ cu limita -1.
2. Şirul $x_n=(-1)^n n$, $n\in\mathbb{N}$ este divergent, deoarece conţine subşirul x_{2k} cu limita $+\infty$.
3. Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *periodic* dacă există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+p}=x_n,\forall n\in\mathbb{N}$. Numărul p se numeşte *perioadă* a şirului. Orice şir periodic de perioada $p\geq 2$ este divergent.

Propoziţia 2.12 (Proprietăţi ale şirurilor convergente) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale, convergente la $x\in\mathbb{R}$, respectiv la $y\in\mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(P1) $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|x|$;

(P2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=x\pm y$;

(P3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=x\cdot y$;

(P4) dacă $y\neq 0$, atunci există un rang $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $y_n\neq 0,\forall n\geq n_0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{x}{y}$;

(P5) dacă $x_n\leq y_n,\forall n\in\mathbb{N}$, atunci $x\leq y$;

(P6) (criteriul cleştelui) dacă există şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_n\leq z_n\leq y_n,\forall n\in\mathbb{N}$, iar $x=y$, atunci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x$;

Exerciţiul 4: Să se calculeze limita şirului $x_n=\dfrac{\sin n}{n},n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie: Cum $-1\leq\sin n\leq 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$, avem $-\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\sin n}{n}\leq\dfrac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, din criteriul cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

Propoziţia 2.13 (Criteriul majorării) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi fie $x\in\mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero astfel încât*

$$|x_n-x|\leq\alpha_n,\forall n\in\mathbb{N}$$

atunci (x_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$, fixat. Cum $\alpha_n \to 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|\alpha_n| < \varepsilon$. Prin urmare, $|x_n - x| \leq \alpha_n \leq |\alpha_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Exerciţiul 5: Să se arate că şirul $x_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}, n \in \mathbb{N}^*$, converge la 1.

Soluţie: Evaluăm $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2+2n}{n^2+n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Cum $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, atunci, aplicând criteriul majorării, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Teorema 2.14 (Teorema convergenţei monotone (Weierstrass))
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

i) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi mărginit superior, atunci acesta converge la $\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

ii) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi mărginit inferior, atunci acesta converge la $\inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Putem rezuma teorema de mai sus în felul următor: *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie: i) Cum şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior, admite margine superioara; fie $\alpha = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Conform Teoremei 2.4, avem $x_n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \alpha - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Cum şirul (x_n) este crescător avem $x_n \geq x_{n_\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Combinând cele două inegalităţi obţinem, pentru $\varepsilon > 0$, că $\alpha - \varepsilon < x_n, \forall n \geq n_\varepsilon$. Aşadar, avem

$$|x_n - \alpha| = \alpha - x_n < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era ales arbitrar, obţinem că x_n converge la α. Punctul ii) se demonstrează similar, considerând şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi utilizând punctul i). $\square$

Exerciţiul 6: Să se demonstreze convergenţa următorului şir

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluţie: Studiem mărginirea şi monotonia şirului. Observăm că

$$0 < x_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Aşadar, şirul este mărginit. Studiem acum monotonia:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0,$$

adică şirul este strict crescător. Conform Teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Teorema 2.15 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

i) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

În ambele cazuri, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Lema 2.16 *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale, atunci există un subşir al său care este monoton.*

Teorema 2.17 (Bolzano-Weierstrass) *Din orice şir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent.*

Teorema 2.18 (Stolz-Cesàro) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este strict monoton şi nemărginit. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=x\in\overline{\mathbb{R}}$, *atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ *şi este egală cu* x.

Exerciţiul 7: Să se calculeze limita şirului $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$.

Soluţie: Fie $x_n=\ln n$ şi $y_n=n, n\in\mathbb{N}^*$. Observăm că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător, cu limita $+\infty$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0.$$

Aşadar, conform Teoremei Stolz-Cesàro, există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$.

Definiţia 2.19 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Spunem că* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:|x_n-x_m|<\varepsilon,\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geq n_\varepsilon.$$

Definiţia 2.19 se poate scrie şi sub următoarea formă echivalentă:

Definiţia 2.20 *Spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă pentru orice*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,\forall n,p\in\mathbb{N},n\geq n_\varepsilon.$$

Intuitiv, într-un şir Cauchy de la un rang încolo toţi termenii sunt apropiaţi unul de celălalt.

Propoziţia 2.21 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este Cauchy atunci el este mărginit.*

În particular, cum este mărginit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un subşir convergent.

Teorema 2.22 (Cauchy) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Atunci* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie:

$\Longrightarrow$: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la $x\in\mathbb{R}$. Aşadar, vom avea

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2},\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare, dacă $n,m\in\mathbb{N},n,m\geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n-x_m|\leq|x_n-x|+|x-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

aşadar, şirul este fundamental.

$\Longleftarrow$: Presupunem că (x_n) este un şir fundamental. Conform Propoziţiei 2.21, rezultă că (x_n) este şir mărginit (demonstraţia acestui rezultat este similară cu cea a Propoziţiei 2.8: dacă $\varepsilon=1$, atunci $|x_n|\leq|x_{n_1}|+|x_n-x_{n_1}|<1+|x_{n_1}|,\forall n\geq n_1$). Conform Teoremei Bolzano-Weierstrass, şirul mărginit (x_n) conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Fie $x\in\mathbb{R}$ limita acestui subşir. Arătăm că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x. Fie $\varepsilon>0$. Cum $x_{n_k}\to x$, rezultă că există $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2},\forall k\in\mathbb{N},k\geq k_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, cum (x_n) este şir Cauchy, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2},\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geq n_\varepsilon.$$

Fie $n'_\varepsilon\in\mathbb{N}$, cu $n'_\varepsilon=\max\{n_\varepsilon,n_{k_\varepsilon}\}$ şi k'_ε astfel încât $n_{k'_\varepsilon}\geq n'_\varepsilon$. Dacă $n\geq n_{k'_\varepsilon}$, rezultă

$$|x_n-x|\leq|x_n-x_{n_{k'_\varepsilon}}|+|x_{n_{k'_\varepsilon}}-x|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

deoarece $n \geq n_{k'_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ şi $k'_\varepsilon \geq k_\varepsilon$. Prin urmare, şirul (x_n) este convergent cu limita x. $\square$

Exerciţiul 8: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + ... + \dfrac{\sin nx}{2^n}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ este un şir Cauchy, deci convergent.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$ şi $n, p \in \mathbb{N}$. Atunci, avem:

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| =& \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right] < \frac{1}{2^n}, \forall p \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Am obţinut o majorare independentă de $p \in \mathbb{N}$, şi, în plus, $\dfrac{1}{2^n} \to 0$. Deci, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Exerciţiul 9: Arătaţi că şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$ nu este Cauchy.

Soluţie: Vom arăta că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Luând $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, şi $p = n$, obţinem $|x_{n+p} - x_n| \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \varepsilon$. Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este Cauchy.

Puncte limită ale unui şir

Definiţia 2.23 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

*a) Spunem că $x \in \overline{\mathbb{R}}$ este **punct limită** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \to x$.*

b) Vom nota mulţimea tuturor punctelor limită cu $L(x_n)$.

Conform Lemei 2.16, avem $L(x_n) \neq \varnothing$, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale.

Definiţia 2.24 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

*a) Se numeşte **limită inferioară** a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea inferioară a mulţimii $L(x_n)$.*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L(x_n)$$

*b) Se numeşte **limită superioară** a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea superioară a mulţimii $L(x_n)$;*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L(x_n).$$

Teorema 2.25 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

1) Avem:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent la un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ şi are loc:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x;$$

3) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se poate arăta că există un subşir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ şi, respectiv, un subşir monoton crescător care să conveargă la $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Propoziţia 2.26 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale pozitive. Atunci are loc*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

În particular, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$, având loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Polinoame

Fie $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ, unde K este una dintre mulţimile $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, cu $p\in\mathbb{N}^*$ număr prim. Vom considera mulţimea funcţiilor definite pe $\mathbb{N}$ şi cu valori în K, $\mathcal{F}(\mathbb{N},K)=\{f:\mathbb{N}\to K\}$. Cum avem $f(n)=a_n,\forall n\in\mathbb{N}$, vom putea construi un şir de elemente din K, pe care îl vom nota cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

În cele ce urmează, ne interesează o submulţime $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}(\mathbb{N},K)$ formată din şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care termenii sunt nuli cu excepţia unui număr finit dintre ei. Aşadar, elementele lui $\mathcal{P}$ sunt de forma $(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$, cu $a_n\neq 0$ şi îl vom numi ***polinom*** cu coeficienţi în K. Vom nota cu

$$X=(0,1,0,\ldots),\ X^2=(0,0,1,\ldots),\ X^3=(0,0,0,1,\ldots),\ldots,X^n=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots),$$

vom numi X nedeterminata pe K. Cu aceste observaţii vom putea scrie polinomul $f=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,\ldots)$, cu $a_n\neq 0$ astfel

$$f=(a_0,0,\ldots)+(0,a_1,0,\ldots)+\ldots+(0,0,\ldots,a_n,0,\ldots)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n.$$

Scrierea polinomului f în forma

$$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0,\ \text{unde } a_0,a_1,...,a_n\in K,\ \text{iar } a_n\neq 0,$$

reprezintă ***forma algebrică*** a polinomului f, ordonat după puterile descrescătoare ale lui X. Mulţimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienţi în K se notează cu $K[X]$. Elementele $a_0,a_1,...,a_n$ se numesc ***coeficienţii polinomului***, a_n se numeşte ***coeficientul dominant***, iar a_0 ***termenul liber***. Polinoamele de forma $f=a_0,a_0\in K$ se numesc *polinoame constante*, iar $f=0$ se numeşte *polinom nul*.

Vom numi ***gradul*** polinomului $f\neq 0$, şi vom nota $grad(f)$, cel mai mare număr natural n cu proprietatea că $a_n\neq 0$.

Fie $f,g\in K[X]$ două polinoame de grad m, respectiv n,

$$f=a_mX^m+\ldots+a_1X+a_0,\quad g=b_nX^n+\ldots+b_1X+b_0,$$

unde $a_i,b_j\in K$, $a_m,b_n\neq 0$. În plus, convenim ca $a_i=0$ pentru $i>m$ şi $b_j=0$ pentru $j>n$.

- **Egalitatea a două polinoame**: Spunem că polinomul f este **egal** cu polinomul g, şi scriem $f=g$, dacă şi numai dacă $m=n$, şi $a_i=b_i,\forall i\ge 0$. În particular, $f=0\Leftrightarrow a_i=0,\forall i\ge 0$.
- **Adunarea** polinoamelor f şi g este un polinom de grad $\max\{m,n\}$, notat $f+g\in K[X]$ şi definit prin

$$f+g=(a_p+b_p)X^p+\ldots+(a_1+b_1)X+(a_0+b_0),\ \text{unde } p=\max\{m,n\}$$

- **Produsul** polinoamelor f,g, notat $f\cdot g$ este un polinom de grad $m+n$, scris sub forma

$$f\cdot g=(a_0b_{m+n}+a_1b_{m+n-1}+\ldots+a_{m+n}b_0)X^{m+n}+\ldots+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+(a_0b_1+a_1b_0)X+a_0b_0,$$

Funcţia polinomială. Rădăcini ale unui polinom

Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, şi fie $x \in K$.

1. Se numeşte valoarea polinomului f în x elementul
$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

2. Elementul $x \in K$ este o **rădăcină** a polinomului f dacă $f(x) = 0$.

Teorema 2.27 *Fie $f, g \in K[X]$ şi fie $x \in K$. Atunci*

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

Definiţia 2.28 *Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul. Se numeşte* ***funcţie polinomială*** *ataşată polinomului f, funcţia $\widetilde{f} : K \to K$, definită prin $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in K$.*

Aşadar, vom numi *funcţie polinomială de grad n* funcţia
$$f : K \to K,\ f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$
unde $n \in \mathbb{N}$ iar coeficienţii satisfac $a_i \in K, a_n \neq 0$.

Împărţirea a două polinoame

A împărţi polinomul f la polinomul nenul g, înseamnă a determina polinoamele $q, r \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot q + r$ şi $grad(r) < grad(g)$.

Teorema 2.29 (Teorema împărţirii cu rest) *Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame, astfel încât $g \neq 0$. Atunci* ***există şi sunt unice*** *$q, r \in K[X]$ cu proprietăţile*

a) $f = g \cdot q + r$;

b) $grad(r) < grad(g)$.

Polinomul f se numeşte *deîmpărţit*, g se numeşte *împărţitor*, iar q şi r se numesc *câtul* respectiv *restul* împărţirii.

Având în vedere relaţia $f = g \cdot q + r$, avem următoarea egalitate $grad(q) = grad(f) - grad(g)$.

Fie $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, două polinoame de grad m, respectiv n, unde $f = a_mX^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $g = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$, cu $m \geq n$.

În cele ce urmează, vom descrie **algoritmul împărţirii** polinomului f la g:

- Se ordonează cele două polinoame după puterile descrescătoare ale lui X;
- Se dispun polinoamele ca mai jos

$$\begin{array}{r|l} (f):\quad a_mX^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1X + a_0 & b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0 \ : (g) \\ \cline{2-2} \\ \hline & \end{array}$$

- Se împarte primul termen al lui f la primul termen al lui g, şi avem $a_mb_n^{-1}X^{m-n}$. Acest termen îl vom pune în schema, sub împărţitor. Se înmulţeşte rezultatul astfel obţinut cu împărţitorul g şi se scade acest produs din f şi se obţine polinomul f_1. Procedăm îm mod similar până când gradul restului $grad(f_s)$ este strict mai mic decât gradul lui g.

$$
\begin{array}{rl|l}
(f): & a_mX^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1X + a_0 & b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0 \ : (g) \\
 & -a_mX^m - a_mb^{n-1}b_n^{-1}X^{m-1} - \cdots & \overline{a_mb_n^{-1}X^{m-n} + \ldots} \\
\hline
(f_1): & (a_{m-1} - a_mb_{n-1}b_n^{-1})X^{m-1} + \ldots & \\
\hline
(f_2): & & \\
\hline
 & \text{Restul } (f_s) &
\end{array}
$$

Exemplu: Să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X], g = X - 1$.

$$
\begin{array}{rr|l}
(f): & X^4 + X^2 + 1 & X - 1 \ : (g) \\
 & -X^4 + X^3 & \overline{X^3 + X^2 + 2X + 2} \\
\hline
(f_1): & X^3 + X^2 + 1 & \\
 & -X^3 + X^2 & \\
\hline
(f_2): & 2X^2 + 1 & \\
 & -2X^2 + 2X & \\
\hline
(f_3): & 2X + 1 & \\
 & -2X + 2 & \\
\hline
 & \underline{\text{Restul}}\ 3 &
\end{array}
$$

Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinom nenul de gradul n, şi fie $g = X - a \in K[X]$.

Teorema 2.30 *Restul împărţirii polinomului $f \in K[X]$ la polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.*

Vom nota cu $q = b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$, câtul împărţirii polinomului f la g. Din teorema împărţirii cu rest vom obţine

$$f = (X - a)q + r = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0) + r.$$

Aşadar, dacă ordonăm după puterile lui X avem

$$f = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (b_1 - ab_2)X^2 + (b_0 - ab_1)X + r - ab_0.$$

Identificând coeficienţii lui f obţinem

$$
\begin{aligned}
& a_n = b_{n-1} \\
& a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\
& \ldots \\
& a_2 = b_1 - ab_2 \\
& a_1 = b_0 - ab_1 \\
& a_0 = r - ab_0.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, vom determina coeficienţii câtului: $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ şi a restului r, după *schema lui Horner*

Coeficienţii lui f	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-1}a + a_{n-1}$	$b_{n-2}a + a_{n-2}$	$\cdots$	$b_1a + a_1$	$b_0a + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

Coeficienţii lui q Restul

Exemplu: Reluam acelaşi exemplu ca mai sus: Să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X], g = X - 1$.

Vom utiliza schema lui Horner:

Coeficienţii lui f	$a_4 = 1$	$a_3 = 0$	$a_2 = 1$	$a_1 = 0$	$a_0 = 1$
$a = 1$	1	$b_2 = 1 \cdot 1 + 0 = 1$	$1 \cdot 1 + 1 = 2$	$1 \cdot 2 + 0 = 2$	$1 \cdot 2 + 1 = 3$
	b_3	b_2	b_1	b_0	Restul

Aşadar, $f = X^4 + X^2 + 1 = (X - 1)(1 \cdot X^3 + 1 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 2) + 3.$

Definiţia 2.31 *Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame. Spunem că g **divide** polinomul f, şi vom nota $g|f$, dacă există $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$.*

Polinomul g se numeşte **divizor** al polinomului f, iar polinomul f se numeşte **multiplu** al polinomului g.

Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate

Fie $f, g, h \in K[X]$ polinoame cu coeficienţi în corpul K. Atunci are loc

- Reflexivitate: $f|f, \forall f \in K[X]$;
- Tranzitivitate: dacă $f|g$ şi $g|h$, atunci $f|h$;
- Polinomul nul $f = 0$ este divizibil cu orice alt polinom;
- Polinomul constant $f = a, a \neq 0$ este divizor pentru oricare polinom din $K[X]$;

Definiţia 2.32 *Un polinom $d \in K[X]$ se numeşte **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f şi g dacă*

1. *d este divizor comun al lui f şi g, adică $d|f$ şi $d|g$;*
2. *dacă d_1 este un alt divizor comun al lui f şi g, atunci $d_1|d$.*

Dacă d este cel mai mare divizor comun pentru f şi g, el se notează *c.m.m.d.c.*(f, g), sau, mai simplu, (f, g).

Teorema 2.33 *Fie $f, g \in K[X]$. Atunci există un cel mai mare divizor comun al lui f şi g.*

Definiţia 2.34 *Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame cu coeficienţi în K. Atunci $m \in K[X]$ se numeşte **cel mai mic multiplu comun** al lui f şi g dacă*

- *$f|m$ şi $g|m$ (m este multiplu comun pentru f şi g);*
- *oricare ar fi $m_1 \in K[X]$, multiplu comun pentru f şi g, rezultă $m|m_1$.*

Vom nota cel mai mic multiplu comun al lui f şi g cu *c.m.m.m.c*(f, g) sau $[f, g]$.

Teorema 2.35 (Bezout) *Fie $f, g \in K[X]$ cu $g \neq 0$ şi fie $\alpha \in K$. Atunci:*

a) α este rădăcină a lui f dacă şi numai dacă f se divide cu $X - \alpha \in K[X]$;

b) Dacă f se divide cu g şi α este rădăcină a lui g, atunci α este rădăcină a lui f.

Definiţia 2.36 *Fie $f \in K[X]$, cu $f \neq 0$ şi fie $m \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\alpha \in K$ se numeşte **rădăcină multiplă de ordinul** m, dacă f se divide cu $(X - \alpha)^m$, dar nu se divide cu $(X - \alpha)^{m+1}$.*

Numărul $m \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α. Dacă $m = 1$, rădăcina α se numeşte **rădăcină simplă**, dacă $m = 2, 3, \ldots$, atunci α se numeşte rădăcină **dublă, triplă,**...

Definiţia 2.37 *Fie $f \in K[X]$ un polinom de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$.*

- *O ecuaţie de forma $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ se numeşte **ecuaţie algebrică de gradul** n cu coeficienţi în K şi necunoscuta x.*
- *$a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ se numesc **coeficienţii ecuaţiei**, n se numeşte **gradul ecuaţiei**.*
- *Elementul $\alpha \in K$ cu proprietatea că $f(\alpha) = 0$ se numeşte **soluţie** a ecuaţiei.*

Teorema 2.38 (Teorema fundamentală a algebrei) *O ecuaţie algebrică de grad cel putin 1 cu coeficienţi complecşi, admite cel putin o soluţie complexă.*

Observaţie: Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că o ecuaţie algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienţi complecşi are exact n soluţii complexe.

Definiţia 2.39 • *Polinomul nenul $f \in K[X]$ se numeşte* ***reductibil*** *peste corpul K dacă există $g, h \in K[X]$ de grad cel putin 1, astfel încât $f = g \cdot h$.*

- *Un polinom $f \in K[X]$ cu $grad(f) \geq 1$, care nu este reductibil peste K, se numeşte* ***ireductibil*** *peste K.*

Observaţie:

1. Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este polinom ireductibil peste K.
2. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom nenul, atunci el este ireductibil numai în următoarele cazuri: fie este de gradul 1, fie f este de gradul 2, dar nu are rădăcini reale. Aşadar, orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n \geq 3$ este polinom reductibil peste $\mathbb{R}$.

Teorema 2.40 *Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, un polinom de grad n cu coeficienţii din $\mathbb{C}$.*

a) Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcini ale lui f atunci $f = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$.

b) Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sunt rădăcini distincte ale lui f, de multiplicitate $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$f = a_n(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Observaţie: Dacă polinoamele $f, g \in K[X]$ sunt descompuse în produse de factori ireductibili, atunci

- (f, g) este produsul factorilor ireductibili comuni, luaţi la puterea cea mai mică;
- $[f, g]$ este produsul factorilor ireductibili comuni sau necomuni, luaţi la puterea cea mai mare.

Inegalităţi remarcabile

1. **Inegalitatea mediilor**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$[1]. Introducem următoarele notaţii:

$$m_a := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ - \textit{media aritmetică} a numerelor } x_1, \ldots, x_n;$$
$$m_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ - \textit{media geometrică} a numerelor } x_1, \ldots, x_n;$$
$$m_h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \text{ - \textit{media armonică} a numerelor } x_1, \ldots, x_n.$$

   Atunci, are loc ***inegalitatea mediilor***

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

   Fiecare dintre aceste relaţii devine egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2. **Inegalitatea lui Hölder**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$ şi fie $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Atunci, are loc:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

   Este uşor de arătat că are loc şi următoarea inegalitate numită ***inegalitatea lui Hölder cu ponderi***

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

[1] Reamintim că $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, iar $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = (0, \infty)$

$\lambda_1, ..., \lambda_n, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dacă $p = q = 2$, atunci din (1) obţinem ***inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz***

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

În relaţia (3) egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $u, v \in \mathbb{R}$, cu $u^2 + v^2 \neq 0$, astfel încât $ua_i + vb_i = 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

3. **Inegalitatea lui Minkowski**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi fie $p \in \mathbb{R}_+^*$.

   i) Dacă $p \geq 1$, atunci

   $$\Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

   ii) Dacă $0 < p < 1$, atunci

   $$\Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

   În ambele cazuri, dacă $p \neq 1$, egalitatea are loc dacă şi numai dacă n-uplele $(a_1, ..., a_n)$ şi $(b_1, ..., b_n)$ sunt proporţionale.

4. **Inegalitatea lui Carleman**

   Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea

   $$\sum_{i=1}^{n} (a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_i)^{\frac{1}{i}} \leq e \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{6}$$

   Egalitatea are loc doar când $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Bibliografie orientativă

[1] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1993.

[2] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a*, Editura Carminis.

[3] G. Păltineanu, *Analiză matematică*, Editura Universitaria, Craiova, 2002,

[4] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2015.

[5] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Did actică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[6] M. O. Drâmbe, *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Editura GIL, Zalău, 2003.