Cursul 1
Mulţimi. Relaţii. Funcţii

Mulţimi

Teoria mulţimilor reprezintă un domeniu al matematicii care studiază conceptul de mulţime. Studiul sistematic al mulţimilor a fost iniţiat de către Georg Cantor. În cadrul teoriei descrise de Cantor, prin ***mulţime*** înţelegem o colecţie de obiecte *bine determinate* şi *distincte* în care dispunerea elementelor nu are importanţă. Obiectele din care este constituită mulţimea se numesc *elementele* mulţimii. Vom spune că două mulţimi sunt ***egale*** dacă acestea sunt formate din aceleaşi elemente.

Noţiunile de mulţime şi element sunt legate prin relaţia de apartenenţă: Dacă x este un obiect, iar A este o mulţime, spunem că

- $x \in A$, dacă x este element al lui A;
- $x \notin A$, dacă x nu este element al lui A.

Printre mulţimi admitem existenţa unei mulţimi notate $\varnothing$, şi numita *mulţimea vidă*, care nu conţine nici un element.

Exemple de mulţimi remarcabile:

- mulţimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$;
- mulţimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n-1, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1 \ldots\}$;
- mulţimea numerelor raţionale: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$;
- mulţimea numerelor reale: $\mathbb{R}$;
- mulţimea numerelor complexe: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definiţia 1.1 *Fie A şi B două mulţimi. Spunem că o mulţime A este* ***inclusă*** *în mulţimea B(sau că A este* ***submulţime*** *a lui B), şi notăm $A \subseteq B$, dacă toate elementele mulţimii A sunt şi elemente ale mulţimii B.*

Notaţia 1.2 *Vom nota prin $\mathcal{P}(A)$,* ***mulţimea tuturor părţilor mulţimii*** *A, adică*

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A.$$

Evident, $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$.

Proprietăţile incluziunii: Dacă X este o mulţime oarecare, iar $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, atunci:
i) $A \subseteq A$ (*reflexivitate*);
ii) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (*tranzitivitate*);

Definiţia 1.3 *Spunem că mulţimea A este egală cu mulţimea B, şi scriem $A = B$, dacă acestea au aceleaşi elemente, adică*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Definiţia 1.4 (Operaţii cu mulţimi) *Fie X o mulţime nevidă şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$.*

*a) Se numeşte **reuniune** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\};$$

*b) Se numeşte **intersecţie** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\};$$

*c) Se numeşte **diferenţa mulţimilor** A şi B, mulţimea*

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\};$$

*d) Se numeşte **complementara mulţimii** A, mulţimea $X \setminus A$, notată cu $C_X(A)$ sau C_A. Altfel scris, $C_X(A) = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$;*

*e) Se numeşte **diferenţa simetrică** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Următoarea propoziţie prezintă câteva proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi:

Propoziţia 1.5 *Fie X o mulţime nevidă. Atunci pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, au loc următoarele proprietăţi:*

1. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ *(idempotenţa)*;
2. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
3. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitate)*;
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociativitatea reuniunii)*;
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativitatea intersecţiei)*;
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune)*;
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie)*;
8. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ *(absorbţie)*;
9. $C_{C_A} = A$; $A \cup C_A = X$; $A \cap C_A = \varnothing$;
10. $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B$; $C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$ *(legile lui De Morgan)*;
11. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
12. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
13. $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta \varnothing = A$;

14. $A\Delta B = B\Delta A$;

15. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exerciţiul 1: Demonstraţi asociativitatea reuniunii: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Soluţie:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

Exerciţiul 2: Fie X o mulţime nevidă şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Arătaţi că: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Soluţie:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \setminus B) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (A \setminus B)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B. \end{aligned}$$

Definiţia 1.6 *Fie A şi B două mulţimi nevide.* ***Produsul cartezian*** *al mulţimilor A şi B, notat cu $A \times B$, este mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$, adică mulţimea*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Propoziţia 1.7 *Fie X o mulţime nevidă şi $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Atunci au loc egalităţile:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Operaţiile de intersecţie, reuniune şi produs cartezian se pot extinde la cazul unei familii de mulţimi.

Definiţia 1.8 *Fie X o mulţime nevidă. Dacă I este o mulţime nevidă de indici, iar $\{A_i\}_{i\in I}$ o familie nevidă de submulţimi ale lui X, atunci* ***reuniunea tuturor mulţimilor*** *A_i este definită prin*

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

iar ***intersecţia mulţimilor*** *A_i este definită prin*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$$

Dacă I este o mulţime finită, spre exemplu $I = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci reuniunea şi respectiv intersecţia mulţimilor A_i, $i = \overline{1, n}$, se notează $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ şi respectiv $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Propoziţia 1.9 *Fie X o mulţime nevidă, $B \in \mathcal{P}(X)$ şi $\{A_i\}_{i\in I}$ o familie nevidă de submulţimi ale lui X. Atunci au loc următoarele:*

i) $A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ *şi* $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq A_i$ *pentru orice* $i \in I$;

ii) $B \cap \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \cap A_i)$; $B \cup \Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \cup A_i)$;

iii) $X \setminus \Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$; $X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$.

Pentru un număr finit de mulţimi nevide $\{A_i \mid i \in \overline{1,n}\}$, produsul cartezian al mulţimilor A_i este definit prin
$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$
Dacă $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, atunci produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ se notează cu A^n.

Relaţii

Definiţia 1.10 *Fie A şi B două mulţimi nevide şi $A \times B$ produsul cartezian al acestora.*

O submulţime $R \subseteq A \times B$ se numeşte ***relaţie (binară)*** *între elementele lui A şi elementele lui B.*

Dacă $(x, y) \in R \subseteq A \times B$, unde $x \in A$ şi $y \in B$, vom citi: x ***este în relaţia*** *R* ***cu*** *y, şi vom nota xRy.*

Definiţia 1.11 *Fie A şi B două mulţimi nevide şi relaţia binară $R \subseteq A \times B$.*

a) Se numeşte ***domeniul relaţiei*** *R, mulţimea*
$$\mathrm{Dom}(R) := \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\};$$

b) Se numeşte ***imaginea (codomeniul) relaţiei*** *R, mulţimea*
$$\mathrm{Im}(R) := \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\};$$

c) Se numeşte ***inversa relaţiei*** *R, relaţia de la B la A definită prin*
$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}.$$

Exerciţiul 3: Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{4, 5\}$ şi fie relaţiile $R = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$ şi $S = \{(1, 4), (1, 5)\}$. Să se determine domeniul, codomeniul şi inversele relaţiilor R şi S.

Soluţie: Dom(R) $= \{1, 2, 3\} =$ A, Im(R) $= \{4, 5\} =$ B, $R^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
Dom(S) $= \{1\}$, Im(S) $= \{4, 5\} =$ B, $S^{-1} = \{(5, 1), (4, 1)\}$.

Definiţia 1.12 *Fie A, B, C mulţimi nevide şi fie $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$.* ***Compusa relaţiilor*** *S şi R, notată cu $S \circ R$, este relaţia de la A la C definită prin*
$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Exerciţiul 4: Fie $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{3, 4, 5\}$ şi fie relaţiile $R = \{(1, 5), (2, 3), (2, 4)\}$ şi $S = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$. Să se determine $S \circ R, R \circ S, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$.

Soluţie: $R \subseteq A \times B$ iar $S \subseteq B \times A$, rezultă că $S \circ R \subseteq A \times A$.
$S \circ R = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
$(1, 5) \in R$, însă în S nu avem nici o pereche cu prima componenta 5;
$(2, 3) \in R \Rightarrow (3, 1), (3, 2) \in S \Rightarrow (2, 1), (2, 2) \in S \circ R$;
$(2, 4) \in R \Rightarrow (4, 1), (4, 2) \in S \Rightarrow (2, 1), (2, 2) \in S \circ R$;
Rezultă $S \circ R = \{(2, 1), (2, 2)\}$

Similar, $R \circ S \subseteq B \times B, R \circ S = \{(3, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 3), (4, 4)\}$

$R^{-1} = \{(5, 1), (3, 2), (4, 2)\} \subseteq B \times A, R \circ R^{-1} = \{(5, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\} \subseteq B \times B$, iar $R^{-1} \circ R = \{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq A \times A$.

Definiţia 1.13 *Fie A o mulţime. Numim* ***identitate*** *pe A, relaţia*

$$1_A := \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

Definiţia 1.14 *Fie A o mulţime nevidă şi fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie pe A. Spunem că R este:*

- ***reflexivă*** *dacă $xRx, \forall x \in A$, adică $1_A \subseteq R$;*
- ***simetrică*** *dacă $(xRy \Rightarrow yRx), \forall x, y \in A$, adică $R^{-1} = R$;*
- ***antisimetrică*** *dacă $((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y), \forall x, y \in A$, adică $R \cap R^{-1} = 1_A$;*
- ***tranzitivă*** *dacă $((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz), \forall x, y, z \in A$, altfel scris $R \circ R \subseteq R$.*

Definiţia 1.15 *Fie A o mulţime nevidă şi fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie pe A. Spunem că R este o* ***relaţie de echivalenţă*** *pe A dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Definiţia 1.16 *Fie R o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A.* ***Clasa de echivalenţă*** *a elementului $x \in A$ este mulţimea*

$$[x]_R = \widehat{x}_R := \{y \in A \mid xRy\}.$$

Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de R, se numeşte ***mulţime cât*** *şi se notează*

$$A_{/R} = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

Exerciţiul 5: Considerăm pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaţia $x\rho y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$. Arătaţi că ρ este o relaţie de echivalenţă şi determinaţi clasele de echivalenţă $[x]_\rho$.

Soluţie: (1) Reflexivitate: $x\rho x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (evident);
(2) Simetrie: $x\rho y, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow x \cdot y > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow y \cdot x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow y\rho x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(3) Tranzitivitate: $x\rho y \wedge y\rho z, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \wedge y \cdot z > 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\Leftrightarrow x \cdot y^2 \cdot z > 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \cdot z > 0, \forall x, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x\rho z, \forall x, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Din (1), (2) şi (3), rezultă că ρ este o relaţie de echivalenţă.
Pentru mulţimea cât distingem două situaţii
- dacă $x > 0 \Rightarrow [x]_\rho = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid y \cdot x > 0\} = (0, +\infty)$.
- dacă $x < 0 \Rightarrow [x]_\rho = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid y \cdot x > 0\} = (-\infty, 0)$.

Prin urmare, $(\mathbb{R} \setminus \{0\})_{/\rho} = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$.

Definiţia 1.17 *Fie $R \subseteq A \times A$. Spunem că:*

i) *R este o* ***relaţie de ordine (parţială)*** *pe A dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

ii) *R este o* ***relaţie de preordine*** *pe A dacă este reflexivă şi tranzitivă.*

iii) *O relaţie de ordine R se numeşte* ***totală*** *dacă are loc*

$$xRy \vee yRx, \forall x, y \in A.$$

iv) *Dacă A este o mulţime nevidă şi R este o relaţie de preordine/ ordine/ordine totală pe A, atunci perechea (A, R) se numeşte* ***mulţime preordonată/ordonată/total ordonată****.*

Observaţie 1.18 *De obicei, relaţiile de ordine sunt notate prin: $\leq$, $\preceq$, etc., iar inversele sale sunt notate prin $\geq, \succeq$. Dacă $\preceq$ este o relaţie de preordine pe A, atunci $\prec$ va nota relaţia $\preceq \setminus 1_A$, adică $x \prec y \Rightarrow (x \preceq y) \wedge (x \neq y), \forall x, y \in A$.*

Exerciţiul 6: Pe mulţimea $\mathbb{N}$ definim relaţia $\vdots$ astfel

$$x \vdots y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x = k \cdot y$$

Să se arate că relaţia $\vdots$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{N}$.

Soluţie: Reflexivitate: $\exists k = 1$ astfel încât $x = 1 \cdot x$. Aşadar, $x \vdots x, \forall x \in \mathbb{N}$.

Antisimetrie: Arătăm că $\forall x, y \in \mathbb{N}$, din $x \vdots y$ şi $y \vdots x$, rezultă $x = y$.

Cum $x \vdots y$ şi $y \vdots x$, rezultă că $\exists k, k' \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = k \cdot y$ şi $y = k' \cdot x$.
Aşadar, $x = k \cdot y = k \cdot (k' \cdot x) \Rightarrow k \cdot k' = 1 \Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow x = y$.

Tranzitivitate: Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $x \vdots y$ şi $y \vdots x$. Atunci există $k, k' \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = k \cdot y$ şi $y = k' \cdot z$. Prin urmare, $x = k \cdot y = k \cdot k' \cdot z$. Deci, $\exists k'' = k \cdot k'$ astfel încât $x = k'' \cdot z \Rightarrow x \vdots z$.

Relaţia de ordine $\vdots$ se numeşte *relaţie de divizibilitate* pe $\mathbb{N}$.

Definiţia 1.19 *Fie o mulţime ordonată $(A, \preceq)$ şi $B \subseteq A$ o mulţime nevidă.*

i) *Un element $x \in A$ se numeşte* ***majorant*** *pentru B dacă $y \preceq x, \forall y \in B$.*

ii) *Un element $x \in A$ se numeşte* ***minorant*** *pentru B dacă $x \preceq y, \forall y \in B$.*

iii) *Dacă B admite minorant, majorant sau ambii, spunem că B este mărginită inferior, mărginită superior, respectiv mărginită .*

iv) *Dacă $x \in A$ este un minorant pentru A, atunci x se numeşte* ***cel mai mic element*** *al lui A şi se notează cu $\min_R A$.*

v) *Dacă $y \in A$ este un majorant pentru A, atunci y se numeşte* ***cel mai mare element*** *al lui A şi se notează cu $\max_R A$.*

Exemple:

1. Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este mărginită inferior (0 este minorant al acesteia) şi nemărginită superior.

2. Mulţimea A=(0,1] este mărginită inferior (0 este un minorant) şi superior (1 este un majorant).

Definiţia 1.20 *Fie $(A, \preceq)$ o mulţime ordonată şi fie $B \subseteq A$.*

- *Spunem că un element $x \in A$ este **margine superioară** a mulţimii B (sau supremum) dacă x este cel mai mic majorant al mulţimii B. Dacă există un astfel de element, acesta se notează* $\sup_{\preceq} B$.
- *Spunem că $x \in A$ este **margine inferioară** a mulţimii B (sau infimum) dacă x este cel mai mare minorant al mulţimii B. Dacă există un astfel de element, acesta se notează* $\inf_{\preceq} B$.

Definiţia 1.21 *O mulţime total ordonată strict este numită **bine ordonată** dacă orice submulţime nevidă a ei are cel mai mic element.*

Exemplu: Mulţimea numerelor naturale $(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, în schimb mulţimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, împreună cu relaţia uzuală de ordine, "$\leq$", nu sunt bine ordonate.

Funcţii

Definiţia 1.22 *Fie A şi B două mulţimi nevide. O relaţie $f \subseteq A \times B$ se numeşte **funcţie** (sau **relaţie funcţională**) dacă satisface următoarele condiţii:*

1) Dom(f) = A *(altfel scris, $\forall x \in A, \exists y \in B$, astfel încât $(x, y) \in f$);*

2) $(x, y) \in f$ *şi* $(x, z) \in f \Rightarrow y = z, \forall x \in A, \forall y, z \in B$.

*În acest caz, vom nota funcţia $f \subseteq A \times B$, astfel $f : A \to B$. Mulţimea A se numeşte **domeniul de definiţie** al funcţiei f, iar mulţimea B se numeşte **codomeniul** lui f.*

Din definiţia de mai sus rezultă că pentru orice $x \in A$ există un unic $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$. Elementul y se numeşte imaginea lui x prin f, şi se notează $f(x)$.

Definiţia 1.23 *i) Se numeşte **graficul funcţiei** $f : A \to B$, mulţimea $G_f \subseteq A \times B$ definită prin*

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

*ii) Spunem că două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x), \ \forall x \in A = C$.*

Definiţia 1.24 *Fie funcţia $f : A \to B$.*

*a) Dacă $C \subseteq A$, atunci funcţia $f_{|C} := f \cap (C \times B)$ (adică $f_{|C}(x) = f(x), \ \forall x \in C$), se numeşte **restricţia** lui f la mulţimea C.*

*b) Dacă $C \subseteq A$, atunci numim **imagine a mulţimii** C **prin** f, mulţimea*

$$f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C : y = f(x)\}.$$

*c) Dacă $D \subseteq B$, atunci numim **preimaginea lui** D prin f (sau **imaginea inversă**) mulţimea*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in D : y = f(x)\}.$$

Definiţia 1.25 *Fie A o mulţime nevidă. Funcţia $1_A : A \to A$ definită prin $1_A(x) = x, \forall x \in A$ se numeşte* ***funcţia identică****.*

Definiţia 1.26 *Fie A şi B două mulţimi nevide. Atunci funcţia $f : A \to B$ se numeşte:*

i) ***injectivă*** *dacă $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;*

ii) ***surjectivă*** *dacă $\operatorname{Im}(f) = B$ (altfel scris, $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$);*

iii) ***bijectivă*** *dacă f este injectivă şi surjectivă;*

iv) ***inversabilă*** *dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Dacă există funcţia g, acesta se numeşte* ***inversa*** *lui f şi se notează cu f^{-1}.*

Propoziţia 1.27 *Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii.*

i) Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;

ii) Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;

ii) Dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;

ii) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;

ii) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

Propoziţia 1.28 *O funcţie $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă este inversabilă. În acest caz, f^{-1} este o funcţie de la B la A, şi $f \circ f^{-1} = 1_B$ şi $f^{-1} \circ f = 1_A$.*

Funcţia caracteristică

În cele ce urmează, vom introduce noţiunea de funcţie caracteristică (indicatoare) a unei mulţimi.

Definiţia 1.29 *Fie X o mulţime nevidă şi $A \subseteq X$. Se numeşte* ***funcţie caracteristică (indicatoare)*** *a mulţimii A, funcţia $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definită prin*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dacă $A = \varnothing$, atunci $\chi_A \equiv 0$.

Propoziţia 1.30 *Fie X o mulţime nevidă şi fie $A, B \subseteq X$. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

i) $\chi_A^\alpha = \chi_A,\ \forall \alpha > 0$;

ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \le \chi_B$*,*

iii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$*;*

iv) $\chi_{C_A} = 1 - \chi_A$*;*

v) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

vi) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$*;*

vii) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$*;*

viii) $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$.

Exerciţiul 7: Fie $X \neq \varnothing$ şi $A, B, C \subseteq X$. Utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice, arătaţi că:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Soluţie: Folosind proprietatea *iii)* din Propoziţia 1.30, ar trebui să arătăm că $\chi_{A\cup(B\cup C)} = \chi_{(A\cup B)\cup C}$.

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup(B\cup C)} &\overset{vi)}{=} \chi_A + \chi_{B\cup C} - \chi_A \cdot \chi_{B\cup C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C - \chi_A \cdot (\chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \qquad (1) \\
\chi_{(A\cup B)\cup C} &\overset{vi)}{=} \chi_{A\cup B} + \chi_C - \chi_{A\cup B} \cdot \chi_C = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_C - \chi_C \cdot (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B) \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \qquad (2)
\end{aligned}$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.

Bibliografie

[1] A. Precupanu, *Bazele analizei Matematice*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1993.

[2] F.L. Ţiplea, *Introducere în teoria mulţimilor*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

[3] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2011.

[4] G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (`http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/`)

[5] G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.