Integrare

Cursul 11

Matematică - anul I

Facultatea de Informatică, UAIC

e-mail: adrian.zalinescu@info.uaic.ro

web: https://profs.info.uaic.ro/~adrian.zalinescu

3 Ianuarie 2022

Integrala

Noțiunea de *integrală* este centrală nu numai în matematică, ea servind și la:

- determinarea stării unui sistem dinamic a cărui viteză de evoluție este cunoscută;
- calculul: caracteristicilor numerice a unor obiecte geometrice (lungime, arie, volum, centru de greutate);
- cantităților fizice (moment, lucru mecanic);
- caracteristicilor numerice ale variabilelor aleatoare în teoria probabilităților (funcție de distribuție, medie și varianță).

Sumarul cursului

1. Primitive
2. Integrala Riemann
3. Integrala Riemann multiplă pe mulțimi compacte
   - Integrala dublă pe mulțimi compacte
   - Integrala triplă pe mulțimi compacte

Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu $\mathring{I} \neq \emptyset$ și $f : I \to \mathbb{R}$.

Definiție

- O funcție $F : I \to \mathbb{R}$ este o *primitivă* a lui f dacă F este derivabilă pe I și
$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$
- Dacă f are cel puțin o primitivă pe I, atunci mulțimea primitivelor lui f se numește *integrala nedefinită* a lui f și se notează $\displaystyle\int f(x)dx$.

Observații.

1. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcții $f : I \to \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă a lui f are forma $F + c$, unde c este o constantă reală.

- Notând $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor funcțiilor constante pe I, avem $\displaystyle\int f(x)dx = F + \mathcal{C}$.
- Prin abuz de limbaj, putem scrie $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + c, \ x \in I$.

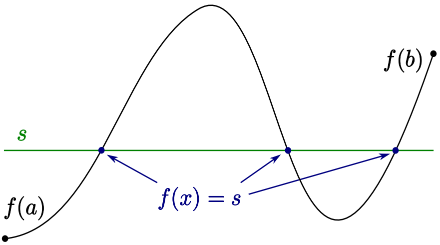
2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe I, atunci f este primitiva lui f'.

3. Orice primitivă a unei funcții $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, deoarece orice funcție derivabilă este continuă.

4. Spațiul $\mathcal{P}(I)$ al tuturor funcțiilor $f : I \to \mathbb{R}$ ce admit primitive este un spațiu liniar (subspațiu al spațiului liniar $\mathscr{F}(I; \mathbb{R})$), deoarece

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5. Orice funcție $f : I \to \mathbb{R}$ ce admite primitive are *proprietatea lui Darboux*: pentru orice $a, b \in I$ și s între $f(a)$ și $f(b)$, există x între a și b astfel încât $f(x) = s$.



Listă de primitive:

- $$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \\ \ln|x|, & \alpha = -1; \end{cases}$$
- $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|; \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \ a \in \mathbb{R}^*;$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|; \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|}, \ a \in \mathbb{R}^*;$$
- $$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x, \ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$$
- $$\int \sin x dx = -\cos x; \quad \int \cos x dx = \sin x;$$
- $$\int \operatorname{sh} x \, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \operatorname{ch} x; \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \operatorname{sh} x$$

(pentru simplitate, am omis constanta c).

Integrare prin părți

Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile, cu f' și g' continue pe I. Atunci

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,\ x \in I,$$

Putem aplica această formulă pentru a completa lista de mai sus:

- $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + c,\ a \in \mathbb{R}_+^*;$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c,\ a \in \mathbb{R}^*;$
- $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + c.$

Integrarea prin părți este recomandată pentru integrale de forma

$$\int P(x)f(x)dx,$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ și f este o funcție elementară de tipul: a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, etc. Aplicând această metodă, putem reduce cu o unitate gradul polinomului P.

Integrala Riemann

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definiție

- Numim o *diviziune* (sau *partiție*) a intervalului $[a, b]$ o mulțime finită $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Numărul
$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\}$$
(notat de asemenea $\nu(\Delta)$) se numește *norma* diviziunii Δ.
- O diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ se numește *echidistantă* dacă $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall i = \overline{1, n}$; în acest caz $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$ și $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.

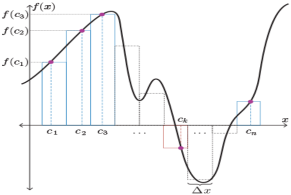
- Vom nota cu $\mathcal{D}[a, b]$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului compact $[a, b]$.
- Dacă $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a, b]$ și $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, spunem că Δ_2 este mai *fină* decât Δ_1 și notăm $\Delta_1 \preceq \Delta_2$.

Fie $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Definiție

- Un n-uplu $\xi_\Delta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se numește un *sistem de puncte intermediare* al lui Δ dacă $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$.
- Mulțimea tuturor *sistemelor de puncte intermediare* ale lui Δ este notată Ξ_Δ.
- Numim *suma Riemann* corespunzătoare funcției $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ în raport cu Δ și un sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$,numărul

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Definiție

- Funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește *integrabilă Riemann* (sau $\mathcal{R}$-*integrabilă*) dacă există un număr real I, numit *integrala Riemann* a lui f, astfel încât

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \Delta \in \mathcal{D}[a, b],\ \|\Delta\| < \delta_\varepsilon,\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta \Rightarrow |\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon.$$

- Integrala Riemann va fi notată prin $\int_a^b f(x)dx$.
- Mulțimea tuturor funcțiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe $[a, b]$ este notată $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziție

Dacă o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este Riemann integrabilă, atunci ea este mărginită.

Observație. Un exemplu de funcție mărginită ce nu este Riemann integrabilă este funcția lui Dirichlet, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Proprietăți

Propoziție

i) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c,d]$, pentru orice interval $[c,d] \subseteq [a,b]$.

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$. Dacă $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ și $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ și

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ și

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Propoziție

iv) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ și are loc *inegalitatea Cauchy-Schwarz* pentru funcții $\mathcal{R}$-integrabile:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

v) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ și $|f(x)| \geq \mu > 0$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

vi) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ și

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

(cu alte cuvinte, $\mathcal{R}[a,b]$ este un subspațiu liniar al lui $\mathscr{F}([a,b];\mathbb{R})$).

vii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ și $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Observații.

1. O generalizare a inegalității Cauchy-Schwarz este, ca în cazul sumelor finite de numere reale, *inegalitatea lui Hölder* pentru funcții $\mathcal{R}$-integrabile:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

unde $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Integrala Riemann este o funcțională monotonă, adică dacă $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, definim $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$ și $\int_a^a f(x)dx := 0$.

4. Fie $f \in \mathcal{R}[a,b]$ și $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Datorită monotoniei integralei Riemann, avem

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Mai mult, dacă $f \in C([a,b])$ (adică f este continuă pe $[a,b]$), atunci există $x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$; rezultă că

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)$$

Deoarece f are proprietatea lui Darboux (ce este implicată de continuitatea lui f), atunci există c între x_1 și x_2 (cu posibilitate de egalitate) astfel încât $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, adică are loc următoarea formulă a mediei:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Criterii de integrabilitate

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție.

Teoremă

i) Dacă $f \in C([a, b])$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

ii) Dacă f este monotonă pe $[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Observație. Concluzia punctului **ii)** rămâne valabilă și dacă f este *monotonă pe porțiuni*, adică $f\big|_{[c_{i-1}, c_i]}$ este monotonă, unde $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \in \mathcal{D}[a, b]$.

Formula Leibniz-Newton

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și funcția $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ x \in [a, b].$$

Teoremă

i) $F \in C([a, b])$; mai mult, există $L > 0$ astfel încât

$$|F(x) - F(\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|, \ \forall x, \tilde{x} \in [a, b].$$

ii) dacă f este continuă în $x_0 \in [a, b]$, atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.

- dacă $f \in C([a, b])$, atunci F este o primitivă a lui f.;
- dacă $f \in C([a, b])$ și $F' = f$, atunci are loc formula *Leibniz-Newton*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a).$$

- Pentru a calcula integrala Riemann a unei funcții $f \in C([a,b])$, putem utiliza *schimbarea de variabilă*, prin formula

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt,$$

  unde $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ este o funcție de clasă C^1.
- O a doua formulă de schimbare de variabilă, echivalentă cu prima, este

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)dt,$$

  unde $\psi : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ este o funcție bijectivă, de clasă C^1.
- O altă manieră de a calcula o integrală Riemann este *integrarea prin părți*, dată de formula

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)\,dx,$$

  pentru $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a,b]$ cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, $f, g \in C^1[a,b]$).

Integrale multiple

- Integralele multiple sunt o extensie naturală a integralei Riemann la cazul funcțiilor de mai multe variabile.
- Când funcția ce trebuie integrată are 2 variabile: *integrala dublă*;
- când avem de a face cu 3 variabile: *integrala triplă*.
- În acest fel, putem calcula unele caracteristici numerice ale obiectelor 3D (arie, volum, masă, centru de greutate, etc.)

Măsura Jordan

- Unor mulțimi din $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ le corespunde un anumit număr, ca *lungime*, *arie*, respectiv *volum* (sau *masă*, dacă ne gândim la obiecte fizice).
- O *măsură* pe $\mathbb{R}^n$ generalizează aceste concepte: măsura unei mulțimi va fi un număr pozitiv.
- Vom începe prin a defini măsura unor obiecte simple.

Definiție

- Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k \in \overline{1, n}$. Mulțimea

$$\begin{aligned} I_0 &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \le x_k \le b_k,\ \forall k \in \overline{1, n} \right\} \end{aligned}$$

se numește un *interval compact n-dimensional* (dacă $n = 2$ sau $n = 3$, îl numim de asemenea *dreptunghi*, respectiv *paralelepiped* cu *laturile*, respectiv *fețele paralele la axele de coordonate*).

Definiție

- *Măsura* (*Jordan* a) lui este numărul
$$\mu(I_0) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$
(dacă $n = 2$ sau $n = 3$, aceasta este *aria*, respectiv *volumul* dreptunghiului sau paralelipipedului I_0).
- Numim *mulțime elementară* (*măsurabilă Jordan*) orice mulțime din $\mathbb{R}^n$ ce poate fi scrisă ca o reuniune finită de intervale compacte n-dimensionale ce nu au puncte interioare comune, adică o mulțime de forma
$$E = \bigcup_{\ell=1}^{q} I_\ell$$
astfel încât $I_\ell = [a_1^\ell, b_1^\ell] \times [a_2^\ell, b_2^\ell] \times \dots \times [a_n^\ell, b_n^\ell]$, $\ell = \overline{1, q}$ și astfel încât $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_\ell = \emptyset$, $\forall j, \ell \in \{1, 2, \dots, q\}$, $j \neq \ell$.
- *Măsura Jordan* a mulțimii E este definită ca
$$\mu(E) := \sum_{\ell=1}^{q} \mu(I_\ell),$$
unde $\mu(I_\ell) = \prod_{k=1}^{n}(b_k^\ell - a_k^\ell)$.

Vom nota $\mathcal{E}_J^n$ familia tuturor mulțimilor elementare din $\mathbb{R}^n$.
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită.

Definiție

- Numim *măsura Jordan interioară* a mulțimii A numărul
$$\mu_*(A) = \sup \{\mu(E) \mid E \subseteq A,\ E \in \mathcal{E}_J^n\}$$
(dacă nu există o mulțime elementară inclusă în A, $\mu_*(A)$ este atunci 0).
- *Măsura Jordan exterioară* a mulțimii A este numărul
$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(E) \mid E \supseteq A,\ E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$
- Spunem că A este *măsurabilă Jordan* dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Valoarea ei comună se numește *măsura Jordan* a mulțimii A și se notează $\mu_J(A)$ (se obișnuiește să o numim *arie* dacă $n = 2$ sau *volum* dacă $n = 3$).

Este evident că pentru o mulțime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu_*(A)$ și $\mu^*(A)$ sunt numere reale pozitive ce satisfac $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Observații.
1. Orice mulțime elementară $E \in \mathcal{E}_J^n$ este măsurabilă Jordan, prin definiție.

2. Nu orice mulțime mărginită din $\mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan. De exemplu, în $\mathbb{R}^2$ considerăm

$$A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f_D(x)\}$$

unde $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcția lui Dirichlet, definită de

$$f_D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

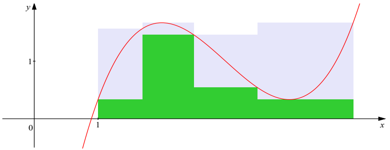
Atunci $\mu_*(A_D) = 0$, deoarece nu există mulțime elementară $E \subseteq A_D$; pe de altă parte, $\mu^*(A_D) = 1$, deoarece orice mulțime elementară $E \supseteq A$ trebuie să includă dreptunghiul $[0, 1] \times [0, 1]$. De aceea, E nu este măsurabilă Jordan.

3. Există mulțimi ne-elementare ce sunt măsurabile Jordan. De exemplu, subgraficul unei funcții integrabile Riemann $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, adică mulțimea

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

este măsurabilă Jordan, cu $\mu_J(\Gamma_f) = \text{aria}(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Demonstrație:



4. Mai general, putem afirma că dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții Rieman integrabile pe $[a, b]$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci mulțimea $\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$ este măsurabilă Jordan cu

$$\mu_J\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx.$$

Applicație: *aria unei elipse*
Fie $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ și $a := -\tilde{a}$, $b := \tilde{a}$. Definim funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ prin $f(x) := -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}$ și $g(x) := \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}$, $x \in [a, b] = [-\tilde{a}, \tilde{a}]$. Reuniunea graficelor lor determină o elipsă de ecuație $\frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2} - 1 = 0$; de aceea, domeniul mărginit de această elipsă este dat de

$$\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\tilde{a} \leq x \leq \tilde{a},\ -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2} \leq y \leq \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}\right\},$$

Prin calcul integral, găsim $\mu_J(\Gamma_{f,g}) = \dfrac{2\tilde{b}}{\tilde{a}}\displaystyle\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}dx = \pi\tilde{a}\tilde{b}$. În consecință aria unei elipse de semiaxe $\tilde{a}$ și $\tilde{b}$ este $\pi\tilde{a}\tilde{b}$.

5. Din definiție, o mulțime $B \subseteq \mathbb{R}^n$ este măsurabilă și are măsura Jordan nulă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $B \subseteq E_\varepsilon$ și $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$.

Condiții necesare și suficiente de măsurabilitate Jordan

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită.

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) A este măsurabilă Jordan;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}^n_J : E'_\varepsilon \subseteq A \subseteq E''_\varepsilon$ și $\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(E''_\varepsilon) < \varepsilon$;

(iii) ∂A este măsurabilă Jordan și $\mu_J(\partial A) = 0$;

(iv) există șiruri $\left(\tilde{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}^n_J$ și $\left(\hat{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}^n_J$ astfel încât $\tilde{E}_m \subseteq A \subseteq \hat{E}_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ și $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\tilde{E}_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\hat{E}_m)$.

Observație. Pentru o mulțime măsurabilă Jordan A, $\mu_J(A) \neq 0$ este echivalentă cu $\mathring{A} \neq \emptyset$.

Proprietăți ale măsurii Jordan

Notăm $\mathcal{M}_J^n$ familia tuturor mulțimilor din $\mathbb{R}^n$ ce sunt măsurabile Jordan.

Teoremă

i) $\mu_J(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$ (*pozitivitate*).

ii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n : \mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \Rightarrow \mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$ (*aditivitate*).

iii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n : B \subseteq A \Rightarrow \mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$ (*substracție*).

iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n : B \subseteq A \Rightarrow \mu_J(B) \leq \mu_J(A)$ (*monotonie*).

v) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n, \forall B \subseteq \mathbb{R}^n : \mu_J(A) = 0,\ B \subseteq A \Rightarrow \mu_J(B) = 0$ (*completitudine*).

Observații.

1 Se poate arăta că dacă $A, B \in \mathcal{M}_J^n$, atunci $A \cup B \in \mathcal{M}_J^n$ și $A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$. Mai mult, are loc proprietatea de subaditivitate: $\mu_J(A \cup B) \leq \mu_J(A) + \mu_J(B)$.

2. Graficul unei funcții continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ are aria nulă

3. Orice mulțime din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră se poate scrie ca o reuniune finită de grafice ale unor funcții continue pe intervale compacte este măsurabilă Jordan.

Integrala Riemann multiplă pe mulțimi compacte

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă nevidă (deci, mărginită și închisă) astfel încât $D \in \mathcal{M}_J^n$.

Definiție

- Numim *diviziune* a lui D orice familie finită $\{D_i\}_{1 \le i \le p}$ de submulțimi ale lui D astfel încât:
  a) $D_i \in \mathcal{M}_J^n$, $\forall i \in \overline{1,p}$;
  b) $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$, $\forall i,j \in \{1,\dots,p\}$ cu $i \neq j$;
  c) $D = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$.

  Notăm $\mathcal{D}(D)$ familia tuturor diviziunilor lui D.
- Pentru o diviziune Δ definim *norma* ei $\|\Delta\| := \max\limits_{1 \le i \le p} \{\operatorname{diam}(D_i)\}$, unde $\operatorname{diam}(D_i)$ este diametrul lui D_i.

Observație. Din proprietatea de aditivitate a măsurii Jordan, avem

$$\mu_J(D) = \sum_{i=1}^{p} \mu_J(D_i).$$

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție.

Definiție

Fie $\Delta = \{D_i\}_{1 \le i \le p}$ o diviziune a lui D.

- Un p-uplu $\xi_\Delta = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ se numește un *sistem de puncte intermediare* ale lui Δ dacă $\xi^i \in D_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.
  Mulțimea tuturor sistemelor de puncte intermediare ale lui Δ este notată Ξ_Δ.
- Numim *suma Riemann* a funcției f în raport cu Δ și un sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, numărul

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi^i)\mu_J(D_i).$$

Definiție

Spunem că funcția f este *integrabilă Riemann* dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \Delta \in \mathcal{D}(D),\ \forall \xi_\Delta \in \Xi_\Delta : \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I)| < \varepsilon.$$

Definiție

Numărul I se numește *integrala multiplă* (dacă $n = 2$ sau $n = 3$, *integrala dublă*, respectiv *triplă*) a lui f și se notează

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă nevidă care este măsurabilă Jordan și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

Proprietăți

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă nevidă ce este măsurabilă Jordan.

Propoziție

i) $\int \cdots \int_D 1 dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_J(D)$;

ii) pentru orice funcții integrabile Riemann $f, g : D \to \mathbb{R}$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann și

$$\int \cdots \int_D (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n =$$
$$\alpha \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n + \beta \int \cdots \int_D g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

iii) pentru orice funcții integrabile Riemann $f, g : D \to \mathbb{R}$ cu $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, avem:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \int \cdots \int_D g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

Propoziție

iv) pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : D \to \mathbb{R}$, $|f|$ este de asemenea integrabilă Riemann și

$$\left|\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n\right| \leq \int \cdots \int_D \left|f(x_1, \ldots, x_n)\right| dx_1 \ldots dx_n;$$

v) pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : D \to \mathbb{R}$, există $\lambda \in \left[\inf_{x \in D} f(x), \sup_{x \in D} f(x)\right]$ astfel încât:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \lambda \mu_J(D).$$

Dacă, în plus, $f \in C(D)$ și D este conexă (*adic*ă nu poate fi împărțită în două mulțimi închise disjuncte), atunci există $\xi \in D$ astfel încât

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(\xi) \mu_J(D);$$

Propoziție

vi) dacă D este reuniunea a două mulțimi compacte nevide D_1 și D_2 ce sunt măsurabileJordan, cu $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset$, și f este integrabilă Riemann și pe D_1 și pe D_2, atunci f este integrabilă Riemann pe D și

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{D_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n + \int \cdots \int_{D_2} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

vii) pentru orice $f, g \in C(D)$ cu $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, există $\eta \in D$ astfel încât

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = f(\eta) \int \cdots \int_D g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Integrala dublă pe mulțimi compacte

- Integrala multiplă în cazul $n = 2$ se mai numește *integrala dublă*.
- Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe o mulțime compactă nevidă și măsurabilă Jordan $D \subseteq \mathbb{R}^2$, vom nota integrala ei dublă prin $\iint_D f(x, y)dx\, dy$.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$, $D := [a, b] \times [c, d]$ și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann.

Propoziție

Dacă pentru orice $x \in [a, b]$, $f(x, \cdot)$ este integrabilă Riemann și funcția $x \mapsto \int_c^d f(x, y)dy$ este de asemenea Riemann integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy\Big)dx.$$

Mai mult, dacă $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ și $f_1 \in \mathcal{R}[a, b]$, $f_2 \in \mathcal{R}[c, d]$, atunci avem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)f_2(y)dx\, dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Observații.

1. Un rezultat similar obținem inversând rolurile lui x și y, prin egalitatea

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

2. O condiție suficientă pentru ca ipoteza rezultatului de mai sus să fie îndeplinită este $f \in C([a,b]\times[c,d])$.

Definiție

- O submulțime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește *simplă în raport cu axa Oy* dacă există funcțiile continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$, astfel încât

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

- O submulțime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește *simplă în raport cu axa Ox* dacă există funcțiile continue $\gamma, \omega : [c,d] \to \mathbb{R}$ cu $\gamma(y) \leq \omega(y)$, $\forall y \in [c,d]$, astfel încât

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y),\ c \leq y \leq d\}.$$

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy și $f \in C(D)$. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \Big) dx,$$

unde funcțiile $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x) < \psi(x)$ sunt astfel încât $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

Observație. Dacă $f \in C(D)$, cu D simplă în raport cu axa Ox, adică având forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y),\ c \leq y \leq d\},$$

atunci are loc egalitatea

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\omega(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplu

Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | 1 \le xy \le 3,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 4\}$. Vom calcula aria lui D:

$$\text{aria}(D) = \mu_J(D) = \iint_D 1 dx\, dy = \iint_D dx\, dy.$$

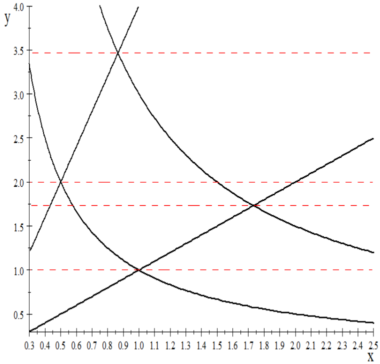


Figure: graphs of $xy = 1,\ xy = 3,\ \frac{y}{x} = 1,\ \frac{y}{x} = 4$

Deoarece $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, cu $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, unde
$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_1(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_1(y) = y, 1 \leq y \leq \sqrt{3}\}$,
$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_2(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_2(y) = \frac{3}{y}, \sqrt{3} \leq y \leq 2\}$ și
$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_3(y) = \frac{y}{4} \leq x \leq \omega_3(y) = \frac{3}{y}, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}\}$, obținem,
deoarece D_1, D_2, D_3 sunt domenii simple în raport cu axa Ox:

$$\begin{aligned}
\mathrm{aria}(D) &= \iint_D 1 dx\, dy = \iint_{D_1} 1 dx\, dy + \iint_{D_2} 1 dx\, dy + \iint_{D_3} 1 dx\, dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{1/y}^{y} 1 dx \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_{1/y}^{3/y} 1 dx \right) dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\int_{y/4}^{3/y} 1 dx \right) dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{y} dy + \int_2^{2\sqrt{3}} (\frac{3}{y} - \frac{y}{4}) dy = \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \ln y \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} + 2 \ln y \Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(3 \ln y - \frac{y^2}{8} \right) \Bigg|_2^{2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 - \ln 3 + 3 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} - 3 \ln 2 + \frac{1}{2} = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

Schimbarea de variabile

Definiție

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă nevidă, măsurabilă Jordan și $F : \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}^2$, definită de $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in \Omega$ o funcție bijectivă ce poate fi extinsă la o funcție de clasă C^1pe o mulțime deschisă $\Omega' \supseteq \Omega$ astfel încât

$$\det(J_F)(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0, \forall (u, v) \in \Omega.$$

Atunci D este de asemenea o mulțime compactă, măsurabilă Jordan, iar F se numește o *schimbare de variabile* (*coordonate*) de la Ω la D.

Propoziție

Fie $F : \Omega \to D$, $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in \Omega$ o schimbare de variabile și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx\, dy = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| (u, v) dudv.$$

Observații.

1. Pentru exemplul precedent am fi putut aplica de asemenea o schimbare de variabile. Să considerăm schimbarea de variabile dată de $xy = u$ și $\frac{y}{x} = v$, echivalent $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ și $y = \sqrt{uv}$, cu $u \in [1,3]$ și $v \in [1,4]$. Atunci avem

$$\operatorname{aria}(D) = \iint_D 1 dxdy = \iint_\Omega \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) dudv,$$

unde $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 4\} = [1,3] \times [1,4]$ și

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} (u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Astfel

$$\operatorname{aria}(D) = \int_1^3 du \cdot \int_1^4 \left| \frac{1}{2v} \right| dv = \left(u\big|_1^3 \right) \left(\frac{1}{2} \ln v \Big|_1^4 \right) = 2\frac{1}{2} \ln 4 = 2 \ln 2.$$

2. O schimbare de variabile des întâlnită este dată de trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la *coordonatele polare* (r, θ), prin relațiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \text{cu } r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi].$$

Jacobianul acestei transformări este
$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$

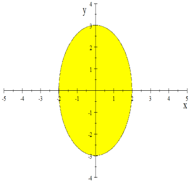
3. Câteodată putem folosi *coordonatele polare generalizate*:

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\theta; \\ y = br\sin^\alpha\theta, \end{cases}$$

cu $r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty)$ și $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi]$, cu a, b și α parametri potriviți. Dacă $\alpha = 1$, r și θ sunt numite *coordonate eliptice*, corespunzând ecuației elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (în coordonate eliptice, această ecuație devine $r = 1$).

Examplu

Să calculăm $\iint_D (y-x+2)dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.



Folosind transformarea eliptică $(x,y) \to (r,\ \theta)$ dată de $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$, cu $0 \leq r < 1$ și $0 \leq \theta \leq 2\pi$, găsim

$$\begin{aligned}\iint_D (y-x+2)dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|(r,\theta)dr\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)6rdr\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(6\sin\theta - 4\cos\theta + 6)d\theta = 12\pi.\end{aligned}$$

Masă și centru de greutate

O altă aplicație a integralei duble este calculul masei unui obiect material D în plan, cu densitate de masă cunoscută ρ. Aceasta este dată de formula

$$\mathrm{mass}(D) = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

Putem de asemenea determina coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) al lui D, prin formulele

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \quad \text{și} \quad y_G = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy}.$$

Integrala triplă pe mulțimi compacte

- Integrala triplă reprezintă integrala multiplă în cazul $n = 3$.
- Se notează

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

unde $f : D \to \mathbb{R}$ și $D \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulțime compactă nevidă, măsurabilă Jordan.

Definiție

O submulțime $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se numește *simplă în raport cu axa Oz* dacă există o mulțime compactă, măsurabilă Jordan $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \tilde{D}$, astfel încât

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y),\ (x, y) \in \tilde{D}\}.$$

Un astfel de domeniu în $\mathbb{R}^3$ are *volum* (adică măsură Jordan) dat de formula

$$\mathrm{vol}(D) = \mu_J(D) = \iint_{\tilde{D}} \psi(x, y)dxdy - \iint_{\tilde{D}} \varphi(x, y)dxdy.$$

Propoziție

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulțime simplă în raport cu Oz și fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdy\,z = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Exemplu. Să calculăm $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde D este domeniul mărginit de suprafețele $z=0$, $z=1$ și $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Observăm că

$$D = \{(x,y,z) \in \tilde{D} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}.$$

unde $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Luăm $\varphi(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ și $\psi(x,y) := 1$, așa că obținem

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz \right) \sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= \iint_{\tilde{D}} \sqrt{x^2+y^2} \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy.\end{aligned}$$

Pentru a calcula această integrală dublă, vom folosi coordonatele polare (r, θ):

$$\iint_{\tilde{D}} \sqrt{x^2+y^2}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r(1-r)rdr \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3)dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

O formulă de schimbare de variabilă asemănătoare are loc și în cazul $n = 3$:

Propoziție

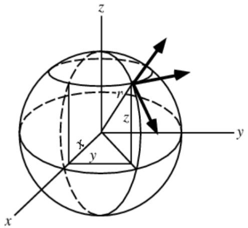
Fie $F : \Omega \to D$, $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, $(u, v, w) \in \Omega$ o schimbare de variabile între mulțimi compacte, măsurabile Jordan, Ω și D. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u, v, w)dudvdw.$$

Observații.

1. Cea mai folosită schimbare de variabile în $\mathbb{R}^3$ este trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la *coordonatele sferice* r, θ, φ, dată de

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, \pi], \\ z = r\cos\theta, & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \subseteq [0, 2\pi]. \end{cases}$$



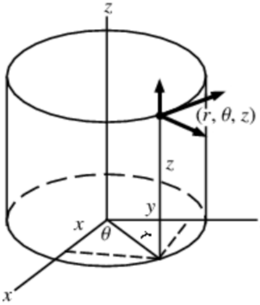
Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x,y,z,)}{D(r,\theta,\varphi)}(r,\theta,\varphi) = \det \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta.$$

2. Un alt tip de schimbare de variabile este dat de *coordonatele cilindrice*, transformare definită de

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi], \\ z = z, & z \in [z_1, z_2] \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

În acest caz avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}(r, \theta, z) = r$.



Exemplul precedent:

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$$

unde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z \le 1,\ (x,y) \in \tilde{D}\}$ și $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$; folosind coordonatele cilindrice obținem

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 rdz\right) d\theta\right) rdr = 2\pi \int_0^1 (1-r)r^2dr = \frac{\pi}{6}$$

Din nou, integrala triplă poate fi folosită pentru a calcula masa și centrul de greutate a unui corp material D, cu densitate de masă ρ, prin formulele

$$\mathrm{mass}(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

și

$$x_G = \frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},\ y_G = \frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},$$

$$z_G = \frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}.$$

- G. Apreutesei, N. A. Dumitru, *Introducere în teoria integrabilității*, Editura "Performantica", Iași, 2005.
- D. Cioroboiu, A. Pitea, M. Postolache, *Calcul integral,* Editura "Fair Partners", București, 2010.
- T. de Cepeda, M. Delgado, *Calculus II, Unit 3: Integrals Depending on a Parameter*, Universidad Carlos III de Madrid, 2016.
- M. Gorunescu, F. Gorunescu, A. Prodan, *Matematici superioare. Biostatistică și Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
- P. B. Iaval, *Improper Integrals*, Kennesaw State University, 2015.
- L. Larson, *Introduction to Real Analysis,* Univ of Louisville Publ., 2014.
- G. Mocică, *Probleme de funcții speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
- S. A. Popescu, *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.
- H. Tudor, *Analiză matematică,* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.