## CURSUL 9
## DIFERENŢIABILITATE

### 1. Derivatele funcţiilor de o singură variabilă

Reamintim aici conceptul de derivată a unei funcţii reale; această noţiune captează ideea de viteză de schimbare a valorii unei funcţii în raport cu variabila sa.

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie.

***a)*** Numim *derivata* lui $f$ într-un punct $x_0 \in A$ limita

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(dacă există), notată de asemenea $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

***b)*** Spunem că $f$ este *derivabilă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă derivata lui $f$ în $x_0$ există şi este finită.

***c)*** Spunem că $f$ este *derivabilă* pe o submulţime $B \subseteq A$ dacă $f$ este derivabilă în orice punct $x_0 \in B$.

***d)*** Notăm $f'$ sau $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ funcţia $x \mapsto f'(x)$ definită pe o submulţime a lui $A$ ce consistă în elementele lui $A$ în care $f$ este derivabilă.

***e)*** Dacă $x_0 \in A$ este un punct de acumulare la stânga (la dreapta) a lui $A$, numim *derivata la stânga* (*la dreapta*) a lui $f$ în $x_0$ limita (în cazul în care există)

$$f_{\mathrm{s}}'(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \left( f_{\mathrm{d}}'(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \right).$$

Dacă $x_0$ este punct interior al lui $A$, este clar că derivata $f'(x_0)$ există dacă şi numai dacă derivatele laterale $f_{\mathrm{s}}'(x_0)$ şi $f_{\mathrm{d}}'(x_0)$ există şi sunt egale. În acest caz, $f'(x_0) = f_{\mathrm{s}}'(x_0) = f_{\mathrm{d}}'(x_0)$. Bineînţeles, $f$ este derivabilă în $x_0$ dacă, mai mult, aceste două derivate laterale (ce sunt egale) sunt finite.

**Propoziţia 1.1**. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in A$. Dacă $f$ este derivabilă în $x_0$, atunci $f$ este continuă în $x_0$.*

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid.

***a)*** Spunem că o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este de *clasă $C^1$* dacă $f$ este derivabilă pe $A$ şi $f'$ este continuă.

***b)*** Notăm $C^1(A)$ familia tuturor funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$.

***c)*** Notăm $C(A)$ familia tuturor funcţiilor continue $f : A \to \mathbb{R}$.

Din propoziţia 1.1, $C^1(A) \subseteq C(A)$.

Următoarea teoremă stabileşte regulile de derivare pentru sume, produse şi compunere.

**Teorema 1.2**. *Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ două intervale cu interioare nevide.*

***i)*** *Dacă funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ şi $fg$ sunt derivabile în $x_0$ şi*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \text{ (regula lui Leibniz).}$$

*Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A : g(x) \neq 0$ şi $1/g$, $f/g$ sunt derivabile în $x_0$ cu*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2};$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

***ii)*** *Dacă funcţia $f : A \to B$ este derivabilă în $x_0 \in A$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (regula lanţului).}$$

*iii)* *Dacă funcţia $f : A \to B$ este continuă, bijectivă şi derivabilă în $x_0 \in A$ astfel încât $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1}$ este continuă, derivabilă în $f(x_0)$ şi*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dacă funcţiile $f$ şi $g$ sunt derivabile, regulile de mai sus pot fi scrise ca:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} f$);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} g$);
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$;
- $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} f'$).

Ultimele două reguli pot fi uşor memorate dacă vedem pe $f$ ca pe o *schimbare de variabilă* $y = f(x)$:

- $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

Să ne amintim acum de derivatele funcţiilor elementare:

- $c' = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $c \in \mathbb{R}$;
- $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^*$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;
- $(x^p)' = px^{p-1}$, $x \in \mathcal{D}_p$, pentru $p \in \mathbb{R}$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$;
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$;
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

unde $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}$ dacă $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}^*$ dacă $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}_+$ dacă $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ şi $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}_+^*$ dacă $p \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$.

Dacă $f : A \to \mathbb{R}_+^*$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, atunci, conform regulilor de calcul avem:

$$(f^g)' = \left(\mathrm{e}^{g \ln f}\right)' = \mathrm{e}^{g \ln f}\left(g' \ln f + \tfrac{gf'}{f}\right) = f^g (\ln f) g' + f^{g-1} f' g.$$

Definiţia funcţiilor reale derivabile poate fi uşor adaptată pentru funcţii de o variabilă cu valori în $\mathbb{R}^m$, deoarece limita

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right)$$

are sens pentru funcţii $f : A \to \mathbb{R}^m$ cu $x_0 \in A$. Ca în cazul limitelor de funcţii, derivatele pot fi calculate pe componente:

**Propoziţia 1.3**. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie cu componentele $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Dacă $x_0 \in A$, atunci $f$ este derivabilă în $x_0$ dacă şi numai dacă $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt derivabile în $x_0$. În acest caz, $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))$.*

Reguli similare de calcul se aplică şi în acest caz:

**Teorema 1.4**. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid, $x_0 \in A$ şi funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$, derivabile în $x_0$. Atunci:*

*i)* *$f + g$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

*ii)* *$\langle f, g \rangle$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(\langle f, g \rangle)'(x_0) = \left\langle f'(x_0), g(x_0) \right\rangle + \left\langle f(x_0), g'(x_0) \right\rangle;$$

*iii)* *$\varphi f$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0).$$

Dacă dorim să derivăm o funcţie de mai multe variabile (chiar cu valori în $\mathbb{R}$), o simplă generalizare nu este posibilă, deoarece pentru $n \geq 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ şi o funcţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, raportul $\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}$ nu este definit. Există mai multe posibilităţi de a ocoli această dificultate. Una este să considerăm *derivate direcţionale*, opţiune ce este bazată pe observaţia că derivata unei funcţii $f : A \to \mathbb{R}$ într-un punct $x_0$ poate fi scrisă ca

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă[1] nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie.

***a)*** Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că $f$ este *derivabilă* în $\mathbf{x}_0$ *în direcţia* $\mathbf{u}$ dacă limita

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) \in \mathbb{R}^m$$

există. În acest caz, $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ se numeşte *derivata direcţională* a lui $f$ în $\mathbf{x}_0$ în *direcţia* $\mathbf{u}$.

***b)*** Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f$ este derivabilă în $\mathbf{x}_0$ în orice direcţie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că $f$ este *Gâteaux diferenţiabilă* în $\mathbf{x}_0$. *Diferenţiala Gâteaux* este atunci funcţia $\mathbf{u} \mapsto f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ şi se notează $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$.

***c)*** Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f$ este diferenţiabilă Gâteaux în $\mathbf{x}_0$, spunem că $f$ este *Gâteaux derivabilă* în $\mathbf{x}_0$ dacă în plus $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie liniară.

***d)*** Spunem că $f$ este *Gâteaux diferenţiabilă* sau *Gâteaux derivabilă* pe o submulţime $D_0 \subseteq D$ dacă $f$ este Gâteaux diferenţiabilă, respectiv Gâteaux derivabilă în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.

**Observaţie.** Deoarece

$$f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\alpha\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha}{s} \left(f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) = \alpha f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, remarcăm că existenţa derivatei direcţionale $f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u})$ este echivalentă cu existenţa lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$. De aceea, în definiţia diferenţiabilităţi se poate cere existenţa lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ doar pentru versorii $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Mai mult, dacă $f$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, aplicaţia $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este omogenă; de aceea, pentru derivabilitatea lui $f$ în $\mathbf{x}_0$, este de ajuns să cerem doar ca $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$ să fie aditivă.

Funcţiile constante şi funcţiile liniare sunt Gâteaux derivabile. Intr-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ şi $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, avem

$$c'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (c - c) = 0$$

şi

$$T'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - T(\mathbf{x}_0)\right) = T(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

În consecinţă, $\mathrm{D}c(\mathbf{x}_0) = 0$, $\mathrm{D}T(\mathbf{x}_0) = T$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă , $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Fie $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$. Dacă $f$ este derivabilă în $\mathbf{x}_0$ în direcţia $\mathbf{e}_k$ pentru un $k \in \{1, \ldots, n\}$, spunem că $f$ admite o *derivată parţială* în raport cu $x_k$ în $\mathbf{x}_0$, pe care o notăm

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) := f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_k).$$

Observăm că derivata parţială a lui $f$ în raport cu $x_k$ în $\mathbf{x}_0$ se obţine prin derivarea funcţiei ce se obţine variind numai componenta $x_k$ a lui $\mathbf{x}_0$, celelalte rămânând fixe. Într-adevăr, dacă $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$, atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)\right) \\ &= \lim_{x_k\to x_k^0} \frac{1}{x_k - x_k^0} \left(f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)\right).\end{aligned}$$

Bineînţeles, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\right) \in \mathbb{R}^m$, unde $f_1, \ldots, f_m$ sunt componentele lui $f$.

Existenţa derivatelor parţiale ale unei funcţii de mai multe variabile nu implică existenţa tuturor derivatelor direcţionale (adică a diferenţiabilităţii Gâteaux) în acel punct, după cum ne arată următorul exemplu:

[1]Vezi definiţia în cursul precedent. Noţiunea de mulţime deschisă înlocuieşte pe cea de interval deschis folosită pentru funcţii de o singură variabilă.

**Exemplu.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, dar

$$\frac{f((0,0)+t(u,v)) - f((0,0))}{t} = \frac{\frac{t^2uv}{t^2(u^2+v^2)}}{t} = \frac{1}{t}\frac{uv}{u^2+v^2}.$$

Aşadar derivata direcţională $f'((0,0);(u,v))$ nu există dacă $uv \neq 0$.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie Gâteaux derivabilă în $\mathbf{x}_0$.

*a)* Matricea din $\mathscr{M}_{mn}$ asociată cu $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$ (în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$) se numeşte *matricea jacobiană* a lui $f$ în $\mathbf{x}_0$ şi este notată $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$.

*b)* În cazul $m = 1$, matricea jacobiană a lui $f$ în $\mathbf{x}_0$ se numeşte de asemenea *gradientul* lui $f$ şi se mai notează $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.

*c)* În cazul $m = n$, determinantul lui $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$ se numeşte *jacobianul* lui $f$ în $\mathbf{x}_0$ şi se notează $\frac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x}_0)$, unde $f_1, \ldots, f_n$ sunt componentele lui $f$.

**Observaţii.**

**1.** Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie Gâteaux derivabilă în $\mathbf{x}_0$. Se poate arăta cu uşurinţă că $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$, adică matricea ce are ca linii elementele lui $\nabla f_k(\mathbf{x}_0)$ pentru $k \in \{1, \ldots, m\}$. Pe de altă parte,

$$\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix},$$

adică matricea ce are drept coloane elementele lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Particularizând pentru cazul $m = 1$, obţinem

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Putem vedea matricea linie $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ca un element al lui $\mathbb{R}^n$; în acest caz putem scrie

$$f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i, \ \forall \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**2.** În ceea ce priveşte operaţiile cu funcţii de mai multe variabile, avem următoarele reguli, ce se aplică ori de câte ori există derivatele direcţionale în dicuţie pentru funcţiile $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- $(f+g)'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) + g'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})$;
- $(\varphi f)'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) = \varphi'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) f(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})$;
- $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) = -\dfrac{\varphi'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})}{\varphi(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})^2}$ dacă $0 \notin \operatorname{Im} \varphi$.

**3.** Dacă o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este numai Gâteaux diferenţiabilă într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, nu putem deduce continuitatea lui $f$ în $\mathbf{x}_0$, ci doar continuitatea direcţională a lui $f$ în $\mathbf{x}_0$, adică continuitatea în 0 a funcţiei $t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ pentru orice $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Chiar dacă cerem ca $f$ să fie Gâteaux derivabilă în $\mathbf{x}_0$, $f$ nu este în mod necesar continuă în $\mathbf{x}_0$. Totuşi, situaţia se schimbă dacă cerem ca derivatele parţiale să existe şi să fie mărginite într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$:

**Teorema 2.1.** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dacă există $V \in \mathscr{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ să existe pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt mărginite pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, atunci $f$ este continuă în $\mathbf{x}_0$.*

**Observaţie.** O condiţie suficientă ca $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ să fie mărginită pe o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ este ca ea să fie continuă în $\mathbf{x}_0$.

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă.

*a)* Dacă $A$ este deschisă, spunem că o funcţie $f : A \to \mathbb{R}^m$ este de clasă $C^1$ dacă toate derivatele parţiale ale lui $f$ există şi sunt continue.
*b)* Dacă $A$ este deschisă, notăm $C^1(A;\mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}$ ce sunt de clasă $C^1$. Dacă $m = 1$, o vom nota mai simplu $C^1(A)$.
*c)* Notăm $C(A;\mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcţiilor continue $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $m = 1$, o vom nota doar $C(A)$.

Teorema 2.1 şi remarca de mai jos ne permite să conchidem că $C^1(D;\mathbb{R}^m) \subseteq C(D;\mathbb{R}^m)$ pentru orice submulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

## 3. Diferenţiabilitate Fréchet

Remarcăm că o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0$ dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

În acest caz, $a = f'(x_0)$. Pentru a extinde conceptul de derivată la funcţii de mai multe variabile, o altă posibilitate este de a înlocui în proprietatea de mai sus numărul real $a$ cu o matrice, sau, echivalent, un operator liniar.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie.
*a)* Pentru $\mathbf{x}_0 \in D$, spunem că $f$ este *diferenţiabilă Fréchet* în $\mathbf{x}_0$ dacă există un operator liniar $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ astfel încât

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

În acest caz, operatorul $T$ se numeşte *diferenţiala Fréchet* a lui $f$ în $\mathbf{x}_0$ şi se notează $\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$.
*b)* Spunem că $f$ este *diferenţiabilă Fréchet* pe o submulţime $D_0 \subseteq D$ dacă $f$ este diferenţiabilă Fréchet în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.

**Observaţie.** Un alt mod de a exprima faptul că $f$ este *diferenţiabilă Fréchet* în $\mathbf{x}_0$ este că există $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ şi o funcţie continuă $\alpha : D \to \mathbb{R}^m$ astfel încât $\alpha(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$ şi

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\,\alpha(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in D.$$

De fapt, $\alpha$ se poate defini prin

$$\alpha(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\left(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right), & \mathbf{x} \in D \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}; \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Legătura între diferenţiabilitatea Fréchet şi diferenţiabilitatea Gâteaux este dată de următorul rezultat:

**Teorema 3.1.** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Dacă $f$ este diferenţiabilă într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci $f$ este derivabilă Gâteaux în $\mathbf{x}_0$ şi $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$.*

O consecinţă imediată a acestei teoreme este că diferenţiala Fréchet este unică, deoarece derivata Gâteaux este unică (datorită faptului că $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})$, pentru orice $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$).

O altă consecinţă este că dacă $f$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci $f$ are derivate parţiale în $\mathbf{x}_0$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i),\ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Funcţiile constante şi aplicaţiile liniare sunt diferenţiabile Fréchet differentiable, de asemenea. Într-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ and $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(c - c - \mathbf{0}_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$$

şi

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m},$$

ceea de demonstrează clar afirmaţia şi chiar mai mult, că $\mathrm{d}c(\mathbf{x}_0) = 0$, $\mathrm{d}T(\mathbf{x}_0) = T$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Fie $\mathrm{pr}_i : D \to \mathbb{R}$ proiecţia pe componenta $i$:

$$\mathrm{pr}_i\,(x_1,\dots,x_n) = x_i,\ (x_1,\dots,x_n) \in D,\ i = \overline{1,n}.$$

Diferenţiala Fréchet a lui $\mathrm{pr}_k$ este în mod tradiţional notată $\mathrm{d}x_k$:

$$\mathrm{d}x_i\,(u_1,\dots,u_n) = u_i,\ (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,n}.$$

Deoarece

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}x_i(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{u} = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

avem

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}x_i.$$

Prin contrast cu derivabilitatea Gâteaux, diferenţiabilitatea Fréchet implică continuitatea:

**Teorema 3.2.** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Dacă $f$ este diferenţiabilă Fréchet într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci $f$ este continuă în $\mathbf{x}_0$.*

O condiţie suficientă pentru diferenţiabilitatea Fréchet este dată de următorul rezultat:

**Teorema 3.3.** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Dacă există $V \in \mathscr{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ există pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, atunci $f$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$.*

O consecinţă a acestui rezultat este că dacă $f \in C^1(D;\mathbb{R}^m)$, atunci $f$ este Fréchet diferenţiabilă.

În ceea ce priveşte calculele cu diferenţială Fréchet, putem aplica următoarele reguli:

**Teorema 3.4.** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $E \subseteq \mathbb{R}^m$ mulţimi deschise nevide.*

***i)*** *Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ şi*

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) = \alpha \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0) + \beta \mathrm{d}g(\mathbf{x}_0),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

***ii)*** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}^m$ şi $\varphi : D \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci $\varphi f$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ şi*

$$\mathrm{d}(\varphi f)(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0) + \varphi(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0).$$

***iii)*** *Dacă $\varphi : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât $0 \notin \varphi[D_0]$, $\frac{1}{\varphi} : D_0 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ şi*

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varphi}\right)(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{\varphi(\mathbf{x}_0)^2}\mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}_0).$$

***iv)*** *Dacă $f : D \to E$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$, $g : E \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $g \circ f$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ şi*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}g(f(\mathbf{x}_0)) \circ \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0).$$

Ultima relaţie este cunoscută drept *regula lanţului* pentru diferenţialele Fréchet. Deoarece matricea jacobiană a unei funcţii diferenţiabile Fréchet este matricea asociată diferenţialei ei Fréchet, aceasta poate fi scrisă ca

$$\mathrm{J}_{g \circ f}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{J}_g(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$$

sau, în termeni de derivate parţiale,

$$\frac{\partial(g_j \circ f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0),\ \forall i = \overline{1,n},\ \forall j = \overline{1,p}.$$

În cazul $m = n = p$, aplicând determinanţii relaţiei matriceale de mai sus, obţinem

$$\frac{\mathrm{D}(g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{D}(g_1,\dots,g_n)}{\mathrm{D}(y_1,\dots,y_n)}(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\mathrm{D}(f_1,\dots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}_0).$$

De aceea, dacă $f : D \to E$ este bijectivă şi $f^{-1}$ este de asemenea diferenţiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$ este nesingulară, $\mathrm{J}_{f^{-1}}(f(\mathbf{x}_0)) = (\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}$ şi

$$\frac{\mathrm{D}(f_1,\dots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}_0) \neq 0;$$

$$\frac{\mathrm{D}(f_1^{-1},\dots,f_n^{-1})}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(f(\mathbf{x}_0)) = \frac{1}{\frac{\mathrm{D}(f_1,\dots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}_0)}.$$

Definiţie. Fie $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ mulţimi deschise nevide. O funcţie $f : D \to E$ se numeşte *difeomorfism* dacă $f$ este bijectivă, $f \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$ şi $\mathrm{J}_f(\mathbf{x})$ este nesingulară pentru orice $\mathbf{x} \in D$.

Se poate arăta că dacă $f : D \to E$ este un difeomorfism, atunci $f^{-1} \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$.

## 4. Derivate de ordin superior

Vom considera mai întâi cazul funcţiilor reale de o variabilă. Pentru o funcţie derivabilă $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A$ este un interval cu interior nevid, este definită $f' : A \to \mathbb{R}$. Putem astfel vorbi de derivabilitatea noii funcţii $f'$: derivata lui $f'$ într-un punct $x_0 \in A$, dacă există, va fi notată $f''(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ şi este numită *derivata de ordin doi* a lui $f$ în $x_0$. Bineînţeles, dacă $f''(x_0)$ există şi este finită pentru orice $x_0 \in A$ (adică $f'$ este derivabilă), aceasta defineşte o funcţie, numită *derivata de ordin doi* a lui $f$: $f'' : A \to \mathbb{R}$.

Procesul poate continua: dacă $f^{(n-1)} : A \to \mathbb{R}$ este derivata de ordin $n-1$ a lui $f$ (pentru $n \geq 3$), atunci $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$ notează, în cazul în care există, derivata lui $f^{(n-1)}$ în $x_0 \in A_{n-1}$ şi se numeşte *derivata de ordin n* a lui $f$ în $x_0$. Dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă, atunci derivata acesteia este o funcţie $f^{(n)} : A \to \mathbb{R}$, numită *derivata de ordin n* a lui $f$.

Acest procedeu recursiv poate fi aplicat şi funcţiilor de mai multe variabile, obţinând *derivate direcţionale de ordin superior*, *diferenţiale* sau *derivate Gâteaux de ordin superior* şi *diferenţiale Fréchet de ordin superior*. Un caz particular de derivate direcţionale de ordin superior este constituit de *derivatele parţiale de ordin superior*:

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Dacă $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ pentru $p \geq 2$, *derivata parţială de ordin p* a lui $f$ în raport cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ este definită recursiv ca

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(\mathbf{x}_0) := \frac{\partial \left( \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}} \right)}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0),$$

cu condiţia ca derivata parţială (de ordin $p-1$) $\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_2 \ldots \partial x_p}$ să existe într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ şi să admită derivată parţială în raport cu $x_{i_1}$ în $\mathbf{x}_0$.

Dacă $i_1 = \cdots = i_p = i$, în loc de $\frac{\partial^p f}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}$ putem scrie $\frac{\partial^p f}{\partial x_i^p}$. Dacă nu este cazul, derivata parţială se numeşte *derivată parţială mixtă*. Următoarele rezultate oferă condiţii suficiente pentru schimbarea ordinii indicilor $i_1, \ldots, i_p$.

**Teorema 4.1** (Schwarz). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie şi $i, j \in \{1, \ldots n\}$ cu $i \neq j$. Dacă derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ şi sunt continue în $\mathbf{x}_0$, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

**Teorema 4.2** (Young). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie şi $i, j \in \{1, \ldots n\}$ cu $i \neq j$. Dacă derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ există într-o vecinătate deschisă a lui $\mathbf{x}_0$ şi sunt Fréchet diferenţiabile în $\mathbf{x}_0$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există şi sunt egale.*

În condiţiile teoremelor Schwarz sau Young, se pot ordona (şi grupa) $i_1, \ldots, i_p$ în derivata parţială mixtă $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}$ şi aceasta se poate scrie ca

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{$\star$}$$

unde, pentru $i = \overline{1, n}$, $\alpha_i$ este numărul de $i$ care apar în lista $i_1, \ldots, i_p$. Vectorul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se numeşte *multi-indice* şi avem $p = |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. De fapt, în expresia ($\star$), se pot omite termenii $\partial x_i^{\alpha_i}$ dacă $\alpha_i = 0$.

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă nevidă şi pentru $p \geq 2$, $C^p(D; \mathbb{R}^m)$ este definită ca mulţimea funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$ astfel încât toate derivatele parţiale de ordin $p$ există şi sunt continue. Notăm de asemenea prin $C^\infty(D; \mathbb{R}^m)$ mulţimea funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$ astfel încât $f \in C^p(D; \mathbb{R}^m)$, pentru orice $p \geq 1$. În cazul $m = 1$, vom nota $C^p(D)$ în loc de $C^p(D; \mathbb{R})$ (pentru $p \in \mathbb{N}^*$ sau $p = \infty$). Bineînţeles, avem

$$C^\infty(D; \mathbb{R}^m) \subseteq \cdots \subseteq C^p(D; \mathbb{R}^m) \subseteq \cdots \subseteq C^1(D; \mathbb{R}^m) \subseteq C(D; \mathbb{R}^m).$$

Diferenţiabilitatea Fréchet de ordin superior poate fi introdusă după cum urmează:

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie şi $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

***a)*** Spunem că $f$ este *diferenţiabilă Fréchet* de ordin $p$ în $\mathbf{x}_0 \in D$ dacă există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât toate derivatele parţiale de ordin $p-1$ există în $D_0$ şi sunt diferenţiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0$.

***b)*** Spunem că $f$ este *diferenţiabilă Fréchet* de ordin $p$ într-o submulţime $D_0 \subseteq D$ dacă $f$ diferenţiabilă Fréchet de ordin $p$ în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.

*c)* Dacă $f$ este Fréchet diferenţiabilă Fréchet de ordin $p$ în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci *diferenţiala Fréchet* de ordin $p$ în $\mathbf{x}_0$ este definită ca $\mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ prin

$$\mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) := \sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le n} u_{i_1}\cdot\dots\cdot u_{i_p}\cdot\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_p}}(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Folosind multiindici, formula ce defineşte pe $\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0)$ este similară cu cea care defineşte pe $(u_1+\dots+u_n)^p$. De exemplu, dacă $n=2$,

$$\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0)(u_1,u_2)=\sum_{j=0}^{p} C_p^j u_1^j u_2^{p-j}\cdot\frac{\partial^p f}{\partial x_1^j\partial x_2^{p-j}}(\mathbf{x}_0).$$

4.1. **Serii Taylor**.

O aplicaţie importantă a derivatelor de ordin superior este *formula lui Taylor*, care poate fi scrisă acum pentru funcţii de mai multe variabile.

**Teorema 4.3** (formula lui Taylor). *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie Fréchet diferenţiabilă de ordin $p+1$ pe o bilă $B(\mathbf{x}_0;r)\subseteq D$, unde $p\in\mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice $\mathbf{x}\in B(\mathbf{x}_0;r)$ există $t\in(0,1)$ astfel încât*

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\dots+\frac{1}{p!}\mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\frac{1}{(p+1)!}\mathrm{d}^p f(\xi)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

*unde $\xi:=\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$.*

Definiţie. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi $f\in C^\infty(D)$.

*a)* *Seria Taylor* asociată lui $f$ într-o vecinătate a unui punct (în jurul punctului) $\mathbf{x}_0\in D$ este următoarea serie

$$f(\mathbf{x}_0)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

*b)* În cazul $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ seria Taylor de mai sus se numeşte *seria Maclaurin* asociată lui $f$.

*c)* Spunem că o funcţie este *analitică* într-o bilă $B(\mathbf{x}_0;r)\subseteq D$ dacă seria Taylor asociată lui $f$ în jurul lui $\mathbf{x}_0$ converge la $f(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}\in B(\mathbf{x}_0;r)$.

În cazul $n=1$, seria Taylor asociată unei funcţii este o serie de puteri. Reciproc, dacă o funcţie $f$ este definită de o serie de puteri $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ pe domeniul ei de convergenţă, atunci $f$ este analitică în $(-r,r)$, unde $r\in[0,+\infty]$ este raza ei de convergenţă. De fapt,

$$f^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot\dots\cdot(k+p)a_{k+p}(x-x_0)^k,\ \forall x\in(-r,r),\ \forall p\in\mathbb{N}^*.$$

Aşadar, $f^{(p)}(x_0)=p!a_p$ şi seria Taylor asociată lui $f$ în jurul lui $x_0$ este chiar $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ (ceea ce demonstrează că $f$ este analitică în $(-r,r)$).

Totuşi, convergenţa seriei Taylor asociată unei funcţii $f$ nu implică faptul că suma ei este $f$. De exemplu, fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită de

$$f(x):=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Atunci $f^{(p)}(0)=f(0)=0$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, deci seria Maclaurin asociată este seria nulă; aşadar suma ei (zero) este diferită de $f$ pe orice interval centrat în 0.

Mai jos redăm câteva serii Maclaurin pentru câteva funcţii analitice cunoscute:

- $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots,\ x\in(-1,1);$
- $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dots,\ x\in(-1,1);$
- $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots,\ x\in\mathbb{R};$
- $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dots,\ x\in\mathbb{R};$
- $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dots,\ x\in\mathbb{R};$

- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}.$

## Bibliografie selectivă


[1] E. Cioară, M. Postolache, *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.
[2] R. M. Dăneţ, S. D. Niţă, I. Popescu, M. V. Popescu, F. Voicu, *Curs modern de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.
[3] D. Guichard & al., *Single and Multivariable Calculus,* Creative Commons, San Francisco, 2016.
[4] F. Iacob, *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.
[5] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
[6] David B. Massey, *Worldwide Multivariable Calculus,* Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2015.
[7] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[8] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.