Cursul 3
Serii de numere reale. Serii cu termeni pozitivi

Conceptul de “serie numerică” este o generalizare naturală a noţiunii de “sumă finită de numere reale” cu observaţia că se aplică unei mulţimi infinite ale cărei elemente sunt termenii unui şir. Din acest mod de determinare a unei serii numerice, vom preciza legăturile cu şirurile numerice şi sumele finite din $\mathbb{R}$.

Definiţia 3.1 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale. Cuplul format din şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde*

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

se numeşte ***serie de numere reale*** *şi se notează prin*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \text{ sau } \sum_{n\geq 1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte ***şirul sumelor parţiale ataşat seriei****, iar x_n se numeşte* ***termen general al seriei****.*

Observaţie: Dacă primii $k-1$ termeni, $x_1, x_1, \ldots, x_{k-1}$, lipsesc, vom nota seria de termen general x_n cu

$$\sum_{n\geq k} x_n \text{ sau } \sum_{n=k}^{\infty} x_n$$

Definiţia 3.2 *i) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este* ***convergentă*** *dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, vom nota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(C)$;*

ii) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este ***divergentă*** *dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent (adică dacă şirul (S_n) nu are limită sau are limită infinită). În acest caz, vom nota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(D)$;*

iii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci numim S ***suma seriei*** *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi scriem $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Câteodată, vom adapta această definiţie pentru seria $\sum\limits_{n=p}^{\infty} x_n$ (notată şi $\sum\limits_{n\geq p} x_n$) atunci când $p \in \mathbb{N}, p \neq 1$.

Dacă vrem să determinăm *natura seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$(adică, dacă este convergentă sau divergentă), nu contează dacă eliminăm un număr finit de elemente din serie. Aşadar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=p}^{\infty} x_n$, unde $p > 1$. Însă suma seriei se poate schimba.

Definiţia 3.3 *Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale. Pentru $p \in \mathbb{N}$, numim* ***restul de ordin*** *p al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, seria $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} x_n$, pe care, de regulă, o vom nota cu R_p.*

Teorema 3.4 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $p \in \mathbb{N}$*, seria* R_p *este convergentă. În plus, dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$.

Demonstraţie: Prima parte a teoremei rezultă imediat, din faptul că nu contează dacă adăugăm sau suprimăm un număr finit de termeni, natura seriei nu se schimbă. Demonstrăm a doua parte. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă având suma S, atunci, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$R_p = S - S_p.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = S - \lim\limits_{p\to\infty} S_p = S - S = 0$, deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} S_p = S$. □

Exemple. Serii remarcabile

1) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, se numeşte ***seria geometrică cu raţia*** q. Şirul sumelor parţiale ataşat ei are termenul general S_n dat prin

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cum (S_n) converge pentru $q \in (-1,1)$ şi diverge pentru $q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$, avem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n (C)$ pentru $q \in (-1,1)$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n (D)$ pentru $q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$.

De asemenea, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1,1);$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \geq 1;$$

Dacă $q = -1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ se numeşte *seria lui Grandi*, şi este divergentă.

2) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ este divergentă, deoarece sumele ei parţiale tind spre $+\infty$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, putem scrie S_n astfel:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \Big[\ln(k+1) - \ln k\Big] = \ln(n+1).$$

Aşadar, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limita $+\infty$.

3) Seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$ este convergentă, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, avem

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k - \sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2-k}} - \frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)=\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}$, obţinem că seria este convergentă şi $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}=\sqrt{2}-1$.

Observaţie: În exemplele 2) şi 3) de mai sus, am putut scrie sumele parţiale ca *sume telescopice*, fapt ce a facilitat găsirea sumei seriilor.

Teorema 3.5 (condiţia necesară de convergenţă) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Demonstraţie: Fie $S_n=x_1+x_2+...+x_n, n\in\mathbb{N}^*$. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ fiind convergentă, rezultă că $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Pe de altă parte, cum $x_n=S_n-S_{n-1}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

$\square$

Observaţie: Dacă pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge la 0, atunci seria este divergentă. Prin urmare, când vrem să vedem dacă o serie este convergentă, primul lucru pe care trebuie sa îl verificăm este că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, altfel, seria este divergentă. Atenţie, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ nu implică neapărat convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$!

Următorul rezultat prezintă un criteriu general de convergenţă al unei serii de numere reale.

Teorema 3.6 ***(Criteriul lui Cauchy)*** *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*,\forall n\geq n_\varepsilon,\forall p\in\mathbb{N}^*:|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}|<\varepsilon.$$

Demonstraţie: Fie $S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n, n\in\mathbb{N}^*$. Din criteriul lui Cauchy de convergenţă pentru şiruri (vezi Curs 2), rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*,\forall n\geq n_\varepsilon,\forall p\in\mathbb{N}^*:|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

Dar cum $S_{n+p}-S_n=x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}$ pentru orice $n,p\in\mathbb{N}^*$, ceea ce demonstrează concluzia. $\square$

Prin negare, enunţul Teoremei 3.6 devine:

Propoziţia 3.7 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este divergentă dacă şi numai dacă*

$$\exists\varepsilon>0,\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists k_n\geq n,\exists p_n\in\mathbb{N}^*:|x_{k_n+1}+x_{k_n+2}+\ldots+x_{k_n+p_n}|\geq\varepsilon.$$

Exemplu: *Seria armonică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ este divergentă.(Seria se numeşte ***armonică*** întrucât x_n este media armonică a numerelor x_{n-1} şi x_{n+1}, adică $\dfrac{2}{x_n}=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_{n+1}},\forall\, n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$.)

Considerăm şirul sumelor parţiale $S_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ şi arătăm că $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este şir Cauchy. Fie $n,p\in\mathbb{N}^*,p\geq n$. Atunci avem

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}\geq\frac{1}{2}.$$

Aşadar, există $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ aşa încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_n := n, p_n := n \in \mathbb{N}^* : \left|\dfrac{1}{k_n+1} + \ldots + \dfrac{1}{k_n+p_n}\right| \geq \dfrac{k_n}{k_n+p_n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Prin urmare, seria armonică este divergentă.

Operaţii cu serii

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii de numere reale. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ se numeşte *suma* seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ se numeşte *produsul seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cu numărul (scalarul) $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.8 *Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii convergente, cu $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Atunci:*

i) dacă $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $S \leq T$;

ii) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n) = S+T$.

iii) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n) = \lambda S$.

Observaţie: Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt divergente, atunci este posibil ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ să fie convergentă. Spre exemplu, seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ sunt divergente, pe când seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right]$ este convergentă, având şirul sumelor parţiale constant.

Teorema 3.9 *Dacă într-o serie convergentă se asociază termenii seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor, atunci se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă.*

Observaţie: Câteodată, asocierea termenilor unei serii divergente definesc o serie convergentă. Spre exemplu, dacă asociem doi câte doi termenii seriei lui Grandi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, care este divergentă, obţinem seria

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots$$

care este convergentă, având suma 0.

Serii cu termeni pozitivi

Spunem că o serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ are ***termeni pozitivi*** dacă $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este clar că şi şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Aşadar, are loc următorul rezultat:

Propoziţia 3.10 *Seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor sale parţiale, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este majorat.*

În cele ce urmează, vom prezenta unele criterii de convergenţă şi de divergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.11 (Criteriul I de comparaţie - CCI) *Fie seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, *astfel încât* $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (C), *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D), *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (D).

Demonstraţie: i) Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şi $T_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (C), şirul (T_n) este mărginit, conform Propoziţiei 3.10. Din ipoteză avem $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, obţinem că $S_n \leq T_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică şi (S_n) este majorat. Folosind acelaşi rezultat obţinem $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C).

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D) atunci avem (S_n) nemajorat. Prin urmare, folosind Propoziţia 3.10, obţinem că (S_n) este divergent. Aşadar, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (D). $\square$

Exemple:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha < 1$ este divergentă. Cum pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, \alpha < 1$, are loc inegalitatea $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$, iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă(serie armonică), rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Observăm că $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \forall n \geq 2$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ este convergentă(deoarece $S_n = \sum_{n=2}^{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$). Prin urmare, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Teorema 3.12 (Criteriul II de comparaţie - CCII) *Fie seriile cu termeni strict pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *astfel încât*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(C)$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(C)$;

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(D)$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(D)$.

Demonstraţie: Înmulţind membru cu membru relaţiile

$$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{y_2}{y_1},\ \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{y_3}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

vom obţine că $\frac{x_n}{x_1} \leq \frac{y_n}{y_1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Altfel spus, avem $x_n \leq \frac{x_1}{y_1} y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1}{y_1} y_n$ este convergentă. Aplicând criteriul I de comparaţie obţinem concluzia. $\square$

Teorema 3.13 (Criteriul III de comparaţie - CCIII) *Fie seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, *cu* $y_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in [0, \infty]$, *atunci:*

i) dacă $\ell \in (0, +\infty)$, *atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *au aceeaşi natură;*

ii) pentru $\ell = 0$, *avem*

a) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$ *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

b) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$;

iii) pentru $\ell = +\infty$, *avem*

a) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$;

b) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$.

Demonstraţie:

i) Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in [0, \infty)$, atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât

$$(*) \quad \ell - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \ell + \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

Când $\ell > 0$, alegem $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ şi vom avea $\frac{\ell}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3\ell}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$. Astfel, aplicarea criteriului CCI rezultă că seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ au aceeaşi natură.

ii) Dacă $0 = \ell = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci pentru $\varepsilon = 1$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|\frac{x_n}{y_n}| < 1, \forall n \geq n_1$, adică $x_n < y_n, \forall n \geq n_1$. Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=n_1}^{\infty} x_n$, iar $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=n_1}^{\infty} y_n$, din CCI obţinem concluzia.

iii) Când $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, consideram $\varepsilon = 1 > 0$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 1, \forall n \geq n_1$, adică $x_n > y_n, \forall n \geq n_1$. Concluzia reiese din CCI, inversând rolurile seriilor $\sum_{n=n_1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=n_1}^{\infty} y_n$.

□

Exemplu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ este divergentă, deoarece dacă vom considera seria armonică $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ (D) şi observând că există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0, +\infty)$, putem spune, prin aplicarea criteriului CCIII, punctul i), că seria dată este de aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Deci $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ (D).

Teorema 3.14 (Cauchy: Criteriul condensării) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir descrescător de numere pozitive. Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$.

Exemplu:

- ***Seria armonică generalizată***, definită prin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.
  Aplicând criteriul condensării, obţinem că natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este aceeaşi cu a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Cum aceasta din urmă este convergentă când $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ şi divergentă în rest, adică pentru $0 \leq \alpha \leq 1$, concluzionăm că seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă când $\alpha \leq 1$.

Teorema 3.15 (Criteriul rădăcinii - al lui Cauchy) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*
Dacă există $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, \infty]$, *atunci:*

i) dacă $\ell < 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă;*

ii) dacă $\ell > 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este divergentă;*

Pentru cazul $\ell = 1$, nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$(spre exemplu seria armonică generalizată). În acest caz, trebuie să aplicăm alte criterii.

Demonstraţie: Cum există $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, +\infty)$, avem: are loc relaţia

$$(\bullet) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon : \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon.$$

i) Cum $\ell < 1$, considerăm $\varepsilon \in (0, 1-\ell)$ şi atunci rezultă că $x_n < (\ell+\varepsilon)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Întrucât seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell+\varepsilon)^n$ este convergentă(serie geometrică cu raţia subunitară), rezultă, utilizând CCI, că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C).
ii) Cum $\ell > 1$, alegem $\varepsilon \in (0, \ell-1)$ şi atunci, din $(\bullet)$ rezultă că $1 < (\ell-\varepsilon)^n < x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$. Pe baza criteriului CCI, întrucât seria $\sum_{n=1}^{\infty} (l-\varepsilon)^n$, în care $l - \varepsilon > 1$, este divergentă, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

□

Observaţie: Atunci când nu există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, o variantă mai “slabă” a criteriului rădăcinii are loc cu $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ în rolul lui ℓ, la i) şi cu $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$, în loc de ℓ, la ii).

Teorema 3.16 ***(Criteriul lui Kummer)*** *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$.
Dacă există $\lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *atunci:*

i) când $\ell > 0$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(C);*

ii) dacă $\ell < 0$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *(D), atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(D).*

Dacă $\ell = 0$ nu putem spune nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demonstraţie: i) Fie $\varepsilon \in (0, \ell)$; găsim $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} > \varepsilon, \forall n \geq n_0,$$

adică

$$a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1} > \varepsilon x_{n+1}, \forall n \geq n_0.$$

Adunând aceste inegalităţi de la n_0 la $n-1$, obţinem $a_{n_0} x_{n_0} - a_n x_n > \varepsilon(x_{n_0} + \ldots + x_n)$ $\forall n \geq n_0$. Prin urmare, avem

$$x_{n_0} + \ldots + x_n < \frac{a_{n_0} x_{n_0} - a_n x_n}{\varepsilon} \leq \frac{a_{n_0} x_{n_0}}{\varepsilon}.$$

Acest lucru implică faptul că şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ este mărginit, deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C).

ii) Deoarece $\ell < 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < 0, \forall n \geq n_0,$$

adică

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}},\ \forall n \geq n_0.$$

Cum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (D), aplicând CC2 obţinem $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D). □

Particularizând şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ – $(1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(n \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ – regăsim următoarele criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi:

Teorema 3.17 (Criteriul raportului - al lui D'Alembert) *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, *pentru care există limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, \infty]$. *Atunci:*

i) dacă $\ell < 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(C);*

ii) dacă $\ell > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(D);*

iii) dacă $\ell = 1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Teorema 3.18 (Criteriul lui Raabe-Duhamel) *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, *astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \right] = \rho.$$

i) Dacă $\rho > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(C);*

ii) Dacă $\rho < 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(D);*

iii) Dacă $\rho = 1$, *nu putem stabili natura seriei.*

Dacă, în Teorema 3.16, luăm $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci obţinem:

Teorema 3.19 (Criteriul lui Bertrand) *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln (n+1) \right) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

i) Dacă $\mu > 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(C);*

ii) Dacă $\mu < 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(D);*

iii) Dacă $\mu = 0$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demonstraţie: Pentru a demonstra acest rezultat, vom folosi faptul că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă(seria are, conform criteriului condensării, aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ care este divergentă). $\square$

Următorul criteriu prezentat, este şi cel mai general, de regulă aplicat atunci când Criteriul Raabe-Duhamel eşuează.

Teorema 3.20 (Criteriul lui Gauss) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *o serie cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Presupunem că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir mărginit astfel încât*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) dacă $\alpha > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\alpha < 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\alpha = 1$ *şi* $\beta > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

iv) dacă $\alpha = 1$ *şi* $\beta \leq 1$, *atunci atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

Demonstraţie: Deoarece din enunţ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{\alpha}$, din criteriul raportului obţinem obţinem i) şi ii). Studiem cazul $\alpha\neq 1$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-\alpha\Big)=\beta$, din criteriul Raabe-Duhamel, pentru $\beta\neq 1$, obţinem punctele iii) şi iv)(pentru $\beta<1$). Tratăm acum cazul $\alpha=1,\beta=1$. Aplicând criteriul lui Bertrand, avem

$$\begin{aligned} n\ln n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1) &= n\ln n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{y_n}{n^{1+\gamma}}\right)-(n+1)\ln(n+1)\\ &= -(n+1)\ln\frac{n+1}{n}+y_n\frac{\ln n}{n^\gamma}\\ &= \ln\left[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-(n+1)}\right]+y_n\frac{\ln n}{n^\gamma}. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-(n+1)}\right]=\ln e^{-1}=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\gamma}=0$, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, avem

$$\lim_{n\to\infty}\Big[n\ln n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)\Big]=-1<0.$$

Prin urmare, din criteriul lui Bertrand, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă. □

Teorema 3.21 (Criteriul logaritmului) *Fie seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, *unde* $x_n>0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

i) Dacă $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n}>1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *converge;*

ii) Dacă $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n}<1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *diverge;*

iii) Presupunem că există limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*

- *dacă* $\ell>1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este convergentă;*
- *dacă* $\ell<1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este divergentă;*
- *dacă* $\ell=1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$.

Teorema 3.22 (Criteriul logaritmului) *Fie seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, *unde* $x_n>0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$ *pentru care există limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*

i) dacă $\ell>1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este convergentă;*

ii) dacă $\ell<1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ *este divergentă;*

iii) dacă $\ell=1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$.

Demonstraţie: Fie α astfel încât $1 < \alpha < \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}$. Din definiţia limitei inferioare rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} > \alpha$, pentru orice $n \geq n_0$. Rezultă că $x_n < \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \geq n_0$ şi conform criteriului de comparaţie de specia I, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Analog se demonstrează şi punctul *ii*). Punctul *iii*) rezultă din *i*), *ii*) şi utilizând Teorema 2.25 din Cursul 2. $\square$

Bibliografie orientativă

[1] A. Knopfmacher, J. Knopfmacher - *Two Constructions of the Real Numbers via Alternating Series*, Iternat. J. Math & Math. Sci., Vol. 12, no. 3 (1989), pp 603-613.

[2] J. Galambos - *The Representation of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Math., 502, Springer, 1976.

[3] C. Badea - *A theorem of irrationality of infinte series and applications*, Acta Arithmetica, LXIII, 4 (1993).

[4] K. Knopp - *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990.

[5] G. Bagni - *Infinite Series from History to Mathematics Education*, 2005.

[6] Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 3)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[7] Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul Diferenţial. (Cap. 2)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

[8] E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 2)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[9] Marina Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Reprografia Univ. Craiova, 2000.

[10] Rodica Mihaela Dăneţ ş.a. - *Curs modern de analiză matematică.Volumul I (Cap. 1)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2009.

[11] John K. Hunter - *An Introduction to Real Analysis (Chap. 4),* University of California at Davis, 2014.