

# Cursul 5

## Spații liniare

### Spații liniare. Subspații liniare

**Definiția 2.1** Fie  $V$  o mulțime nevidă și  $K$  un corp comutativ. Spunem că pe  $V$ , este definită o **structură algebrică de spațiu liniar peste corpul  $K$**  dacă și numai dacă există o lege internă  $+: V \times V \rightarrow V$  și o lege de compoziție externă  $\cdot: K \times V \rightarrow V$ , astfel încât sunt îndeplinite următoarele axiome:

- i)  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ ;
- ii)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ;
- iii)  $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \mathbf{x} \in V: \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ;
- iv)  $\forall \mathbf{x} \in V, \exists (-\mathbf{x}) \in V: \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- v)  $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}, \forall \alpha \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ;
- vi)  $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathbf{x} \in V$ ;
- vii)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathbf{x} \in V$ ;
- viii)  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V$ , unde  $1$  este elementul unitate din  $K$ .

Ansamblul  $(V, K, +, \cdot)$  se numește **spațiu liniar** (sau **spațiu vectorial**) peste  $K$ . Elementele spațiului liniar  $V$  se numesc **vectori**, iar elementele lui  $K$  sunt numite **scalari**. Legea de compoziție internă  $+$  poartă denumirea de **adunare a vectorilor**, iar legea de compoziție externă  $\cdot$  se numește **înmulțire cu scalari**.

Când  $K = \mathbb{R}$ ,  $V$  se mai numește **spațiu liniar real**, iar când  $K = \mathbb{C}$ ,  $V$  se mai numește **spațiu liniar complex**. Elementul neutru  $\mathbf{0} \in V$  se numește **vector nul**, în timp ce vectorul  $-\mathbf{x}$  se numește **vectorul opus** lui  $\mathbf{x} \in V$ .

Primele patru proprietăți din definiția de mai sus afirmă că  $(V, +)$  este grup comutativ. Celelalte patru arată legătura între operația externă  $\cdot$  și operația internă  $+$ . Dacă  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt doi vectori, se obișnuiește a se nota  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  în loc de  $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$  (ca în cazul grupurilor aditive).

Se poate arăta cu ușurință că  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  are o structură de spațiu liniar peste  $\mathbb{R}$ . Un exemplu mai general este dat de spațiul  $\mathbb{R}^n$ , pe care îl vom utiliza destul de des în cadrul acestui curs.

**Propoziția 2.2** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ , fie mulțimea  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$ , și fie operațiile  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectiv  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definite prin

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \forall \alpha \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  este spațiu liniar peste corpul  $\mathbb{R}$ .

Dacă nu este specificat altfel, vom considera că spațiul  $\mathbb{R}^n$  este dotat cu operațiile de mai sus, numite și **operații canonice**. Dacă  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , atunci vom numi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **coordonatele** lui  $\mathbf{x}$ .

**Demonstrație:** Vom verifica proprietățile care definesc un spațiu liniar peste  $\mathbb{R}$ .

Fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  și  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  și  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  în  $\mathbb{R}^n$ . Definim de asemenea  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , și  $(-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ .

- i)  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (x_1, \dots, x_n) + ((y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$   
 $= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n)$   
 $= ((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) + (z_1, \dots, z_n) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z};$
- ii)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n)$   
 $= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{y} + \mathbf{x};$
- iii)  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x};$
- iv)  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0};$
- v)  $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n)$   
 $= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y};$
- vi)  $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, \dots, (\alpha + \beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n)$   
 $= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n) = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) + \beta \cdot (x_1, \dots, x_n) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x};$
- vii)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots, (\alpha\beta)x_n)$   
 $= (\alpha\beta) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x};$
- viii)  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{1} \cdot (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}.$

În concluzie,  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  este un spațiu liniar real. ◀

### Exemple de spații liniare

1. Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci mulțimea  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  a matricilor cu  $m$  linii și  $n$  coloane formează, împreună cu operațiile de adunare a matricilor și de înmulțire a matricilor cu numere reale, un spațiu liniar real.
2. Fie  $\mathbb{R}[X]$  mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți reali. Dacă  $+$  notează adunarea polinoamelor, iar  $\cdot$  reprezintă înmulțirea polinoamelor cu numere reale, atunci  $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$  este un spațiu liniar real.
3. Fie  $X$  o mulțime nevidă,  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \rightarrow V\}$ . Dacă definim  $+$  :  $\mathcal{F}(X, V) \times \mathcal{F}(X, V) \rightarrow \mathcal{F}(X, V)$  și  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(X, V) \rightarrow \mathcal{F}(X, V)$  prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X, f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X, f \in \mathcal{F}(X, V),$$

atunci  $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$  formează un spațiu liniar peste  $\mathbb{R}$ .

Particularizând  $X$  și  $V$ , obținem diverse exemple de spații vectoriale:

- Dacă  $X = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  și  $V = \mathbb{R}$ , atunci obținem spațiul liniar  $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .
- Dacă  $X \subseteq \mathbb{R}$  și  $V = \mathbb{R}$ , se obține spațiul liniar  $(\mathcal{F}, (X, \mathbb{R}), +, \cdot)$  al funcțiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe  $X$ .
- Dacă  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  și  $V = \mathbb{R}^m$ , atunci  $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m), +, \cdot)$  este spațiul liniar real al funcțiilor de  $n$  variabile cu valori în  $\mathbb{R}^m$ .
- Dacă  $X = \mathbb{N}$  și  $V = \mathbb{R}$ , mulțimea  $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$  spațiul liniar real al șirurilor de numere reale.

**Propoziția 2.3** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar real. Atunci:

- i)  $0 \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R};$
- ii)  $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V;$
- iii)  $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V;$
- iv)  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$

**Demonstrație:** Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$  și  $\mathbf{x} \in V$ .

i) Avem  $0 \cdot \mathbf{x} = (0 + 0) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$ , de unde  $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . (putem scădea  $0 \cdot \mathbf{x}$ ) De asemenea, avem  $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}$ , deci  $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

ii)  $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} = (\alpha - \alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha) \cdot \mathbf{x} \Rightarrow (-\alpha) \cdot \mathbf{x} = -\alpha \cdot \mathbf{x}$  și  $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) + \alpha \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}$ ;

iii)  $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -(-(\alpha \cdot \mathbf{x})) = \alpha \cdot \mathbf{x}$ ;

iv) Dacă  $\alpha \neq 0$  și  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , atunci  $\mathbf{x} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Altfel, dacă  $\alpha = 0$  și  $\mathbf{x}$  este arbitrar în  $V$ . ◀

**Definiția 2.4** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $W$  o submulțime nevidă a lui  $V$ . Spunem că  $(W, +, \cdot)$  este **subspațiu liniar** al lui  $(V, +, \cdot)$  dacă pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , și  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ , avem  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$  și  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W$ .

**Exemple:**

1) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Mulțimea  $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$  este, în raport cu adunarea vectorilor din  $\mathbb{R}^n$  și înmulțirea lor cu scalari din  $\mathbb{R}$ , un subspațiu liniar al lui  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ .

2) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și fie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , nu toți nuli (adică,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}$ ). Mulțimea

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

este un subspațiu liniar al lui  $\mathbb{R}^n$ , numit *hiperplan*.

3) Mulțimea *funcțiilor pare*, definită prin

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

este un subspațiu liniar al spațiului liniar real  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ .

**Propoziția 2.5** Fie  $W_1$  și  $W_2$  două subspații liniare ale lui  $(V, +, \cdot)$ . Atunci

i)  $W_1 \cap W_2$  este tot un subspațiu liniar al lui  $V$ .

ii)  $W_1 \cup W_2$  nu este întotdeauna un subspațiu liniar al lui  $V$ .

**Demonstrație:** i) Ținând seama de Propoziția 2.3 și de Definiția 2.4, putem afirma că orice subspațiu liniar al lui  $V$  conține vectorul nul  $\mathbf{0}$ . Așadar  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ .

Fie  $x, y \in W_1 \cap W_2$ . Cum  $W_1$  și  $W_2$  sunt subspații liniare ale lui  $(V, +, \cdot)$ , reiese că,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_1 \text{ și } \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_2.$$

Deci  $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$ , adică  $W_1 \cap W_2$  este un subspațiu liniar al lui  $V$ .

ii) Observăm că deși mulțimile  $V_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$  și  $V_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$  sunt subspații liniare ale lui  $\mathbb{R}^n$ , iar vectorii  $(1, 0, \dots, 0) \in V_1$  și  $(0, 0, \dots, 1) \in V_2$ , aparțin reuniunii  $V_1 \cup V_2$ , suma lor, adică vectorul  $(1, 0, \dots, 0, 1)$ , nu mai aparține acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspațiilor liniare  $V_1$  și  $V_2$  nu este un subspațiu liniar al lui  $V = \mathbb{R}^n$ . ◀

## Combinatii liniare

**Definiția 2.6** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar. O **combinație liniară** a vectorilor  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ , este un vector  $\mathbf{y} \in V$ , ce se poate scrie astfel

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k$$

unde  $n \in \mathbb{N}^*$ , iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 2.7** O submulțime nevidă  $W$  a unui spațiu liniar  $(V, +, \cdot)$  se numește **subspațiu liniar** al lui  $V$  dacă și numai dacă

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W.$$

**Definiția 2.8** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $U$  o submulțime nevidă a lui  $V$ . Atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente din  $U$ ,

$$\{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in U\}$$

se numește **subspațiul liniar generat de  $U$** , notat  $Lin(U)$  sau  $Span(U)$ .

Se poate constata ușor că  $Lin(U)$  este un subspațiu liniar al lui  $(V, +, \cdot)$  (de unde și notația), și că are loc  $U \subseteq Lin(U)$ . Mai mult, se poate demonstra că  $Lin(U)$  este cel mai mic subspațiu al lui  $V$ , care îl conține pe  $U$ .

**Exemplu:** Dacă  $V = \mathbb{R}^3$ , subspațiul liniar generat de  $U = \{(1, -2, 1)\}$  este dreapta  $\{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

## Liniară dependență și independență

**Definiția 2.9** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ .

a) Elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  se numesc **liniar dependente** dacă există  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , dintre care cel puțin unul nenul, astfel încât

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

b) Elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  se numesc **liniar independente** dacă ecuația

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

are soluție unică  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

c) O submulțime  $U$  a lui  $V$  se numește **liniar independentă** dacă pentru orice vectori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in U$ , distincți,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  sunt liniar independenți.

**Observații:** O submulțime liniar independentă a unui spațiu liniar nu conține vectorul nul  $\mathbf{0}$ .

**Teorema 2.10** Vectorii  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  ai unui spațiu liniar sunt liniar dependenți dacă și numai dacă unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

**Demonstrație:** “ $\Rightarrow$ ” Într-adevăr, dacă vectorii  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  sunt liniar dependenți, atunci, conform Definiției 2.9, există scalarii  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , nu toți nuli, astfel încât  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ . Presupunem că  $\alpha_1 \neq 0$ , ar reieși atunci

că avem:  $\mathbf{x}_1 = -\sum_{k=2}^n (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_k) \mathbf{x}_k$ . Deci, unul dintre elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , aici  $\mathbf{x}_1$ , ar fi o combinație liniară de celelalte.

“ $\Leftarrow$ ” Dacă  $\mathbf{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \mathbf{x}_k$ , atunci  $\mathbf{x}_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ , ceea ce înseamnă că, pentru elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ,

există scalarii  $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n$ , evident nu toți nuli, așa încât se poate vorbi despre o combinație liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul. ◀

**Exemple:**

1. Mulțimea  $\{\mathbf{0}\}$  este liniar dependentă deoarece are loc  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

2. Fie spațiul liniar  $\mathbb{R}^n$ , și sistemul de vectori

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Atunci, sistemul de vectori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  este liniar independent.

Într-adevăr, fie  $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ . Atunci avem

$$\alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Prin urmare,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Deci din orice combinație liniară obținem coeficienții nuli.

3. Fie spațiul liniar al tuturor polinoamelor de grad cel mult  $n$ . Atunci polinoamele  $1, x, x^2, \dots, x^n$  formează un sistem liniar independent, deoarece

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0$$

are loc doar dacă  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

## Dimensiunea unui spațiu liniar. Bază algebrică. Schimbare de bază

**Definiția 2.11** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar.

- i) Se numește **dimensiune (algebrică)** a spațiului liniar  $V$  numărul maxim de elemente liniar independente din  $V$ . Vom nota dimensiunea spațiului  $V$  cu  $\dim(V)$ .
- ii) Spațiul liniar  $V$  este numit **infini-dimensional** dacă există cel puțin o submulțime infinită și liniar independentă a lui  $V$ . În caz contrar,  $V$  este numit **spațiu liniar finit-dimensional**.

**Exemple:**

- 1.  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$ ;
- 2.  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}^n) = m \cdot n$ .

**Definiția 2.12** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar și fie  $B$  o submulțime nevidă a lui  $V$ .

Se numește **bază algebrică** sau **bază Hamel** (sau, mai simplu **bază**) a lui  $V$  dacă  $B$  este o submulțime liniar independentă și  $\text{Lin}(B) = V$ .

În cazul unui spațiu liniar  $n$ -dimensional  $V$ , o bază a lui  $V$  este o mulțime  $B$  alcătuită din  $n$  elemente,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ , liniar independente, din  $V$ . Fiecare element  $\mathbf{x} \in V$  se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k.$$

Scalarii  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se numesc **coordonatele lui  $\mathbf{x}$  în baza  $B$** .

Orice bază a unui spațiu liniar  $V$  are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui  $V$ . Altfel spus,  $\dim(V)$  nu depinde de baza lui  $V$ .

Dacă notăm cu  $X_B$  matricea coloană  $X_B \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ , unde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sunt coordonatele lui  $\mathbf{x}$  în baza  $B$ ,

și cu  $\tilde{B} \stackrel{\text{not}}{=} [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ \dots \ \mathbf{b}_n^T] \in \mathcal{M}_n$  matricea ce are pe coloana  $k$  coordonatele vectorului  $\mathbf{b}_k$ , atunci relația  $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k$  se poate reda, matriceal, sub forma:

$$\mathbf{x}^T = \tilde{B} \cdot X_B = [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ \dots \ \mathbf{b}_n^T] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2.13** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci mulțimea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , este o bază a lui  $\mathbb{R}^n$ , numită **baza canonică** a lui  $\mathbb{R}^n$ .

**Demonstrație:** Mulțimea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  este liniar independentă (a se vedea Exemplul 2.). Arătăm că  $\text{Lin}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$ .

Fie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  arbitrar,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Atunci

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Prin urmare,  $\text{Lin}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$ . ◀

**Propoziția 2.14** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar cu  $\dim(V) = n$ . Atunci

1. Orice mulțime de  $m$  elemente din  $V$ , cu  $m > n$ , este liniar dependentă;
2. Orice mulțime de  $n$  elemente din  $V$  este bază a lui  $V$  dacă și numai dacă este mulțime liniar independentă.
3. Orice mulțime de  $n$  vectori din  $V$  este bază a lui  $V$  dacă și numai dacă mulțimea este un sistem de generatori al lui  $V$ .

**Exemplu:** Să se arate că mulțimea  $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$  este o bază a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Determinați coordonatele vectorului  $v = (1, 2, 3)$  în această bază.

**Soluție:** Cum mulțimea  $\mathcal{B}$  are 3 elemente, iar  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ , este suficient să arătăm, conform Propoziției 2.14, că  $\mathcal{B}$  este o mulțime liniar independentă.

Fie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(2, 1, 0) + \alpha_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$ . Atunci, utilizând proprietățile operațiilor “+” și “.” pe mulțimea  $\mathbb{R}^3$ , deducem:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Avem astfel un sistem liniar și omogen de trei ecuații cu trei necunoscute. Deoarece determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

este nenul, rezultă că sistemul omogen are soluția banală  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . Așadar, vectorii mulțimii  $\mathcal{B}$  sunt liniar independenți și deci mulțimea  $\mathcal{B}$  formează o bază.

Pentru a doua parte a exercițiului, trebuie să determinăm scalarii  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  cu proprietatea că

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 3, \end{cases}$$

obținem soluția  $\beta_1 = -3, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0$ . Așadar, coordonatele vectorului  $v = (1, 2, 3)$  în baza  $\mathcal{B}$  sunt  $(-3, 2, 0)$ .

**Definiția 2.15** Se numește **rang al unei mulțimi**  $U$ , de vectori din spațiul vectorial  $(V, +, \cdot)$ , dimensiunea subspațiului generat de  $U$ , adică  $\dim(\text{Lin}(U))$  și se notează cu  $\text{rang}(U)$ .

**Observație:** Dacă  $V$  este un spațiu liniar  $n$ -dimensional, atunci orice mulțime de  $n$  vectori liniar independenți din  $V$  este o bază a lui  $V$  și, de asemenea, orice sistem de  $n$  vectori din  $V$  care generează spațiul liniar  $V$  alcătuiește o bază a lui  $V$ .

**Definiția 2.16** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar cu  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$ , fie  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  o bază a lui  $V$  și fie  $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_m\}$  o mulțime de  $m$  vectori din  $V$

Se numește **matrice de trecere (schimbare) de la baza  $B$  la sistemul de vectori  $B'$**  matricea

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}$$

unde, pentru  $1 \leq k \leq m$ ,  $s_{1k}, \dots, s_{nk}$ , sunt coordonatele vectorului  $\mathbf{b}'_k$ , în raport cu  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Cu alte cuvinte,  $s_{ij}$  sunt astfel încât

$$\begin{cases} \mathbf{b}'_1 = s_{11}\mathbf{b}_1 + s_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n1}\mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}'_2 = s_{12}\mathbf{b}_1 + s_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n2}\mathbf{b}_n \\ \vdots \\ \mathbf{b}'_m = s_{1m}\mathbf{b}_1 + s_{2m}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{nm}\mathbf{b}_n \end{cases}.$$

Din punct de vedere formal, putem scrie  $B' = \tilde{B} \cdot S$ , unde  $B' = [\mathbf{b}'_1 \ \mathbf{b}'_2 \ \dots \ \mathbf{b}'_m]$  și  $\tilde{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ .

**Propoziția 2.17** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar finit-dimensional, cu  $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ,  $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$  sunt două baze a lui  $V$ , iar  $S$  este matricea de trecere de la  $B$  la  $B'$ , atunci matricea  $S$  este nesingulară (adică cu determinantul diferit de 0) și  $S^{-1}$  este matricea de trecere de la  $B'$  la  $B$  (adică  $B = B' \cdot S^{-1}$ ).

Mai mult, dacă  $\mathbf{x} \in V$ , iar  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  sunt coordonatele lui  $\mathbf{x}$  în raport cu  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , respectiv  $\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n$ , atunci

$$X_{B'} = S^{-1} \cdot X_B,$$

$$\text{unde } X_B \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}, \text{ iar } X_{B'} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}.$$

**Definiția 2.18** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar, finit-dimensional și două baze ale sale,  $B$  și  $B'$ . Spunem că **bazele  $B$  și  $B'$  sunt la fel orientate** dacă determinantul matricii  $S$  de trecere de la  $B$  la  $B'$  este pozitiv. Bazele  $B$  și  $B'$  se numesc **contrar orientate** dacă  $\det(S) < 0$ .

## Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

**Definiția 2.19** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu vectorial.

a) Se numește **produs scalar** pe  $V$  o aplicație  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisface următoarele proprietăți:

PS1)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **pozitiv definită**, adică

- i.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V$  și
- ii.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ , dacă și numai dacă  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in V$ ;

PS2)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **simetrică**, adică

- i.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ;

PS3)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **biliniară**, adică

- i.  $\langle \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ , și
- ii.  $\langle \mathbf{x}, \alpha \cdot \mathbf{y} + \beta \cdot \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ .

b) Cvadruplul  $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , în care  $(V, +, \cdot)$  este un spațiu liniar, iar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este un produs scalar pe  $V$  se numește **spațiu prehilbertian**. Pentru simplitate, vom nota  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  în loc de  $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Propoziția 2.20** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

Atunci  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este un produs scalar pe  $\mathbb{R}^n$ , numit **produsul scalar euclidian**(canonic).

Demonstrația acestui rezultat este imediată și este lăsată ca exercițiu. Dacă nu este precizat altfel, spațiul  $\mathbb{R}^n$  va fi întotdeauna considerat ca dotat cu produsul scalar euclidian.

**Definiția 2.21** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian.

- 1) Doi vectori  $\mathbf{x} \in V$  și  $\mathbf{y} \in V$  se numesc **ortogonali**, și notăm  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  dacă  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ .
- 2) Fie  $\mathbf{x} \in V$  și  $U$  o submulțime nevidă a lui  $V$ . Spunem  $\mathbf{x}$  este **ortogonal pe mulțimea**  $U$  (notăm  $\mathbf{x} \perp U$ ), dacă  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ,  $\forall \mathbf{y} \in U$ .
- 3) Dacă  $U$  este o submulțime nevidă a lui  $V$ , numim  $U$  **sistem ortogonal** dacă  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ , cu  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .
- 4) Dacă  $U \subseteq V$ , atunci prin **suplimentul ortogonal al lui**  $U$ , înțelegem mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe  $U$ . Altfel scris

$$U^\perp := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp U\}$$

**Definiția 2.22** Fie  $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu euclidian și  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{0\}$ . **Unghiul dintre vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$** , notat prin  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sau  $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ , se definește prin relația:

$$\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}.$$

**Observație:** Se poate observa cu ușurință că  $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \widehat{(\mathbf{y}, \mathbf{x})} \in [0, \pi]$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{0\}$ . Mai mult, dacă  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{0\}$ ,  $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\pi}{2}$ , dacă și numai dacă  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

**Definiția 2.23** Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar real. Spunem că aplicația  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  este o **normă** pe  $V$  dacă

- N1)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$
- N2)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- N3)  $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$  (omogenitate);
- N4)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  (inegalitatea triunghiulară).

Perechea  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **spațiu normat**.

**Propoziția 2.24** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Norma indusă de produsul scalar euclidian pe  $\mathbb{R}^n$ , definită prin

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

se numește **norma euclidiană**.



**Demonstrație:** Se verifică axiomele  $N1)$ - $N4)$  din Definiția 2.23:

$$N1): \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \geq 0, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$N2): \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$N3): \quad \|\alpha \cdot \mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha^2 x_i^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$N4)$ : aplicând inegalitatea lui Minkowski, pentru  $p = 2$ , obținem concluzia.

◀

**Propoziția 2.25** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian. Atunci aplicația  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definită de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x} \in V$$

este o normă pe  $V$  numită **norma indusă de produsul scalar**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Demonstrație:** Proprietățile  $N1) - N3)$  sunt evidente. Vom demonstra proprietatea  $N4)$ . Fie  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Cum produsul scalar este bilinar și simetric, vom putea scrie

$$\langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Însă,  $\langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Prin urmare, discriminantul ecuației de gradul II, în  $\lambda$  este negativ, adică

$$\Delta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \leq 0.$$

Așadar,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$  (inegalitate cunoscută sub numele de *Inegalitatea lui Schwarz*). Dacă luăm  $\lambda = 1$  în (1), vom obține

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Deci, inegalitatea triunghiulară are loc.

◀

**Observație:** Există și norme neinduse de vreun produs scalar.

**Definiția 2.26** Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat și  $\mathbf{x} \in V$ . Elementul  $\mathbf{x}$  se numește **versor** dacă  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Baze ortonormate. Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt

**Definiția 2.27** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian.

- O submulțime nevidă  $U \subseteq V$  se numește sistem ortonormal dacă  $U$  este un sistem ortogonal și fiecare element al lui  $U$  este un versor.*
- Dacă  $B$  este o bază a lui  $V$  și  $B$  este un sistem ortogonal, atunci  $B$  se numește **bază ortogonală** a lui  $V$ .*
- Dacă  $B$  este o bază a lui  $V$  și  $B$  este un sistem ortonormal, atunci  $B$  se numește **bază ortonormală** a lui  $V$ .*

Cu alte cuvinte,  $U$  este un sistem ortonormal dacă și numai dacă, pentru orice  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{când } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Bineînțeles, baza canonică  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , a lui  $\mathbb{R}^n$ , este o bază ortonormală a lui  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 2.28** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian de dimensiune  $n \in \mathbb{N}^*$  și fie  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  o bază a lui  $V$ . Se numește **determinantul Gram** asociat unei baze  $B$ , numărul  $\det G \in \mathbb{R}$ , unde

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n \rangle \\ \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (2)$$

Se poate observa că  $G$  este o matrice simetrică și nesingulară. Într-adevăr, dacă notăm  $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ , pentru  $1 \leq i, j \leq n$ , atunci a rezolva sistemul omogen cu  $n$  ecuații și  $n$  necunoscute

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + \dots + g_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

revine la a găsi  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ , astfel încât  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x} \rangle = 0, \dots, \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x} \rangle = 0$ , adică  $\mathbf{x} \perp B$ . Deoarece  $B^\perp = \text{Lin}(B)^\perp = V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{x}$  nu poate fi decât  $\mathbf{0}$ , ceea ce înseamnă, datorită liniarei independente a vectorilor  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , că sistemul (3) are doar soluția trivială, deci  $G$  este inversabilă.

Dacă  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  iar  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$  sunt coordonatele vectorului  $\mathbf{x}$ , respectiv  $\mathbf{y}$ , în raport cu  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = X_B^T \cdot G \cdot Y_B,$$

$$\text{unde } X_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ iar } Y_B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Vom spune că baza  $B$  este *ortogonală*, respectiv *ortonormală* dacă și numai dacă matricea  $G$  este diagonală, adică  $g_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, n\}, i \neq j$ , respectiv dacă  $G$  este matricea unitate  $I_n$ .

### Teorema 2.1 (Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt)

Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian de dimensiune  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  este o bază a lui  $V$ , atunci există o bază ortonormală  $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$ , astfel încât  $\text{Lin}(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}) = \text{Lin}(\{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_k\})$ , pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Demonstrație:** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian  $n$ -dimensional și  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  o bază a lui.

Plecând de la  $B$ , se poate construi o bază  $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n\}$ , ortogonală, a aceluiași spațiu  $V$ , utilizând **algoritmul lui Gram-Schmidt**, după cum urmează:

1. Pasul 1:  $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1$ .
2. Pasul 2: Se determină scalarul  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , așa încât vectorul  $\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 + \lambda_1 \mathbf{b}'_1$  să fie ortogonal pe  $\mathbf{b}'_1$ , adică să avem  $0 = \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2 \rangle + \lambda_1 \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle$ . Rezultă  $\lambda_1 = -\frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle}$ . Astfel,

$$\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle} \mathbf{b}'_1.$$

3. Pasul 3: Se caută scalarii  $\mu_1$  și  $\mu_2$  din  $\mathbb{R}$ , așa încât  $\mathbf{b}'_3 = \mathbf{b}_3 + \mu_1 \mathbf{b}'_1 + \mu_2 \mathbf{b}'_2$  să fie ortogonal pe sistemul  $\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2\}$ , adică să avem  $\langle \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_1 \rangle = 0$  și  $\langle \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_2 \rangle = 0$ .

Găsim  $\mu_1 = -\frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle}$  și  $\mu_2 = -\frac{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2 \rangle}$ . Prin urmare, avem:

$$\mathbf{b}'_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle} \mathbf{b}'_1 - \frac{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2 \rangle} \mathbf{b}'_2.$$

4. Pasul k: Continuând procedeul, obținem formula generală:

$$\mathbf{b}'_k = \mathbf{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_k \rangle}{\langle \mathbf{b}'_i, \mathbf{b}'_i \rangle} \mathbf{b}'_i, k = \overline{2, n}.$$

Așadar, am găsit baza ortogonală  $B'$ . În cele din urmă, pentru a obține o bază ortonormată, vom considera  $B'' = \{\mathbf{b}''_1, \mathbf{b}''_2, \dots, \mathbf{b}''_n\}$ , unde  $\mathbf{b}''_k = \frac{\mathbf{b}'_k}{\|\mathbf{b}'_k\|}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , iar  $\|\cdot\|$  este norma indusă de produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , considerat pe  $V$ . ◀

**Observație:** O consecință importantă a acestui rezultat este că orice spațiu prehilbertian finit dimensional admite o bază finit dimensională.

## Bibliografie orientativă

- [1] D. Bușneag, D. Piciu - *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
- [2] Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- [3] Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalități. Idei și metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
- [4] S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.
- [5] F. L. Țiplea - *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- [6] T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar în algebra superioară*, Matrix Rom București, 2012.
- [7] J. Harcet, L. Heinrichs, P. M. Seiler - *Mathematics. Higher Lever*, Oxford Univ. Press, 2012.
- [8] R. Solomon - *Notes on Ordinals and Cardinals*, math.uconn.edu, 2014.