CURS 3

Serii de numere reale. Serii cu termeni pozitivi

A. Arusoaie
e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

11 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAŞI

Structura cursului

1. Serii de numere reale
   - Definiții. Proprietăti
   - Exemple
   - Condiția necesară de convergență
   - Criteriul lui Cauchy de convergență
   - Operații cu serii
2. Serii cu termeni din pozitivi
   - Criterii de comparație
   - Criteriul de condensare al lui Cauchy
   - Criteriul radacinii - al lui Cauchy
   - Criteriul lui Kummer
   - Criteriul raportului - al lui D'Alembert
   - Criteriul lui Raabe-Duhamel
   - Criteriul lui Bertrand
   - Criteriul lui Gauss

Structura cursului

Ce este o serie?

Ce este o serie?

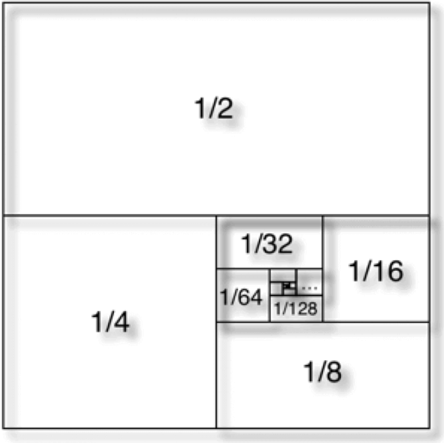
Problemă:

John se antrenează pentru un maraton; totusi, are un plan de lucru destul de neobisnuit. În prima zi de antrenament, aleargă o milă. A doua zi, acesta aleargă 1/2 dintr-o milă, iar a treia zi inca 1/4 de milă. În următoarele zile acesta aleargă jumătatea distanței parcurse în ziua precedentă. Presupunând că John se antrenează o veșnicie, câte mile va alerga în total?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

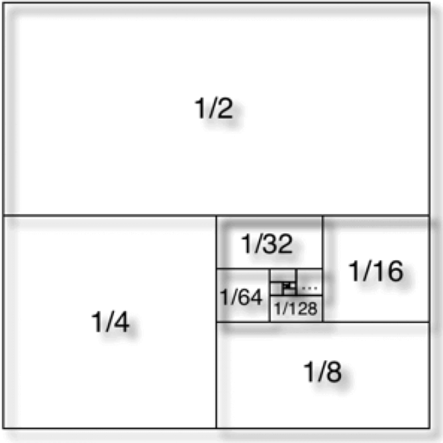
Răspuns: 2 mile

Ce este o serie?



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

Ce este o serie?



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=?$$

Luăm suma primilor n termeni:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

Ce se întâmplă când $n\to\infty$?

Seria:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=\mathbf{1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1+1$$

Definiție

Numim **serie de numere reale**, cuplul format din șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numește **șirul sumelor parțiale** atașat seriei, cu

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

Notație:

$$((x_n),(S_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} x_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Terminologie:

- termenul $x_n, n \in \mathbb{N}^*$ se numește **termen general al seriei**;
- termenul $S_n, n \in \mathbb{N}^*$ se numește **suma parțială de rang n** a seriei.

Serii de numere reale

- Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent*, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este *convergentă*;

  Notăm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

- Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este divergent*, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este *divergentă*;

  Notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (D)$;

- Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci numim S - *suma seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ și scriem

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Definiție

Pentru $p \in \mathbb{N}$, numim **restul de ordin p** al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, seria $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} x_n \overset{not}{=} R_p$.

Teoremă

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall p \in \mathbb{N}$, seria R_p este convergentă.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{p \to \infty} R_p = 0$.

Exemple

1. Seria geometrică de parametru $q \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Șirul sumelor parțiale atașat seriei are termenul general

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Așadar, avem că:

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n (C)$, pentru $q \in (-1, 1)$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n (D)$, pentru $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.
- În plus, avem $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, q \in (-1,1); \\ +\infty, q \geq 1; \end{cases}$

Dacă $q = -1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ se numește *seria lui Grandi*, și este divergentă.

Exemple

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

Exemple

3. Seria $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$ este convergentă.

Condiția necesară de convergență

Teoremă

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Observații:

- Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge la 0, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.
- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nu implică neapărat convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$!

Criteriul lui Cauchy de convergență

Teoremă (Criteriul lui Cauchy)

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* : |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Teorema

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă dacă și numai dacă

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_n \geq n, \exists p_n \in \mathbb{N}^* : |x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon.$$

Exemplu. Seria armonică

Seria armonică[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Arătăm că șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este șir Cauchy.
Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$. Atunci avem

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, există $k_n := n, p_n := n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|\frac{1}{k_n+1} + \ldots + \frac{1}{k_n+p_n}\right| \geq \frac{p_n}{k_n+p_n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, seria armonică este divergentă.

[1] Se numește asa întrucât x_n verifică relația: $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, adică x_n este media armonică a numerelor x_{n-1} și x_{n+1}.

Operații cu serii

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii de numere reale.

- Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ se numește *suma* seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$;
- Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ se numește *produsul* seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$.

Operații cu serii

Teoremă

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii convergente, cu $S := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $T := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

i) Dacă $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $S \leq T$;

ii) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S + T$.

iii) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda S$.

Observație: Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$, este posibil ca $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)(C)$;

Spre exemplu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (D)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (D)$, dar $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}](C)$.

Teoremă

Dacă asociem termenii unei serii convergente în grupuri finite, păstrând ordinea termenilor, obținem tot o serie convergentă, cu aceeași sumă.

Observație:

Uneori, asocierea termenilor unei serii divergente definesc o serie convergentă.

Spre exemplu, dacă asociem doi câte doi termenii seriei lui Grandi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, care este divergentă, obținem seria

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots$$

care este convergentă, având suma 0.

Structura cursului

Serii cu termeni din pozitivi

Spunem că o serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are **termeni pozitivi** dacă $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este clar că și șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător. Așadar, are loc:

Propoziție

Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, este majorat.

Criteriul I de comparație - CCI

În cele ce urmează, vom prezenta unele criterii de convergență și de divergență pentru serii cu termeni pozitivi.

Teoremă - CCI

Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, astfel încât $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (C), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (D).

Exemple:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha < 1$ este divergentă.
2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Criteriul II de comparație - CCII

Teoremă - CCII

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0$ și

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$.

Exemple: Să se studieze natura $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$.

Criteriul de comparație cu limită - CCIII

Teoremă - CCIII

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $y_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, atunci:

i) dacă $\ell \in (0, +\infty)$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ au aceeași natură;

ii) pentru $\ell = 0$, avem

a) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

b) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$;

iii) pentru $\ell = +\infty$, avem

a) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$;

b) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$.

Exemple:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ este divergentă.
2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^4+1}$ este convergentă.

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir descrescător de numere pozitive.

Atunci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are aceeași natură cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$.

Exemplu. Seria armonică generalizată

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se numește *serie armonică generalizată*.

- Aplicând criteriul condensării, obținem că natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este aceeași cu a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu rația $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$.
- Aceasta converge dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ și divergentă în rest.
- Așadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (C), \text{ dacă } \alpha > 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (D), \text{ dacă } \alpha \leq 1.$$

Criteriul rădăcinii - al lui Cauchy

Teoremă

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, \infty]$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;

ii) dacă $\ell > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă;

iii) dacă $\ell = 1$, nu putem spune nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)^n$ este convergentă.

Criteriul lui Kummer

Teoremă

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Dacă există $\lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci:

i) când $\ell > 0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\ell < 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (D), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

iii) dacă $\ell = 0$ nu putem spune nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul raportului - al lui D'Alembert

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = 1, n \in \mathbb{N}^*$, obținem următorul rezultat:

Teoremă

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, \infty]$$

atunci:

i) dacă $\ell < 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\ell > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\ell = 1$, *nu ne putem pronunța asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = n, n \in \mathbb{N}^*$, obținem următorul rezultat:

Teoremă

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \right] = \rho.$$

i) Dacă $\rho > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\rho < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) Dacă $\rho = 1$, nu putem stabili natura seriei.

Criteriul lui Bertrand

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci obținem:

Teoremă

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. Presupunem că există

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln (n+1) \right) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

i) Dacă $\mu > 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\mu < 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) Dacă $\mu = 0$, *nu ne putem pronunța asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul lui Gauss

Teoremă

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir mărginit astfel încât

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) dacă $\alpha > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\alpha < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\alpha = 1$ și $\beta > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

iv) dacă $\alpha = 1$ și $\beta \leq 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

Exerciţiu: Să se studieze natura seriilor:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)};$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}};$$

Bibliografie

- A. Precupanu, *Bazele analizei Matematice*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1993.
- F.L. Țiplea, *Introducere în teoria mulțimilor*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura Fair Partners, București, 2011.
- G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/)
- G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.