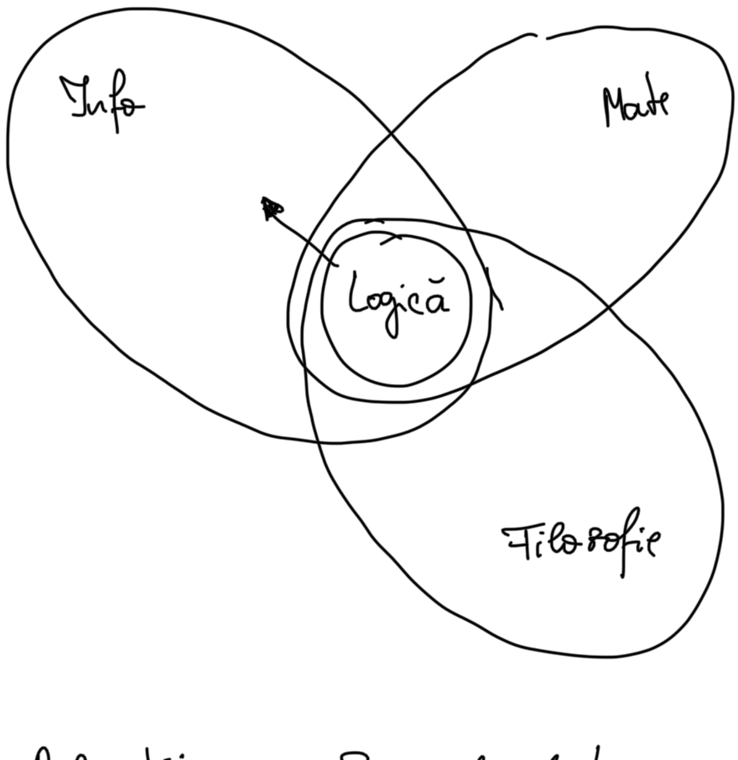
- Curs 1 -

Aritmetică → obiect de studiu : numerele și op. cu nume

Logică → obiectul de studiu : propozițiile și operațiile cu propoziții



Aplicații : → Baze de date
→ Verificarea de programe
→ Verificarea de hardware

Vom studia → Logica propozițională
(modelarea circuitelor)
→ Logica de ordinul I
(verif. a programelor)

Logica propozițională → informală
→ formală

1 Logica propozițională informală

propoziție = o afirmație care este fie adevărată, fie falsă.

Ex: Sunt propoziții:

Afară plouă. (afirmație falsă)

Nu plouă.

$2+2=4$

$1+1=4$

Afară plouă și este frig.

Nu sunt propoziții:

Plouă?

Plouă!

Vara

π

Această afirmație este falsă. (paradox)

Propoziții: → **atomice**: nu pot fi descompuse în propoziții mai mici.

Ex: Eu sunt student.

→ **compuse** → **conjuncție**

Forma: φ și ψ.

Adevărată când **ambele** prop. componente sunt adevărate.

Ex: $\underbrace{\text{Afară plouă}}_{\varphi}$ și $\underbrace{\text{este frig}}_{\psi}$.

Afară plouă, dar am umbrelă.

→ **disjuncții**: Forma: φ sau ψ.

sau inclusiv

Adevărată când cel puțin una

din cele două prop. este adev.

în alte contexte : La Go : sau exclusiv.

Ex : Plouă sau este frig.
ori

→ implicații : Dacă φ, atunci ψ.

Ex : Dacă $\underbrace{\text{plouă}}_{\varphi}$, atunci $\underbrace{\text{aduc umbrela}}_{\psi}$.

→ antecedent

consecvent / concluzie

φ	ψ	Dacă φ atunci ψ
Adev	Adev	Adev.
Adev	Fals	Fals
Fals	Adev	Adev
Fals	Fals	Adev.

Ex : Dacă pământul este plat, atunci 1+1=4.

implicație materială.

Alte forme de implicație :

- Dacă plouă, atunci este frig.
- Trec la logică dacă învăț.

→ antecedent

consecvent

Dacă învăț, atunci trec la logică

• Trec la logică doar dacă învăț. ← consecvent.

antecedent

Dacă trec la logică, atunci (sigur) am învă

Ex: Iau umbrela doar dacă plouă.

→ Echivalența : φ dacă și numai dacă ψ.

$\approx$

φ dacă ψ și φ doar numai dacă ψ

" $\Leftarrow$ " " $\Rightarrow$ "

→ Negația : Nu φ.

Nu este adevărat că φ

Adevarată dacă și numai dacă φ este fals.

și
sau
Dacă - atunci
nu

– conectori logici

Propoziția atomică : nu poate fi descompusă folosind conectori logici.

Ambiguitati :

Ex. Nu vorbesc și mănânc.

② Logica propozițională (formulă)

↳ limbaj formal : → sintaxă (reguli de scrier
↳ semantică (cum interpretă

Alfabet = o mulțime (finită) de simboluri.

Ex: $X = \{0,1\}$, $Y = \{a,b,c\}$

Cuvânt peste X = o secvență de 0 sau mai mult simboluri din alfabetul X.

Ex: 011000 , 1 , ε - cuvântul vid

Alfabetul logicii propoziționale =

$\{ p, q, r, p', q_1 \}$ - variabile prop
$\cup \{ \neg, \vee, \wedge \}$ - conectori logici
$\cup \{ (,) \}$

Cuvinte peste alfabetul logicii prop :

p pq
$(q \vee r)$ $p \neg q ($

Unele cuvinte reprezintă formule din logica prop

(*) Sintaxa Logicii propoziționale : care cuvinte sunt formule

LP – mulțimea de formule din logica prop.

↳ definită inductiv.

LP – cea mai mică mulțime care respectă:

1. (CB) : orice variabilă propozițională (văzută ca un cuvânt de lungime 1) este în LP

Ex: $p \in LP$ $\quad q \in LP$

2. (CI1) Dacă $\varphi \in LP$, atunci $\neg\varphi \in LP$ (not)

Ex: din (CB) $\underbrace{p}_{\varphi} \in LP \xRightarrow{CI1} \neg p \in LP \xRightarrow{CI1}$

$\neg\neg p \in LP \Rightarrow \ldots$

3. (CI2) Dacă $\varphi_1 \in LP$, $\varphi_2 \in LP$, atunci $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in LP$ (și)

4. (CI3) Dacă $\varphi_1 \in LP$, $\varphi_2 \in LP$, atunci $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in LP$ (sau)

Ex: Din (CB), $p \in LP \xRightarrow{CI1} \overbrace{\neg p}^{\varphi_1} \in LP$, $\underbrace{q}_{\varphi_2} \in LP \xRightarrow{CI2}$

$$\Rightarrow (\neg p \wedge q) \in \mathbb{LP} \xrightarrow{CI1} \neg\underbrace{(\neg p \wedge q)}_{\varphi_1'} \in \mathbb{LP}$$

$$\text{Din (CB)} \quad \underbrace{r}_{\varphi_2'} \in \mathbb{LP} \qquad \overset{CI3}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \big(\neg\underbrace{(\neg p \wedge q)}_{\varphi_1'} \vee r\big) \in \mathbb{LP}$$

. . . .

(*) Cum arătăm că un cuvânt $\in \mathbb{LP}$

$\neg(p \vee q)$ este obținută astfel:

1. $p \in \mathbb{LP}$ (CB)
2. $q \in \mathbb{LP}$ (CB)
3. $(p \vee q) \in \mathbb{LP}$ (CI3, $\varphi_1 = p$, $\varphi_2 = q$)
4. $\neg(p \vee q) \in \mathbb{LP}$ (CI1, $\varphi = (p \vee q)$)

Arborele de construcție pt $\neg(p \vee q)$

Conector principal = conectorul introdus în ultimul pas de construcție

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\,CB \qquad \dfrac{}{q}\,CB}{(p \vee q)}\,CI3}{\neg(p \vee q)}\,CI1$$

inferențe

<u>Teorema de citire unică</u>: Fiecare formulă din $\mathbb{LP}$ are **un singur** arbore de construcție.

Formule
- → atomice : variabile propoziționale
  - $p, q, r, p_1, \dots$
- → compuse : conjuncții, disjuncții, negații, ...
  - ↓ în fct. de conectorul prin

$\neg(p \vee q)$ → negatie

$(\neg p \vee q)$ → disjunctie ("sau")