CURS 4

SERII NUMERICE CU TERMENI OARECARE. SERII DE PUTERI

A. Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

18 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAȘI

Structura cursului

1. Serii cu termeni oarecare
   - Criterii de convergență
   - Criteriul lui Abel
   - Serii absolut convergente
   - Serii alternate

2. Serii de puteri
   - Teorema lui Abel
   - Determinarea razei de convergență
   - Exemple de serii de puteri

Structura cursului

1. Serii cu termeni oarecare
   - Criterii de convergență
   - Criteriul lui Abel
   - Serii absolut convergente
   - Serii alternate

2. Serii de puteri
   - Teorema lui Abel
   - Determinarea razei de convergență
   - Exemple de serii de puteri

Serii cu termeni oarecare

- Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni oarecare*, dacă termenul general al seriei, x_n, nu are același semn pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- Un caz particular de serii cu termeni oarecare îl reprezintă *seriile alternate* de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n$.

Serii cu termeni oarecare

Exemplu: *Seria armonică alternată* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este convergentă.

<u>Curs 3</u> $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este converg dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converg.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C) $\Longleftrightarrow$ (S_n) șir Cauchy : $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* : |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

$x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$S_n = x_1 + \dots + x_n = (-1)^2\frac{1}{1} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Arăt că (S_n) este șir fundam.

Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$. Evaluez $|S_{n+p}-S_n| = |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| =$

$$= \left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + \dots + (-1)^{n+p+1}\frac{1}{n+p}\right|$$

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|(-1)^{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right)\right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p} \right| \;(=)$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(\;)} > 0 \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

• p par

$$(=) \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \left(\underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{>0} + \dots - \underbrace{\frac{1}{n+p-1}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{n+p}}_{>0} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1}$$

• p impar

$$(=) \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots - \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \left(\underbrace{\frac{1}{n+2} - }_{>0} \dots + \underbrace{\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}}_{>0} \right) \right| < \frac{1}{n+1}$$

$$\cdot \; |S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{n+1} \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \;:\; \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon \quad \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

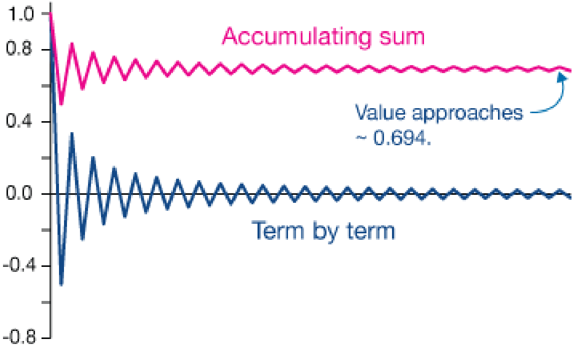
Aleg n_ε a.î. $\quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}^*$ aî, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$: $|S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\Rightarrow (S_n)$ şir Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (C)

Serii cu termeni oarecare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2$$



Criteriul lui Dirichlet

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mărg dacă $\exists M>0$ a.î. $|x_n|\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șiruri de numere reale, și fie $S_n = x_1 + \ldots + x_n, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă

1. șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit;
2. șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Fie $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n = (-1)^{n+1}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow y_n$ s.d.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$] (1)

• $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = 1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}$ ↗ n par $S_n = 0$ ↘ n impar $S_n = 1$ $\Rightarrow \exists M=1>0$ a.î. $|S_n|\le 1$, $\forall n$ (2)

$(1)+(2) \xRightarrow{\text{TD}} \sum (-1)^{n+1}\cdot \frac{1}{n}$ (C)

Exemplu

Exemplu: Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ este convergentă.

Fie $x_n = \cos n$, $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

- $y_n \searrow 0$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1 \Rightarrow y_n \text{ s. descresc.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\Rightarrow y_n \searrow 0$

- S_n mărg.

$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$\circledast$ $2\sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

$$S_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n \;\Big|\cdot 2\sin\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\sin\frac{1}{2}\, S_n = 2\sin\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{b}\cos\underbrace{1}_{a} + 2\sin\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{b}\cos\underbrace{2}_{a} + \dots + 2\sin\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{b}\cos\underbrace{n}_{a}$$

$$\overset{\circledast}{=} \cancel{\sin\frac{3}{2}} - \sin\frac{1}{2} + \sin\left(\cancel{2+\frac{1}{2}}\right) - \cancel{\sin\frac{3}{2}} + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) - \cancel{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

$\cancel{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)} - \cancel{\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)}$

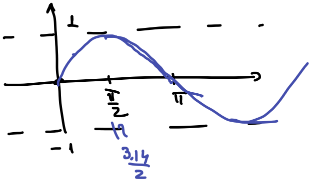
$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2}$$

$$= 2\sin\frac{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2}\cos\frac{n+1}{2}$$

$a+b=x \quad a-b=y$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$$\left|2\sin\frac{1}{2}S_n\right| = \left|2\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n+1}{2}\right|$$



$$|S_n| = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cdot 2\,\underbrace{\left|\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n+1}{2}\right|}_{\le 1}$$

$$|S_n| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \exists\, M = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} > 0$ a.î. $|S_n| \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (S_n) \text{ mărginit} \\ y_n \searrow 0\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Th. Dirichlet}} \sum x_n y_n \ (C)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \ (C)$$

Criteriul lui Abel

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ două șiruri de numere reale. Dacă

1. seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;
2. șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton și mărginit,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exemplu: Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n} \right)$ este convergentă.

Alg $x_n = \frac{\sin n}{n}$, $y_n = \cos \frac{1}{n}$

1° $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C) . Aplic. C. Dirichlet: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n}$

- $S_n = \sin 1 + \dots + \sin n$ mărg.
- $\frac{1}{n} \searrow 0$

$\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n}$ (C)

~ $b_n = \frac{1}{n}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow b_n$ a. descresc

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

~ $S_n = \sin 1 + \dots + \sin n \,\Big|\, 2 \cdot \cos \frac{1}{2}$ mărg.

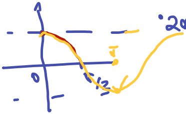
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$
- $2 \cos \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

- - - -

$|S_n| \le \frac{1}{\cos \frac{1}{2}}$



$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_n \text{ mărg} \\ \frac{1}{n} \searrow 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{CD} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ (C) (1)

2^0. (y_n), $y_n = \cos\frac{1}{n}$ este monot. și mărg

$|y_n| = |\cos\frac{1}{n}| \leq 1 \Rightarrow \exists M = 1 > 0$ a.î. $|y_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (y_n)$ mărg.

- monotonie

$\left.\begin{array}{l} \cos \text{ este descrescătoare pe } [0, \pi] \\ 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \end{array}\right\}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \cos\frac{1}{n+1} > \cos\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_n = \cos\frac{1}{n}$ cresc.

$\xRightarrow{\text{Th. Abel}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cdot \cos\frac{1}{n}$ (C)

Serii absolut convergente

Definiție

Spunem că seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este

i) **absolut convergentă**, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă - notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) **semiconvergentă**, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este divergentă - notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (SC)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (C) dar $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) serie arm. cu $\alpha = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (SC)

Serii absolut convergente

Observație: Pentru serii cu termeni pozitivi, absoluta convergență este echivalentă cu convergența.

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este semiconvergentă deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (C)$, însă $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (D)$ (seria armonică simplă).

Serii absolut convergente

Propoziție

Dacă o serie de numere reale este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstrație: Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie absolut convergentă.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (C)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Însă cum $|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}|$, obținem

$$|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_e, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Conform teoremei lui Cauchy, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Criteriul rădăcinii

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.
Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (D)$;

Criteriul raportului -D'Alembert

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.

Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (D)$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.

Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}-1\right)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell>1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) dacă $\ell<1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (D)$.

Serii alternate

- Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este *alternată*, dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Orice serie alternată poate fi scrisă astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n, \text{ unde } y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teoremă (Criteriul lui Leibniz)

Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale pozitive, descrescător și convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă.

Demostrație: Folosim criteriul lui Dirichlet.

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ este convergentă.

$$\left.\begin{array}{l} y_n = \frac{1}{n} \to 0 \\ \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \end{array}\right| \Rightarrow y_n \searrow 0 \quad \overset{C.L}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \ (C)$$

Structura cursului

1. Serii cu termeni oarecare
   - Criterii de convergență
   - Criteriul lui Abel
   - Serii absolut convergente
   - Serii alternate

2. Serii de puteri
   - Teorema lui Abel
   - Determinarea razei de convergență
   - Exemple de serii de puteri

Definiție

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.
Se numește **serie de puteri** centrată în $y_0 \in \mathbb{R}$ o serie de forma

$$a_0 + a_1(y-y_0) + \ldots + a_n(y-y_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-y_0)^n, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

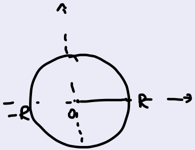
Termenii a_n se numesc **coeficienți ai seriei**.
Dacă facem schimbarea de variabilă $x = y - y_0$, seria (1) se poate scrie în forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Serii de puteri

Teorema (Abel)

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, există un număr R, $0 \leq R \leq +\infty$, numit *rază de convergență* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, astfel încât:



i. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)$ pentru orice $x \in (-R, R)$;

ii. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (D)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

Cazul $x = -R$ și $x = R$ se studiază separat

Serii de puteri

Putem rescrie *teorema lui Abel* și astfel:

Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *există* R, $0 \leq R \leq +\infty$ *așa încât:*

i) *dacă* $R = 0$, *atunci unicul punct de (absolută) convergență pentru seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este* $x = 0$;

ii) *dacă* $\underline{R > 0}$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)$ *pe intervalul* $(-R, R)$;

iii) *dacă* $0 \underline{< R < +\infty}$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (D)$ *pe* $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$;

iv) *dacă* $R = +\infty$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (C)$ *pe* $\mathbb{R}$;

Dacă notăm

- D_c - *domeniul de convergență* - $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (C)\right\}$,
- D_{ac} - *domeniul de absolută convergență* - $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)\right\}$,

atunci, pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au loc următoarele incluziuni:

$$(-R, R) \subseteq D_{ac} \subseteq D_c \subseteq [-R, R].$$

D_D - $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n (D)\}$

Determinarea razei de convergență

Propoziție

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza ei de convergență.

Dacă există $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci raza de convergență a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este

$$R = \begin{cases} 0, & \text{când } \rho = +\infty; \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{când } 0 < \rho < +\infty; \\ \infty, & \text{când } \rho = 0. \end{cases}$$

- Dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, vom calcula R similar, doar că de data asta, $\rho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$. serie de puteri centrată în 0 $\sum_{n\ge0}^{\infty} a_n x^n$

$a_n = 3^n$

Calculez raza de converg.

$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3 \in (0,\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$

Th. Abel $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$
- (AC) pt $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- (D) pt $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
- (C) pt $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- $x = -\frac{1}{3}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ (D) $\left(\nexists \lim_{n\to\infty} x_n\right)$.
- $x = \frac{1}{3}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ (D) $\left(\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0\right)$.

$D_{ac} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = D_c$

$D_d = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Determinarea razei de convergență

Propoziție

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza ei de convergență.

Dacă există $\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci raza de convergență este dată de

$$R = \begin{cases} 0, & \text{când } \ell = +\infty; \\ \frac{1}{\ell}, & \text{când } 0 < \ell < +\infty; \\ \infty, & \text{când } \ell = 0. \end{cases}$$

Exemplu

Să se studieze convergența seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n$. → serie de puteri centrată în 1

Notez $y = x-1$ și studiez $\sum_{n\geq 1} a_n y^n$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Raza: $l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n\cancel{(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \in (0,\infty)$

$\Rightarrow R = 1$

$\Rightarrow \sum a_n y^n$ • (AC) pt $y \in (-1,1)$ (C) pt $y \in (-1,1)$

(D) pt $y \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

• $y = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(-1)^n$ serie alternată $\left(\sum (-1)^n \cdot y_n\right)$

$y_n = \frac{1}{n(n+1)} \searrow 0$

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{n+2} < 1 \Rightarrow y_n \searrow$

$\lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$ $\Big\} \xrightarrow{\text{Leibniz}} \sum (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ (C)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} \ (AC)\,? \iff \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n(n+1)}\right| (C) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ (C)$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ (C) \ \text{serie arm. } \alpha = 2 > 1 \end{array}\right\} \overset{CCI}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ (C)$$

$$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} \ (AC)$$

- $y = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ (C) \Rightarrow \sum \ (AC)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad (AC) \text{ pt } y \in [-1, 1] \qquad (D) \text{ pt } y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(C) \text{ pt } y \in [-1, 1]$$

$$y = x - 1$$

$$-1 \le x - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow D_{ac} = [0, 2] = D_c$$

$$D_d = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

Exemple de serii de puteri

1. *Seria nulă:* $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$. În acest caz, $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$.

2. *Seria geometrică,* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Avem $R = 1$, $D_{ac} = D_c = (-1, 1)$.
   - Dacă $x \in (-1, 1)$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$: $R = 0, D_{ac} = D_c = \{0\}$. $D_d = \mathbb{R}^*$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty \Rightarrow R = \frac{1}{\infty} = 0$$

4. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} x^n$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Avem $R = 1$ și

$$D_{ac} = \begin{cases} (-1,1), & \alpha \leq 1; \\ [-1,1], & \alpha > 1; \end{cases}$$

,

$$D_c = \begin{cases} (-1,1), & \alpha \leq 0; \\ [-1,1), & \alpha \in (0,1]; \\ [-1,1], & \alpha > 1; \end{cases} .$$

5. *Seria exponențială*, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Avem $R = +\infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

<u>Dezvoltare în serii Taylor.</u>

$f(x)$ derivabilă în punctul $a \in \mathbb{R}$. $(\exists f', f'', \ldots)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

• dacă $a = 0 \Rightarrow$ serie Maclaurin

$f(0) = e^0 = 1 = f'(0)$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot(x-0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

6. *Seriile trigonometrice*, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Avem $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult, avem

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

7. *Seriile hiperbolice*, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ și $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$.

Avem $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult, avem

$$\mathrm{shx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \mathrm{x}^{2n+1} := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{chx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \mathrm{x}^{2n} := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

cosh(x)

cos. hiperbolic

Bibliografie

- Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
- V. Postolică - *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- M. Postolache - *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
- Steven Heilman - *Sequences and Series of Functions.Convergence*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2015.
- M. Deisenroth, M. Cheraghchi - *Mathematical Methods (Chap.4:Power Series)*, Imperial College London, Department of Computing, 2016.