CURS 2

Şiruri de numere reale. Polinoame

A. Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

4 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAŞI

Structura cursului

Structura cursului

1. Șiruri de numere reale
   - Convergență
   - Subșiruri
   - Proprietăți ale șirurilor convergente
   - Teorema convergenței monotone
   - Teorema Bolzano-Weierstrass
   - Teorema Stolz-Cesàro
   - Șiruri Cauchy
   - Puncte limită ale unui șir
2. Polinoame

Problemă: *Un copil vrea sa construiască un turn folosind niste cuburi colorate. El utilizează 15 cuburi pentru primul nivel, iar fiecare nivel va avea cu 2 cuburi mai putin decât precedentul. Presupunem că turnul va avea 8 etaje.*

(a) Câte cuburi s-au utilizat pentru ultimul nivel?

(b) Care este numărul total de cuburi utilizate?

Problemă: *Un copil vrea sa construiască un turn folosind niste cuburi colorate. El utilizează 15 cuburi pentru primul nivel, iar fiecare nivel va avea cu 2 cuburi mai putin decât precedentul. Presupunem că turnul va avea 8 etaje.*

(a) Câte cuburi s-au utilizat pentru ultimul nivel?

Răspuns corect : 1

Ati format un *șir aritmetic*, considerând $a_1 = 15$, $n = 8$ și $r = -2$, utilizând formula

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

(b) Care este numărul total de cuburi utilizate?

Răspuns corect : 64

Ati utilizat *suma termenilor unui șir aritmetic*, pentru $a_1 = 15$, $n = 8$ și $r = -2$, utilizând formula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Problemă: *O populație de insecte crește în așa mod încât noua generație este de 1.5 ori mai numeroasă comparativ cu cea precedentă. Presupunem că ar fi doar 100 de insecte în prima generație.*

(a) Câte insecte vor aparea în a 5-a generație?

(b) Care va fi numărul total de insecte până la a 5-a generație?

Problemă: *O populație de insecte crește în așa mod încât noua generație este de 1.5 ori mai numeroasă comparativ cu cea precedentă. Presupunem că ar fi doar 100 de insecte în prima generație.*

(a) Câte insecte vor aparea în a 5-a generație?

Răspuns corect : 506.25 (aproximativ 506)

Ati format un *șir geometric*, considerând $b_1 = 100$, $n = 5$ și $q = 1.5$, utilizând formula

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

(b) Care va fi numărul total de insecte până la a 5-a generație?

Răspuns corect : aprox. 1319

Ati utilizat *suma termenilor unui șir geometric*, pentru $b_1 = 100$, $n = 5$ și $q = 1.5$, utilizând formula

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Definiție

Se numește **șir de numere reale** o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Vom nota cu x_n, valoarea funcției f în punctul $n \in \mathbb{N}$, adică

$$x_n = f(n).$$

- $x_0, x_1, x_2, \dots$ se numesc **termeni ai șirului**;
- x_n se numește **termenul general al șirului** f, sau **termenul de rang** n al șirului;
- Un șir cu termenul general x_n, se va nota $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 0}$.

Observație: Dacă primii k termeni ai șirului, $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, nu sunt definiți, adică funcția este definită pe mulțimea $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, atunci vom nota șirul prin $(x_n)_{n\geq k}$.

Definiție

Spunem că un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este:

i) **mărginit inferior** dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) **mărginit superior** dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$;

iii) **mărginit** dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq x_n \leq \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

iv) **nemărginit** dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit.

Observație: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă și numai dacă

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \text{astfel încât } |x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple:

1. Șirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ este mărginit deoarece $|x_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Șirul $x_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, deoarece este mărginit inferior ($x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$), dar nu este mărginit superior.

3. Șirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nu este mărginit inferior, dar admite margine superioară ($x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$).

4. Șirul $x_n = (-1)^n 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nefiind mărginit superior și nici inferior.

Definiție

Spunem că un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este:

- **crescător** dacă $x_{n+1} \geq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **descrescător** dacă $x_{n+1} \leq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **monoton** dacă este crescător sau descrescător;
- **strict crescător** dacă $x_{n+1} > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **strict descrescător** dacă $x_{n+1} < x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **strict monoton** dacă este strict crescător sau strict descrescător.

Exemple:

1. Șirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este strict crescător.
2. Șirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este șir strict descrescător.
3. Șirul $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*$ nu este monoton.
4. Șirul $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, unde c este o constantă reală, este simultan crescător și descrescător.

Convergență

Definiție

Spunem că un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **convergent** dacă există un element $\ell \in \mathbb{R}$, numit *limita șirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - \ell| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Terminologie: Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir convergent la* $\ell \in \mathbb{R}$, atunci vom nota

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \;\; (x_n \to \ell)$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

Convergență

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Spunem că:

- șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_n > \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon;$$

- șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $-\infty$ dacă

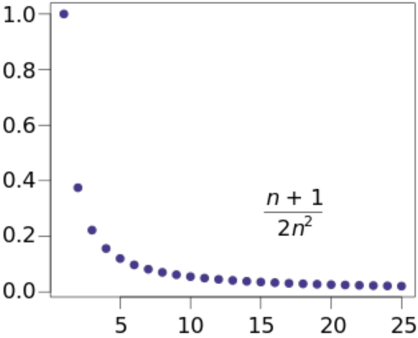
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_n < -\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Definiție

Spunem că șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **divergent** dacă nu este convergent, adică dacă fie nu are limită, fie are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

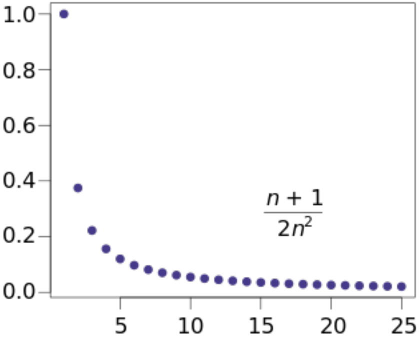
Exemplu de șir convergent

Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



Exemplu de șir convergent

Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

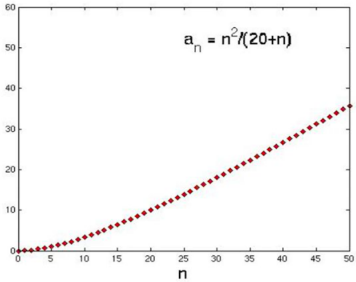


Așadar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Exemplu de șir divergent

Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \dfrac{n^2}{(20+n)}, n \in \mathbb{N}$.



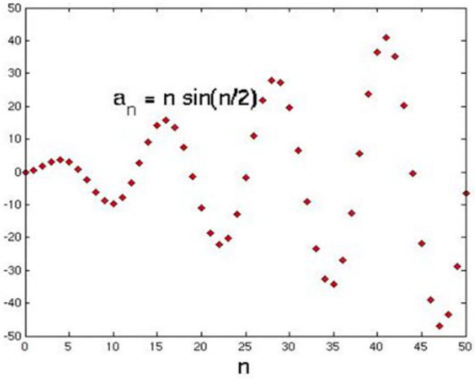
Putem observa că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Altfel spus, șirul este divergent, nu are limita număr real.

Exemplu de șir divergent

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n\sin\dfrac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$.



Atunci, șirul a_n diverge.

Convergență

Teorema

Dacă un șir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

Propoziție

Orice șir convergent este mărginit.

Exemple:

1. Șirul constant $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}$ este convergent la c.
2. Șirul $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este convergent la 0.
3. Șirul $x_n = \dfrac{2n+4}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ este convergent având limita 2.
4. Șirul $x_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*$ are limita $+\infty$.
5. Șirul $x_n = a^n, n \in \mathbb{N}^*$ este convergent pentru $a \in (-1, 1]$ și divergent pentru $a \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$, iar
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & a \in (-1, 1) \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$
6. Șirul $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la numărul e, numit *constanta lui Euler*.

Subșiruri

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale și $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un șir strict crescător de numere naturale. Șirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numește **subșir** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir convergent la $x\in\mathbb{R}$. Dacă $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este un subșir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge la x.

Altfel spus: *Orice subșir al unui șir convergent este convergent la aceeași limită.*

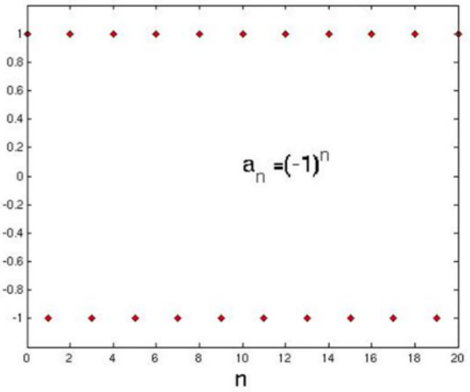
Corolar

i. Dacă un șir are un subșir divergent, atunci acel șir este divergent.
ii. Dacă un șir conține două subșiruri convergente cu limite diferite, atunci șirul este divergent.

Subșiruri

Exemple:

1. Șirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$, este divergent.



Acesta conține subșirul $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ cu limita 1 și subșirul $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ cu limita -1.

Exemple:

2. Șirul $x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$ este divergent, deoarece conține subșirul x_{2k} cu limita $+\infty$.
3. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *periodic* dacă există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$x_{n+p} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Numărul p se numește *perioadă* a șirului.
Orice șir periodic de perioada $p \geq 2$ este divergent.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale, convergente la $x \in \mathbb{R}$, respectiv la $y \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații:

(P1) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$;

(P2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$;

(P3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$;

(P4) dacă $y \neq 0$, atunci există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_n \neq 0, \forall n \geq n_0$ iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y};$$

(P5) dacă $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $x \leq y$;

Proprietăți ale șirurilor convergente

Propoziție (Criteriul cleștelui)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale, convergente la $x \in \mathbb{R}$, respectiv la $y \in \mathbb{R}$.

Dacă există șirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, iar $x = y$, atunci șirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$.

Exercițiu:

Să se calculeze limita șirului $x_n = \dfrac{\sin n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziție (Criteriul majorării)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale și fie $x \in \mathbb{R}$. Dacă există un șir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero astfel încât

$$|x_n - x| \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

atunci (x_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Exercițiu:

Să se arate că șirul $x_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}, n \in \mathbb{N}^*$, converge la 1.

Exercițiu:

Să se arate că șirul $x_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}, n \in \mathbb{N}^*$, converge la 1.

Soluție: Evaluăm $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2+2n}{n^2+n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Cum $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, atunci, aplicând criteriul majorării, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Teorema convergenței monotone

Teorema convergenței monotone (Weierstrass)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

i) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător și mărginit superior, atunci acesta converge la $\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

ii) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și mărginit inferior, atunci acesta converge la $\inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Putem rezuma teorema de mai sus în felul următor:

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Corolar

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

i) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător și nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Teorema convergenței monotone

Exercițiu: Să se demonstreze convergența următorului șir

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție: Studiem mărginirea și monotonia șirului. Observăm că

$$0 < x_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, șirul este mărginit. Studiem acum monotonia:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0,$$

adică șirul este strict crescător. Conform Teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

Teorema Bolzano-Weierstrass

Din orice șir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subșir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent.

Pentru a demonstra acest rezultat, se utilizează următorul rezultat:

Lema

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere reale, atunci există un subșir al său care este monoton.

Teorema Stolz-Cesàro

Teorema

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton și nemărginit. Dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = x \in \overline{\mathbb{R}},$$

atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ și este egală cu x.

Exercițiu: Să se calculeze limita șirului $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

Șiruri Cauchy

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.
Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **șir Cauchy** sau **șir fundamental** dacă

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Definiție

Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **șir Cauchy** sau **șir fundamental** dacă pentru orice

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Teorema lui Cauchy

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy, atunci el este mărginit.

Teorema

Șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Exercițiu: Arătați că șirul $x_n = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + ... + \dfrac{\sin nx}{2^n}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ este un șir Cauchy, deci convergent.

Soluție: Fie $\varepsilon > 0$ și $n, p \in \mathbb{N}$. Atunci, avem:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right] < \frac{1}{2^n}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Am obținut o majorare independentă de $p \in \mathbb{N}$, și, în plus, $\dfrac{1}{2^n} \to 0$. Deci, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Șiruri Cauchy

Exercițiu: Arătați că șirul $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$ nu este Cauchy.

Soluție: Vom arăta că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Luând $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, și $p = n$, obținem $|x_{n+p} - x_n| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \varepsilon$. Deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este Cauchy.

Puncte limită ale unui șir

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

- Spunem că $x \in \overline{\mathbb{R}}$ este **punct limită** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă există un subșir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \to x$.
- Vom nota mulțimea tuturor punctelor limită cu $L(x_n)$.

Observație: Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale, avem $L(x_n) \neq \varnothing$.

Puncte limită ale unui șir

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

- Se numește **limită inferioară** a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea inferioară a mulțimii $L(x_n)$.
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L(x_n);$$
- Se numește **limită superioară** a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea superioară a mulțimii $L(x_n)$;
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L(x_n).$$

Observații:
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

1) Avem:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir convergent la un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ și are loc:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x.$$

3) Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se poate arăta că există un subșir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ și, respectiv, un subșir monoton crescător care să conveargă la $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale pozitive. Atunci are loc

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

În particular, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in [0,+\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$, atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, având loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Structura cursului

1. Șiruri de numere reale
   - Convergență
   - Subșiruri
   - Proprietăți ale șirurilor convergente
   - Teorema convergenței monotone
   - Teorema Bolzano-Weierstrass
   - Teorema Stolz-Cesàro
   - Șiruri Cauchy
   - Puncte limită ale unui șir
2. Polinoame

Polinoame

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, unde $K\ -\ \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, cu $p \in \mathbb{N}^*$ număr prim.

Considerăm mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{N}, K) = \{f : \mathbb{N} \to K\}$. Cum avem $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, vom putea construi un șir de elemente din K, pe care îl vom nota cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ne interesează o submulțime $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$ formată din șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care termenii sunt nuli cu excepția unui număr **finit** dintre ei.

$$f \in \mathcal{P} \Longrightarrow f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),\ a_n \neq 0.$$

f - **polinom** cu coeficienți în K.

Dacă notăm

$$X = (0, 1, 0, \ldots),\ X^2 = (0, 0, 1, \ldots), \ldots, X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

atunci putem scrie

$$\begin{aligned} f &= (a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots, a_n, 0, \ldots) \\ &= a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n. \end{aligned}$$

Polinoame

Scrierea polinomului f în forma

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0, \text{ unde } a_0, a_1, ..., a_n \in K, \ a_n \neq 0,$$

reprezintă **forma algebrică** a polinomului f, ordonat după puterile descrescătoare ale lui X.

- K[X] - mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în K;
- $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ se numesc **coeficienții polinomului**;
- a_n se numește **coeficientul dominant**, iar a_0 **termenul liber**;
- $grad(f)$, $f \neq 0$ - cel mai mare număr natural n cu proprietatea că $a_n \neq 0$.

Operații cu polinoame

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame de grad m, respectiv n,

$$f = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0, \quad g = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0,$$

unde $a_i, b_j \in K$, $a_m, b_n \neq 0$, iar $a_i = 0$ pentru $i > m$ și $b_j = 0$ pentru $j > n$.

- Spunem că polinomul f este **egal** cu polinomul g, și scriem $f = g$, dacă și numai dacă $grad(f) = grad(g)$, și

$$a_i = b_i, \forall i \geq 0.$$

- În particular, $f = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \geq 0$.

- **Adunarea** $\rightarrow f + g \in K[X]$:

  $f + g = (a_p + b_p)X^p + \ldots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$, unde $p = \max\{m, n\}$

- **Produsul** $\rightarrow f \cdot g \in K[X]$:

$$
\begin{aligned}
f \cdot g = {} & (a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \ldots + a_{m+n} b_0) X^{m+n} + \ldots \\
& \ldots + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + a_0 b_0,
\end{aligned}
$$

Funcția polinomială. Rădăcini ale unui polinom

Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, și fie $x \in K$.

- Se numește valoarea polinomului f în x elementul

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

- Elementul $x \in K$ este o **rădăcină** a polinomului f dacă $f(x) = 0$.

Exemple

- Polinomul de gradul 1, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = ax + b$, are rădăcina $\alpha = -\dfrac{b}{a}$.
- Polinomul de gradul 2, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = ax^2 + bx + c$, are rădăcinile date de formula:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Teoremă

Fie $f, g \in K[X]$ și fie $x \in K$. Atunci

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Definiție

Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul. Se numește **funcție polinomială** atașată polinomului f, funcția $\widetilde{f} : K \to K$, definită prin $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in K$.

Teorema împărțirii cu rest

Teorema împărțirii cu rest

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame, astfel încât $g \neq 0$. Atunci **există și sunt unice** $q, r \in K[X]$ cu proprietățile

a) $f = g \cdot q + r$;

b) $grad(r) < grad(g)$.

- Polinomul f se numește *deîmpărțit*, g se numește *împărțitor*, iar q și r se numesc *câtul* respectiv *restul* împărțirii.
- Din teorema împărțirii cu rest deducem următoarea egalitate

$$grad(q) = grad(f) - grad(g).$$

- Dacă $r = 0$, adică dacă $f = g \cdot q$ atunci spunem că f se divide prin g(și scriem $f \vdots g$) sau $g|f$ (citim: g divide f)

Împărțirea a două polinoame

$$\begin{array}{c|c} a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 & b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0 \\ \hline & \end{array}$$

Exemplu: Împărțirea a două polinoame

Să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X], g = X - 1$.

Teorema restului

Restul împărțirii polinomului $f \in K[X],\ f \neq 0$ la polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.

Vom nota cu $q = b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$, câtul împărțirii polinomului f la g. Din teorema împărțirii cu rest vom obține

$$f = (X - a)q + r = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0) + r.$$

Așadar, dacă ordonăm după puterile lui X avem

$$f = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (b_1 - ab_2)X^2 + (b_0 - ab_1)X + r - ab_0.$$

Identificând coeficienții lui f obținem

Schema lui Horner

Prin urmare, vom determina coeficienții câtului: $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ și a restului r, după *schema lui Horner*

f	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-1}a + a_{n-1}$	$b_{n-2}a + a_{n-2}$	$\cdots$	$b_1 a + a_1$	$b_0 a + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

Coeficienții lui q Restul

Schema lui Horner

Exercițiu: Utilizând schema lui Horner, să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X], g = X - 1$.

Definiție

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame. Spunem că g **divide** polinomul f, și vom nota $g|f$, dacă există $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$.

Polinomul g se numește **divizor** al polinomului f, iar polinomul g se numește **multiplu** al polinomului g.

Proprietăți ale relației de divizibilitate

Fie $f, g, h \in K[X]$ polinoame cu coeficienți în corpul K. Atunci are loc

- Reflexivitate: $f|f, \forall f \in K[X]$;
- Tranzitivitate: dacă $f|g$ și $g|h$, atunci $f|h$;
- Polinomul nul $f = 0$ este divizibil cu orice alt polinom;
- Polinomul constant $f = a, a \neq 0$ este divizor pentru oricare polinom din $K[X]$;

C.m.m.d.c, C.m.m.m.c

Definiție

Un polinom $d \in K[X]$ se numește **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g dacă

1. d este divizor comun al lui f și g, adică $d|f$ și $d|g$;
2. dacă d_1 este un alt divizor comun al lui f și g, atunci $d_1|d$.

Notăm cel mai mare divizor comun pentru f și g, cu $c.m.m.d.c.(f,g)$ sau (f,g).

Definiție

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame cu coeficienți în K. Atunci $m \in K[X]$ se numește **cel mai mic multiplu comun** al lui f și g dacă

- $f|m$ și $g|m$ (m este multiplu comun pentru f și g);
- oricare ar fi $m_1 \in K[X]$, multiplu comun pentru f și g, rezultă $m|m_1$.

Vom nota cel mai mic multiplu comun al lui f și g cu $c.m.m.m.c(f,g)$ sau $[f,g]$.

Teorema lui Bezout

Fie $f, g \in K[X]$ cu $g \neq 0$ și fie $\alpha \in K$. Atunci:

a) α este rădăcină a lui f dacă și numai dacă f se divide cu $X - \alpha \in K[X]$;

b) Dacă f se divide cu g și α este rădăcină a lui g, atunci α este rădăcină a lui f.

Definiție

Fie $f \in K[X]$, cu $f \neq 0$ și fie $m \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\alpha \in K$ se numește **rădăcină multiplă de ordinul** m, dacă f se divide cu $(X - \alpha)^m$, dar nu se divide cu $(X - \alpha)^{m+1}$.

Numărul $m \in \mathbb{N}^*$ se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α. Dacă $m = 1$, rădăcina α se numește **rădăcină simplă**, dacă $m = 2, 3, \ldots$, atunci α se numește rădăcină **dublă, triplă,**...

Multiplicitatea unei rădăcini

Fie funcția polinomială $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Spunem că funcția f are rădăcina α, de multiplicitate p dacă și numai dacă

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0 \text{ și } f^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

- Dacă elementul $\alpha \in K$ este rădăcină de multiplicitate 1 pentru f atunci

$$f \,\vdots\, (X-\alpha) \text{ și } f \;\not\vdots\, (X-\alpha)^2;$$

- Dacă elementul $\alpha \in K$ este rădăcină de multiplicitate 2 pentru f atunci

$$f \,\vdots\, (X-\alpha)^2 \text{ și } f \;\not\vdots\, (X-\alpha)^3;$$

- Dacă elementul $\alpha \in K$ este rădăcină de multiplicitate 3 pentru f atunci

$$f \,\vdots\, (X-\alpha)^3 \text{ și } f \;\not\vdots\, (X-\alpha)^4;$$

Polinoame

Definiție

Fie $f \in K[X]$ un polinom de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$, $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$.

- O ecuație de forma $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ se numește **ecuație algebrică de gradul** n cu coeficienți în K și necunoscuta x.
- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ se numesc **coeficienții ecuației**, n se numește **gradul ecuației**.
- Elementul $\alpha \in K$ cu proprietatea că $f(\alpha) = 0$ se numește **soluție** a ecuației.

Teorema fundamentală a algebrei

O ecuație algebrică de grad cel putin 1 cu coeficienți complecși, admite cel putin o soluție complexă.

Observație: Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că o ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți complecși are exact n soluții complexe.

Definiție

- Polinomul nenul $f \in K[X]$ se numește **reductibil** peste corpul K dacă există $g, h \in K[X]$ de grad cel putin 1, astfel încât $f = g \cdot h$.
- Un polinom $f \in K[X]$ cu $grad(f) \geq 1$, care nu este reductibil peste K, se numește **ireductibil** peste K.

Observație:

1. Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este polinom ireductibil peste K.
2. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom nenul, atunci el este ireductibil numai în următoarele cazuri: fie este de gradul 1, fie f este de gradul 2, dar nu are rădăcini reale. Așadar, orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n \geq 3$ este polinom reductibil peste $\mathbb{R}$.

Teorema

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, un polinom de grad n cu coeficienții din $\mathbb{C}$.

a) Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcini ale lui f atunci $f = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$.

b) Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sunt rădăcini distincte ale lui f, de multiplicitate $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$f = a_n(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Observație: Dacă polinoamele $f, g \in K[X]$ sunt descompuse în produse de factori ireductibili, atunci

- (f, g) este produsul factorilor ireductibili comuni, luați la puterea cea mai mică;
- $[f, g]$ este produsul factorilor ireductibili comuni sau necomuni, luați la puterea cea mai mare.

Bibliografie

A. Precupanu, *Bazele analizei Matematice*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1993.

F.L. Țiplea, *Introducere în teoria mulțimilor*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1998.

M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura Fair Partners, București, 2011.

G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/)

G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.