CURSUL 11
INTEGRARE

Noţiunea de *integrală* este esenţială multor arii ale matematicii, dar şi altor domenii ce se bazează pe matematică. De exemplu, ea serveşte: determinării stării unui sistem dinamic a cărui viteză de evoluţie este cunoscută, la calculul caracteristicilor numerice ale unor obiecte geometrice (lungime, arie, volum, centru de greutate), ale cantităţilor fizice (moment, lucru mecanic) sau ale variabilelor aleatoare în teoria probabilităţilor (funcţie de distribuţie, medie şi varianţă).

1. Primitive

Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interiorul nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$.

a) O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte o *primitivă* a lui f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

b) Dacă f are cel puţin o primitivă pe I, atunci mulţimea primitivelor lui f se numeşte *integrala nedefinită* a lui f şi se notează $\int f(x)dx$.

Observaţii.

1. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă a lui f are forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Notând $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor constante pe I, avem $\int f(x)dx = F + \mathcal{C}$. Prin abuz de limbaj, putem scrie $\int f(x)dx = F(x) + c,\ \forall x \in I$.

2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci f este primitiva lui f'.

3. Orice primitivă a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, deoarece orice funcţie derivabilă este continuă.

4. Spaţiul $\mathcal{P}(I)$ al tuturor funcţiilor $f : I \to \mathbb{R}$ ce admit primitive este un spaţiu liniar (subspaţiu al spaţiului liniar $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$), deoarece

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5. Orice funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ ce admite primitive are *proprietatea lui Darboux*: pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi λ între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există $\tilde{x}$ între x_1 şi x_2 astfel încât $f(\tilde{x}) = \lambda$.

În ceea ce urmează vom analiza unele metode standard de calcul al primitivelor, pornind cu lista integralelor nedefinite uzuale:

- $\int x^\alpha dx = c + \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \\ \ln|x|, & \alpha = -1; \end{cases}$
- $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c; \quad \int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c,\ a \in \mathbb{R}^*;$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c; \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + c,\ a \in \mathbb{R}^*;$
- $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + c,\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x dx = \sin x + c;$
- $\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \operatorname{ch} x + c; \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \operatorname{sh} x + c,$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval cu interior nevid astfel încât funcţiile de sub semnul integralei sunt definite pe I.

Integrare prin părţi. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile, cu f' şi g' continue pe I. Atunci

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,\ x \in I,$$

Putem aplica această formulă pentru a completa lista de mai sus:

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{|a|} + c,\ a \in \mathbb{R}_+^*;$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ a \in \mathbb{R}^*$;
- $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + c$.

Integrarea prin părţi este recomandată pentru integrale de forma

$$\int P(x)f(x)dx,$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ şi f este o funcţie elementară de tipul: a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, etc. Aplicând această metodă, putem reduce cu o unitate gradul polinomului P.

Metoda transformărilor algebrice. Este cel mai des utilizată pentru calculul primitivelor *funcţiilor raţionale* de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\mathring{I} \neq \emptyset$ şi $Q(x) \neq 0$ pe I. Este bine cunoscut (din algebră) faptul că f poate fi descompusă în mod unic ca suma unor funcţii raţionale "simple":

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum\nolimits_2 \frac{B_{k,m}x + C_{k,m}}{(x^2 + p_k x + q_k)^m},\ x \in I,$$

unde G este o funcţie polinomială (egală cu 0 dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H este o funcţie polinomială cu $\operatorname{grad} H < \operatorname{grad} Q$, $\sum_1$ este o sumă finită după toate rădăcinile reale x_k ale lui Q şi $\sum_2$ este o sumă finită după toate rădăcinile complexe ale lui Q ($p_k, q_k \in \mathbb{R}$ astfel încât $p_k^2 - 4q_k < 0$). Integrarea lui f este astfel redusă la calculul primitivelor componentelor descompunerii de mai sus.

Dacă Q are rădăcini multiple, calculul primitivei lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi făcută după *metoda Gauss-Ostrogradski*, bazată pe formula

$$(*) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,\ x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q şi Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \frac{Q}{Q_1}$, iar P_1, P_2 sunt polinoame ce au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$, respectiv $\operatorname{grad} Q_2$. Pentru a găsi P_1 şi P_2 se poate deriva relaţia $(*)$, adică

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},\ x \in I.$$

Metoda transformărilor trigonometrice. Este adesea combinată cu *metoda substituţiei* şi este folosită pentru calculul primitivelor funcţiilor ce se exprimă cu ajutorul funcţiilor trigonometrice.

Pentru *integralele trigonometrice* de forma

$$\int E(\sin x, \cos x)dx,\ x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcţie raţională de două variabile se poate utiliza substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Deoarece $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, a calcula integrala de mai sus se reduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în noua variabilă t. Există unele cazuri în care calculele pot fi simplificate, prin folosirea altor substituţii:

i) dacă $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, atunci se recomandă substituţia $\cos x = t$;
ii) dacă $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$, atunci se recomandă substituţia $\sin x = t$;
iii) dacă $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară în $\sin x$ şi $\cos x$, atunci se recomandă substituţia $\operatorname{tg} x = t$.

Vom aplica de asemenea metoda substituţiei pentru calculul aşa-ziselor *integrale iraţionale,* pentru a le reduce la integrale de funcţii raţionale. Vom utiliza *substituţiile Euler* pentru integralele de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx,\ x \in I,$$

cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi E o funcţie raţională de două variabile. Schimbarea de variabilă se va face după cum urmează:

i) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, dacă $a > 0$;
ii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, dacă $c > 0$;
iii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, dacă $b^2 - 4ac > 0$, unde x_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

Pentru integrale iraţionale de forma

$$\int E\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right)dx,\ x\in I,$$

unde E este o funcţie raţională de $k+1$ ($k\in\mathbb{N}^*$) variabile reale, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$, $cx+d\neq 0$, $\forall x\in I$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$, $\forall x\in I$, $p_i\in\mathbb{Z}$, $q_i\in\mathbb{N}^*$, $\forall i=\overline{1,k}$, vom folosi substituţia $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1,q_2,\ldots,q_k$.

Substituţiile Cebîşev sunt folosite pentru calculul *integralelor binomiale*, ce au forma

$$\int x^p(ax^q+b)^r\,dx,\ x\in I,$$

unde $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ şi $p,q,r\in\mathbb{Q}$. Calculul unor astfel de integrale se reduce la cel al primitivelor de funcţii raţionale doar în următoarele trei cazuri:

i) $r\in\mathbb{Z}$: substituţia $x=t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al lui p şi q;
ii) $\frac{p+1}{q}\in\mathbb{Z}$: substituţia $ax^q+b=t^l$, unde l este numitorul lui r.
iii) $\frac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$: substituţia $a+bx^{-q}=t^l$, l fiind numitorul lui r.

Pentru a calcula integralele de forma

$$\int E\left(a^{r_1x},a^{r_2x},\ldots,a^{r_nx}\right)\,dx,$$

unde $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $r_1,r_2,\ldots,r_n\in\mathbb{Q}$ şi E o funcţie raţională de n ($n\in\mathbb{N}^*$) variabile reale se poate face prin substituţia $a^x=t^\nu$, unde $t>0$ şi ν este cel mai mic multiplu comun al numărătorilor numerelor $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

La final, dorim să subliniem că există funcţii elementare ce nu posedă primitive elementare. Este cazul *integralelor eliptice*

$$\int\sqrt{(1-a^2\sin^2x)^{\pm1}}dx,\ a\in(0,1),$$

dar şi al următoarelor integrale:

- $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\displaystyle\int\frac{\cos x}{x}dx$;
- $\displaystyle\int\frac{dx}{\ln x}$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}dx$;
- $\displaystyle\int\mathrm{e}^{-x^2}dx$ (*primitiva Poisson*), $\displaystyle\int\cos(x^2)dx$, $\displaystyle\int\sin(x^2)dx$ (*primitivele Fresnel*).

2. Integrala Riemann

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Definiţie.

a) Numim o *diviziune* (sau *partiţie*) a intervalului $[a,b]$ o mulţime finită $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ astfel încât $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Intervalele $[x_i,x_{i+1}]$ ($i=\overline{0,n-1}$) sunt numite *subintervalele* diviziunii Δ.

b) Numărul

$$\|\Delta\|=\max_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}$$

(notat de asemenea $\nu(\Delta)$) se numeşte *norma* diviziunii Δ.

c) O diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ se numeşte *echidistantă* dacă $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$, $\forall i=\overline{1,n}$; în acest caz $\|\Delta\|=\dfrac{b-a}{n}$ şi $x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$, $\forall i=\overline{0,n}$.

Vom nota cu $\mathcal{D}[a,b]$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului compact $[a,b]$. Fie $\Delta_1,\Delta_2\in\mathcal{D}[a,b]$. Spunem că Δ_2 este mai *fină* decât Δ_1 şi notăm $\Delta_1\le\Delta_2$ dacă $\Delta_1\subseteq\Delta_2$.

Definiţie. Fie $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ cu $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

a) Un n-uplu $\xi_\Delta=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ se numeşte un *sistem de puncte intermediare* al lui Δ dacă $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\forall i=\overline{1,n}$. Mulţimea tuturor *sistemelor de puncte intermediare* ale lui Δ este notată Ξ_Δ.

b) Numim *suma Riemann* corespunzătoare funcţiei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ în raport cu Δ şi un sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$,numărul

$$\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Definiţie. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă Riemann* (sau *$\mathcal{R}$-integrabilă*) dacă există un număr real I, numit *integrala Riemann* a lui f, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice $\xi_\Delta \in \Xi_\Delta$ să avem $\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I\right| < \varepsilon$.

Integrala Riemann (ce este unică) va fi notată prin $\int_a^b f(x)dx$ (sau $(\mathcal{R}) \int_{[a,b]} f(x)dx$). Mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe $[a, b]$ este notată $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziţia 2.1. *Dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este Riemann integrabilă, atunci ea este mărginită.*

Observaţie. Dacă notăm $\mathcal{B}([a, b])$ mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, atunci, datorită rezultatului de mai sus, $\mathcal{R}[a, b] \subseteq \mathcal{B}([a, b])$. Incluziunea este totuşi strictă, deoarece există funcţii mărginite ce nu sunt integrabile. Un exemplu este funcţia lui Dirichlet, $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

O condiţie necesară şi suficientă pentru integrabilitatea Riemann este dată de următoarea condiţie de tip Cauchy:

Teorema 2.2 (criteriul Cauchy de integrabilitate Riemann). *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este $\mathcal{R}$-integrabilă dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b],\ \forall \xi'_\Delta, \xi''_\Delta \in \Xi_\Delta : \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\sigma_f(\Delta, \xi'_\Delta) - \sigma_f(\Delta, \xi''_\Delta)\right| < \varepsilon.$$

Următorul rezultat prezintă unele proprietăţi utile ale funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile.

Propoziţia 2.3.

i) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c, d]$, pentru orice interval $[c, d] \subseteq [a, b]$.*

ii) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a, b)$. Dacă $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c]$ şi $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

iv) *Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi are loc* inegalitatea Cauchy-Schwarz *pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

v) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $|f(x)| \ge \mu > 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.*

vi) *Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

(cu alte cuvinte, $\mathcal{R}[a, b]$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathscr{F}([a, b]; \mathbb{R})$).

vii) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.*

Observaţii.
1. O generalizare a inegalităţii Cauchy-Schwarz este, ca în cazul sumelor finite de numere reale, *inegalitatea lui Hölder* pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

unde $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Integrala Riemann este o funcţională monotonă, adică dacă $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$ astfel încât $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

3. Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, definim $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$ şi $\int_a^a f(x)dx := 0$.

4. Fie $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Datorită monotoniei integralei Riemann, avem

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Mai mult, dacă $f \in C([a,b])$ (adică f este continuă pe $[a,b]$), atunci există $x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$; rezultă că

$$f(x_1) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(x_2)$$

Deoarece f are proprietatea lui Darboux (ce este implicată de continuitatea lui f), atunci există c între x_1 şi x_2 (cu posibilitate de egalitate) astfel încât $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, adică are loc următoarea formulă a mediei:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Sume Darboux.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ este o diviziune a lui $[a,b]$, vom defini *sumele Darboux inferioare* şi *superioare* asociate lui Δ, după cum urmează:

$$s_f(\Delta) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1});$$
$$S_f(\Delta) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $m_i := \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ şi $M_i := \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Definiţie. Numărul $\underline{I} := \sup\limits_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} s_f(\Delta)$ se numeşte *integrala Darboux inferioară*, în timp ce numărul $\overline{I} := \inf\limits_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} S_f(\Delta)$ se numeşte *integrala Darboux superioară*.

Vom avea întotdeauna $\underline{I} \le \overline{I}$. Următorul rezultat precizează o altă condiţie necesară şi suficientă pentru $\mathcal{R}$-integrabilitate:

Teorema 2.4 (Criteriul Darboux de integrabilitate Riemann). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I}$, condiţie ce este echivalentă cu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a,b] : S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

În acest caz, $\underline{I} = \overline{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Folosind criteriile Cauchy sau Darboux, se pot sublinia câteva categorii de funcţii ce sunt integrabile Riemann.

Teorema 2.5. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

- ***i)*** *Dacă $f \in C([a,b])$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*
- ***ii)*** *Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ (sau, mai general,* monotonă pe porţiuni *pe $[a,b]$, adică $f|_{[c_{i-1},c_i]}$ este monotonă pentru orice $i = \overline{1,n}$, unde $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$), atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Teorema 2.6. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Definim $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b].$$

Atunci:

- *i) $F \in C([a,b])$; mai mult, există $L > 0$ astfel încât*

$$|F(x) - F(\tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}|,\ \forall x, \tilde{x} \in [a,b]$$

  (adică F este Lipschitz-continuă);
- *ii) dacă f este continuă în $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Observaţii.

1. O consecinţă a celei de a doua parte a teoremei de mai sus este că dacă $f \in C([a,b])$, atunci F este o primitivă a lui f.

2. O altă consecinţă este că dacă $f \in C([a,b])$ şi f are o primitivă F, atunci are loc formula *Leibniz-Newton*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Pentru a calcula integrala Riemann a unei funcţii $f \in C([a,b])$, putem utiliza *schimbarea de variabilă*, prin formula

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx,$$

unde $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ este o funcţie de clasă C^1. O a doua formulă de schimbare de variabilă, echivalentă cu prima, este

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)dt,$$

unde $\psi : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ este o funcţie bijectivă, de clasă C^1.

O altă manieră de a calcula o integrală Riemann este *integrarea prin părţi*, dată de formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

pentru $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a,b]$ cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, $f, g \in C^1[a,b]$).

Uniforma convergenţă a funcţiilor păstrează integrabilitatea Riemann, după cum afirmă următorul rezultat:

Propoziţia 2.7. *Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{R}[a,b]$ un şir de funcţii, uniform convergent la o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

3. Integrale improprii

O extensie naturală a integralei Riemann este dată de cazurile în care funcţia ce trebuie integrată este nemărginită şi/sau intervalul pe care se integrează este nemărginit. Ambele cazuri pot fi reduse la cel în care intervalul pe care se integrează nu este compact; vorbim atunci de *integrale improprii.*

Vom da definiţia integralelor improprii doar pe intervale de forma $[a,b)$ cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, cazul intervalelor de tip $(a,b]$ sau (a,b) (sau chiar $(a,b) \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ cu $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in (a,b)$) fiind tratate de o manieră similară.

Definiţie. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este o funcţie *integrabilă Riemann local* pe $[a,b)$, adică $f \in \mathcal{R}[a,c]$ pentru orice $c \in (a,b)$.

a) Dacă există limita

$$I := \lim_{c \nearrow b} \int_c^b f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}},$$

vom numi I *integrala Riemann* (*generalizată*) a lui f pe $[a,b)$, notată $\int_a^{b-0} f(x)dx$ (sau $(\mathcal{R}) \int_{[a,b)} f(x)dx$). Dacă $b = +\infty$, I poate fi notată $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

b) Dacă $I \in \mathbb{R}$, vom spune că f este *impropriu integrabilă Riemann* pe $[a,b)$ sau că integrala $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă* (pe scurt, $\int_a^b f(x)dx$ (C)).

c) Dacă $I \in \{-\infty, +\infty\}$ sau limita $\lim_{c \nearrow b} \int_c^b f(x)dx$ nu există, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este *divergentă* (pe scurt, $\int_a^b f(x)dx$ (D)).

Noţiuni similare pot fi stabilite pentru intervalele $(a,b]$ sau (a,b): $\int_{a-0}^b f(x)dx$, (sau $(\mathcal{R}) \int_{(a,b]} f(x)dx$), $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, respectiv $\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx$ (sau $(\mathcal{R}) \int_{(a,b)} f(x)dx$), $\int_{-\infty}^{b-0} f(x)dx$, $\int_{a+0}^{+\infty} f(x)dx$ sau $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Observație. Să presupunem că $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ este astfel încât f este integrabilă Riemann local pe $[a, b] \setminus \{c\}$. Dacă limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

există, o vom numi *valoarea principală* a integralei $\int_a^b f(x)dx$. Dacă, mai mult, această limită este finită, spunem că f este integrabilă pe $[a, b]$ *în sensul valorii principale.*

Aceasta este o noţiune mai slabă decât integrabilitatea improprie, deoarece $\int_a^b f(x)dx$ (C) este echivalentă cu existenţa ambelor limite $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ şi $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Exemplu. Fie $p \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

- $\displaystyle\int_{0+0}^1 x^p dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 x^p dx = \begin{cases} \lim\limits_{c \searrow 0} \left.\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right|_c^1, & p \neq -1; \\ \lim\limits_{c \searrow 0} \ln x|_c^1, & p = -1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{c \searrow 0} \dfrac{1}{p+1}(1 - c^{p+1}), & p \neq -1; \\ \lim\limits_{c \searrow 0} -\ln c, & p = -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{p+1}, & p > -1; \\ +\infty, & p \leq -1; \end{cases}$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^p dx = \lim_{c \nearrow +\infty} \int_1^c x^p dx = \begin{cases} \lim\limits_{c \nearrow +\infty} \left.\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right|_1^c, & p \neq -1; \\ \lim\limits_{c \nearrow +\infty} \ln x|_1^c, & p = -1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{c \nearrow +\infty} \dfrac{1}{p+1}(c^{p+1} - 1), & p \neq -1; \\ \lim\limits_{c \nearrow +\infty} \ln c, & p = -1 \end{cases}$

  $\displaystyle= \begin{cases} -\dfrac{1}{p+1}, & p < -1; \\ +\infty, & p \geq -1. \end{cases}$

De aceea, $\int_0^1 x^p dx$ (C) dacă şi numai dacă $p > -1$, în timp ce $\int_1^{+\infty} x^p dx$ (C) dacă şi numai dacă $p < -1$.

Propoziţia 3.1 (criteriul Cauchy de convergenţă). *Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann local pe $[a, b)$. Atunci $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a_\varepsilon \in (a, b)$ astfel încât pentru orice $a', a'' \in (a_\varepsilon, b)$ să avem*

$$\left| \int_{a'}^{a''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Acest rezultat poate fi obţinut prin caracterizarea existenţei limitei finite $\lim\limits_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)dx$ cu criteriul lui Cauchy.

Definiţie. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă Riemann local pe $[a, b)$.

a) Dacă integrala $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este *absolut convergentă*, notând aceasta $\int_a^b f(x)dx$ (AC).

b) Dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă, dar $\int_a^b |f(x)|dx$ este divergentă, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este *semiconvergentă.*

O consecinţă a criteriului Cauchy de convergenţă este că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

Similar cu criteriile de convergenţă pentru serii, avem următorul *criteriu de comparaţie*:

Propoziţia 3.2. *Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile Riemann local pe $[a, b)$. Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$ şi $\int_a^b g(x)dx$ (C), atunci $\int_a^b f(x)dx$ (AC).*

Integrale improprii pe intervale nemărginite.

Vom considera integrale de forma $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cu $a \in \mathbb{R}$, deoarece cazurile $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ pot fi reduse la acesta.

Presupunând că limita $l = \lim_{x \nearrow +\infty} f(x)$ există, din criteriul lui Cauchy de covergenţă putem deduce că dacă $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (C), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$, există $a_\varepsilon, a_\delta > a$ astfel încât pentru orice $a' > a_\varepsilon$ avem $-\varepsilon < \int_{a'}^{a'+1} f(x)dx < \varepsilon$ şi $f(x) \in (l-\delta, l+\delta)$, $\forall x > a_\delta$. Obţinem astfel o condiţie necesară pentru integrabilitatea Riemann (*atenţie:* numai când limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$ există) este că $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Teorema 3.3 (criteriul în β). *Fie $\beta \in \mathbb{R}$. Să presupunem că există $l = \lim_{x\to+\infty} x^\beta |f(x)|$. Atunci:*

i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *(AC) dacă $\beta > 1$ şi $l < +\infty$;*
ii) $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *(D) dacă $\beta \leq 1$ şi $0 < l$.*

Propoziţia 3.4 (criteriul integral al lui Cauchy). *Dacă funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ este descrescătoare, atunci integrala improprie $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.*

Integrale improprii pe intervale mărginite ale unor funcţii nemărginite.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$.

Teorema 3.5 (criteriul în α). *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (respectiv $f : (a, b] \to \mathbb{R}$) o funcţie integrabilă Riemann local. Să presupunem că există limita $L = \lim_{x\nearrow b} [(b-x)^\alpha |f(x)|]$ (respectiv $L = \lim_{x\searrow a} [(x-a)^\alpha |f(x)|]$). Atunci:*

i) $\int_a^b f(x)dx$ *(AC) dacă $\alpha < 1$ şi $L < +\infty$;*
ii) $\int_a^b f(x)dx$ *(D) dacă $\alpha \geq 1$ şi $L > 0$.*

4. Integrale cu parametri

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă, a,$b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$ şi $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\mathbf{y} \in A$, arbitrar fixat, funcţia $f(\cdot, \mathbf{y})$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Putem defini atunci $F : A \to \mathbb{R}$ prin

$$F(\mathbf{y}) = \int_a^b f(x, \mathbf{y})dx, \; \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in A,$$

numită *integrala Riemann* a lui f pe $[a, b]$, de *parametri* $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Mai general, limitele de integrare pot depinde de asemenea de parametri: dacă funcţiile $p, q : A \to [a, b]$ sunt date, atunci putem defini funcţia $G : A \to \mathbb{R}$ prin

$$G(y) = \int_{p(\mathbf{y})}^{q(\mathbf{y})} f(x, \mathbf{y})dx, \; \mathbf{y} \in A.$$

Ca şi în cazul şirurilor de funcţii, suntem interesaţi de transferul unor proprietăţi ale lui f asupra lui F sau G. Prin analogie, este clar că doar existenţa limitei $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(x, \mathbf{y})$, pentru orice $x \in [a, b]$ într-un punct $\mathbf{y}_0 \in A'$ nu este îndeajuns pentru a deduce existenţa limitei $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} F(\mathbf{y})$ sau,în cazul afirmativ, a egalităţii $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} F(\mathbf{y}) \left(= \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \int_a^b f(x, \mathbf{y})dx \right) = \int_a^b \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(x, \mathbf{y})dx$. O rezolvare a acestei situaţii este, din nou prin analogie, să cerem ca limita să fie *uniformă*.

Definiţie. Pentru $\mathbf{y}_0 \in A'$, spunem că funcţia $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ *converge* la $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ când $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$ (adică $g(x) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(x, \mathbf{y})$), *uniform* în raport cu $x \in [a, b]$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0), \; \forall x \in [a, b], \; \forall \mathbf{y} \in V_\varepsilon \setminus \{\mathbf{y}_0\} : |f(x, \mathbf{y}) - g(x)| < \varepsilon.$$

Propoziţia 4.1. *Dacă $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ pentru orice $\mathbf{y} \in A$, iar pentru un element $\mathbf{y}_0 \in A'$ avem $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(x, \mathbf{y}) = g(x)$ uniform în raport cu $x \in [a, b]$, atunci g este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \int_a^b f(x, \mathbf{y})dx = \int_a^b g(x)dx \left(= \int_a^b \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(x, \mathbf{y})dx \right).$$

Următorul rezultat priveşte transferul de continuitate asupra funcţiei G (cazul cel mai general):

Propoziţia 4.2. *Să presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}^k$ este o mulţime compactă, $f \in C([a,b] \times A)$ şi $p, q : A \to [a,b]$ sunt funcţii continue astfel încât $p \le q$. Atunci $G \in C(A)$. În particular, dacă $p \equiv a$ şi $q \equiv b$, obţinem $F \in C(A)$.*

În aplicaţii, cea mai utilă proprietate de transfer este cea de derivabilitate:

Propoziţia 4.3. *Să presupunem că $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ este un paralelipiped compact în $\mathbb{R}^k$, $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b] \times A$ ce admite derivate parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$, $i = \overline{1,k}$, continue pe $[a,b] \times A$, iar $p, q : A \to [a,b]$ astfel încât $p \le q$ admit derivate parţiale pe A, $\dfrac{\partial p}{\partial y_i}$, $\dfrac{\partial q}{\partial y_i}$, $i = \overline{1,k}$. Atunci G (şi prin urmare F, pentru cazul particular în care p şi q sunt constante) admite derivate parţiale pe A şi are loc următoarea* formulă a lui Leibniz*:*

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = f\left(q(\mathbf{y}), \mathbf{y}\right) \frac{\partial q}{\partial y_i}(\mathbf{y}) - f\left(p(\mathbf{y}), \mathbf{y}\right) \frac{\partial p}{\partial y_i}(\mathbf{y}) + \int_{p(\mathbf{y})}^{q(\mathbf{y})} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathbf{y}) dx, \ \forall \mathbf{y} \in A.$$

În ceea ce priveşte $\mathcal{R}$-integrabilitatea integralelor cu parametri, menţionăm următorul rezultat:

Propoziţia 4.4. *Dacă $A = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ cu $c < d$ şi $f \in C([a,b] \times [c,d])$, atunci funcţia $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ (dată de $F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$, $y \in [c,d]$) este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[c,d]$ şi*

$$\int_c^d F(y) dy \left(= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \right) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

Atunci când intervalele compacte $[a,b]$ sau $[p(\mathbf{y}), q(\mathbf{y})]$ din definiţia lui F, respectiv G, sunt înlocuite de mulţimi ne-compacte, vorbim de *integrale improprii cu parametri.*

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $a < b$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă şi $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $f(\cdot, \mathbf{y})$ este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,c]$ cu $c < b$ pentru orice $\mathbf{y} \in A$.

(1) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$, $\mathbf{y} \in A$, este *convergentă punctual* pe A la $F : A \to \mathbb{R}$ dacă $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x, \mathbf{y}) dx = F(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in A$.

(2) Spunem că $\int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$ este uniform convergentă pe A la $F : A \to \mathbb{R}$ dacă $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x, \mathbf{y}) dx = F(\mathbf{y})$, uniform în raport cu $\mathbf{y} \in A$.

Să formulăm un ultim rezultat privitor la transferul de derivabilitate.

Propoziţia 4.5. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $a < b$, $c, d \in \mathbb{R}$ cu $c < d$ şi $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b) \times [c,d]$. Să presupunem că:*

(i) *integrala improprie $\int_a^b f(x,y) dx$ este convergentă punctual la $F(y)$, pentru $y \in [c,d]$;*

(ii) *integrala improprie $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx$ este convergentă uniform în raport cu $y \in [c,d]$.*

Atunci funcţia F este derivabilă pentru orice $y \in [c,d]$ şi

$$F'(y) = \int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx, \ \forall y \in [c,d].$$

4.1. **Funcţiile Gamma şi Beta.**

Printre integralele improprii cu parametru ce merită a fi menţionate se numără *integrala Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, *integrala Euler-Poisson* $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$ şi *integralele (funcţiile) Euler*, despre care vom vorbi în continuare.

Funcţia Gamma

Această funcţie este definită ca integrala improprie

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} dx, \ p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Este convergentă pentru orice $p \in (0, +\infty)$, după cum se vede din aplicarea criteriilor în β şi în α. În cele ce urmează prezentăm câteva proprietăţi ale funcţiei Gamma:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),\ \forall p > 0;$
2. $\Gamma(1) = 1;$
3. $\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N};$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)},\ \forall p \in (0,1);$
6. $\Gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)},\ \forall p > 0;$
7. $(\Gamma(p))^{-1} = pe^{\gamma p}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{p}{n}\right)e^{-p/n},\ \forall\, p > 0$ (*Weierstrass*), unde $\gamma = 0,5772\ldots$ este constanta lui Euler.

Funcţia Beta

Este definită de

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ p > 0,\ q > 0$$

şi satisface următoarele relaţii:

1. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt,\ \forall p,q > 0;$
2. $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta,\ \forall p,q > 0;$
3. $B(p,q) = B(q,p),\ \forall p,q > 0;$
4. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \forall p,q > 0;$
5. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p+q}B(p,q) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q),\ \forall p,q > 0;$
6. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1),\ \forall p,q > 0;$
7. $B(p,n+1) = \dfrac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)},\ \forall p > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Bibliografie selectivă

[1] G. Apreutesei, N. A. Dumitru, *Introducere în teoria integrabilităţii*, Editura "Performantica", Iaşi, 2005.
[2] D. Cioroboiu, A. Pitea, M. Postolache, *Calcul integral,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.
[3] T. de Cepeda, M. Delgado, *Calculus II, Unit 3: Integrals Depending on a Parameter*, Universidad Carlos III de Madrid, 2016.
[4] M. Gorunescu, F. Gorunescu, A. Prodan, *Matematici superioare. Biostatistică şi Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
[5] P. B. Iaval, *Improper Integrals*, Kennesaw State University, 2015.
[6] L. Larson, *Introduction to Real Analysis,* Univ of Louisville Publ., 2014.
[7] G. Mocică, *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.
[8] S. A. Popescu, *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.
[9] H. Tudor, Analiză matematică, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.