FNSC $\quad \varphi = \forall x_1 . \forall x_2 . \ldots \forall x_n . \varphi'$

FNS
- φ' nu conține cuantif.
- $free(\varphi') \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ (φ închisă)
- φ' - FNC

Rezoluția pt LP1

dem că o formulă în FNSC este nesatisfiabilă

$P(t_1, \ldots, t_n) \qquad \neg P(t_1', \ldots, t_n')$

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \vee C_2}$$

Unificator = o substituție $\sigma : X \to T$ pt t_1, t_2
a.î. $\sigma^{\#}(t_1) = \sigma^{\#}(t_2)$

Ex $\quad t_1 = f(x, h(y))$
unificabili
$\quad t_2 = f(h(z), z')$

$\sigma_1 = \{x \mapsto h(z), z' \mapsto h(y)\}$ →

$\sigma_1^{\#}(t_1) = f(h(z), h(y))$ =

$\sigma_1^{\#}(t_2) = f(h(z), h(y))$

$\sigma_2 = \{z \mapsto i(a), x \mapsto h(i(a)), y \mapsto a, z' \mapsto h(a)\}$

$\sigma_2^{\#}(t_2) = f(h(i(a)), h(a)) = \sigma_2^{\#}(t_1)$

$\sigma_3 = \{z \mapsto i(a), y \mapsto a\}$

$\sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_1$

- termeni unificabili : t_1, t_2 sunt unificabili ddacă există un unificator pt t_1, t_2

Ex $\quad t_1 = i(x) \qquad t_2 = h(y)$

pt orice σ, $\quad \sigma^{\#}(t_1) = i(\sigma(x)) \neq h(\sigma(y)) = \sigma^{\#}(t_2)$

$t_1 = x \qquad t_2 = i(x)$ — nu sunt unificabili

$t_1 = x \qquad t_2 = i(y)$ — unificabili

Compunerea a două substituții σ_1 σ_2

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 : X \to T$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 (x) = \sigma_2^{\#}(\underbrace{\sigma_1(x)}_{\in T}) \quad \text{pt orice } x \in X$$

Subst. σ_1 mai generală decât σ dacă există o subst σ_2 a.î. $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$

Ex: $\sigma_1 = \{ x \mapsto h(z), z' \mapsto h(y) \}$ — σ_1 mai general decât σ

$\sigma = \{ x \mapsto h(a), z' \mapsto h(b), z \mapsto a, y \mapsto b \}$

$\sigma_2 = \{ z \mapsto a, y \mapsto b \}$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 (x) = \sigma_2^{\#}(\sigma_1(x)) = \sigma_2^{\#}(h(z)) = h(\sigma_2^{\#}(z)) = h(\sigma_2(z)) = h(a) = \sigma(x)$$

σ Cel mai general unificator pt t_1, t_2 dacă

- σ unificator pt t_1, t_2
- σ mai general decât orice alt unificator pt t_1, t_2.

Th: Orice doi termeni unificabili au un cel mai general unificator

Nu neapărat unic

$t_1 = h(x)$ $\quad \sigma_1 = \{ x \mapsto y \}$

$t_2 = h(y)$ $\quad \sigma_2 = \{ y \mapsto x \}$

$\sigma_3 = \{ x \mapsto a, y \mapsto a \}$ - nu este mai general decât σ_1, σ_2

Problemă de unificare ($\mathbb{P}$)

- $\mathbb{P} = \{ t_1 \doteq t_1', t_2 \doteq t_2', \ldots t_n \doteq t_n' \}$ pt n perechi de termeni
- $\mathbb{P} = \bot$

σ - Soluție a unei probleme de unificare $P = \{ t_1 \doteq t_1', \dots t_n \doteq t_n' \}$

dacă $\sigma^{\#}(t_i) = \sigma^{\#}(t_i')$ $i = \overline{1,n}$ (σ unificator pt t_i, t_i')

$\mathrm{unif}(P) = \{ \sigma \mid \sigma \text{ soluție pt } P \}$

dacă $P = \bot$ atunci $\mathrm{unif}(P) = \emptyset$

Ex: $P = \{ f(x, a) \doteq f(y, a), \; x \doteq i(z) \}$

$\sigma = \{ x \mapsto i(z), \; y \mapsto i(z) \}$ $y \doteq h(x)$?

$\sigma(x) = i(z) = \sigma^{\#}(i(z))$

$\sigma^{\#}(f(x, a)) = f(\underline{i(z)}, a)$

$\sigma_1 = \{ x \mapsto i(a), \; z \mapsto a, \; y \mapsto i(a) \}$

σ - Cea mai generală soluție pt $P = \{ t_1 \doteq t_1', \dots t_n \doteq t_n' \}$

- σ - soluție pt P
- σ mai generală decât orice altă soluție

$\mathrm{mgu}(P)$ = o cea mai generală soluție P

$\mathrm{mgu}(t_1, t_2)$ = un cel mai general unificator pt t_1, t_2

P - în formă rezolvată dacă

- $P = \bot$

sau

- $P = \{ x_1 \doteq t_1', \; x_2 \doteq t_2', \dots x_n \doteq t_n' \}$ $x_i \notin \mathrm{vars}(t_j)$ pt orice i, j

x_i nu apar în termenii din dreapta.

~~$x \doteq i(x)$~~

Ex: $P_1 = \perp$

$P_2 = \{ x \doteq y_1,\ y \doteq i(b),\ z \doteq h(x_1, x_2) \}$ formă rezolvată

$P_3 = \{ f(x, a) \doteq f(y, a),\ x \doteq i(z),\ y \mapsto h(x) \}$

nu este variabilă

$x \in vars(t_3')$

<u>Lema</u>: Dacă $P = \{ x_1 \doteq t_1',\ x_2 \doteq t_2',\ \ldots\ x_n \doteq t_n' \}$ în formă rezolvată

atunci $mgu(P) = \{ x_1 \mapsto t_1',\ x_2 \mapsto t_2',\ \ldots\ x_n \mapsto t_n' \}$

- ȘTERGEREA: $P \cup \{ t \doteq t \} \Longrightarrow P$

Ex: $\{ i(x) \doteq y,\ \cancel{h(z) \doteq h(z)} \} \Rightarrow \{ i(x) \doteq y \}$

- DESCOMPUNEREA

$P \cup \{ f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t_1', \ldots, t_n') \} \Longrightarrow$

$P \cup \{ t_1 \doteq t_1',\ t_2 \doteq t_2',\ \ldots\ t_n \doteq t_n' \}$

Ex: $\{ i(x) \doteq y,\ h(x, z) \doteq h(f(y), i(a)) \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{ i(x) \doteq y,\ x \doteq f(y),\ z \doteq i(a) \}$

ORIENTAREA

$P \cup \{ f(t_1, \ldots, t_n) \doteq x \} \Rightarrow P \cup \{ x \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \}$

ELIMINAREA

$$\mathbb{P} \cup \{\underline{x \doteq t}\} \Longrightarrow \sigma^{\#}(\mathbb{P}) \cup \{x \doteq t\}$$

$x \notin vars(t)$

$x \in vars(\mathbb{P})$ $\quad \sigma = \{x \mapsto t\}$

$$\{\underbrace{h(x, a) \doteq y}_{\mathbb{P}}, \underline{x \doteq i(z)}\} \xrightarrow{\text{ELIMINARE}} \{h(i(z), a) \doteq y, x \doteq i(z)\}$$

$\sigma = \{x \mapsto i(z)\}$

CONFLICT

$$\mathbb{P} \cup \{f(t_1, \dots t_n) \doteq g(t_1', \dots t_m')\} \Longrightarrow \bot$$

$$\{h(x, a) \doteq \underset{\text{variabilă}}{y}, \underline{f(x) \doteq h(y, b)}\} \Longrightarrow \bot$$

$$\{\dots, i(x) \doteq \underset{\text{simbol constant}}{a}\} \Longrightarrow \bot$$

OCCURS CHECK

$$\mathbb{P} \cup \{x \doteq f(t_1, \dots, t_n)\} \Longrightarrow \bot$$

$x \in vars(f(t_1, \dots, t_n))$

$\underline{x} \doteq h(\underline{x}, y)$ $\quad x \doteq l(x)$

Lema (Progres)

Dacă $\mathbb{P}$ nu este în formă rezolvată, există $\mathbb{P}'$ a.î. $\mathbb{P} \xrightarrow{\text{regulă}} \mathbb{P}'$

Lema (Păstrare a soluțiilor)

Dacă $\mathbb{P} \Longrightarrow \mathbb{P}'$ atunci $mgu(\mathbb{P}) = mgu(\mathbb{P}')$

și $unif(\mathbb{P}) = unif(\mathbb{P}')$

Lema (Terminare)

Nu există o secvență infinită $\mathbb{P}_1 \overset{r_1}{\Rightarrow} \mathbb{P}_2 \overset{r_2}{\Rightarrow} \mathbb{P}_3 \Rightarrow \ldots$

Exemplul 199.

$$\mathbb{P} = \{f(g(x_1, a), x_2) \doteq x_3, f(x_2, x_2) \doteq f(a, x_1)\} \overset{\text{DESCOMPUNERE}}{\Rightarrow}$$

$$\{f(g(x_1, a), x_2) \doteq x_3, x_2 \doteq a, x_2 \doteq x_1\} \overset{\text{ELIMINARE}}{\Rightarrow} \quad x_2 \doteq \overset{a}{t} \quad x_2 \notin vars(t)$$

$$\{f(g(x_1, a), a) \doteq x_3, x_2 \doteq a, a \doteq x_1\} \overset{\text{ORIENTARE}}{\Rightarrow} \quad t \doteq x_1$$

$$\{f(g(x_1, a), a) \doteq x_3, x_2 \doteq a, x_1 \doteq a\} \overset{\text{ELIMINARE}}{\Rightarrow}$$

$$\{f(g(a, a), a) \doteq x_3, x_2 \doteq a, x_1 \doteq a\} \overset{\text{ORIENTARE}}{\Rightarrow}$$

$$\{x_3 \doteq f(g(a, a), a), x_2 \doteq a, x_1 \doteq a\}.$$ – formă rezolvată

Rezoluția de ordinul I

altfel, redenumim variabilele comune din una din clauze

REZ. BINARĂ

$$\frac{C_1 \vee \overset{P(x)}{P(t_1, \ldots, t_n)} \qquad C_2 \vee \overset{\neg P(i(x_1))}{\neg P(t_1', \ldots, t_n')}}{\sigma^b(C_1 \vee C_2)} \qquad \boxed{V_1 \cap V_2 = \phi}$$

$$\sigma = mgu(\{t_1 \doteq t_1', \ldots, t_n \doteq t_n'\})$$

$$V_1 = vars(C_1 \vee P(t_1, \ldots t_n))$$

$$V_2 = vars(C_2 \vee \neg P(t_1', \ldots t_n))$$

FACTORIZARE POZITIVĂ

$$\frac{P(t_1, \ldots, t_n) \vee P(t_1', \ldots t_n') \vee C}{\sigma^b(P(t_1, \ldots t_n) \vee C)} \qquad \sigma = mgu(\{t_1 \doteq t_1', \ldots t_n \doteq t_n'\})$$

Th (Th rezoluției)

$\varphi = \forall x_1 . \forall x_2 . \ldots . \forall x_n . (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)$ – FNSC

φ nesatisfiabilă ddacă $\square$ poate fi obținut din $C_1 \ldots C_m$

Ex $\varphi = \forall x . (\underbrace{P(x)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg P(h(x)) \vee Q(f(x)))}_{C_2} \wedge \underbrace{\neg Q(f(g(a)))}_{C_3})$

1. $\neg P(h(x)) \vee Q(f(x))$ (ip)
2. $\neg Q(f(g(a)))$ (ip)
3. $\neg P(h(g(a)))$ (RB, 1, 2

vars$(C_2) = \{x\}$

vars$(C_3) = \emptyset$

$\mathcal{P} = \{ f(x) \doteq f(g(a)) \} \xRightarrow{\text{DESCOMPUNERE}}$

$\Rightarrow \{ x \doteq g(a) \}$ formă rez.

$\sigma = \text{mgu}(\mathcal{P}) = \{ x \mapsto g(a) \}$

$\sigma^b(\neg P(h(x))) = \neg P(h(g(a)))$

4. $P(x)$ (ip)
5. $\square$ (RB, 4, 3

$\mathcal{P} = \{ x \doteq h(g(a)) \}$ formă rez.

$\sigma = \text{mgu}(\mathcal{P}) = \{ x \mapsto h(g(a)) \}$

$\Rightarrow \varphi$ nesatisfiabilă.