CURS 6

APLICAŢII LINIARE PE $\mathbb{R}^n$

A. Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

1 Noiembrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAŞI

Structura cursului

1. Funcții reale. Generalități

2. Aplicații liniare pe spații vectoriale
   - Nucleul și imaginea unui operator liniar
   - Teorema dimensiunii
   - Reprezentarea matriceală a aplicațiilor liniare
   - Vectori si valori proprii

Structura cursului

1. Funcții reale. Generalități

2. Aplicații liniare pe spații vectoriale
   - Nucleul și imaginea unui operator liniar
   - Teorema dimensiunii
   - Reprezentarea matriceală a aplicațiilor liniare
   - Vectori si valori proprii

Amintim următoarele definiții predate în Cursul 1:

Definiție

Fie X și Y două mulțimi nevide. Spunem că $f \subseteq X \times Y$ se numește *funcție* dacă satisface următoarele condiții:

1) $\mathrm{Dom(f) = X}$;
2) $(x, y) \in f$ și $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$, $\forall x \in X$, $\forall y, z \in Y$.

Vom nota $f : X \to Y$.

- Imaginea lui X prin f(mulțimea valorilor) este

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : y = f(x)\};$$

- Dacă $A \subseteq X$, mulțimea

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

se numește imaginea lui A prin $f : X \to Y$;

- Dacă $B \subseteq Y$, atunci
$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$
se numește contraimaginea mulțimii B prin f.
- Graficul funcției $f : X \to Y$ este dat de mulțimea
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$
- Dacă $A \subseteq X$, atunci funcția definită prin
$$f_{|A} := f \cap (A \times Y) (f_{|A}(x) = f(x), \ \forall x \in A)$$
se numește restricția funcției f la mulțimea A.

- Spunem că $f : X \to Y$ este o funcție injectivă dacă

$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ cu } x_1 \neq x_2, \text{ avem } f(x_1) \neq f(x_2),$$

  sau, echivalent,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- O funcție $f : X \to Y$ este surjectivă dacă $f(X) = Y$, sau, echivalent

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{ astfel încât } f(x) = y.$$

- Vom spune că funcția $f : X \to Y$ este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$. Așadar, vom considera cazul funcțiilor de tipul

$$f : \mathrm{D(f)} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}.$$

1. Dacă $n = m = 1$: *funcții reale*;
2. Dacă $n = 1$ și $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: *funcții de o variabilă reală și cu valori reale, vectoriale*;
3. Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ și $m = 1$: *funcții reale de n variabile (reale)*;
4. Dacă $n, m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: *funcții vectoriale de n variabile reale.*

Ex 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}x, -x\right)$

Ex 3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Fie funcția

$$f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $m > 1$, atunci, dacă $\mathbf{x} \in D(f)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, atunci $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, are m componente, pe care le vom nota

$$f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(\mathbf{x}) = f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Așadar, vom avea m funcții de n variabile $f_k : D(f) \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, astfel încât

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$.

Reciproc, dacă $f_i : D(f_i) \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$ sunt m funcții reale de n variabile, putem construi o funcție de n variabile cu valori în $\mathbb{R}^m$ ca mai sus, unde

$$D(f) = D(f_1) \cap \ldots \cap D(f_m).$$

1. *Funcții elementare de bază*:
   - *funcția constantă*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu $f(x)=c$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde $c\in\mathbb{R}$;
   - *funcția identitate*: $1_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x)=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$;
   - *funcția exponențială de bază* a, $a>0$: funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x$,$\forall x\in\mathbb{R}$;
   - *funcția logaritm de bază* $a>0, a\neq 1$: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x$;
   - *funcția putere de exponent* $a\in\mathbb{R}$: $f:D(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^a$, $\forall x\in\mathbb{R}$;
   - *funcții trigonometrice* (directe): $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$;
   - *funcții trigonometrice inverse*: $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$.
2. *Funcții elementare*: adică o funcție obținută prin aplicarea uneia sau a mai multor operații de bază cu funcțiile elementare de bază: *adunarea, scăderea, înmulțirea* și *împărțirea*.

3. *Funcții speciale:*

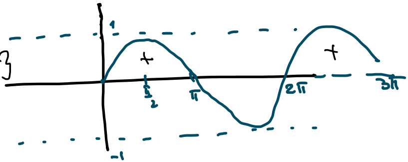
- *funcția parte întreagă*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]\overset{def}{=}\sup\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x\}$;
- *funcția parte fracționară*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită de $f(x)=\{x\}=x-[x]$;
- *funcția semn*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită de $f(x)=\mathrm{sgn(x)}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$;
- *funcția valoare absolută*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$;
- *funcția parte pozitivă*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de $f(x)=x^+=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$;
- *funcția parte negativă*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de $f(x)=x^-=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$;
- *funcția lui Dirichlet*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;
- *funcția lui Heaviside*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$;
- *funcția lui Riemann*, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=0 \text{ sau } x\in(0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in(0,1]\cap\mathbb{Q},\ (p,q)=1\end{cases}$.

1) Găsiți mulțimea A pentru funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{\sin\left(x_1^2 + x_2^2\right)}, (x_1, x_2) \in A,$$

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x_1^2 + x_2^2) \geq 0\}$

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}$ a.î. $2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi\}$



2) Găsiți mulțimea A pentru funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln\left(1 - x_1 - x_2 - x_3\right) - (x_1 + x_3)^{x_2}, (x_1, x_2, x_3) \in A.$$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0\}$

3) *Funcția polinomială* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} \underbrace{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}} \underbrace{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}}, \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienții* polinomului P.
- Fiecare termen $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, cu $a_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0$ se numește *monom* al lui P.
- $\underline{i_1 + i_2 + \ldots + i_n} \in \mathbb{N}$ este *gradul* monomului.
- Numim *gradul* polinomului P cel mai mare grad printre toate monoamele sale.
- Spunem că polinomul P este *omogen* dacă toate monoamele sale au același grad. Un exemplu de polinom omogen este următorul polinom de grad 1:

$$P(x_1, \ldots x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad P(x_1, x_2) = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2$

Un polinom P se numește *simetric* dacă, pentru orice permutare

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

cu $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ și $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \dots x_{\sigma(n)}^{i_n}.$$

Spre exemplu, funcția

$$P(x_1, x_2) = a{x_1}^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

este un polinom simetric dacă și numai dacă $a = c$.

$P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1) \Leftrightarrow a = c$

Structura cursului

1. Funcții reale. Generalități

2. Aplicații liniare pe spații vectoriale
   - Nucleul și imaginea unui operator liniar
   - Teorema dimensiunii
   - Reprezentarea matriceală a aplicațiilor liniare
   - Vectori si valori proprii

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ spații liniare reale. Spunem că o *aplicație* $T : V \to W$ se numește *liniară* dacă

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (aditivitate),

(ii) $T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, $\forall\, \mathbf{u} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (omogenitate).

Vom utiliza de asemenea denumirile de *operator liniar* sau *transformare liniară* pentru o aplicație liniară.

$\mathcal{L}(V, W)$ - mulțimea aplicațiilor liniare definite pe V cu valori în W.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare reale.

Aplicația $T : V \to W$ este liniară dacă și numai dacă

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Toate polinoamele omogene de grad 1 (definite pe $\mathbb{R}^n$), de tipul

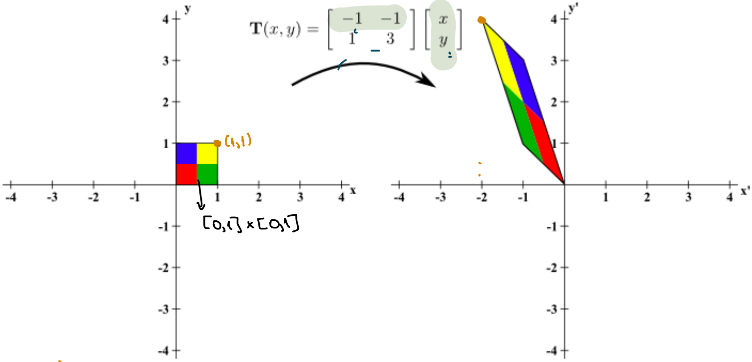
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) := a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

sunt aplicații liniare între $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}$.

Fie $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ $\Rightarrow$ $P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = P(\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

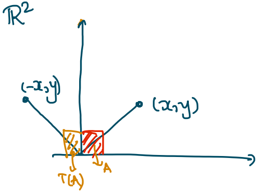
$$= a_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + \ldots + a_n(\alpha x_n + \beta y_n)$$
$$= \alpha(a_1x_1 + \ldots + a_1x_n) + \beta(a_1y_1 + \ldots + a_ny_n)$$
$$= \alpha P(\bar{x}) + \beta P(\bar{y})$$

Fie aplicația $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-x - y, x + 3y)$, liniară $(T(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha T(\bar{u}) + \beta T(\bar{v}))$



$T(1,1) = (-2, 1+3)$

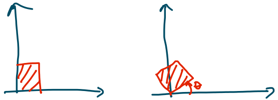
Figure: `https://mathinsight.org/image/linear_transformation_2d_m1_m1_1_3`



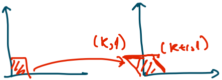
$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad T(x,y)=(-x,y) \quad T(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Rotație:

$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ rotesc cu $\sphericalangle\theta$



Forfecare: $\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$



Observații:

1. Dacă $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ sunt două spații liniare, iar $T : V \to W$ este o aplicație liniară bijectivă, atunci T se numește *izomorfism* între spațiile liniare V si W.
2. Dacă $V = W$, aplicația liniară $T : V \to V$ se numește *endomorfism liniar* pe V. Funcția identitate 1_V este un endomorfism liniar pe V.
3. Dacă endomorfismul liniar $T : V \to V$ este și bijectiv, atunci el se numește *automorfism liniar* pe V.
4. Dacă $T : V \to W$ este o aplicație liniară, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$, atunci avem

$$T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathbf{u}_i) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n), \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Observații:

5. Dacă $T : V \to W$ este o aplicație liniară, atunci

$$T\left(\mathbf{0}_V\right) = \mathbf{0}_W,$$

unde $\mathbf{0}_V$ și $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V și din W. Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \to W$ nu este liniară.

6. Se poate arăta că mulțimea $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$, a tuturor aplicațiilor liniare de la spațiul liniar V la spațiul liniar W, formează un spațiu liniar în raport cu operația de adunare a aplicațiilor și cu operația de înmulțire a unei aplicații cu un scalar din $\mathbb{R}$. Dacă $V = W$, vom nota mai simplu $\mathcal{L}(V)$, în loc de $\mathcal{L}(V, W)$.

7. Fie U, V și W spații liniare reale.

   Dacă $T_1 : U \to V$ și $T_2 : V \to W$ sunt aplicații liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \to W$ este tot o aplicație liniară.

$$(T_2 \circ T_1)(\alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2) = T_2\left(T_1(\alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2)\right) = T_2\left(\alpha T_1(u_1) + \beta T_1(u_2)\right) = \alpha (T_2 \circ T_1)(u_1) + \beta (T_2 \circ T_1)(u_2)$$

Nucleul și imaginea unui operator liniar

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare și fie $T : V \to W$ o aplicație liniară.

a) Mulțimea

$$Ker(T) \overset{not}{=} T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

se numește *nucleul aplicației liniare T*.

b) Mulțimea

$$Im(T) \overset{not}{=} T(V) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists\, \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

se numește *imaginea aplicației liniare T*.

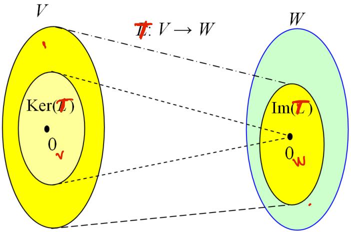


Figure: Nucleul și imaginea operatorului T (Wiki)

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare și fie $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci

- $Ker(T)$ este un subspațiu liniar al lui V,
- $Im(T)$ un subspațiu liniar al lui W;
- T este injectivă dacă și numai dacă $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

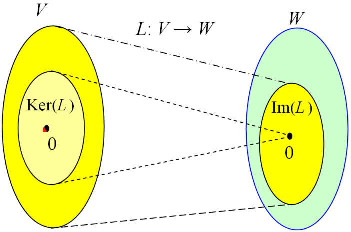


Figure: Nucleul și imaginea operatorului L(Wiki)

Teoremă

Fie V un spațiu liniar finit dimensional, W un spațiu liniar, și fie $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci $Im(T)$ este finit dimensional al lui W și are loc **formula dimensiunii**:

$$dim(V) = dim\left(Ker(T)\right) + dim\left(Im(T)\right).$$

- Rezultatul de mai sus este unul fundamental în algebră, și se găsește în literatură sub numele de *teorema dimensiunii*.

Fie V, W două spații vectoriale, și fie $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci,

- dacă $Ker(T)$ este finit dimensional, numărul $dim\left(Ker(T)\right)$ se numește ***defectul*** lui T și se notează $def(T)$;
- dacă $Im(T)$ este finit dimensional, numărul $dim\left(Im(T)\right)$ se numește ***rangul*** lui T și se notează $rang(T)$.

Așadar, formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:

$$dim(V) = rang(T) + def(T).$$

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) T este injectivă;

b) $def(T) = 0$;

c) $rang(T) = dim(V)$;

d) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem liniar independent în V, atunci mulțimea $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este sistem liniar independent în W.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) T este surjectivă;

ii) $rang(T) = dim(W)$;

iii) $Im(T) = W$;

iv) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem de generatori pentru V, atunci mulțimea $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este un sistem de generatori pentru W.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

j) T este bijectivă;

jj) $dim(V) = dim(W) = rang(T)$;

jjj) Pentru orice bază $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ a lui V, mulțimea

$$T(B) = \{T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$$

este o bază a lui W.

Reprezentarea matriceală a aplicațiilor liniare

Fie V și W două spații liniare, finit-dimensionale, cu $dim(V) = n$, $dim(W) = m$, $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V, $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_m\}$ o bază a lui W și $T : V \to W$ o aplicație liniară.

Atunci, pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$ putem scrie

$$\begin{cases} T(\mathbf{b}_1) = a_{11}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{m1}\mathbf{b}'_m, \\ T(\mathbf{b}_2) = a_{12}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{m2}\mathbf{b}'_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T(\mathbf{b}_k) = a_{1k}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{mk}\mathbf{b}'_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T(\mathbf{b}_n) = a_{1n}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{mn}\mathbf{b}'_m, \end{cases} \tag{1}$$

unde $a_{1k}, \dots, a_{mk} \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui $T(\mathbf{b}_k)$ în raport cu baza B'.

Matricea

$$A_{B,B'} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

se numește *matricea asociată* aplicației T în raport cu bazele B, respectiv B'.

Dacă $\mathbf{v} \in V$, iar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ în raport cu baza B, atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) = \beta_1 \mathbf{b}'_1 + \dots + \beta_m \mathbf{b}'_m$$

unde $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, $\beta_k = \alpha_1 a_{k1} + \dots + \alpha_n a_{kn}$, sunt coordonatele lui $T(\mathbf{v})$ în raport cu baza B'.

- Dacă $\mathbf{v} \in V$ are coordonatele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ în baza B, iar $T(\mathbf{v}) \in W$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ în baza B', atunci putem scrie relația

$$X_{B'} = A_{B,B'} \cdot X_B,$$

unde

$$X_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X_{B'} = \begin{bmatrix} \beta 1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

- Dacă $r \in \{1, \ldots, \min(m, n)\}$ este *rangul matricei* $A_{B,B'}$, se poate arăta că

$$rang(A_{B,B'}) = rang(T).$$

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-x-y, x+3y)$

Matricea asociată în raport cu $B_c \subseteq \mathbb{R}^2$, $B_c = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$T(\bar{e}_1) = T(1,0) = (-1, 1) = -1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$

$T(\bar{e}_2) = T(0,1) = (-1, 3) = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$

$A_{B_c,B_c} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ rang T = rang $A = 2$ $(\det(A_{B_c,B}) \neq 0)$

$B = \{\underbrace{(1,-1)}_{b_1}, \underbrace{(0,1)}_{b_2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ bază $\left\{ B \text{ lin ind: } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

schimb $A_{B_c B_c} \sim A_{B,B}$

$\left.\begin{array}{l} T(b_1) = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 \\ T(b_2) = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 \end{array}\right\}$ rezolv sistemul

$S_{B_c B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S_{B_c B}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = B_c \cdot S_{B_c B}$

$S_{B_c B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(1,-1) = e_1 - e_2$

$(0,1) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2$

$\det(S_{B_c B}) \neq 0 = 1$

$A_{B,B} = (S_{B_c B})^{-1} \cdot A_{B_c B_c} \cdot S_{B_c B}$

$= \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Fie $\widetilde{B} = \{\widetilde{\mathbf{b}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}_n\}$ o altă bază a lui V și $\widetilde{B}' = \{\widetilde{\mathbf{b}}'_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}'_m\}$ o bază a lui W.

- $S_{B,\widetilde{B}} = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la baza B la baza $\widetilde{B}$;
- $S'_{B',\widetilde{B}'} = (s'_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la B' la $\widetilde{B}'$;
- $A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} := (\widetilde{a}_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, matricea asociată operatorului T în raport cu bazele $\widetilde{B}, \widetilde{B}'$.

Atunci, are loc

$$S'_{B',\widetilde{B}'} \cdot A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} = A_{B,B'} \cdot S_{B,\widetilde{B}},$$

sau, echivalent

$$A_{\widetilde{B},\widetilde{B}'} = (S'_{B',\widetilde{B}'})^{-1} \cdot A_{B,B'} \cdot S_{B,\widetilde{B}}.$$

Matricea asociată compunerii a două aplicații:

Presupunem că W' este un alt spațiu finit dimensional, $dim(W') = m'$, și fie $T' : W \to W'$ un alt operator liniar.

- Dacă $\widetilde{B}' = \{\widetilde{\mathbf{b}}'_1, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}'_m\}$ este o bază a lui W';
- $A_{B',\widetilde{B}'} \in \mathcal{M}_{m,m'}(\mathbb{R})$ este matricea asociată operatorului T' în raport cu B' și $\widetilde{B}'$,

se poate arăta că operatorul $T' \circ T : V \to W'$ are pe $A_{B',\widetilde{B}'} \cdot A_{B,B'}$ ca matrice asociată în raport cu bazele B și $\widetilde{B}'$.

Consecință: Operatorul liniar T este bijectiv dacă și numai dacă matricea sa asociată (în raport cu orice bază a lui V) este inversabilă. În acest caz, matricea asociată lui T^{-1} este inversa matricei asociate lui T.

Caz particular:

Fie $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar $B_c = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ și $B'_c = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ sunt bazele canonice în $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$, atunci avem

$$T(\mathbf{v}) = A_{B,B'} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

unde vectorii din $\mathbb{R}^n$ sunt considerați ca matrici coloană $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Un operator liniar între $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$ se poate identifica cu o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ prin formula

$$T(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie $T \in \mathcal{L}(V)$.

a) Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$, se numește *vector propriu* al lui T dacă

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \; T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

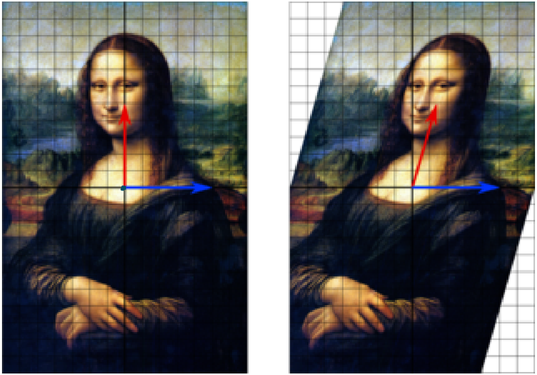
Scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ se numește *valoare proprie* a lui T, corespunzătoare vectorului propriu $\mathbf{v}$.

b) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T, atunci subspațiul liniar

$$Ker\,(T - \lambda \cdot \mathbf{1}_V) = \{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{u}\}$$

se numește *subspațiu propriu* (subspațiul caracteristic) asociat lui λ.

Vectori si valori proprii



$(x,y) \xrightarrow{T} (x+2y, y)$

Figure: Observăm că săgeata roșie își schimbă direcția, însă cea albastră nu. *Săgeata albastră* este un vector propriu, iar valoarea sa proprie este 1, deoarece lungimea imaginii rămâne neschimbată. (Wikipedia)

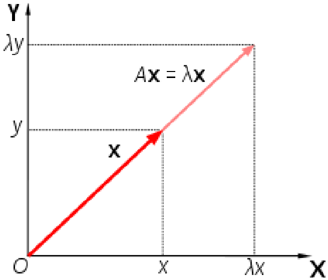


Figure: Matricea A asociată unui operator, mărește / întinde vectorul $\mathbf{x}$, însă nu îi schimbă direcția, deci $\mathbf{x}$ este un vector propriu al lui A. (Wikipedia)

"Un vector propriu al unei matrici este un vector (coloană) care după ce este înmulțit cu matricea nu își schimbă direcția!"

Pe lângă importanța matematică, *vectorii și valorile proprii* ale unor matrici au aplicații și în domenii ca:

- mecanică cuantică;
- procesare de imagini;
- căutările Google$\longrightarrow$ algoritmul PageRank.
- învățare automată: face recognition
- inginerie: determinarea frecvențelor vibrațiilor unor clădiri sau poduri (valorile proprii), determinarea formelor acestor vibrații (vectorii proprii).

Observații:

1. Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ este vector propriu pentru T, corespunzător valorii proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $\mathbf{v} \in Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

2. *Există mai mult de un vector propriu ce corespunde unei valori proprii, dar numai o valoare proprie ce corespunde unui vector propriu.*

3. *Spațiul caracteristic* $V_\lambda = Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)$, asociat unei valori proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, este invariant în raport cu T, adică $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
   - Dacă $\mathbf{v} \in V_\lambda$, atunci $T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot T(\mathbf{v})$, deci $T(\mathbf{v}) \in V_\lambda$.

4. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sunt două valori proprii distincte, atunci $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$.

5. Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valori proprii distincte ale lui T, iar $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sunt vectorii proprii corespunzători, atunci $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sunt liniar independenți.

Presupunem că $(V, +, \cdot)$ este finit dimensional și că $T \in \mathcal{L}(V)$.

Fie $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V, iar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea asociată aplicației T în raport cu baza B.

- Atunci, $\lambda \in \mathbb{R}$ este *valoare proprie* dacă și numai dacă satisface ecuația
$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$
- Funcția polinomială $\lambda \to P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ se numește *polinomul caracteristic* al lui A.
- Polinomul caracteristic al lui A este invariant la schimbări de bază, așa că îl vom numi *polinomul caracteristic* al lui T.

Valorile proprii ale lui T sunt rădăcini reale ale polinomului caracteristic al lui T.

- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T, atunci numărul
$$def(T - \lambda \cdot 1_V) = dim(Ker(T - \lambda \cdot 1_V))$$
se numește *multiplicitatea geometrică* a lui λ.

- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului $P_A \in \mathbb{R}[X]$, vom numi *multiplicitatea algebrică* a lui λ, cel mai mare număr $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(X - \lambda)^m$ este un divizor al lui $P_A(X)$.

Observație: Se poate arăta că multiplicitatea geometrică a unei valori proprii λ este mai mică decât multiplicitatea algebrică a lui λ în raport cu polinomul caracteristic al lui T.

Diagonalizarea aplicațiilor liniare

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit-dimensional, cu $dim(V) = n$, și fie $T \in \mathcal{L}(V)$.

Spunem că endomorfismul T este *diagonalizabil* dacă există B o bază a lui V în raport cu care matricea asociată lui T, este o *matrice diagonală*, adică există $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A_{B,B} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teoremă

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional și $T \in \mathcal{L}(V)$. Atunci T este diagonalizabil dacă și numai dacă mulțimea tuturor vectorilor proprii generează pe V.

Observații:

- Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spațiul liniar finit dimensional V dacă și numai dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile din $\mathbb{R}$, iar subspațiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

Etapele pentru diagonalizarea unui endomorfism:

În cazul $V = \mathbb{R}^n$, există o metodă practică pentru a vedea dacă endomorfismul $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ este *diagonalizabil*:

1) Se consideră baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$. În raport cu această bază se găsește matricea A asociată operatorului T, precum și polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuației algebrice caracteristice $P_A(\lambda) = 0$.

   Dacă toate cele n rădăcini ale lui P_A sunt reale, putem continua. Dacă nu, spunem că T nu este diagonalizabil și ne putem opri aici.

3) Pentru fiecare λ, calculăm m_λ - multiplicitatea algebrică a lui λ în P_A.
   - dacă $m_\lambda = 1$, atunci $m_\lambda = n - r_\lambda$, unde $r_\lambda = rang(A - \lambda I_n)$.
   - dacă $m_\lambda > 1$, atunci calculăm *multiplicitatea geometrică* a lui λ, adică $n - r_\lambda$.

   Dacă $m_\lambda = n - r_\lambda$ pentru orice valoare proprie λ, atunci T este diagonalizabil.

   În caz contrar, concluzionăm că endomorfismul nu este diagonalizabil.

4) Pentru fiecare valoare proprie λ, rezolvăm ecuația

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

și determinăm vectorii proprii $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Cum $rang(A - \lambda I_n) = r_\lambda$, putem găsi vectorii liniari independenți $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ ce rezolvă ecuația.

Mai mult, conform procedurii de ortonormalizare Gram-Schmidt, putem alege ca $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ să fie ortonormali.

5) Baza B a lui V pentru care matricea lui T este diagonală este atunci mulțimea $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$, pentru toate valorile proprii λ. Matricea de trecere S de la $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la B este atunci matricea ce diagonalizează pe A, adică

$$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Exercițiu: Fie endomorfismele

$$T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 - 2x_2)\,, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

și

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Să se afle valorile proprii și vectorii proprii corespunzători;
b) Să se afle subspațiile proprii și dimensiunile lor;
c) Să se analizeze posibilitatea diagonalizării lui T_1 și T_2. În caz afirmativ, să se afle baza în care se manifestă forma diagonală, matricea schimbării de bază, precum și forma diagonală corespunzătoare.

$$T_1(x_1,x_2) = (x_1+x_2, -2x_1-2x_2), \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

$B_c = \{(1,0),(0,1)\}$

$T_1(\bar{e}_1) = (1,-2) = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$

$T_1(\bar{e}_2) = (1,-2) = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$

$A_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

• Valorile proprii

$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)+2 = \lambda^2+\lambda$

Rezolv $P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)=0$ ⟨ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2=-1$

• $\lambda_1 = 0$

Rezolv: $(A - \underbrace{\lambda_1}_{0} I_2)\bar{u} = \bar{0}$ sau $T_1(\bar{u}) = \underbrace{\lambda_1}_{0}\bar{u}$

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} < 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases}$

$|1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\ ) = 1$

$\Rightarrow u_1 = -u_2$ $V_{\lambda_1} = \{(-u_2, u_2), u_2\in\mathbb{R}\} = \{(-1,1)u_2, u_2\in\mathbb{R}\}$

• $\lambda_2 = -1$

$T_1(\bar{u}) = -1\cdot\bar{u}$ sau $(A - \underbrace{\lambda_2}_{=-1} I_2)\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 1$ $\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 0 \\ -2u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = -2u_1$

$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \{(u_1, -2u_1), u_1\in\mathbb{R}\}$

$= \text{Lin}\{(1,-2)\}$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

- $m_{\lambda_1} = 1$

$m_{\lambda_1} = n - r_{\lambda_1}$

$1 = 2 - 1$ DA

$m_{\lambda_1} = 2 - r_{\lambda_1}$, $r_{\lambda_1} = \text{rang}\,(A - \lambda_1 I_2) = 1$

$m_{\lambda_2} = 1$

$r_{\lambda_2} = \text{rang}\,(A - \lambda_2 I_2) = 1 \Rightarrow m_{\lambda_2} = 2 - 1 = 2 - r_{\lambda_2} \Rightarrow$ DA

$\Rightarrow T$ este diagonalizabil.

Forma diagonala $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \{ \underbrace{(-1,1)}_{b_1}, \underbrace{(1,-2)}_{b_2} \}$

$\langle (-1,1), (1,-2) \rangle \overset{?}{=} 0 \quad (-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \neq 0) \Rightarrow$ Ortogonalizăm (Gram-Schmidt)

$B' = \{ b_1', b_2' \}$

$\langle b_1', b_1' \rangle = (-1)(-1) + 1 \cdot 1$

$\langle b_1', b_2 \rangle = \langle (-1,1), (1,-2) \rangle$

$b_1' = (-1, 1)$

$b_2' = (1,-2) - \dfrac{\langle b_1', b_2 \rangle}{\langle b_1', b_1' \rangle} b_1' = (1,-2) - \dfrac{-3}{2}(-1,1) = \left(1 + \frac{3}{2} \cdot (-1), -2 + \frac{3}{2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\langle b_1', b_2' \rangle = \langle (-1,1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

$B' = \{ (-1,1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \}$ ortogonală

$\| (-1,1) \| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$B'' = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \}$

$S^{-1}_{B_c B''} \cdot A \cdot S_{B_c B''}$

$\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Bibliografie recomandată

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. D. Drăghici - *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
3. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie și calcul diferențial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.
4. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. "Fair Partners", Buc., 2010.
5. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications,* The Saylor Foundation, 2013.
6. Sheldon Axler - *Linear Algebra Done Right,* Springer International Publishing AG, 2015.