

CURSUL 9 DIFERENȚIABILITATE

1. DERIVATELE FUNCȚIILOR DE O SINGURĂ VARIABILĂ

Reamintim aici conceptul de derivată a unei funcții reale; această noțiune captează ideea de viteză de schimbare a valorii unei funcții în raport cu variabila sa.

DEFINIȚIE. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

a) Numim *derivata* lui f într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ limita

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(dacă există), notată de asemenea $\frac{df}{dx}(x_0)$.

b) Spunem că f este *derivabilă* într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă derivata lui f în x_0 există și este finită.

c) Spunem că f este *derivabilă* pe o submulțime $B \subseteq A$ dacă f este derivabilă în orice punct $x_0 \in B$ (aceasta implică $B \subseteq A \cap A'$).

d) Notăm f' sau $\frac{df}{dx}$ funcția $x \mapsto f'(x)$ definită pe o submulțime a lui A ce consistă în elementele lui A în care f este derivabilă.

e) Dacă $x_0 \in A$ este un punct de acumulare la stânga (la dreapta) a lui A , numim *derivata la stânga (la dreapta)* a lui f în x_0 limita (în cazul în care există)

$$f'_s(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \left(f'_d(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \right).$$

Dacă $x_0 \in A$ este punct de acumulare și la stânga și la dreapta a lui A , este clar că derivata $f'(x_0)$ există dacă și numai dacă derivatele laterale $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$ există și sunt egale. În acest caz, $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. Bineînțeles, f este derivabilă în x_0 dacă, mai mult, aceste două derivate laterale (ce sunt egale) sunt finite.

Propoziția 1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în x_0 , atunci f este continuă în x_0 .

DEFINIȚIE. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă.

a) Spunem că o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 dacă f este derivabilă pe A și f' este continuă.

b) Notăm $C^1(A)$ familia tuturor funcțiilor $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 .

c) Notăm $C(A)$ familia tuturor funcțiilor continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Din propoziția 1.1, $C^1(A) \subseteq C(A)$.

Următoarea teoremă stabilește regulile de derivare pentru sume, produse și compunere.

Teorema 1.2. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mulțimi nevide.

i) Dacă funcțiile $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ și fg sunt derivabile în x_0 și

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \text{ (regula lui Leibniz)}.$$

Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci $\exists \varepsilon > 0 : g(x) \neq 0, \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ și $1/g, f/g$ sunt derivabile în x_0 cu

$$\left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2};$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

ii) Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in A \cap A'$, $f(x_0) \in B \cap B'$ și g este derivabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este derivabilă în x_0 și

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (regula lanțului)}.$$

iii) Dacă funcția $f : A \rightarrow B$ este bijectivă și derivabilă în $x_0 \in A \cap A'$ astfel încât $f'(x_0) \neq 0$ și $f(x_0) \in B'$, atunci f^{-1} este derivabilă în $f(x_0)$ și

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dacă funcțiile f și g sunt derivabile, regulile de mai sus pot fi scrise ca:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (dacă $0 \notin \text{Im } f$);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (dacă $0 \notin \text{Im } g$);
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$;
- $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (dacă $0 \notin \text{Im } f'$).

Ultimele două reguli pot fi ușor memorate dacă vedem pe f ca pe o schimbare de variabilă $y = f(x)$:

- $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$;
- $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Să ne amintim acum de derivatele funcțiilor elementare:

- $c' = \frac{dc}{dx} = 0, x \in \mathbb{R}$, pentru $c \in \mathbb{R}$;
- $(a^x)' = a^x \ln a, x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^*$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;
- $(x^p)' = px^{p-1}, x \in \mathcal{D}_p$, pentru $p \in \mathbb{R}$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- $(\cotg x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$;
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$;
- $(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$;
- $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$;

unde $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}$ dacă $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}^*$ dacă $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}_+$ dacă $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ și $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}_+^*$ dacă $p \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$.

Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci, conform regulilor de calcul avem:

$$(f^g)' = (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \left(g' \ln f + \frac{gf'}{f} \right) = f^g (\ln f) g' + f^{g-1} f' g.$$

Definiția funcțiilor reale derivabile poate fi ușor adaptată pentru funcții de o variabilă cu valori în \mathbb{R}^m , deoarece limita

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0))$$

are sens pentru funcții $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ cu $x_0 \in A \cap A'$. Ca în cazul limitelor de funcții, derivatele pot fi calculate pe componente:

Propoziția 1.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție cu componentele f_1, f_2, \dots, f_m . Dacă $x_0 \in A \cap A'$, atunci f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă f_1, f_2, \dots, f_m sunt derivabile în x_0 . În acest caz, $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$.

Reguli similare de calcul se aplică și în acest caz:

Teorema 1.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă, $x_0 \in A \cap A'$ și funcțiile $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în x_0 . Atunci:

i) $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

ii) $\langle f, g \rangle$ este derivabilă în x_0 și

$$(\langle f, g \rangle)'(x_0) = \langle f'(x_0), g(x_0) \rangle + \langle f(x_0), g'(x_0) \rangle;$$

iii) φf este derivabilă în x_0 și

$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0).$$

2. DIFERENȚIABILITATE GÂTEAUX

Dacă dorim să derivăm o funcție de mai multe variabile (chiar cu valori în \mathbb{R}), o simplă generalizare nu este posibilă, deoarece pentru $n \geq 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ și o funcție $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, raportul $\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}$ nu este definit. Există mai multe posibilități de a ocoli această dificultate. Una este să considerăm *derivate direcționale*, opțiune ce este bazată pe observația că derivata unei funcții $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ într-un punct \mathbf{x}_0 poate fi scrisă ca

$$f'(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție.

a) Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că f este *derivabilă* în \mathbf{x}_0 în *direcția* \mathbf{u} dacă limita

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) \in \mathbb{R}^m$$

există. În acest caz, $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ se numește *derivata direcțională* a lui f în \mathbf{x}_0 în *direcția* \mathbf{u} .

b) Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și f este derivabilă în \mathbf{x}_0 în orice direcție $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că f este *Gâteaux diferențiabilă* în \mathbf{x}_0 . *Diferențiala Gâteaux* este atunci funcția $\mathbf{u} \mapsto f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ și se notează $Df(\mathbf{x}_0)$.

c) Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și f este diferențiabilă Gâteaux în \mathbf{x}_0 , spunem că f este *Gâteaux derivabilă* în \mathbf{x}_0 dacă în plus $Df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este o aplicație liniară.

d) Spunem că f este *Gâteaux diferențiabilă* sau *Gâteaux derivabilă* pe o submulțime $D_0 \subseteq D$ dacă f este Gâteaux diferențiabilă, respectiv Gâteaux derivabilă în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.

Observație. Deoarece

$$f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\mathbf{x}_0 + t\alpha\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s} (f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) = \alpha f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, remarcăm că existența derivatei direcționale $f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u})$ este echivalentă cu existența lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. De aceea, în definiția diferențiabilități se poate cere existența lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ doar pentru versorii $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Mai mult, dacă f este diferențiabilă în \mathbf{x}_0 , aplicația $Df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este omogenă; de aceea, pentru derivabilitatea lui f în \mathbf{x}_0 , este de ajuns să cerem doar ca $Df(\mathbf{x}_0)$ să fie aditivă.

Funcțiile constante și funcțiile liniare sunt Gâteaux derivabile. Într-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ și $T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, avem

$$c'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (c - c) = 0$$

și

$$T'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - T(\mathbf{x}_0)) = T(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

În consecință, $Dc(\mathbf{x}_0) = 0$, $DT(\mathbf{x}_0) = T$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Fie $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ baza canonică în \mathbb{R}^n . Dacă f este derivabilă în \mathbf{x}_0 în direcția \mathbf{e}_k pentru un $k \in \{1, \dots, n\}$, spunem că f admite o *derivată parțială* în raport cu x_k în \mathbf{x}_0 , pe care o notăm

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) := f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_k).$$

Observăm că derivata parțială a lui f în raport cu x_k în \mathbf{x}_0 se obține prin derivarea funcției ce se obține variind numai componenta x_k a lui \mathbf{x}_0 , celelalte rămânând fixe. Într-adevăr, dacă $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$, atunci

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)) \\ &= \lim_{x_k \rightarrow x_k^0} \frac{1}{x_k - x_k^0} (f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)). \end{aligned}$$

Bineînțeles, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^m$, unde f_1, \dots, f_m sunt componentele lui f .

Existența derivatelor parțiale ale unei funcții de mai multe variabile nu implică existența tuturor derivatelor direcționale (adică a diferențiabilității Gâteaux) în acel punct, după cum ne arată următorul exemplu:

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar

$$\frac{f((0, 0) + t(u, v)) - f((0, 0))}{t} = \frac{t^2 uv}{t^2(u^2 + v^2)} = \frac{1}{t} \frac{uv}{u^2 + v^2}.$$

Așadar derivata direcțională $f'((0, 0); (u, v))$ nu există dacă $uv \neq 0$.

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție Gâteaux derivabilă în \mathbf{x}_0 .

- a) Matricea din \mathcal{M}_{mn} asociată cu $Df(\mathbf{x}_0)$ (în raport cu bazele canonice din \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m) se numește *matricea jacobiană* a lui f în \mathbf{x}_0 și este notată $J_f(\mathbf{x}_0)$.
- b) În cazul $m = 1$, matricea jacobiană a lui f în \mathbf{x}_0 se numește de asemenea *gradientul* lui f și se mai notează $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
- c) În cazul $m = n$, determinantul lui $J_f(\mathbf{x}_0)$ se numește *jacobianul* lui f în \mathbf{x}_0 și se notează $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0)$, unde f_1, \dots, f_n sunt componentele lui f .

Observații.

1. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție Gâteaux derivabilă în \mathbf{x}_0 . Se poate arăta cu ușurință că $J_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$, adică matricea

ce are ca linii elementele lui $\nabla f_k(\mathbf{x}_0)$ pentru $k \in \{1, \dots, m\}$. Pe de altă parte,

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix},$$

adică matricea ce are drept coloane elementele lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ pentru $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Particularizând pentru cazul $m = 1$, obținem

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Putem vedea matricea linie $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ca un element al lui \mathbb{R}^n ; în acest caz putem scrie

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i, \quad \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. În ceea ce privește operațiile cu funcții de mai multe variabile, avem următoarele reguli, ce se aplică ori de câte ori există derivatele direcționale în discuție pentru funcțiile $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- $(f + g)'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) + g'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$;
- $(\varphi f)'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \varphi'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) f(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$;
- $\left(\frac{1}{\varphi}\right)'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = -\frac{\varphi'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})}{\varphi(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})^2}$ dacă $0 \notin \text{Im } \varphi$.

3. Dacă o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este numai Gâteaux diferențiabilă într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, nu putem deduce continuitatea lui f în \mathbf{x}_0 , ci doar continuitatea direcțională a lui f în \mathbf{x}_0 , adică continuitatea în 0 a funcției $t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ pentru orice $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Chiar dacă cerem ca f să fie Gâteaux derivabilă în \mathbf{x}_0 , f nu este în mod necesar continuă în \mathbf{x}_0 . Totuși, situația se schimbă dacă cerem ca derivatele parțiale să existe și să fie mărginite într-o vecinătate a lui \mathbf{x}_0 :

Teorema 2.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dacă există $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ să existe pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt mărginite pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci f este continuă în \mathbf{x}_0 .

Observație. O condiție suficientă ca $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ să fie mărginită pe o vecinătate a lui \mathbf{x}_0 este ca ea să fie continuă în \mathbf{x}_0 .

DEFINIȚIE. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă.

- a) Dacă A este deschisă, spunem că o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ este de clasă C^1 dacă toate derivatele parțiale ale lui f există și sunt continue.

- b) Dacă A este deschisă, notăm $C^1(A; \mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcțiilor $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ce sunt de clasă C^1 . Dacă $m = 1$, o vom nota mai simplu $C^1(A)$.
- c) Notăm $C(A; \mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcțiilor continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $m = 1$, o vom nota doar $C(A)$.

Teorema 2.1 și remarca de mai jos ne permite să conchidem că $C^1(D; \mathbb{R}^m) \subseteq C(D; \mathbb{R}^m)$ pentru orice submulțime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

3. DIFERENȚIABILITATE FRÉCHET

Remarcăm că o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct x_0 dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

În acest caz, $a = f'(x_0)$. Pentru a extinde conceptul de derivată la funcții de mai multe variabile, o altă posibilitate este de a înlocui în proprietatea de mai sus numărul real a cu o matrice, sau, echivalent, un operator liniar.

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție.

- a) Pentru $x_0 \in D$, spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* în x_0 dacă există un operator liniar $T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} (f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)) = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

În acest caz, operatorul T se numește *diferențiala Fréchet* a lui f în x_0 și se notează $df(x_0)$.

- b) Spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* pe o submulțime $D_0 \subseteq D$ dacă f este diferențiabilă Fréchet în orice punct $x_0 \in D_0$.

Observație. Un alt mod de a exprima faptul că f este *diferențiabilă Fréchet* în x_0 este că există $T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ și o funcție continuă $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât $\alpha(x_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ și

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \|x - x_0\| \alpha(x), \quad \forall x \in D.$$

De fapt, α se poate defini prin

$$\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x - x_0\|} (f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)), & x \in D \setminus \{x_0\}; \\ 0_{\mathbb{R}^m}, & x = x_0. \end{cases}$$

Legătura între diferențiabilitatea Fréchet și diferențiabilitatea Gâteaux este dată de următorul rezultat:

Teorema 3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă într-un punct $x_0 \in D$, atunci f este derivabilă Gâteaux în x_0 și $Df(x_0) = df(x_0)$.

O consecință imediată a acestei teoreme este că diferențiala Fréchet este unică, deoarece derivata Gâteaux este unică (datorită faptului că $Df(x_0)(u) = f'(x_0; u)$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$).

O altă consecință este că dacă f este diferențiabilă Fréchet în $x_0 \in D$, atunci f are derivate parțiale în x_0 și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Funcțiile constante și aplicațiile liniare sunt diferențiabile Fréchet differentiable, de asemenea. Într-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ and $T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} (c - c - 0_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)}(x - x_0)) = 0_{\mathbb{R}^m}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} (T(x) - T(x_0) - T(x - x_0)) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

ceea de demonstrează clar afirmația și chiar mai mult, că $dc(x_0) = 0$, $dT(x_0) = T$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Fie $pr_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ proiecția pe componenta i :

$$pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad (x_1, \dots, x_n) \in D, \quad i = \overline{1, n}.$$

Diferențiala Fréchet a lui pr_k este în mod tradițional notată dx_k :

$$dx_i(u_1, \dots, u_n) = u_i, \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Deoarece

$$df(x_0)(u) = f'(x_0; u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) u_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i(u), \quad \forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

avem

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i.$$

Prin contrast cu derivabilitatea Gâteaux, diferențiabilitatea Fréchet implică continuitatea:

Teorema 3.2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă Fréchet într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci f este continuă în \mathbf{x}_0 .

O condiție suficientă pentru diferențiabilitatea Fréchet este dată de următorul rezultat:

Teorema 3.3. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă există $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ există pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci f este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 .

O consecință a acestui rezultat este că dacă $f \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$, atunci f este Fréchet diferențiabilă.

În ceea ce privește calculele cu diferențială Fréchet, putem aplica următoarele reguli:

Teorema 3.4. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și $E \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțimi deschise nevide.

i) Dacă $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sunt diferențiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 și

$$d(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) = \alpha df(\mathbf{x}_0) + \beta dg(\mathbf{x}_0), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci φf este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 și

$$d(\varphi f)(\mathbf{x}_0) = d\varphi(\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0) + \varphi(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0).$$

iii) Dacă $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui \mathbf{x}_0 astfel încât $0 \notin \varphi[D_0]$, $\frac{1}{\varphi} : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 și

$$d\left(\frac{1}{\varphi}\right)(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{\varphi(\mathbf{x}_0)^2}d\varphi(\mathbf{x}_0).$$

iv) Dacă $f : D \rightarrow E$ este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 , $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $g \circ f$ este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 și

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0).$$

Ultima relație este cunoscută drept *regula lanțului* pentru diferențialele Fréchet. Deoarece matricea jacobiană a unei funcții diferențiabile Fréchet este matricea asociată diferențialei ei Fréchet, aceasta poate fi scrisă ca

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}_0) = J_g(f(\mathbf{x}_0)) \cdot J_f(\mathbf{x}_0)$$

sau, în termeni de derivate parțiale,

$$\frac{\partial (g_j \circ f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j = \overline{1, p}.$$

În cazul $m = n = p$, aplicând determinanții relației matriceale de mai sus, obținem

$$\frac{D(g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0) = \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0).$$

De aceea, dacă $f : D \rightarrow E$ este bijectivă și f^{-1} este de asemenea diferențiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $J_f(\mathbf{x}_0)$ este nesingulară, $J_{f^{-1}}(f(\mathbf{x}_0)) = (J_f(\mathbf{x}_0))^{-1}$ și

$$\begin{aligned} \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0) &\neq 0; \\ \frac{D(f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1})}{D(x_1, \dots, x_n)}(f(\mathbf{x}_0)) &= \frac{1}{\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0)}. \end{aligned}$$

DEFINIȚIE. Fie $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ mulțimi deschise nevide. O funcție $f : D \rightarrow E$ se numește *difeomorfism* dacă f este bijectivă, $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ și $J_f(\mathbf{x})$ este nesingulară pentru orice $\mathbf{x} \in D$.

Se poate arăta că dacă $f : D \rightarrow E$ este un difeomorfism, atunci $f^{-1} \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$.

4. DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Vom considera mai întâi cazul funcțiilor reale de o variabilă. Pentru o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se poate defini $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A_1 \subseteq A \cap A'$ este mulțimea elementelor în care f este derivabilă. De aceea, putem vorbi de derivabilitatea noii funcții f' : derivata lui f' într-un punct $x_0 \in A_1 \cap A'_1$, dacă există, va fi notată $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ și este numită *derivata de ordin doi* a lui f în x_0 . Bineînțeles, aceasta definește o funcție, numită *derivata de ordin doi* a lui f : $f'' : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A_2 \subseteq A_1 \cap A'_1$ este mulțimea elementelor în care f' este derivabilă.

Procesul poate continua: dacă $f^{(n-1)} : A_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivata de ordin $n-1$ a lui f (pentru $n \geq 3$), atunci $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ notează, în cazul în care există, derivata lui $f^{(n-1)}$ în $x_0 \in A_{n-1} \cap A'_{n-1}$ și se numește *derivata de ordin n* a lui f în x_0 . Ea definește, la rândul ei, funcția $f^{(n)} : A_n \rightarrow \mathbb{R}$, numită *derivata de ordin n* a lui f , unde $A_n \subseteq A_{n-1} \cap A'_{n-1}$ este mulțimea elementelor în care $f^{(n-1)}$ este derivabilă.

Acest procedeu recursiv poate fi aplicat și funcțiilor de mai multe variabile, obținând *derivate direcționale de ordin superior*, *diferențiale* sau *derivate Gâteaux de ordin superior* și *diferențiale Fréchet de ordin superior*. Un caz particular de derivate direcționale de ordin superior este constituit de *derivatele parțiale de ordin superior*:

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ pentru $p \geq 2$, *derivata parțială de ordin p* a lui f în raport cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ într-un punct $x_0 \in D$ este definită recursiv ca

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x_0) := \frac{\partial \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \right)}{\partial x_{i_1}}(x_0),$$

cu condiția ca derivata parțială (de ordin $p-1$) $\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}$ există într-o vecinătate a lui x_0 și admite derivată parțială în raport cu x_{i_1} în x_0 .

Dacă $i_1 = \dots = i_p = i$, în loc de $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$ putem scrie $\frac{\partial^p f}{\partial x_i^p}$. Dacă nu este cazul, derivata parțială se numește *derivată parțială mixtă*. Următoarele rezultate oferă condiții suficiente pentru schimbarea ordinii indicilor i_1, \dots, i_p .

Teorema 4.1 (Schwartz). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție și $i, j \in \{1, \dots, n\}$ cu $i \neq j$. Dacă derivatele parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe o vecinătate a lui x_0 și sunt continue în x_0 , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Teorema 4.2 (Young). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție și $i, j \in \{1, \dots, n\}$ cu $i \neq j$. Dacă derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ există într-o vecinătate deschisă a lui x_0 și sunt Fréchet diferențiabile în x_0 , atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există și sunt egale.

În condițiile teoremelor Schwartz sau Young, se pot ordona (și grupa) i_1, \dots, i_p în derivata parțială mixtă $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}$ și aceasta se poate scrie ca

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (*)$$

unde, pentru $i = \overline{1, n}$, α_i este numărul de i care apar în lista i_1, \dots, i_p . Vectorul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se numește *multi-indice* și avem $p = |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. De fapt, în expresia (*), se pot omite termenii $\partial x_i^{\alpha_i}$ dacă $\alpha_i = 0$.

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă nevidă și pentru $p \geq 2$, $C^p(D; \mathbb{R}^m)$ este definită ca mulțimea funcțiilor $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât toate derivatele parțiale de ordin p există și sunt continue. Notăm de asemenea prin $C^\infty(D; \mathbb{R}^m)$ mulțimea funcțiilor $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f \in C^p(D; \mathbb{R}^m)$, pentru orice $p \geq 1$. În cazul $m = 1$, vom nota $C^p(D)$ în loc de $C^p(D; \mathbb{R})$ (pentru $p \in \mathbb{N}^*$ sau $p = \infty$). Bineînțeles, avem

$$C^\infty(D; \mathbb{R}^m) \subseteq \dots \subseteq C^p(D; \mathbb{R}^m) \subseteq \dots \subseteq C^1(D; \mathbb{R}^m) \subseteq C(D; \mathbb{R}^m).$$

Diferențiabilitatea Fréchet de ordin superior poate fi introdusă după cum urmează:

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție și $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

- Spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* de ordin p în $x_0 \in D$ dacă există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui x_0 astfel încât toate derivatele parțiale de ordin $p-1$ există în D_0 și sunt diferențiabile Fréchet în x_0 .
- Spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* de ordin p într-o submulțime $D_0 \subseteq D$ dacă f diferențiabilă Fréchet de ordin p în orice punct $x_0 \in D_0$.

- c) Dacă f este Fréchet diferențiabilă Fréchet de ordin p în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci *diferențiala Fréchet* de ordin p în \mathbf{x}_0 este definită ca $d^p f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ prin

$$d^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) := \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\mathbf{x}_0) \cdot u_{i_1} \dots u_{i_p}, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Folosind multiindici, formula ce definește pe $d^p(\mathbf{x}_0)$ este similară cu cea care definește pe $(u_1 + \dots + u_n)^p$. De exemplu, dacă $n = 2$,

$$d^p(\mathbf{x}_0)(u_1, u_2) = \sum_{j=0}^p C_p^j \frac{\partial^p f}{\partial x_1^j \partial x_2^{p-j}}(\mathbf{x}_0) u_1^j u_2^{p-j}.$$

4.1. Serii Taylor.

O aplicație importantă a derivatelor de ordin superior este *formula lui Taylor*, care poate fi scrisă acum pentru funcții de mai multe variabile.

Teorema 4.3 (formula lui Taylor). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție Fréchet diferențiabilă de ordin $p+1$ pe o bilă $B(\mathbf{x}_0; r) \subseteq D$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)$ există $t \in (0, 1)$ astfel încât

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots + \frac{1}{p!} d^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

unde $\xi := \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

DEFINIȚIE. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și $f \in C^\infty(D)$.

- a) *Seria Taylor* asociată lui f într-o vecinătate a unui punct (în jurul punctului) $\mathbf{x}_0 \in D$ este următoarea serie

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} d^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- b) În cazul $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ seria Taylor de mai sus se numește *seria Maclaurin* asociată lui f .

- c) Spunem că o funcție este *analitică* într-o bilă $B(\mathbf{x}_0; r) \subseteq D$ dacă seria Taylor asociată lui f în jurul lui \mathbf{x}_0 converge la $f(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)$.

În cazul $n = 1$, seria Taylor asociată unei funcții este o serie de puteri. Reciproc, dacă o funcție f este definită de o serie de puteri $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pe domeniul ei de convergență, atunci f este analitică în $(-r, r)$, unde $r \in [0, +\infty]$ este raza ei de convergență. De fapt,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \dots \cdot (k+p) a_{k+p} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (-r, r), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, $f^{(p)}(x_0) = p! a_p$ și seria Taylor asociată lui f în jurul lui x_0 este chiar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ (ceea ce demonstrează că f este analitică în $(-r, r)$).

Totuși, convergența seriei Taylor asociată unei funcții f nu implică faptul că suma ei este f . De exemplu, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Atunci $f^{(p)}(0) = f(0) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deci seria Maclaurin asociată este seria nulă; așadar suma ei (zero) este diferită de f pe orice interval centrat în 0.

Mai jos redăm câteva serii Maclaurin pentru câteva funcții analitice cunoscute:

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, x \in (-1, 1);$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, x \in (-1, 1);$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, x \in \mathbb{R};$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, x \in \mathbb{R};$

- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, x \in \mathbb{R}.$

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

- [1] E. Cioară, M. Postolache, *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
- [2] R. M. Dăneț, S. D. Niță, I. Popescu, M. V. Popescu, F. Voicu, *Curs modern de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
- [3] D. Guichard & al., *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco, 2016.
- [4] F. Iacob, *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.
- [5] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- [6] David B. Massey, *Worldwide Multivariable Calculus*, Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2015.
- [7] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- [8] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.