

CURS 5

SPAȚII LINIARE

A. Arusoaie

e-mail: `andreea.arusoaie@info.uaic.ro`

Web: `http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html`

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

25 Octombrie, 2021



UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA”
din IAȘI



Structura cursului

1 Definiții. Proprietăți

2 Combinații liniare

- Liniară dependență și independență
- Dimensiunea unui spațiu liniar
- Bază algebrică
- Schimbarea coordonatelor

3 Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

4 Baze ortonormale

- Procedul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Structura cursului

1 Definiții. Proprietăți

2 Combinații liniare

- Liniară dependență și independență
- Dimensiunea unui spațiu liniar
- Bază algebrică
- Schimbarea coordonatelor

3 Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

4 Baze ortonormale

- Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt

Spații liniare

Un **spațiu liniar (spațiu vectorial)** este o colecție de obiecte, numite *vectori*, ce pot fi adunate între ele și înmulțite cu numere, numite *scalari*.

Cele mai utilizate spații liniare sunt **spațiile Euclidiene**:

- \mathbb{R} - *dreapta reală* - spațiu liniar 1-dimensional
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - *planul real* - spațiu liniar 2-dimensional
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - *spațiul real* - spațiu liniar 3-dimensional
- \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ - *hiperspațiul real* - spațiu liniar n -dimensional

Spații liniare

Fie $V \neq \emptyset$ și K un corp comutativ. În general, vom considera $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

Definiție

Se numește **spațiu liniar (vectorial)** peste corpul K , o mulțime V , înzestrată cu

- o **lege internă** " + " : $V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow x + y, \forall x, y \in V$,

- o **lege externă** " · " : $K \times V \rightarrow V, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, x \in V$,

asa încât sunt îndeplinite următoarele cerințe (axiome):

- i) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$;
- ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$;
- iii) $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \exists (-\mathbf{x}) \in \mathbf{V} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- v) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}, \forall \alpha \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;
- vi) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathbf{x} \in V$;
- vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathbf{x} \in V$;
- viii) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V$, unde 1 este elementul unitate din K .

Spații liniare

- ▶ elementele K -spațiului liniar V sunt numite *vectori*;
- ▶ elementele lui K se numesc *scalari*;
- ▶ operația $+$ se numește *adunarea vectorilor*;
- ▶ operația \cdot se numește *multiplicarea cu scalari*.
- ▶ elementul neutru $\mathbf{0} \in V$ se numește *vector nul*;
- ▶ vectorul $-\mathbf{x} \in V$ se numește *vectorul opus* lui $\mathbf{x} \in V$;
- ▶ când $K = \mathbb{R}$, V se mai numește *spațiul liniar real*;
- ▶ când $K = \mathbb{C}$, V se mai numește *spațiu liniar complex*.

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

Definim operațiile $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ prin

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot \mathbf{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Atunci $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ este un spațiu liniar.

- Operațiile de mai sus se numesc *operații canonice*.
- Dacă $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci vom numi numerele x_1, x_2, \dots, x_n *coordonatele* lui \mathbf{x} .

Exemple de spații liniare

1. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - mulțimea matricilor reale cu m linii și n coloane. Fie operațiile

$+$ - adunarea uzuală a matricelor;

\cdot - înmulțirea matricelor cu numere reale.

Atunci $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este un spațiu liniar real.

2. Fie $\mathbb{R}[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți reali. Dacă

$+$ - notează adunarea polinoamelor;

\cdot - reprezintă înmulțirea polinoamelor cu numere reale,

atunci $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este un spațiu liniar real.

Exemple de spații liniare

3. Fie $X \neq \emptyset$, $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \rightarrow V\}$. Definim operațiile

$$+ : \mathcal{F}(X, V) \times \mathcal{F}(X, V) \rightarrow \mathcal{F}(X, V)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X, V) \rightarrow \mathcal{F}(X, V)$$

prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X, f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X, f \in \mathcal{F}(X, V),$$

atunci $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ formează un spațiu liniar peste \mathbb{R} .

Exemple de spații liniare

Particularizând X și V definiți în 3., obținem diverse exemple de spații vectoriale:

- Dacă $X = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ și $V = \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ atunci obținem spațiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- Dacă $X \subseteq \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}$, se obține spațiul liniar $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ al funcțiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X .
- Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ și $V = \mathbb{R}^m$, atunci $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m), +, \cdot)$ este spațiul liniar real al funcțiilor de n variabile cu valori în \mathbb{R}^m .
- Dacă $X = \mathbb{N}$ și $V = \mathbb{R}$, mulțimea $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ spațiul liniar real al șirurilor de numere reale.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real. Atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și orice $\mathbf{x} \in V$:

- i) $0_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$;
- ii) $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}$;
- iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x}$;
- iv) $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ sau $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$.

Spații liniare. Subspații liniare

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și W o submulțime nevidă a lui V .

Spunem că $(W, +, \cdot)$ este **subspațiu liniar** al lui $(V, +, \cdot)$ dacă

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, \text{ avem } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W \text{ și } \alpha \cdot \mathbf{x} \in W.$$

Cu alte cuvinte, spunem că W este un **subspațiu liniar** al lui V dacă și numai dacă

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Exemple de subspații liniare

- 1) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulțimea $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea vectorilor din \mathbb{R}^n și înmulțirea lor cu scalari din \mathbb{R} , un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

- 2) Mulțimea *funcțiilor pare*, definită prin

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

este un subspațiu liniar al spațiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemple de subspații liniare

- 3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toți nuli (adică, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}$).
Mulțimea

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

este un subspațiu liniar al lui \mathbb{R}^n , numit *hiperplan*.

Propoziție

Fie W_1 și W_2 două subspații liniare ale lui $(V, +, \cdot)$. Atunci

- i) $W_1 \cap W_2$ este tot un subspațiu liniar al lui V .
- ii) $W_1 \cup W_2$ nu este întotdeauna un subspațiu liniar al lui V .

Structura cursului

1 Definiții. Proprietăți

2 Combinații liniare

- Liniară dependență și independență
- Dimensiunea unui spațiu liniar
- Bază algebrică
- Schimbarea coordonatelor

3 Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

4 Baze ortonormale

- Procedul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Combinatii liniare

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar.

O **combinație liniară** a vectorilor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ este un vector $\mathbf{y} \in V$ ce se poate scrie ca

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Observație: Dacă W este un subspațiu liniar al lui V , atunci orice combinație liniară a vectorilor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in W$ este tot din W .

Combinatii liniare

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și U o submulțime nevidă a lui V .

Mulțimea *tuturor combinațiilor liniare* de elemente din U ,

$$\{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in U\}$$

se numește **subspațiul liniar generat de U** , notat **$Lin(U)$** sau $Span(U)$.

- $Lin(U)$ este un subspațiu liniar al lui $(V, +, \cdot)$. În plus, are loc $U \subseteq Lin(U)$.
- $Lin(U)$ este cel mai mic subspațiu al lui V care îl conține pe U .

Exemplu: Dacă $V = \mathbb{R}^3$, subspațiul liniar generat de $U = \{(1, -2, 1)\}$ este dreapta $\{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Liniară dependență și independență

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$.

- a) Elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ se numesc *liniar dependente* dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dintre care cel puțin unul nenul, astfel încât

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

- b) Elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ se numesc *liniar independente* dacă ecuația

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

are soluție unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

- c) O submulțime U a lui V se numește *liniar independentă* dacă pentru orice vectori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in U$, *distincți*, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ sunt liniar independenți.

Liniară dependență și independență



Figure: Vectori liniari dependenți în \mathbb{R}^3

Liniară dependență și independență

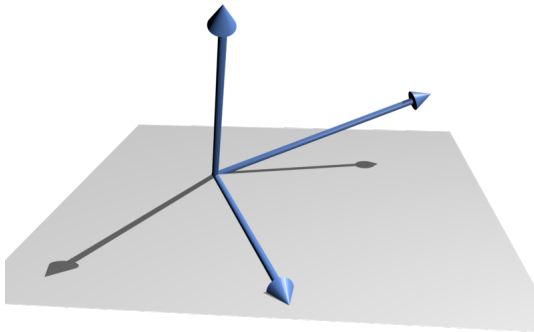


Figure: Vectori liniari independenți în \mathbb{R}^3

Exemplu: Liniară dependență - Liniară independență

O persoană descrie o anumite locație astfel:

Acest hotel este la 3 km nord și 4 km est de centrul orașului.

- Avem suficientă informație să identificăm locația, deoarece pot considera sistemul de coordonate ca un spațiu vectorial 2- dimensional (ignorând altitudinea și curvatura Pământului)

Dacă persoana adaugă

Locația este la 5 km nord-est de centru.

- Dacă afirmația este corectă, nu putem să ne dăm seama exact de locație.
- 3 km nord și 4 km est sunt vectori liniar independenți; (Vectorul nord nu poate fi scris în funcție de est)
- 5 km nord-est este o combinație liniară a doi vectori, deci este liniar dependent

Dacă am considera și altitudinea, acesta ar fi un al treilea vector liniar independent. În general, pentru a descrie locația într-un spațiu n -dimensional, avem nevoie de n vectori liniar independenți.

Liniară dependență și independență

Teorema

Vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ai unui spațiu liniar sunt liniar dependenți dacă și numai dacă unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Exemple

1. Mulțimea $\{\mathbf{0}\}$ este liniar dependentă deoarece are loc $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. Fie spațiul liniar \mathbb{R}^n , și sistemul de vectori

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Atunci, B este liniar independentă .

3. Fie spațiul liniar al tuturor polinoamelor de grad cel mult n . Atunci polinoamele $1, x, x^2, \dots, x^n$ formează un sistem liniar independent.

Dimensiunea unui spațiu liniar

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar.

- i) Se numește **dimensiune (algebrică)** a spațiului liniar V numărul maxim de elemente liniar independente din V . Vom nota dimensiunea spațiului V cu $\dim(V)$.
- ii) Spațiul liniar V este numit **infinit-dimensional** dacă există cel puțin o submulțime infinită și liniar independentă a lui V . În caz contrar, V este numit **spațiu liniar finit-dimensional**.

Exemple:

- 1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$;
- 2. $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

Bază algebrică

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie B o submulțime nevidă a lui V .

B se numește **bază algebrică** a lui V dacă B este o submulțime liniar independentă și $\text{Lin}(B) = V$.

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci mulțimea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, este o bază a lui \mathbb{R}^n , numită **baza canonică** a lui \mathbb{R}^n .

Bază algebrică

În cazul unui spațiu liniar n -dimensional V , o bază a lui V este o mulțime B alcătuită din n elemente, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, liniar independente, din V .

Fiecare element $\mathbf{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k,$$

Scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se numesc *coordonatele lui \mathbf{x} în baza B* .

Orice bază a unui spațiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V .

Bază algebrică

Dacă notăm

- $X_B \stackrel{not}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$, unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sunt coordonatele lui \mathbf{x} în baza B ;
- $\tilde{B} \stackrel{not}{=} [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ \dots \ \mathbf{b}_n^T] \in \mathcal{M}_{n,n}$ matricea ce are pe coloana k coordonatele lui \mathbf{b}_k ,

atunci relația

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{b}_k$$

se poate reda, *matriceal*, sub forma:

$$\mathbf{x}^T = \tilde{B} \cdot X_B = [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ \dots \ \mathbf{b}_n^T] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Bază algebrică

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar cu $\dim(V) = n$. Atunci

1. Orice mulțime de m elemente din V , cu $m > n$, este liniar dependentă;
2. Orice mulțime de n elemente din V este bază a lui V dacă și numai dacă este mulțime liniar independentă.
3. Orice mulțime de n vectori din V este bază a lui V dacă și numai dacă mulțimea este un sistem de generatori al lui V .

Definiție

Se numește *rang al unei mulțimi* U , de vectori din spațiul vectorial $(V, +, \cdot)$, dimensiunea subspațiului generat de U , adică

$$\text{rang}(U) := \dim(\text{Lin}(U)).$$

Bază algebrică

Exemplu:

Să se arate că mulțimea $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ este o bază a spațiului vectorial \mathbb{R}^3 . Determinați coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în această bază.

Schimbarea bazei

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar cu $\dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$, fie $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V și fie $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_m\}$ o mulțime de m vectori din V .

Se numește *matrice de trecere (schimbare)* de la baza B la sistemul de vectori B' , matricea

$$S_{B,B'} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}$$

unde, pentru $1 \leq k \leq m$, s_{1k}, \dots, s_{nk} , sunt coordonatele vectorului \mathbf{b}'_k , în raport cu $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$.

Schimbarea bazei

Cu alte cuvinte, s_{ij} sunt astfel încât

$$\begin{cases} \mathbf{b}'_1 &= s_{11}\mathbf{b}_1 + s_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n1}\mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}'_2 &= s_{12}\mathbf{b}_1 + s_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n2}\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{b}'_m &= s_{1m}\mathbf{b}_1 + s_{2m}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{nm}\mathbf{b}_n \end{cases}.$$

Matriceal putem scrie

$$\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S_{B,B'},$$

unde $\tilde{B}' = [\mathbf{b}'_1{}^T \ \mathbf{b}'_2{}^T \ \dots \ \mathbf{b}'_m{}^T]$ și $\tilde{B} = [\mathbf{b}_1{}^T \ \mathbf{b}_2{}^T \ \dots \ \mathbf{b}_n{}^T]$.

Propoziție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit-dimensional, cu $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$ sunt două baze a lui V , iar $S_{B,B'}$ este matricea de trecere de la B la B' , atunci matricea $S_{B,B'}$ este nesarabilă ($\det S_{B,B'} \neq 0$).

Mai mult, matricea $S_{B,B'}^{-1}$ este matricea de trecere de la baza B' la B , adică are loc

$$\tilde{B} = \tilde{B}' \cdot S_{B,B'}^{-1}.$$

Schimbarea coordonatelor

În plus, dacă $\mathbf{x} \in V$, iar $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sunt coordonatele lui \mathbf{x} în raport cu baza B , iar $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ sunt coordonatele lui \mathbf{x} în baza B' , atunci

$$X_{B'} = S_{B,B'}^{-1} \cdot X_B,$$

$$\text{unde } X_B \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}, \text{ iar } X_{B'} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}.$$

- Spunem că bazele B și B' sunt *la fel orientate* dacă determinantul matricii $S_{B,B'}$ de trecere de la B la B' este pozitiv.
- Spunem că bazele B și B' sunt *contrar orientate* dacă $\det(S_{B,B'}) < 0$.

Structura cursului

1 Definiții. Proprietăți

2 Combinații liniare

- Liniară dependență și independență
- Dimensiunea unui spațiu liniar
- Bază algebrică
- Schimbarea coordonatelor

3 Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

4 Baze ortonormale

- Procedul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real.

a) Se numește **produs scalar** pe V o aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, care satisface următoarele proprietăți:

(PS1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **pozitiv definită**, adică

$$\star \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V$$

$$\star \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in V;$$

(PS2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **simetrică**, adică

$$\star \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V;$$

(PS3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **biliniară**, adică

$$\star \langle \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$\star \langle \mathbf{x}, \alpha \cdot \mathbf{y} + \beta \cdot \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V.$$

b) Perechea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, în care V este un spațiu liniar real, iar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe V se numește **spațiu prehilbertian** (spațiu euclidian).

Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle &:= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \\ \forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Atunci $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe \mathbb{R}^n , numit *produsul scalar euclidian* (canonic).

Definiție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian și fie U o submulțime nevidă a lui V .

- 1) Doi vectori $\mathbf{x} \in V$ și $\mathbf{y} \in V$ se numesc *ortogonali*, și notăm $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

- 2) Spunem $\mathbf{x} \in V$ este *ortogonal pe mulțimea* U , și notăm $\mathbf{x} \perp U$, dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in U.$$

- 3) Vom numi U *sistem ortogonal* dacă

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \text{ cu } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

- 4) Dacă $U \subseteq V$, atunci prin *suplimentul ortogonal al lui* U , înțelegem mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe U . Altfel scris

$$U^\perp := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp U\}$$

Definiție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Unghiul dintre vectorii \mathbf{x} și \mathbf{y} , notat prin $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sau $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, se definește prin relația:

$$\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}.$$

Observație: Se poate observa cu ușurință că $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \widehat{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ și că $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar real. Spunem că aplicația $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ este o **normă** pe V dacă

N1) $\| \mathbf{x} \| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V$

N2) $\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

N3) $\| \alpha \cdot \mathbf{x} \| = |\alpha| \| \mathbf{x} \|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V$ (omogenitate);

N4) $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (inegalitatea triunghiulară).

Perechea $(V, \| \cdot \|)$ se numește **spațiu normat**.

Propoziție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian. Atunci aplicația $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x} \in V$$

este o normă pe V numită **norma indusă de produsul scalar** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Norma indusă de produsul scalar euclidian pe \mathbb{R}^n , definită prin

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

se numește *norma euclidiană*.

Definiție

Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $\mathbf{x} \in V$. Elementul \mathbf{x} se numește **vector** dacă $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Structura cursului

1 Definiții. Proprietăți

2 Combinații liniare

- Liniară dependență și independență
- Dimensiunea unui spațiu liniar
- Bază algebrică
- Schimbarea coordonatelor

3 Produs scalar. Norme în \mathbb{R}^n

4 Baze ortonormale

- Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt

Baze ortonormale

Definiție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian.

- a) O submulțime nevidă $U \subseteq V$ se numește **sistem ortonormal** dacă U este un sistem ortogonal și fiecare element al lui U este un versor.
- b) Dacă B este o bază a lui V și B este un sistem ortogonal, atunci B se numește **bază ortogonală** a lui V .
- c) Dacă B este o bază a lui V și B este un sistem ortonormal, atunci B se numește **bază ortonormală** a lui V .

Cu alte cuvinte, U este *un sistem ortonormal* dacă și numai dacă, pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{când } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Bineînțeles, baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, a lui \mathbb{R}^n , este o bază ortonormală a lui \mathbb{R}^n .

Baze ortonormale

Definiție

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ și fie $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V . Se numește **determinantul Gram** asociat unei baze B , numărul $\det G \in \mathbb{R}$, unde

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n \rangle \\ \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (1)$$

- G este o matrice simetrică și nesară;
- B este ortonormală dacă și numai dacă G este matricea unitate I_n ;
- B este ortogonală dacă și numai dacă matricea G este diagonală, adică

$$g_{ij} = 0, \forall i, j \in \overline{\{1, n\}}, i \neq j$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Teorema

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V , atunci există o bază ortonormală $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$, astfel încât

$$\text{Lin}(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}) = \text{Lin}(\{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_k\}), \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Demonstrație: Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian și $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui.

Plecând de la B , se poate construi o bază $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiași spațiu V , utilizând **algoritmul lui Gram-Schmidt**, după cum urmează:

Pasul 1: Fie $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1$.

Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, așa încât vectorul $\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 + \lambda_1 \mathbf{b}'_1$ să fie ortogonal pe \mathbf{b}'_1 , adică să avem $0 = \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2 \rangle + \lambda_1 \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle$. Așadar,

$$\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1 \rangle} \mathbf{b}'_1.$$

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 și μ_2 din \mathbb{R} , așa încât $b'_3 = b_3 + \mu_1 b'_1 + \mu_2 b'_2$ să fie ortogonal pe sistemul $\{b'_1, b'_2\}$, adică să avem $\langle b'_3, b'_1 \rangle = 0$ și $\langle b'_3, b'_2 \rangle = 0$.

Găsim $\mu_1 = -\frac{\langle b'_1, b_3 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle}$ și $\mu_2 = -\frac{\langle b'_2, b_3 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle}$. Prin urmare, avem:

$$b'_3 = b_3 - \frac{\langle b'_1, b_3 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b'_2, b_3 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2.$$

Pasul k: Continuând procedeul, obținem formula generală:

$$b'_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b'_i, b_k \rangle}{\langle b'_i, b'_i \rangle} b'_i, k = \overline{2, n}.$$









Așadar, am găsit baza ortogonală B' .

Pentru a obține o bază ortonormală, vom considera $B'' = \{b''_1, b''_2, \dots, b''_n\}$, unde

$$b''_k = \frac{b'_k}{\|b'_k\|}, k = \overline{1, n}$$

iar $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, considerat pe V .

Bibliografie

-  D. Buşneag, D. Piciu - *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
-  Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
-  Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalități. Idei și metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
-  S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.
-  F. L. Țiplea - *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
-  T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar in algebra superioară*, Matrix Rom București, 2012.
-  J. Harcet, L Heinrichs, P. M. Seiler - *Mathematics. Higher Lever*, Oxford Univ. Press, 2012.
-  R. Solomon - *Notes on Ordinals and Cardinals*, math.uconn.edu, 2014.