CURSUL 7
FORME LINIARE, BILINIARE ŞI PĂTRATICE

1. Forme liniare

În această secţiune vom considera aplicaţii liniare cu valori reale.

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar. O aplicaţie liniară $f : V \to \mathbb{R}$ se numeşte *formă liniară* sau *funcţională liniară.*

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar. Un subspaţiu $W \subseteq V$ se numeşte un *hiperplan* (*vectorial*) dacă există o funcţională liniară nenulă $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încât $\ker f = W$.

Propoziţia 1.1. *Dacă $(V,+,\cdot)$ este un spaţiu finit-dimensional cu* $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$*, atunci un subspaţiu liniar $W \subseteq V$ este un hiperplan dacă şi numai dacă* $\dim W = n - 1$.

Demonstraţie. Dacă $W = \ker f$ pentru o funcţională liniară nenulă $f : V \to \mathbb{R}$, atunci, din teorema dimensiunii

$$\dim W = \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f) = n - 1,$$

deoarece f este nenulă şi astfel $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Reciproc, dacă $\dim W = n - 1$, atunci există o bază $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n\}$ a lui V astfel încât $\operatorname{Lin}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}\} = W$. Luând $f : V \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(\alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n) := \alpha_n$$

pentru $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, avem f nenulă şi

$$f(\mathbf{b}_1) = \cdots = f(\mathbf{b}_{n-1}) = 0,$$

ceea ce implică $W \subseteq \ker f$ (adică $f(\mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{v} \in W$). Pe de altă parte, din implicaţia directă, $\dim(\ker f) = n - 1$ şi deci $W = \ker f$. □

Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional şi $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V. Dacă W este un hiperplan cu $W = \ker f$, unde f este o funcţională liniară nenulă, fie $\beta_1 := f(\mathbf{b}_1), \dots, \beta_n := f(\mathbf{b}_n)$. Atunci condiţia $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \in \ker f$ este caracterizată de ecuaţia

$$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0. \tag{1}$$

Aşadar

$$W = \{x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \in V \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0\}. \tag{2}$$

Reciproc, fiind daţi $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, nu toţi 0, submulţimea lui V definită de relaţia de mai sus este un hiperplan al lui V.

Se poate arăta că orice subspaţiu liniar al lui V (nu numai hiperplanele) pot fi caracterizate de sisteme de ecuaţii de forma (1).

Dacă $V = \mathbb{R}^n$ şi B este o bază canonică, relaţia (2) poate fi scrisă ca

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0\}.$$

În cazurile particulare $n = 2$ şi $n = 3$, ecuaţia (1) caracterizează o dreaptă (1-dimensională), respectiv un plan (2-dimensional) ce trece prin origine.

Următoarea noţiune permite caracterizarea tuturor dreptelor (dacă $n = 2$) şi planelor (când $n = 3$), nu neapărat a celor ce trecprin origine.

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar. O funcţie $f : V \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţională afină* dacă există o funcţională liniară nenulă $f_0 : V \to \mathbb{R}$ şi o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + c$, $\forall \mathbf{v} \in V$.

Pentru o funcţională afină $f : V \to \mathbb{R}$ se poate defini *nucleul* ei în acelaşi mod ca pentru funcţionalele liniare, adică

$$\ker f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar. O submulţime $U \subseteq V$ se numeşte *hiperplan afin* dacă există o funcţională afină neconstantă $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încât $\ker f = U$.

Cu alte cuvinte, U este un hiperplan afin dacă (exerciţiu!) există un hiperplan vectorial W şi un vector $\mathbf{v}_0 \in V$ astfel încât

$$U = W + \mathbf{v}_0 := \{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \mid \mathbf{v} \in W\}.$$

Dacă V este finit-dimensional cu o bază $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, atunci hiperplanele afine sunt date de submulţimi de forma

$$U = \{x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \in V \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + c = 0\},$$

unde $c, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

În cazurile $n = 2$ şi $n = 3$, hiperplanele afine sunt dreptele, respectiv planele.

Definiţie. Spaţiul liniar $\mathrm{L}(V; \mathbb{R})$ al tuturor formelor liniare se numeşte *dualul* lui V şi se notează V^*.

Propoziţia 1.2. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional. Atunci V^* este de asemenea finit-dimensional şi* $\dim V^* = \dim V$.

Demonstraţie. Fie $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V, unde $n := \dim V$. Considerăm funcţiile $\mathbf{b}_i^* : V \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, definite prin

$$\mathbf{b}_i^*(\mathbf{v}) := x_i, \ \mathbf{v} \in V, \tag{3}$$

unde $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ în baza B (adică $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$). Se verifică uşor că $\mathbf{b}_i^*$ este o funcţională liniară pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Să demonstrăm acum că $B^* := \{\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ este o bază a lui V^*. Dacă

$$\alpha_1\mathbf{b}_1^* + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n^* = \mathbf{0}_{V^*}$$

cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$\alpha_i = (\alpha_1\mathbf{b}_1^* + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n^*)(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}_{V^*}(\mathbf{b}_i) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

deci $\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*$ sunt liniar independente. Fie acum $f \in V^*$; dacă $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \in V$, atunci, din liniaritatea lui f avem

$$f(\mathbf{v}) = f(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1 f(\mathbf{b}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{b}_n) = f(\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1^*(\mathbf{v}) + \cdots + f(\mathbf{b}_n)\mathbf{b}_n^*(\mathbf{v}).$$

În concluzie, $\mathbf{v}$ fiind luat în mod arbitrar,

$$f = f(\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1^* + \cdots + f(\mathbf{b}_n)\mathbf{b}_n^*,$$

deci f este o combinaţie liniară de elemente ale lui B^*. Acest lucru demonstrează că $\mathrm{Lin}(B^*) = V^*$.

Aşadar, $\{\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ este o bază a lui V^*, de unde V^* este finit-dimensional şi $\dim V^* = n$. □

Propoziţia 1.3. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional. Dacă $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$, atunci există $f \in V^*$ astfel încât $f(\mathbf{v}) \neq 0$.*

Demonstraţie. Fie n dimensiunea lui V şi $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V. Am arătat în demonstraţia teoremei de mai sus că $B^* = \{\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ este o bază a lui V^*, unde $\mathbf{b}_i^* : V \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ sunt definite de (3). Dacă $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ în baza B, atunci cel puţin unul dintre $x_1, \ldots, x_n$, să spunem x_i, sunt nenuli, căci $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$. Aşadar

$$0 \neq x_i = \mathbf{b}_i^*(\mathbf{v}),$$

deci $\mathbf{b}_i^*$ este funcţionala liniară căutată. □

Observaţie. O consecinţă imediată a rezultatului de mai sus este că dacă $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ şi $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, atunci există $f \in V^*$ astfel încât $f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v})$.

Definiţie. Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar.

a) Dualul lui V^*, notat V^{**}, se numeşte *bidualul* lui V.

b) Funcţia $\psi : V \to V^{**}$ definită de

$$\psi(\mathbf{v})(f) := f(\mathbf{v}), \ \mathbf{v} \in V, \ f \in V^*$$

se numeşte *funcţia de evaluare.*

Funcţia de evaluare este bine definită şi liniară:

a. Este clar că $\psi(\mathbf{v}) : V^* \to \mathbb{R}$. Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $f, g \in V^*$, atunci

$$\psi(\mathbf{v})(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) + \beta g(\mathbf{v}) = \alpha\psi(\mathbf{v})(f) + \beta\psi(\mathbf{v})(g).$$

Aşadar $\psi(\mathbf{v})$ este liniară, adică $\psi(\mathbf{v}) \in V^{**}$. În concluzie, ψ este bine definită.

b. Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, atunci

$$\psi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(f) = f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha\psi(\mathbf{u})(f) + \beta\psi(\mathbf{v})(f), \ \forall f \in V^*.$$

Acest lucru înseamnă că $\psi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\psi(\mathbf{u}) + \beta\psi(\mathbf{v})$. În concluzie, ψ este liniară.

Dacă V este finit-dimensională, atunci ψ este un izomorfism liniar. Într-adevăr, dacă $\mathbf{v} \in \ker \psi$, atunci

$$f(\mathbf{v}) = 0, \ \forall f \in V^*.$$

Presupunerea că $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$, ar contrazice Propoziţia 1.3, care afirmă existenţa unui $f \in V^*$ astfel încât $f(\mathbf{v}) \neq 0$. De aceea, $\mathbf{v}$ trebuie să fie egală cu $\mathbf{0}_V$. Aceasta implică $\ker \psi = \{\mathbf{0}_V\}$, adică ψ este injectivă.

Pe de altă parte, datorită Propoziţiei 1.2, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Din teorema dimensiunii, $\operatorname{rank} \psi = \dim V = \dim V^{**}$, deci ψ este de asemenea surjectivă.

În concluzie, ψ este un izomorfism liniar, numit, în acest caz, *izomorfismul canonic* între V şi V^{**}.

2. Forme biliniare

Definiţie. Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare. O funcţie $g : V \times W \to \mathbb{R}$ se numeşte *formă* (*aplicaţie*) *biliniară* pe $V \times W$ dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

(i) $g(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\forall \mathbf{w} \in W$;
(ii) $g(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{z}) = \lambda g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mu g(\mathbf{v}, \mathbf{z})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, $\forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in W$.

În cazul $W = V$, o formă biliniară pe $V \times V$ se mai numeşte *formă* (*aplicaţie*) *biliniară* pe V.

Să presupunem acum că V şi W sunt finit-dimensionale, cu bazele $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ şi $\bar{B} = \{\bar{\mathbf{b}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{b}}_m\}$ pe V, respectiv W. Dacă $\mathbf{v} \in V$ şi $\mathbf{w} \in W$ au coordonatele în bazele B, respectiv $\bar{B}$, pe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, respectiv $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, atunci

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{\mathbf{b}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j g(\mathbf{b}_i, \bar{\mathbf{b}}_j).$$

Scalarii $a_{ij} := g(\mathbf{b}_i, \bar{\mathbf{b}}_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ sunt numiţi *coeficienţii* formei biliniare g în raport cu bazele B şi $\bar{B}$; matricea $A^g_{B,\bar{B}} := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ în $\mathscr{M}_{nm}$ se numeşte *matricea formei biliniare* g în raport cu bazele B şi $\bar{B}$.

Dacă $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ este o altă bază a lui V şi $\bar{B}' = \{\bar{\mathbf{b}}'_1, \ldots, \bar{\mathbf{b}}'_m\}$ este o altă bază a lui W, să notăm $S = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n$ matricea de trecere de la B la B' iar $\bar{S} = (\bar{s}_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathscr{M}_m$ matricea de trecere de la $\bar{B}$ la $\bar{B}'$. Atunci matricea lui g în raport cu bazele B' şi $\bar{B}'$ poate fi scrisă ca

$$A^g_{B',\bar{B}'} = S^{\mathrm{T}} \cdot A^g_{B,\bar{B}} \cdot \bar{S}.$$

Se poate demonstra că $\operatorname{rang} A^g_{B',\bar{B}'} = \operatorname{rang} A^g_{B,\bar{B}}$, deci rangul matricei formei biliniare g nu depinde de bazele considerate. Această valoare comună se numeşte *rangul* lui g şi este notată $\operatorname{rang} g$.

Definiţie. Fie $g : V \times W \to \mathbb{R}$ o formă biliniară. Mulţimea

$$\operatorname{Ker}_{\mathrm{s}}(g) := \{\mathbf{v} \in V \mid g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \ \forall \mathbf{w} \in W\}$$

este subspaţiu liniar al lui V, numit *nucleul stâng* al lui g, iar mulţimea

$$\operatorname{Ker}_{\mathrm{d}}(g) := \{\mathbf{w} \in W \mid g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \ \forall \mathbf{v} \in V\}$$

este subspaţiu liniar al lui W, numit *nucleul drept* al lui g.

Dacă $\operatorname{Ker}_{\mathrm{s}}(g) = \{\mathbf{0}_V\}$ şi $\operatorname{Ker}_{\mathrm{d}}(g) = \{\mathbf{0}_W\}$, atunci forma biliniară g se numeşte *nedegenerată*.

Fixând $\mathbf{w} \in W$, forma biliniară $g : V \times W \to \mathbb{R}$ defineşte o funcţională $f_{\mathrm{w}} : V \to \mathbb{R}$ prin

$$f_{\mathrm{w}}(\mathbf{v}) := g(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \ \mathbf{v} \in V.$$

Lăsând $\mathbf{w}$ să varieze, aplicaţia $\mathbf{w} \mapsto f_{\mathrm{w}}$ defineşte un operator liniar $g' : W \to V^*$. Într-o manieră similară se poate defini un operator liniar $g'' : V \to W^*$ prin $g''(\mathbf{v}) := h_{\mathrm{v}}$, unde funcţionala liniară $h_{\mathrm{v}} \in W^*$ este introdusă de

$$h_{\mathrm{v}}(\mathbf{w}) := g(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \ \mathbf{w} \in V.$$

Se poate arăta (exerciţiu!) că matricea asociată lui g' în raport cu bazele $\bar{B}$ şi B^* (introdusă în demonstraţia propoziţiei 1.2 prin relaţia (3)) coincide cu matricea formei g în raport cu bazele B şi $\bar{B}$. Aşadar $\operatorname{rang} g = \operatorname{rang} g'$. Într-un mod similar se poate arăta că $\operatorname{rang} g = \operatorname{rang} g''$.

Se observă imediat că $\operatorname{Ker}(g') = \operatorname{Ker}_{\mathrm{d}}(g)$ şi că $\operatorname{Ker}(g'') = \operatorname{Ker}_{\mathrm{d}}(g)$.

Definiţie. O formă biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *simetrică* dacă

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

respectiv *antisimetrică* dacă

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Propoziţia 2.1. *Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică sau antisimetrică. Atunci nucleul ei drept coincide cu nucleul ei stâng.*

Pentru o formă liniară ca mai sus, nucleul stâng (ce coincide cu cel drept) se numeşte *nucleul* lui g şi se notează $\ker g$.

Următorul rezultat joacă un rol similar teoremei dimensiunii pentru operatori liniari şi este o simplă consecinţă a acesteia (datorită faptului că $\operatorname{rang} g = \operatorname{rang} g'$).

Propoziţia 2.2. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci*

$$\operatorname{rang} g + \dim(\ker g) = \dim V.$$

Observaţie. Datorită rezultatului de mai sus, o condiţie necesară şi suficientă ca o formă biliniară simetrică să fie nedegenerată este ca $\operatorname{rang} g = \dim V$.

Definiţie. Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică.

a) Doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ se numesc *ortogonali* (sau *conjugaţi*) în raport cu g dacă $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

b) Dacă U este o submulţime nevidă a lui V, spunem că U este *ortogonală* în raport cu g (sau *g-ortogonală*) dacă $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pentru orice vectori distincţi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$.

c) Dacă U este o submulţime nevidă a lui V, mulţimea

$$\{\mathbf{v} \in V \mid g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,\ \forall \mathbf{u} \in U\}$$

este un subspaţiu liniar al lui V, numit *suplimentul ortogonal* al lui U în raport cu g, notat $U^{\perp_g}$.

Observaţie. Dacă W este un subspaţiu finit-dimensional al lui V cu $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bază a lui W, atunci $\mathbf{v} \in W^{\perp_g}$ dacă şi numai dacă $g(\mathbf{b}_k, \mathbf{v}) = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 2.3. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V care este g-ortogonală, atunci* $\operatorname{rang} g$ *este numărul de elemente diferite de* 0 *printre* $g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$, $g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)$, ..., $g(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)$.

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ matricea lui g în raport cu B; atunci $a_{ij} = g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$, pentru orice i şi j. Întrucât B este g-ortogonală, A este o matrice diagonală cu intrările $g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$, $g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)$, ..., $g(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)$. Evident, $\operatorname{rang} g = \operatorname{rang} A$, iar acest număr este egal cu numărul de elemente diferite de 0 printre elementele diagonalei. □

De fapt, numărul de valori pozitive (şi negative) printre $g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1), g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2), ..., g(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)$ este invariant în raport cu B, după cum afirmă următorul rezultat:

Teorema 2.4 (Legea inerţiei a lui Sylvester). *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar n-dimensional şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci există $p, q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice bază g-ortogonală $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ a lui V, p, q şi r reprezintă numărul de valori strict pozitive, strict negative, respectiv nule printre $g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1), g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2), ..., g(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)$.*

Demonstraţie. Fie $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ şi $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ două baze g-ortogonale ale lui V, iar p, q, r, respectiv p', q', r' numărul de valori strict pozitive, strict negative, respectiv nule printre $g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$, $g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)$, ..., $g(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)$, respectiv $g(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1)$, $g(\mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2)$, ..., $g(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_n)$. Din teorema precedentă, $r = n - \operatorname{rang} g$ şi $r' = n - \operatorname{rang} g$, deci $r = r'$. Să demonstrăm acum că $p = p'$.

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ şi că $g(\mathbf{b}'_{p'+j}, \mathbf{b}'_{p'+j}) \le 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n - p'\}$. Vom arăta că $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p, \mathbf{b}'_{p'+1}, \ldots, \mathbf{b}'_n$ sunt liniar independenţi. Într-adevăr, dacă

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{b}_p + \beta_{p'+1} \mathbf{b}'_{p'+1} + \cdots + \beta'_n \mathbf{b}'_n = \mathbf{0},$$

atunci fie

$$\mathbf{v} := \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{b}_p = -(\beta_{p'+1} \mathbf{b}'_{p'+1} + \cdots + \beta'_n \mathbf{b}'_n).$$

Pe de o parte

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{b}_p, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{b}_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 g(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) \ge 0,$$

iar pe de altă parte

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g(\beta_{p'+1} \mathbf{b}'_{p'+1} + \cdots + \beta'_n \mathbf{b}'_n, \beta_{p'+1} \mathbf{b}'_{p'+1} + \cdots + \beta'_n \mathbf{b}'_n) = \sum_{j=1}^{p} \beta^2_{p'+j} g(\mathbf{b}'_{p'+j}, \mathbf{b}_{p'+j}) \le 0.$$

Din aceste două relaţii deducem $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, deci $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Rezultă că $\beta_{p'+1} \mathbf{b}'_{p'+1} + \cdots + \beta'_n \mathbf{b}'_n = \mathbf{0}$ şi prin urmare $\beta_{p'+1} = \cdots = \beta'_n = 0$. În concluzie $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p, \mathbf{b}'_{p'+1}, \ldots, \mathbf{b}'_n$ sunt liniar independenţi. Cum nu pot exista mai mult de n vectori liniar independenţi, avem că $p + n - p' \le n$, adică $p \le p'$. În mod similar se arată că $p' \le p$. □

Numerele p şi q sunt numiţi *indicii de inerţie pozitivă*, respectiv *negativă*, în timp ce tripletul (p, q, r) se numeşte signatura lui g. Evident, $p + q + r = n$ ($n = \dim V$); mai mult, din teorema 2.3, $\operatorname{rang} g = p + q$.

3. Forme pătratice

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Funcţia $h : V \to \mathbb{R}$, definită de

$$h(\mathbf{v}) := g(\mathbf{v},\mathbf{v}),\ \mathbf{v} \in V$$

se numeşte *forma (funcţionala) pătratică* asociată lui g.

Observaţie. Deoarece $h(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = g(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = g(\mathbf{u},\mathbf{u}) + g(\mathbf{u},\mathbf{v}) + g(\mathbf{v},\mathbf{u}) + g(\mathbf{v},\mathbf{v})$ şi $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{u})$, avem

$$h(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = h(\mathbf{u}) + 2g(\mathbf{u},\mathbf{v}) + h(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V.$$

Din această formulă putem deduce pe g dacă-l cunoaştem pe h:

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left[h(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) - h(\mathbf{v})\right],\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$$

sau

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left[h(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right],\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V.$$

Să presupunem acum că V este un spaţiu liniar finit-dimensional şi $B = \{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V. Fie $A^g_{B,B} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea lui g în raport cu B. Dacă $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ sunt coeficienţii unui vector $\mathbf{v} \in V$ în raport cu B, atunci

$$h(\mathbf{v}) = h(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Partea dreaptă a acestei egalităţi este un polinom omogen de gradul 2, numit *polinomul pătratic* asociat cu forma pătratică h şi bazei B. Determinantul matricei simetrice $A^g_{B,B}$ se numeşte *discriminantul* lui h.în raport cu B, iar semnul acestuia este invariant în raport cu B.

Spunem că h este o formă pătratică *nedegenerată* dacă g este o formă biliniară nedegenerată, adică discriminantul lui h este diferit de zero ($\operatorname{rang} A^g_{B,B} = \operatorname{rang} g = n$). Altfel, spunem că h este o formă pătratică *degenerată*.

Dacă (p,q,r) este signatura lui g, o vom numi de asemenea *signatura* lui h.

Definiţie. Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar finit-dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică asociată unei forme biliniare $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Dacă B este o bază a lui V astfel încât matricea lui g este diagonală, numim *forma canonică* (*redusă*) a lui h polinomul pătratic asociat lui h şi B. Forma canonică a lui h se numeşte *normală* dacă matricea diagonală a lui g are pe diagonală numai elementele 1, -1 şi 0.

Dacă $B = \{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V care dă forma canonică $\omega_1x_1^2 + \omega_2x_2^2 + \cdots + \omega_nx_n^2$ lui h, atunci $B' = \{c_1\mathbf{b}_1,\ldots,c_n\mathbf{b}_n\}$ dă o formă normală lui h, unde $c_i = 1$ dacă $\omega_i = 0$, în timp ce $c_i = \frac{1}{\sqrt{|\omega_i|}}$ dacă $\omega_i \ne 0$, pentru $1 \le i \le n$.

Teorema 3.1. *Fie $(V,+,\cdot)$ un spaţiu liniar n-dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ a lui V şi $\omega_1,\ldots,\omega_n \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ să avem*

$$h(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = \omega_1x_1^2 + \omega_2x_2^2 + \cdots + \omega_nx_n^2.$$

Observaţie. Polinomul pătratic $\omega_1x_1^2 + \omega_2x_2^2 + \cdots + \omega_nx_n^2$ este forma redusă a lui h (matricea lui g în raport cu $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ este o matrice diagonală cu intrările $\omega_1,\ldots,\omega_n$). Dacă signatura lui h este (p,q,r), atunci printre coeficienţii $\omega_1,\ldots,\omega_n$, p sunt strict pozitivi, q sunt strict negativi, iar r sunt egali cu 0.

Demonstraţie. Fie $\bar{B} = \{\bar{\mathbf{b}}_1,\ldots,\bar{\mathbf{b}}_n\}$ o bază a lui V şi $(\bar{a}_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea asociată lui g în raport cu B. Evident,

$$\begin{array}{rlllll} h(\bar{x}_1\bar{\mathbf{b}}_1 + \cdots + \bar{x}_n\bar{\mathbf{b}}_n) = & \bar{a}_{11}\bar{x}_1^2 & +2\bar{a}_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 & +\ldots & +2\bar{a}_{1n}\bar{x}_1\bar{x}_n \\ & & +\bar{a}_{22}\bar{x}_2^2 & +\ldots & +2\bar{a}_{2n}\bar{x}_2\bar{x}_n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & +\bar{a}_{nn}\bar{x}_n^2 \end{array}$$

Pasul I.

1. În cazul în care $\bar{a}_{11} = g(\bar{\mathbf{b}}_1,\bar{\mathbf{b}}_1) \ne 0$, avem

$$\begin{array}{rllll} h(\bar{x}_1\bar{\mathbf{b}}_1 + \cdots + \bar{x}_n\bar{\mathbf{b}}_n) = & \bar{a}_{11}\left(\bar{x}_1 + \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}}\bar{x}_2 + \cdots + \frac{\bar{a}_{1n}}{\bar{a}_{11}}\bar{x}_n\right)^2 & +\left(\bar{a}_{22} - \frac{\bar{a}_{12}^2}{\bar{a}_{11}}\right)\bar{x}_2^2 & +\ldots & +2\left(\bar{a}_{2n} - \frac{\bar{a}_{12}\bar{a}_{1n}}{\bar{a}_{11}}\right)\bar{x}_2\bar{x}_n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & +\left(\bar{a}_{nn} - \frac{\bar{a}_{1n}^2}{\bar{a}_{11}}\right)\bar{x}_n^2 \end{array}$$

Făcând schimbarea de coordonate

$$\begin{aligned} x_1' &= \bar{x}_1 + \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}}\bar{x}_2 + \dots + \frac{\bar{a}_{1n}}{\bar{a}_{11}}\bar{x}_n;\\ x_2' &= \bar{x}_2;\\ &\vdots\\ x_n' &= \bar{x}_n, \end{aligned}$$

găsim o nouă bază $\{\mathbf{b}_1', \dots, \mathbf{b}_n'\}$ (exerciţiu: determinaţi baza!) astfel încât

$$\begin{aligned} h(x_1'\mathbf{b}_1' + \dots + x_n'\mathbf{b}_n') = \quad & \bar{a}_{11}(x_1')^2 \quad +a_{22}'(x_2')^2 \quad + \dots \quad +2a_{2n}'x_2'x_n' \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a_{nn}'(x_n')^2, \end{aligned}$$

unde $a_{ij}' := \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{1i}\bar{a}_{1j}}{\bar{a}_{11}},\ i, j \in \{2, \dots, n\}$.

2. Dacă $\bar{a}_{11} = 0$ şi există $i \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $\bar{a}_{ii} \neq 0$, schimbăm $\bar{\mathbf{b}}_1$ cu $\bar{\mathbf{b}}_i$ în scrierea bazei $\bar{B}$, ajungând astfel în cazul precedent cu noua bază.

3. În cazul în care $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \dots = \bar{a}_{nn} = 0$ şi putem găsi $i \in \{2, \dots, n\}$ astfel încât $\bar{a}_{1i} \neq 0$, facem schimbarea de coordonate

$$\begin{aligned} x_1' &= \bar{x}_1 + \bar{x}_i;\\ x_i' &= \bar{x}_1 - \bar{x}_i;\\ x_k' &= \bar{x}_k,\ k \neq 1, i, \end{aligned}$$

baza corespunzătoare acesteia este $\{\mathbf{b}_1', \dots, \mathbf{b}_n'\}$ cu

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1' &= \frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_i\right);\\ \mathbf{b}_i' &= \frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{b}}_1 - \bar{\mathbf{b}}_i\right);\\ \mathbf{b}_k' &= \bar{\mathbf{b}}_k,\ k \neq 1, i. \end{aligned}$$

În noua bază, coeficientul lui $(x_1')^2$ este

$$h(\mathbf{b}_1') = \frac{1}{4}g(\bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_i, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_i) = \frac{1}{2}g(\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_i) = \frac{\bar{a}_{1i}}{2} \neq 0,$$

ajungând din nou la cazul 1.

4. Cazul rămas este cel în care $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \dots = \bar{a}_{nn} = 0$ şi $\bar{a}_{1i} = 0,\ \forall i \in \{2, \dots, n\}$.

În fiecare din aceste cazuri, am schimbat (eventual) baza $\bar{B}$ cu o bază $B' = \{\mathbf{b}_1', \dots, \mathbf{b}_n'\}$ în care h are forma

$$\begin{aligned} h(x_1'\mathbf{b}_1' + \dots + x_n'\mathbf{b}_n') = \quad & \omega_1(x_1')^2 \quad +a_{22}'(x_2')^2 \quad + \dots \quad +2a_{2n}'x_2'x_n' \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a_{nn}'(x_n')^2 \end{aligned}$$

(adică $a_{12}' = \dots = a_{1n}' = 0$).

Pasul II. Repetăm procedeul descris la pasul precedent, găsind o altă (eventual) bază $B'' = \{\mathbf{b}_1'', \dots, \mathbf{b}_n''\}$ faţă de care h are forma

$$h(x_1''\mathbf{b}_1' + \dots + x_n''\mathbf{b}_n') = \omega_1(x_1'')^2 + \omega_2(x_2'')^2 + a_{33}''(x_3'')^2 + \dots + a_{3n}''x_3''x_n'' + \dots + a_{nn}''(x_n'')^2.$$

(adică $a_{12}'' = \dots = a_{1n}'' = a_{23}'' = \dots = a_{2n}'' = 0$).

Continuând această procedură, ajungem ca la **pasul** $n - 1$ să găsim o bază $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ faţă de care h are forma

$$h(x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \dots + \omega_n x_n^2.$$

□

Metoda descrisă în demonstraţia de mai sus se numeşte *metoda lui Gauss de reducere a unei forme pătratice.*

Teorema 3.2 (Metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice). *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar n-dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Fie Δ_i, $1 \leq i \leq n$ minorii principali ai matricei $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ asociate lui h în raport cu o bază a lui V, adică*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix},\ 1 \leq i \leq n.$$

Dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, atunci h poate fi redusă la forma canonică

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \dots + \mu_n x_n^2,$$

unde $\mu_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $\forall i = \{1, \dots, n\}$, *cu* $\Delta_0 = 1$.

Demonstraţie. Plecând de la baza $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a lui V, considerăm vectorii $\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \dots, \mathbf{b}_n'$, unde

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1' &= s_{11}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2' &= s_{21}\mathbf{b}_1 + s_{22}\mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_n' &= s_{n1}\mathbf{b}_1 + s_{n2}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{nn}\mathbf{b}_n, \end{cases}$$

unde $s_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le i \le n$ sunt determinaţi astfel încât

$$\begin{cases} g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_j) = 0, & 1 \le j < i \le n; \\ g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_i) = 1, & 1 \le i \le n. \end{cases}$$

Aceste condiţii determină în mod unic elementele matricii $S = (s_{ij})_{1 \le j \le i \le n}$, în ipotezele din enunţ. Într-adevăr, pentru obţinerea lui $\mathbf{b}_i'$, avem de rezolvat sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} a_{11}s_{i1} + a_{12}s_{i2} + \dots + a_{1i}s_{ii} &= 0 \\ a_{21}s_{i1} + a_{22}s_{i2} + \dots + a_{2i}s_{ii} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{i-1,1}s_{i1} + a_{i-1,2}s_{i2} + \dots + a_{i-1,i}s_{ii} &= 0 \\ a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \dots + a_{ii}s_{ii} &= 1 \end{cases}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat, având o soluţie unică. Mai mult, din regula lui Kramer, $s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$; aşadar se poate arăta că $B' = \{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \dots, \mathbf{b}_n'\}$ este o bază în V, întrucât matricea de trecere de la B la B' (fiind triunghiulară superior) are determinantul egal cu $s_{11} \cdot s_{22} \cdot \dots \cdot s_{nn} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0$.

Matricea asociată lui h în raport cu B' este una diagonală, cu elementele $s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$ pe respectiva diagonală. Într-adevăr, avem:

$$g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_j') = g(\mathbf{b}_i', s_{j1}\mathbf{b}_1 + s_{j2}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{jj}\mathbf{b}_j) = s_{j1}g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_1) + s_{j2}g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_2) + \dots + s_{jj}g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_j),\ 1 \le j \le i \le n.$$

Datorită simetriei lui g, obţinem

$$g(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_j') = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ s_{ii}, & i = j. \end{cases}$$

□

Definiţie. Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar n-dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică cu signatura (p, q, r).

a) Dacă $p = n$, h se numeşte formă pătratică *pozitiv-definită.*
b) Dacă $q = 0$, forma pătratică h se numeşte *pozitiv-semidefinită.*
c) Dacă $q = n$, h se numeşte formă pătratică *negativ-definită.*
d) Dacă $p = 0$, forma pătratică h se numeşte *negativ-semidefinită.*
e) Forma pătratică h se numeşte *nedefinită* dacă $p > 0$ şi $q > 0$.

Observaţii.
1. Bineînţeles, dată fiind o formă pătratică h, pozitiva-definire implică pozitiva-semidefinire, iar negativa-definire implică negativa-semidefinire.

2. Fie Δ_i, $1 \le i \le n$ minorii principali ai matricei asociate lui h în raport cu o bază a lui V. Conform teoremei 3.2, h este pozitiv-definită dacă şi numai dacă

$$\Delta_i > 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

iar h este negativ-definită dacă şi numai dacă

$$(-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Teorema 3.3 (Metoda valorilor proprii de reducere a unei forme pătratice). *Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu prehilbertian finit-dimensional cu* $\dim V = n$ *şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormală în raport cu care h are forma canonică*

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valorile proprii ale matricei asociate lui h în raport cu orice bază a lui V.

Demonstraţie. Fie $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V şi A_B matricea asociată lui h în raport cu baza B. Deoarece A_B este simetrică, operatorul liniar $T : V \to V$ asociat lui A_B (în raport cu aceeaşi bază B) este autoadjunct şi deci diagonalizabil. Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ valorile proprii ale lui T. Din metoda de diagonalizare a lui T, putem construi o bază ortonormală $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ a lui V astfel încât $\mathbf{v}_i$ este un vector propriu al lui λ_i, pentru $1 \le i \le n$ (într-adevăr, dacă $\lambda_i \neq \lambda_j$, deoarece T este autoadjunct vom avea $\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle T(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$, ceea ce implică $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$). De asemenea, în raport cu B', matricea $A_{B'}$ asociată lui h va avea forma $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, de unde concluzia. □

Definiţie. Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţională afină. Suma $h + f$ se numeşte *funcţională* (*formă*) *pătratică neomogenă* pe V.

Dacă V este finit-dimensional şi $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(h + f)(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c, \tag{4}$$

unde $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ este matricea asociată lui h, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$. Termenul din dreapta acestei egalităţi se numeşte *polinomul pătratic* asociat lui $h + f$ (acesta este un polinom de grad 2, nu necesar omogen).

Dacă $V = \mathbb{R}^n$ şi B este baza sa canonică, atunci (4) poate fi privit ca

$$(h + f)(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

(unde vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ este interpretat ca matrice coloană pentru înmulţirea cu A).

Reciproc, pentru o matrice simetrică $A \in \mathscr{M}_n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ şi $c \in \mathbb{R}$, funcţia $\rho : V \to \mathbb{R}$ definită de (5) defineşte o funcţională pătratică neomogenă pe V. De fapt, restricţia ca A să fie simetrică poate fi îndepărtată, deoarece

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}, \mathbf{x}\right\rangle;$$

aşadar matricea A poate fi înlocuită de matricea simetrică $\frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)$.

Să considerăm acum o schimbare afină de coordonate, adică o transformare de forma

$$\mathbf{x}' = S\mathbf{x} + \mathbf{x}_0,$$

unde $S \in \mathscr{M}_n$ este o matrice nesingulară şi $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Atunci

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) &= \left\langle AS^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0), S^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\right\rangle + \left\langle \mathbf{b}, S^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\right\rangle + c \\ &= \left\langle \left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}} AS^{-1}\mathbf{x}', \mathbf{x}'\right\rangle - \left\langle 2\left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}} AS^{-1}\mathbf{x}_0 + \left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}, \mathbf{x}'\right\rangle + \left(c - \left\langle \mathbf{b}, S^{-1}\mathbf{x}_0\right\rangle\right).\end{aligned}$$

Să presupunem acum că S este matricea de trecere de la baza canonică la o bază ortonormală ce dă forma canonică din teorema 3.3. Atunci S este o matrice ortonormală ($S^{-1} = S^{\mathrm{T}}$) şi $S^{\mathrm{T}}AS = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A. În consecinţă,

$$\rho(\mathbf{x}) = \langle D\mathbf{x}', \mathbf{x}'\rangle - 2\left\langle S\left(AS^T\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right), \mathbf{x}'\right\rangle + \left(c - \left\langle \mathbf{b}, S^{-1}\mathbf{x}_0\right\rangle\right).$$

Dacă A este nesingulară, putem lua $\mathbf{x}_0 := -\frac{1}{2}SA^{-1}\mathbf{b}$, obţinând în acest fel

$$\rho(\mathbf{x}) = \langle D\mathbf{x}', \mathbf{x}'\rangle + c_0,$$

unde $c_0 := \langle D\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0\rangle - \langle S\mathbf{b}, \mathbf{x}_0\rangle + c$. De aceea, prin schimbarea de coordonate $\mathbf{x}' = S\mathbf{x} - \frac{1}{2}SA^{-1}\mathbf{b}$, obţinem

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i')^2 + c_0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

unde x_i' sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu noua bază ortogonală.

Dacă $\det A = 0$, atunci lăsând $\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$, obţinem

$$\rho(\mathbf{x}) = \langle D\mathbf{x}', \mathbf{x}'\rangle + \langle S\mathbf{b}, \mathbf{x}'\rangle + c_0,$$

unde $c_0 := -\langle S\mathbf{b}, \mathbf{x}_0\rangle + c$.

Dacă (p, q, r) este signatura lui h, avem $r > 0$ şi $n - r$ este rangul lui A; se poate mai departe găsi o bază B'' astfel încât

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i(x_i'')^2 + \gamma x_{n-r+1}'', \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

unde $x_1'', \ldots, x_n''$ sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu această nouă bază şi $\gamma \in \mathbb{R}$.

Forma (6) sau (7) se poate aduce la *forma normală* a *funcţionalei pătratice neomogene* $h + f$ (sau a lui ρ): $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, $c_0 \in \mathbb{R}$ şi $\gamma \in \{-1, 1\}$.

Dintr-un punct de vedere geometric,

$$\ker \rho := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\mathbf{x}) = 0\}$$

reprezintă o *conică* în cazul $n = 2$, o *cuadrică* în cazul $n = 3$, respectiv o *hipercuadrică* dacă $n \ge 4$.

Dacă $n = 1$, există trei tipuri de *forme normale* ale lui ρ: $x^2 + 1$ (atunci $\ker \rho = \varnothing$: două puncte "imaginare"), $x^2 - 1$ ($\ker \rho = \{-1, 1\}$: două puncte distincte) sau $x^2 = 0$ ($\ker \rho = \{0\}$: două puncte identice).

Dacă $n = 2$, există nouă tipuri de conice, după forma normală a lui ρ:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ ($\varnothing$: *elipsă* "imaginară");

2. $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (*hiperbolă*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (*elipsă*);
4. $x_1^2 - x_2 = 0$ (*parabolă*);
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (un punct: două drepte “imaginare”, conjugate);
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (două drepte ce se intersectează);
7. $x_1^2 + 1 = 0$ ($\varnothing$: două drepte “imaginare”);
8. $x_1^2 - 1 = 0$ (două drepte paralele);
9. $x_1^2 = 0$ (două drepte identice).

În cazul $n = 3$, avem 17 tipuri de cuadrice, caracterizate de următoarele forme normale:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (*elipsoid* “imaginar”);
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ (*elipsoid*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu o pânză*);
4. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu două pânze*);
5. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (un punct: *con* “imaginar”);
6. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (*con*);
7. $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ (*paraboloid eliptic*);
8. $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$ (*paraboloid hiperbolic*).

Celelalte 9 forme normale rămase sunt aceleaşi ca în cazul $n = 2$, care în $\mathbb{R}^3$ reprezintă *cilindri* de diferite tipuri: eliptic, hiperbolic sau parabolic. Primele 6 cuadrice sunt *cuadrice nesingulare*, în timp ce celelalte sunt *cuadrice singulare*.

Bibliografie selectivă

[1] M. Ariciuc, S. Roatesi, *Lecţii de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2008.
[2] K. C. Border, *More than you wanted to know about quadratic forms*, Caltech, 2016.
[3] K. Conrad, *Bilinear Forms,* Notes on Advanced Linear Algebra, 2015.
[4] C. Costinescu, *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.
[5] D. Drăghici, *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.
[6] G. Galbură, F. Radó, *Geometrie*, Ed. Didactică şi Pedag., Bucureşti, 1979.
[7] M. Neagu, *Geometria curbelor şi suprafeţelor. Teorie şi aplicaţii*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2013.
[8] P. Ott, *Bilinear and Quadratic Forms*, Prof. Robert Beezer's Notes on Advanced Linear Algebra, 2014.
[9] I. Radomir, *Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.