$\Gamma \vDash \varphi$ ddacă pt orice $\tau: A \to B$ a.î. pt orice $\varphi' \in \Gamma$ avem $\hat{\tau}(\varphi') = 1$
atunci avem și $\hat{\tau}(\varphi) = 1$.

$\tau: A \to B$
p. 0
q. $\to 2^{|A|}$ funcții
r. 1
⋮

$\Gamma \vdash \varphi$ secvență validă ddacă există o dem formală care se termină cu ea.

$$\wedge_i \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)}$$

1. $S_1 = \Gamma_1 \vdash \varphi_1$
2. $S_2 = \Gamma_2 \vdash \varphi_2$
3. ⋮

n. $S_n = \Gamma \vdash \varphi$

$S_i$ - argumentat de regulile din DN folosindu-ne de secvente anterioare

Th. corectitudine: Pt orice $\Gamma, \varphi$ din $\mathbb{LP}_{\neg,\wedge,\vee,\to,\bot}$
Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ validă, atunci $\Gamma \vDash \varphi$

Th. completitudine: Pt orice $\Gamma, \varphi$
Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ atunci $\Gamma \vdash \varphi$ validă

$\varphi = (p \wedge \neg p)$

$\tau: A \to B \qquad \tau(p) = 0$

$\hat{\tau}(\varphi) = \hat{\tau}(p) * \hat{\tau}(\neg p) = \tau(p) * \overline{\tau(p)} = 0 * \overline{0} = 0 * 1 = 0$

$$\neg_i \frac{\overbrace{\Gamma, \varphi}^{\Gamma'} \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \varphi}$$ "contradicție"

Ext

$\{p, q, r\}$

$\{(p\wedge q)\} \vdash (r\to p)$

1. $\{(p\wedge q)\} \vdash (p\wedge q)$ (ip)
2. $\{(p\wedge q)\} \vdash p$ $(\wedge e_1, 1)$

k. $\{(p\wedge q), r\} \vdash p$ (ext, 2)

n. $\underbrace{\{(p\wedge q)\}}_{\Gamma} \vdash (\underset{\varphi_1}{r} \to \underset{\varphi_2}{p})$ $(\to_i, k)$

$$\text{ext}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi}$$

$$\to_i\ \frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \to \varphi_2)}$$

---

**Rezoluția**: un sistem deductiv (cu o singură regulă) mult mai eficient de implementat decât DN.

→ mai puțin elegantă / intuitivă decât DN.

→ limitată la formule în formă normală clauzală

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \vee r)$

$((2 * -3) + 5) = 2 * -3 + 5$ — 2., primul evaluat, 3

$((2 + -3) * 5) = (2 + -3) * 5$

* în LP avem următoarea ordine:

1) $\neg$ (aceiași prioritate ca $-$ în mate)
2) $\wedge$ ( — " — $*$ — " — )
3) $\vee$ ( — " — $+$ — " — )

În $LP_{\perp\neg\vee\wedge\to\leftrightarrow}$ considerăm ordinea operatorilor

$\perp\ \neg\ \wedge\ \vee\ \to\ \leftrightarrow$

$((2 * -3) + 5)$

Ex: $\varphi = \neg\neg p \vee \perp \wedge p \to \neg p \wedge q \leftrightarrow q$

$\varphi = (((\neg\neg p \vee (\perp \wedge p)) \to (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow q)$

$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ notat $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$ $\quad (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ notat $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

Ex 2 :

$$p \wedge q \wedge r \vee \neg p \vee \neg q \wedge \neg r$$

$$((((p \wedge q) \wedge r) \vee \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r))$$

Ex 3 :

$$p \wedge \neg(q \vee r) \vee \neg p$$

$$((p \wedge \neg(q \vee r)) \vee \neg p)$$

Ex 4 :

$$\cancel{(}(p \wedge \neg q\cancel{)} \vee \neg(r \vee p)\cancel{)}$$

rămân

$\neg r \vee p$

Literal : $\varphi$ - literal dacă există o variabilă prop $a \in A$ a.î.

$$\varphi = a \quad \text{sau} \quad \varphi = \neg a$$

Ex de literali : $\underbrace{p}_{a=p}$ , $q$ , $r$ , $\neg \underbrace{q}_{a=q}$ , $\neg p$ , $\neg r$ , ....

Ex : nu sunt literali : $\overbrace{\neg \underbrace{\neg p}_{\notin A}}^{\notin A}$ , $\underbrace{(p \vee q)}_{\notin A}$

și nu începe cu $\neg$

**Clauză** : $\varphi$ este clauză dacă există $n \geq 1$ literali $\varphi_1 \dots \varphi_n$ a.î.

(disjuncție de n literali)

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$$

Ex de clauze :

$p \vee q \vee \neg r$

$p$ $(n = 1)$

$\neg p$ $(n = 1)$

$\neg p \vee q$

Ex: nu sunt clauze : $p \wedge q$

$\underbrace{\neg\neg p}_{\text{nu este literal}} \vee q \vee r$

Forma Normală Conjunctivă / Clauzală (FNC)

$\varphi$ este în FNC dacă există $n \geq 1$ clauze $\varphi_1 \dots \varphi_n$ a.î.

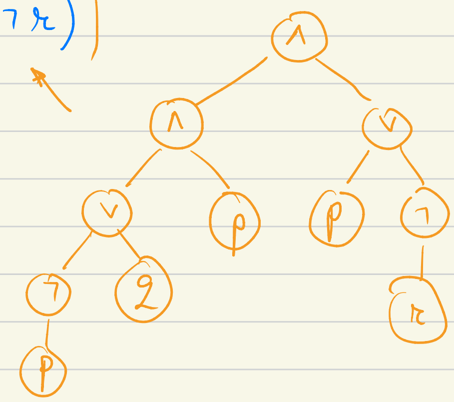
$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

(conjuncții de clauze)

(conjuncții de disjuncții de literali)

Ex: formule în FNC : $((\overbrace{\neg p \vee q}^{C_1}) \wedge \overbrace{p}^{C_2}) \wedge (\overbrace{p \vee \neg r}^{C_3})$

() importante !!



$\underbrace{\neg p}_{C_1} \wedge \underbrace{q}_{C_2} \wedge \underbrace{r}_{C_3}$

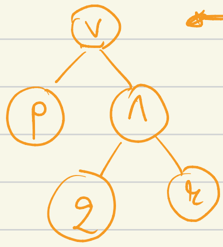
$\underbrace{\underbrace{\neg p}_{C_1}}$ → clauză cu 1 literal

→ FNC cu o clauză

$\underbrace{p \vee \neg r \vee q}_{C_1}$ — FNC cu o clauză

Ex **Nu** sunt în FNC : $\neg\neg p$

$p \vee (q \wedge r)$




← peste $\wedge$

**Th. de înlocuire** Fie $\varphi, \varphi'$ a.î. $\varphi \equiv \varphi'$

Fie $\varphi_1$ care conține $\varphi$

Fie $\varphi_2$ obținut din $\varphi_1$ prin înlocuirea **unei** apariții a lui $\varphi$ cu $\varphi'$

Atunci $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

Ex $\varphi = p \quad \varphi' = \neg\neg p \quad \varphi \equiv \varphi'$

$\varphi_1 = \underbrace{p}_{\varphi} \wedge \neg q \wedge \underbrace{p}_{\varphi}$

$\varphi_2 = \neg\neg p \wedge \neg q \wedge p$ $\quad \varphi = p \quad \varphi' = \neg\neg p$

$\varphi_1 \equiv \varphi_2$

$\varphi_3 = \neg\neg p \wedge \neg q \wedge \neg\neg p$

$\varphi_2 \equiv \varphi_3$

**Th de aducere în FNC** : Pt orice formulă $\varphi \in LP_{\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow}$ există o formulă $\varphi' \in LP$ în FNC a.î. $\varphi \equiv \varphi'$

**Dem** (schemă)

Aplicăm de mai multe ori (de la stânga la dreapta) th de înlocuire folosindu-ne de :

1. $\overbrace{(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)}^{\varphi} \equiv \overbrace{((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))}^{\varphi'}$ — elimină $\leftrightarrow$
2. $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$ — elimină $\rightarrow$
3. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$

$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$(p \vee ((q \wedge r) \wedge \neg p)) \equiv (p \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee \neg p)$

$\equiv \underbrace{((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (p \vee \neg p)}_{\text{FNC}}$

4. $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

$\equiv \varphi_3 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

5. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \overset{not}{\equiv} \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$

6. $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \overset{not}{\equiv} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

7. $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$

8. $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$

9. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Aplicarea echivalentelor se oprește : "mutăm" un nr finit de operatori într-o singură direcție

Ex: $\varphi = (\neg p \leftrightarrow q)$

$\overset{1}{\equiv} ((\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p))$

$\overset{2}{\equiv} ((\neg\neg p \vee q) \wedge (q \to \neg p))$

$\overset{2}{\equiv} ((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p))$

$\overset{9}{\equiv} ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) = \varphi'$ FNC

Forma Normală Disjunctivă (FND)

$\varphi$ în FND dacă este disjuncție de conjuncții de literali

Ex: $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge p) \vee \neg p$

nu este clauză !!

Th: pt orice $\varphi$, există $\varphi'$ în FND a.î. $\varphi \equiv \varphi'$

Complementul lui $\varphi \in LP$ (notat $\varphi^c$) definit prin:

- 1. $a^c = \neg a \quad (a \in A)$
- 2. $(\neg \varphi)^c = \varphi \quad , \varphi \in LP$
- 3. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^c = (\varphi_1^c \vee \varphi_2^c)$
- 4. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^c = (\varphi_1^c \wedge \varphi_2^c)$

definită similar cu subf

$\cdot^c : LP \to LP$

**Th 135** $\quad \varphi^c \equiv \neg \varphi$

negațiile pe var prop.

**Th 138** $\quad \varphi_1$ - FNC $\Rightarrow \varphi_1^c$ - FND

$\varphi_2$ - FND $\Rightarrow \varphi_2^c$ - FNC

$\neg\varphi \underset{\text{Th de aducere FNC}}{\equiv} \varphi_2$ - FNC $\rightsquigarrow \varphi_2^c \underset{\text{Th 135}}{\equiv} \neg\varphi_2 \equiv \neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Th 138 FND

$\varphi'$ - FND $\equiv \varphi$