Limite de funcții. Funcții continue

Cursul 8

Matematică - anul I

Facultatea de Informatică, UAIC

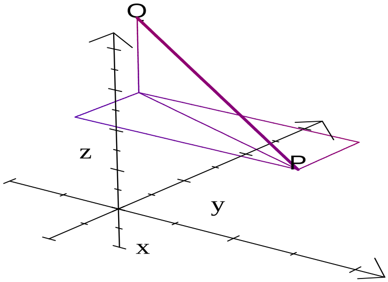
e-mail: adrian.zalinescu@info.uaic.ro

web: https://profs.info.uaic.ro/~adrian.zalinescu

29 Noiembrie 2021

Cuprins

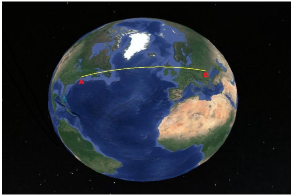
Distanțe



Dacă $P(x_P, y_P, z_P)$ și $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ sunt două puncte în spațiu, *distanța* între P și Q (sau *lungimea* segmentului PQ) este

$$\mathrm{d}(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Spații metrice



Distanța între New York și Iași

Definiție

Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numește *distanță* sau *metrică* pe X dacă:

($\mathtt{D}_1$) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in X$;

($\mathtt{D}_2$) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x), \ \forall x, y \in X$ (*simetrie*);

($\mathtt{D}_3$) $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z), \ \forall x, y, z \in X$ (*inegalitatea triunghiulară*).

În acest caz, cuplul (X, d) se numește *spațiu metric*.

Propoziție

Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci:

i) $\mathrm{d}(x_0, x_n) \leq \mathrm{d}(x_0, x_1) + \mathrm{d}(x_1, x_2) + \cdots + \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$;

ii) $|\mathrm{d}(x, z) - \mathrm{d}(y, z)| \leq \mathrm{d}(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$;

iii) $|\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(x', y')| \leq \mathrm{d}(x, y') + \mathrm{d}(x', y)$, $\forall x, y, x', y' \in X$ (*inegalitatea cuadrilaterală*).

În spații liniare, unele distanțe provin din norme.

Definiție

Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Atunci aplicația $\mathrm{d} : V \times V \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|, \; x, y \in \mathbb{R}$$

este o metrică, numită *metrica indusă* de norma $\|\cdot\|$.

Exemple

1. Pe $\mathbb{R}$, aplicația $\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := |x - y|, \ x, y \in \mathbb{R}$$

este o distanță, numită *distanța canonică* pe $\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}^n$, metrica indusă de norma euclidiană se numește *metrica euclidiană* pe $\mathbb{R}^n$ și se notează d_2. Avem

$$\mathrm{d}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

pentru $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

3. Fie, pentru $p \in [1, +\infty)$, aplicația $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită de

$$\|\mathrm{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \ \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci $\|\cdot\|_p$ este o normă.

Într-adevăr, proprietatea triunghiulară este echivalentă cu

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

ce coincide cu inegalitatea lui Minkowski.
Putem de asemenea introduce norma $\|\cdot\|_p$ pe $\mathbb{R}^n$ chiar în cazul $p = +\infty$, prin

$$\|\mathrm{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \ \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

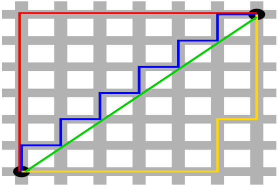
Metrica indusă pe $\mathbb{R}^n$ de norma $\|\cdot\|_p$ se numește *distanța Minkowski* și se notează d_p.

Astfel avem

$$\mathrm{d}_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_p = \begin{cases} \left(|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}, & p \in [1, +\infty); \\ \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\}, & p = +\infty, \end{cases}$$

pentru $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Metrica d_1 se mai numește câteodată *distanța taxi-cab* sau *metrica Manhattan*.



- Metrica d_∞ se mai numește *distanța Cebâșev*.
- Dacă $n = 1$: $\mathrm{d}_p(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [1, +\infty]$.

4. Aplicația $\tilde{\mathrm{d}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\tilde{\mathrm{d}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

pentru $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este o distanță pe $\mathbb{R}^n$, dar nu este indusă de o normă, deoarece funcția $\mathrm{x} \mapsto \tilde{\mathrm{d}}(\mathrm{x}, 0)$ nu are proprietatea de omogenitate.

5. Fie $X \neq \emptyset$. Funcția $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

pentru $x, y \in X$, este o metrică pe X, numită *metrica discretă* pe X.

6. Pe $\overline{\mathbb{R}}$ considerăm metrica d definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \ \ x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

(am extins funcția arctg la $\overline{\mathbb{R}}$ prin $\operatorname{arctg}(-\infty) := -\pi/2$, $\operatorname{arctg}(+\infty) := \pi/2$).

Norma uniformă

Definiție

Fie $E \neq \emptyset$ și $\mathscr{B}(E)$ spațiul funcțiilor *mărginite* $f : E \to \mathbb{R}$ (adică, $\operatorname{Im} f$ este o mulțime mărginită). Definim $\|\cdot\|_{\text{sup}} : \mathscr{B}(E) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Atunci $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ este o normă pe $\mathscr{B}(E)$, numită *norma uniformă* sau *norma supremum*. Metrica indusă de $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ se numește *distanța uniformă*, notată d_{sup}.

Definiție

- Fie $X \neq \emptyset$. Spunem că metricile d și d' pe X sunt *echivalente* dacă există constantele $c_1, c_2 > 0$ astfel încât
$$c_1 \mathrm{d}'(x, y) \leq \mathrm{d}(x, y) \leq c_2 \mathrm{d}'(x, y), \ \forall x, y \in X.$$
- Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar. Spunem că două norme $\|\cdot\|$ și $\|\cdot\|'$ sunt *echivalente* dacă există constantele $c_1, c_2 > 0$ astfel încât
$$c_1 \|x\|' \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|', \ \forall x \in V.$$

Bineînțeles, dacă două norme pe V sunt echivalente, atunci la fel sunt și metricile induse.

Teoremă

Pe $\mathbb{R}^n$, toate normele $\|\cdot\|_p$ cu $p \in [1, +\infty]$ sunt echivalente.

De fapt, pentru toți $x \in \mathbb{R}^n$ și $p \in [1, +\infty)$ avem
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty .$$

Șiruri în spații metrice

Fie $X \neq \emptyset$. Un *șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X este o funcție $x : \mathbb{N} \to X$.

Definiție

Fie (X, d) un spațiu metric și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir în X.

- Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă mulțimea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginită.
- Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent* dacă există $x \in X$ astfel încât

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon : \mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon.$$

  (adică $\mathrm{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). În acest caz, vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \overset{\mathrm{d}}{\to} x$, $x_n \overset{X}{\to} x$ sau chiar $x_n \to x$; elementul x este numit *limita* lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *Cauchy* sau *fundamental* dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq n_\varepsilon : \mathrm{d}(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ sau, echivalent,}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}^* : \mathrm{d}(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Ca și în cazul șirurilor de numere reale, se poate arăta că limita unui șir într-un spațiu metric space este unică.

Propoziție

Fie (X, d) un spațiu metric și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir convergent în X. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy.

- Reciproca acestui rezultat nu este adevărată în general, adică nu orice șir Cauchy într-un spațiu metric arbitrar este convergent.
- De exemplu, $X = (0, 1)$ cu distanța uzuală ($\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$): șirul $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este Cauchy, dar nu este convergent.

Șiruri în spații euclidiene

Teoremă

Să considerăm $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ înzestrat cu metrica euclidiană d_2 și fie $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir în $\mathbb{R}^m$ cu

$$\mathrm{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

i) Șirul $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă și numai dacă toate șirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt mărginite.

ii) Șirul $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă toate șirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt convergente. În acest caz, dacă $\mathrm{x} := \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{x}_n$ și $x^i := \lim\limits_{n\to\infty} x_n^i$, $1 \leq i \leq m$, atunci $\mathrm{x}_n = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$.

iii) Șirul $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy dacă și numai dacă toate șirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt Cauchy.

Limite de funcții

Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $f : A \to Y$ și $x_0 \in A'$.

Definiție

Spunem că un element $\ell \in Y$ este *limita* lui f în x_0 dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

În acest caz, scriem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ or $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$.

- Ca și în cazul limitelor de șiruri, putem arăta că limita unei funcții într-un punct, dacă există, este unică.
- Spunem că funcția f are limită în punctul x_0 dacă există $\ell \in Y$ astfel încât $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

În cazul particular în care $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|')$ sunt spații normate, avem:

Propoziție

Fie $\emptyset \neq A \subseteq X$ și $f : A \to Y$. Un element $\ell \in Y$ este limita lui f într-un punct $x_0 \in A'$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|' < \varepsilon.$$

Caracterizare cu șiruri

Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$ și $f : A \to Y$.

Teoremă

Un element $\ell \in Y$ este limita lui f într-un punct $x_0 \in A'$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Observații.

1. Dacă dorim să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$, este de ajuns să găsim un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ ce converge la x_0 astfel încât $f(x_n)$ nu converge la ℓ.

2. Dacă, mai mult, dorim să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nu există, este de ajuns să găsim două șiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(x_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ în $A \setminus \{x_0\}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = x_0, \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell \text{ și } \lim_{n\to\infty} f(x_n') = \ell', \text{ cu } \ell \neq \ell'.$$

Exemplu

Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Atunci $(0,0) \in A'$, unde $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dacă luăm un șir $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ și

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă luăm șirul $(x_n', y_n')_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definit de $x_n' := \frac{1}{n}$, $y_n' := \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $(x_n', y_n') \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ și

$$f(x_n', y_n') = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Concluzia este că f nu are limită în punctul $(0,0)$.

Criteriul majorării

Ca și în cazul limitelor de șiruri, următorul criteriu se aplică pentru limitele de funcții. Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $f : A \to Y$ și $x_0 \in A'$.

Propoziție

Fie $g : A \to \mathbb{R}_+$ și $\ell \in Y$. Dacă

1. $\mathrm{d}'(f(x), \ell) \leq g(x), \ \forall x \in A$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(X, d): spațiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$: spațiu normat, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$, $f : X \to Y$.

Teoremă

i) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|\ell\|$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0_Y$.

Teoremă

Fie în plus $g : X \to Y$ și $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

i) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in Y$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in Y$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in Y$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) f(x) = \alpha \ell.$$

În cazul spațiilor euclidiene, limitele funcțiilor se pot determina pe componente: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ și $\mathrm{x}_0 \in A'$, iar f_k, $1 \leq k \leq m$ cele m componente ale funcției f.

Teoremă

Limita $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$ există dacă și numai dacă pentru orice $k = \overline{1, m}$ există limita $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} f_k(\mathrm{x}) = \ell_k \in \mathbb{R}$.

În acest caz, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$.

Următorul rezultat arată cum să calculăm limitele funcțiilor compuse:

Teoremă

Fie (X, d), (Y, d'), (Z, d'') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\emptyset \neq B \subseteq Y$, $f : A \to B$, $g : B \to Z$ și $x_0 \in A'$, $y_0 \in B'$. Dacă

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$;
2. $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell \in Z$;
3. $\exists \delta > 0,\ \forall x \in A \setminus \{x_0\} : \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \implies f(x) \neq y_0$,

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$.

Limite iterate

O greșeală des întâlnită atunci când calculăm limite de funcții de mai multe variabile este să *iterăm* limita.

Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Fixând un $y \in \mathbb{R}^*$, avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Lăsând acum y să tindă la 0, obținem *limita iterată*

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Prin simetrie, deducem cealaltă *limită iterată*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0.$$

Totuși, f nu are o limită în $(0,0)$, deoarece $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$ și $f(\frac{1}{n},0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Pe de altă parte, o funcție f poate să aibă o limită într-un punct, dar nu limite iterate.
Fie $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\right\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) := (x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}.$$

Atunci $|f(x,y)| \leq g(x,y) := |x| + |y|$. Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, avem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Dacă încercăm să calculăm $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ pentru un $y \in \mathbb{R}^*$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (deoarece $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$), dar $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ nu are limită în 0. De aceea, deoarece

$$f(x,y) = \left(x\sin\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{y} + \left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(y\sin\frac{1}{y}\right),$$

$f(x,y)$ nu are limită pentru $x \to 0$ dacă $\sin\frac{1}{y} \neq 0$, adică $y \neq \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
Este clar acum că problema existenței limitei iterate $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ are un răspuns negativ.

Limite direcționale

Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ și $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definiție

- Spunem că o funcție f are *limită* în x_0 *în direcția* $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ există limita

$$\ell_{\mathrm{u}} := \lim_{t \searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}).$$

  Pentru acest lucru trebuie ca u să fie o *direcție admisibilă*, adică

$$0 \in \{t \geq 0 \mid \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \in A\}'$$

  (există $t_n \searrow 0$ astfel încât $\mathrm{x}_0 + t_n\mathrm{u} \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

- Spunem că f are (a k-a) *limită parțială* în x_0 dacă f are limită în x_0 în direcția e_k, pentru $k \in \{1, \ldots, n\}$, unde $\mathrm{e}_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Existența unei limite globale implică existența limitelor direcționale:
Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ și $\mathrm{x}_0 \in A'$.

Propoziție

Să presupunem că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = \ell \in \mathbb{R}^m$. Dacă $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ este o direcție admisibilă, atunci există limita lui f în x_0 în direcția u și este egală cu ℓ.

- reciproca acestui rezultat nu este adevărată;
- de fapt, chiar dacă limitele în toate direcțiile există și sunt egale, s-ar putea ca o limită globală să nu existe:

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definită de $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.
Fie (u,v) o direcție în $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Atunci, pentru $t > 0$,

$$f\left((0,0)+t(u,v)\right) = f(tu,tv) = \frac{t^3uv^2}{t^2(u^2+t^2v^4)} = \frac{tuv^2}{u^2+t^2v^4}.$$

Deoarece $\lim\limits_{t\searrow 0} f\left((0,0)+t(u,v)\right) = 0$, adică limita lui f în $(0,0)$ în direcția (u,v) există și este egală cu 0. Totuși, f nu are limită globală în $(0,0)$ deoarece $f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0$.

Limite la stânga și la dreapta

Când f este o funcție de o variabilă, vom vorbi de limitele la *stânga* și la *dreapta*. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă.

Definiție

- Spunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ este un *punct de acumulare la stânga* a lui A dacă x este punct de acumulare pentru mulțimea $A \cap (-\infty, x_0)$.
- Spunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ este un *punct de acumulare la dreapta* a lui A dacă x este punct de acumulare pentru mulțimea $A \cap (x_0, +\infty)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție.

- Dacă x_0 este un punct de acumulare la stânga a lui A, spunem că f are *limită la stânga* în x_0 dacă există limita lui f în x_0 în direcția -1. În acest caz, vom nota această limită cu $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0^-)$.
- Dacă x_0 este un punct de acumulare la dreapta a lui A, spunem că f are *limită la dreapta* în x_0 dacă există limita lui f în x_0 în direcția 1. În acest caz, vom nota această limită cu $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$, $f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0^+)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$, x_0: punct de acumulare atât la stânga, cât și la dreapta a lui A.

Propoziție

Limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există dacă și numai dacă ambele limite $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ și $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ există și sunt egale. În acest caz, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

Limite uzuale

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = \mathrm{e}; \qquad \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e};$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a}\ (a>0,\ a\neq 1); \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t} = \ln a\ (a>0); \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^r-1}{t} = r\ (r\in\mathbb{R});$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1; \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, t}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t} = 1; \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\, t}{t} = 1.$$

Funcții continue

Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$ și $f : A \to Y$.

Definiție

- Spunem că f este *continuă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A : \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- Spunem că f este *discontinuă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă f nu este continuă în x_0; în acest caz, spunem de asemenea că x_0 este un *punct de discontinuitate* a lui f.
- Spunem că f este *continuă* dacă f este continuă în x_0, pentru orice $x_0 \in A$.

Caracterizări

Relația cu limitele: f este continuă în $x_0 \in A$ dacă și numai dacă:

- fie x_0 este un punct de acumulare a lui A și $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
- fie x_0 este un punct izolat.

Continuitatea într-un punct poate fi caracterizată de asemenea cu șiruri.
Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $f : A \to Y$ și $x_0 \in A$.

Teoremă

f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Fie (X, d), (Y, d') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ și $f : A \to Y$.

Definiție

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in Y$, atunci funcția $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to Y$ definită de

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\}; \\ \ell, & x = x_0 \end{cases}$$

este continuă în x_0 și se numește *extensia prin continuitate* a lui f în x_0.

Operații cu funcții continue

Fie (X, d), (Y, d'), (Z, d'') spații metrice, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\emptyset \neq B \subseteq Y$ și $f : A \to B$, $g : B \to Z$.

Teoremă

- **i)** Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in A$ și g este continuă în $y_0 := f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.
- **ii)** Dacă f și g sunt continue, atunci $g \circ f$ este continuă.

Fie (X, d) un spațiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $\emptyset \neq A \subseteq X$ și $x_0 \in A$.

Teoremă

- **i)** Dacă funcțiile $f, g : X \to Y$ sunt continue în x_0, atunci $\alpha f + \beta g$ este continuă în x_0.
- **ii)** Dacă funcțiile $f : X \to Y$ și $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sunt continue în x_0, atunci $\varphi \cdot f$ este continuă în x_0.

Funcții continue între spații euclidiene

Teoremă

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulțime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ și $\mathrm{x} \in A$. Atunci f este continuă în x dacă și numai dacă f_k este continuă în x pentru orice k.

Propoziție

Dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicație liniară, atunci T este continuă.

Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$.

Definiție

Spunem că f este *continuă la stânga* (*continuă la dreapta*) în $x_0 \in A$ dacă $f\big|_{A\cap(-\infty,x_0]}$ $\left(f\big|_{A\cap[x_0,+\infty)}\right)$ este continuă în x_0.

Propoziție

Fie $x_0 \in A$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă f este continuă și la stânga și la dreapta în x_0.

- C. Canuto, A. Tabacco, *Mathematical Analysis II (2nd ed.)*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- C. Drăgușin, O. Olteanu, M. Gavrilă, *Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science, 2010.
- R. Heath-Brown, *Analysis II. Continuity and Differentiability*, Hilary Term, 2016.
- R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații),* Editura "Fair Partners", București, 2011.
- V. Postolică, *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.