Diferențiabilitate

Cursul 9

Matematică - anul I

Facultatea de Informatică, UAIC

e-mail: adrian.zalinescu@info.uaic.ro

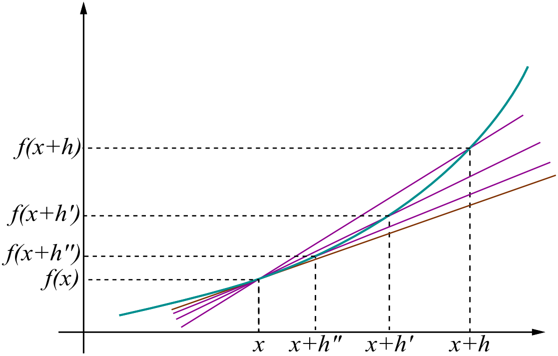
web: https://profs.info.uaic.ro/~adrian.zalinescu

6 Decembrie 2021

Cuprins

Derivatele funcțiilor de o singură variabilă

Noțiunea de derivată captează ideea de viteză de schimbare a valorii unei funcții în raport cu variabila sa.



Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid și $f : A \to \mathbb{R}$.

Definiție

- *Derivata* lui f într-un punct $x_0 \in A$ este limita

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- Spunem că f este *derivabilă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă derivata lui f în x_0 există și este finită.
- Notăm f' sau $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ funcția $x \mapsto f'(x)$ definită pe o submulțime a lui A ce constă în elementele lui A în care f este derivabilă.
- Dacă $x_0 \in A$ este un punct de acumulare la stânga (la dreapta) a lui A, numim *derivata la stânga* (*la dreapta*) a lui f în x_0 limita (în cazul în care există)

$$f'_{\mathrm{s}}(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \left(f'_{\mathrm{d}}(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}} \right).$$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid.

Propoziție

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in A$. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Definiție

- Spunem că o funcție $f : A \to \mathbb{R}$ este de *clasă* C^1 dacă f este derivabilă pe A și f' este continuă.
- Notăm $C^1(A)$ familia tuturor funcțiilor $f : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^1.
- Notăm $C(A)$ familia tuturor funcțiilor continue $f : A \to \mathbb{R}$.

Din propoziția de mai sus, $C^1(A) \subseteq C(A)$.

Reguli de derivare

Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ două intervale cu interioare nevide și $x_0 \in A$.

Teoremă

i) Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în x_0 și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ și fg sunt derivabile în x_0 și

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \text{ (regula lui Leibniz).}$$

Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci
$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A : g(x) \neq 0$ și $1/g$, f/g sunt derivabile în x_0 cu

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2};$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Teoremă

ii) Dacă funcția $f : A \to B$ este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este derivabilă în x_0 și

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (regula lanțului).}$$

iii) Dacă funcția $f : A \to B$ este continuă, bijectivă și derivabilă în x_0 astfel încât $f'(x_0) \neq 0$, atunci f^{-1} este continuă, derivabilă în $f(x_0)$ și

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dacă funcțiile f și g sunt derivabile, regulile de mai sus pot fi scrise ca:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} f$);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} g$);

- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$;
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (dacă $0 \notin \operatorname{Im} f'$).

Ultimele două reguli pot fi ușor memorate dacă vedem pe f ca pe o *schimbare de variabilă* $y = f(x)$:

- $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

Dacă $f : A \to \mathbb{R}_+^*$ și $g : A \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci avem:

$$(f^g)' = \left(\mathrm{e}^{g \ln f}\right)' = \mathrm{e}^{g \ln f}\left(g' \ln f + \frac{gf'}{f}\right) = f^g (\ln f) g' + f^{g-1} f' g.$$

Derivatele funcțiilor elementare

- $c' = \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $c \in \mathbb{R}$;
- $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^*$;
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$;
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $(x^p)' = px^{p-1}$, $x \in \mathcal{D}_p$, pentru $p \in \mathbb{R}$,

unde $\mathcal{D}_p$ este domeniul maxim de definiție al funcției putere.

- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$;
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{(\sin x)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivatele funcțiilor vectoriale de o singură variabilă

Definiția funcțiilor reale derivabile poate fi ușor adaptată pentru funcții de o variabilă cu valori în $\mathbb{R}^m$, deoarece limita

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right)$$

are sens pentru funcții $f : A \to \mathbb{R}^m$ cu $x_0 \in A$. Ca în cazul limitelor de funcții, derivatele pot fi calculate pe componente:

Fie A un interval cu interior nevid, $x_0 \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție cu componentele $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Propoziție

f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt derivabile în x_0. În acest caz, $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))$.

Reguli similare de calcul se aplică și în acest caz.

Teoremă

Fie A un interval cu interior nevid, $x_0 \in A$ și $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$, derivabile în x_0. Atunci:

i) $f + g$ este derivabilă în x_0 și
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

ii) $\langle f, g \rangle$ este derivabilă în x_0 și
$$(\langle f, g \rangle)'(x_0) = \left\langle f'(x_0), g(x_0) \right\rangle + \left\langle f(x_0), g'(x_0) \right\rangle;$$

iii) φf este derivabilă în x_0 și
$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0).$$

Derivate direcționale și diferențiabilitate Gâteaux

- Pentru funcții f de mai multe variabile, raportul $\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}$ nu este definit, așa că a defini derivata în modul acesta nu este posibil.
- Există mai multe posibilități de a ocoli această dificultate. Una este să considerăm *derivate direcționale*, opțiune ce este bazată pe observația că derivata unei funcții $f : A \to \mathbb{R}$ într-un punct x_0 poate fi scrisă ca

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Definiție

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție.

- Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că f este *derivabilă* în $\mathbf{x}_0$ *în direcția* $\mathbf{u}$ dacă limita

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) \in \mathbb{R}^m$$

  există. În acest caz, $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ se numește *derivata direcțională* a lui f în $\mathbf{x}_0$ în *direcția* $\mathbf{u}$.

Definiție

- Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și f este derivabilă în $\mathbf{x}_0$ în orice direcție $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, spunem că f este *Gâteaux diferențiabilă* în $\mathbf{x}_0$. *Diferențiala Gâteaux* este atunci funcția $\mathbf{u} \mapsto f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ și se notează $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$.
- Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ și f este diferențiabilă Gâteaux în $\mathbf{x}_0$, spunem că f este *Gâteaux derivabilă* în $\mathbf{x}_0$ dacă în plus $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicație liniară.
- Spunem că f este *Gâteaux diferențiabilă* sau *Gâteaux derivabilă* pe o submulțime $D_0 \subseteq D$ dacă f este Gâteaux diferențiabilă, respectiv Gâteaux derivabilă în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.

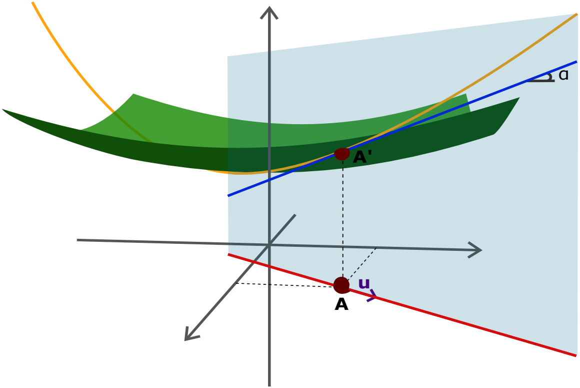
Observație. Deoarece

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u}) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\mathbf{x}_0 + t\alpha\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\alpha}{s}\left(f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\right) = \alpha f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) \end{aligned}$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, remarcăm că:

- existența derivatei direcționale $f'(\mathbf{x}_0; \alpha\mathbf{u})$ este echivalentă cu existența lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$;

- de aceea, în definiția diferențiabilității se poate cere existența lui $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$ doar pentru versorii $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$;



- dacă f este diferențiabilă în $\mathbf{x}_0$, aplicația $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este omogenă; de aceea, pentru derivabilitatea lui f în $\mathbf{x}_0$, este de ajuns să cerem doar ca $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$ să fie aditivă.

Funcțiile constante și funcțiile liniare sunt Gâteaux derivabile. Intr-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ și $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, atunci

$$c'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(c - c) = 0$$

și

$$T'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - T(\mathbf{x}_0)\right) = T(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

În consecință, $\mathrm{D}c(\mathbf{x}_0) = 0$, $\mathrm{D}T(\mathbf{x}_0) = T$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Derivate parțiale

Fie $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă , $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție.

Definiție

Dacă f este derivabilă în $\mathbf{x}_0$ în direcția $\mathbf{e}_k$ pentru un $k \in \{1, \ldots, n\}$, spunem că f admite o *derivată parțială* în raport cu x_k în $\mathbf{x}_0$, pe care o notăm

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) := f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_k).$$

Observăm că derivata parțială a lui f în raport cu x_k în $\mathbf{x}_0$ se obține după cum urmează: dacă $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$, atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)\right)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, \ldots, x_n^0)\right).\end{aligned}$$

Bineînțeles, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\right) \in \mathbb{R}^m$.

Existența derivatelor parțiale ale unei funcții de mai multe variabile nu implică existența tuturor derivatelor direcționale (adică a diferențiabilității Gâteaux) în acel punct, după cum ne arată următorul exemplu:
Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, dar

$$\frac{f((0,0)+t(u,v)) - f((0,0))}{t} = \frac{\frac{t^2uv}{t^2(u^2+v^2)}}{t} = \frac{1}{t}\frac{uv}{u^2+v^2}.$$

Așadar derivata direcțională $f'((0,0);(u,v))$ nu există dacă $uv \neq 0$.

Jacobianul

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție Gâteaux derivabilă în $\mathbf{x}_0$.

Definiție

- Matricea din $\mathscr{M}_{mn}$ asociată cu $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)$ (în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$) se numește *matricea jacobiană* a lui f în $\mathbf{x}_0$ și este notată $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$.
- În cazul $m = 1$, matricea jacobiană a lui f în $\mathbf{x}_0$ se numește de asemenea *gradientul* lui f și se mai notează $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
- În cazul $m = n$, determinantul lui $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$ se numește *jacobianul* lui f în $\mathbf{x}_0$ și se notează $\frac{\mathrm{D}(f_1,\dots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}_0)$, unde $f_1, \dots, f_n$ sunt componentele lui f.

Observații.

1. Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție Gâteaux derivabilă în $\mathbf{x}_0$. Se poate arăta cu ușurință că $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$, adică matricea ce are ca linii elementele lui $\nabla f_k(\mathbf{x}_0)$ pentru $k \in \{1, \dots, m\}$.

Pe de altă parte,

$$\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix},$$

adică matricea ce are drept coloane elementele lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ pentru $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Particularizând pentru cazul $m = 1$, obținem

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Putem vedea matricea linie $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ca un element al lui $\mathbb{R}^n$; în acest caz putem scrie

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i, \ \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Dacă o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este Gâteaux derivabilă într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, nu putem deduce continuitatea lui f în $\mathbf{x}_0$, ci doar continuitatea direcțională a lui f în $\mathbf{x}_0$, adică continuitatea în 0 a funcției $t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ pentru orice $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Totuși, situația se schimbă dacă cerem ca derivatele parțiale să existe și să fie mărginite într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$:
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$.

Teoremă

Dacă există $V \in \mathscr{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ să existe pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt mărginite pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci f este continuă în $\mathbf{x}_0$.

Observație. O condiție suficientă ca $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ să fie mărginită pe o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ este ca ea să fie continuă în $\mathbf{x}_0$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă.

Definiție

- Dacă A este deschisă, spunem că o funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ este de clasă C^1 dacă toate derivatele parțiale ale lui f există și sunt continue.
- Dacă A este deschisă, notăm $C^1(A; \mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcțiilor $f : A \to \mathbb{R}$ ce sunt de clasă C^1. Dacă $m = 1$, o vom nota mai simplu $C^1(A)$.
- Notăm $C(A; \mathbb{R}^m)$ familia tuturor funcțiilor continue $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $m = 1$, o vom nota doar $C(A)$.

Teorema precedentă și remarca de mai jos ne permite să conchidem că $C^1(D; \mathbb{R}^m) \subseteq C(D; \mathbb{R}^m)$ pentru orice submulțime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diferențiabilitate Fréchet

Remarcăm că o funcție $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct x_0 dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

În acest caz, $a = f'(x_0)$. Pentru cazul mai multor variabile, o altă posibilitate este de a înlocui în proprietatea de mai sus numărul real a cu o matrice, sau, echivalent, un operator liniar.

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție.

Definiție

- Pentru $\mathbf{x}_0 \in D$, spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* în $\mathbf{x}_0$ dacă există un operator liniar $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ astfel încât

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

În acest caz, operatorul T se numește *diferențiala Fréchet* a lui f în $\mathbf{x}_0$ și se notează $\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$.

Observație. Un alt mod de a exprima faptul că f este *diferențiabilă Fréchet* în $\mathbf{x}_0$ este că există $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ și o funcție continuă $\alpha : D \to \mathbb{R}^m$ astfel încât $\alpha(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$ și

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \, \alpha(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in D.$$

De fapt, α se poate defini prin

$$\alpha(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \left(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right), & \mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}; \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Legătura între diferențiabilitatea Fréchet și diferențiabilitatea Gâteaux este dată de următorul rezultat:

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă Fréchet într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci f este derivabilă Gâteaux în $\mathbf{x}_0$ și $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$.

- O consecință imediată a acestei teoreme este că diferențiala Fréchet este unică, deoarece derivata Gâteaux este unică (datorită faptului că $\mathrm{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{u})$, pentru orice $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$).

- O altă consecință este că dacă f este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci f are derivate parțiale în $\mathbf{x}_0$ și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i),\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Funcțiile constante și aplicațiile liniare sunt diferențiabile Fréchet differentiable, de asemenea. Într-adevăr, dacă $c \in \mathbb{R}$ and $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(c - c - \mathbf{0}_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$$

și

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left(T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m},$$

ceea de demonstrează clar afirmația și chiar mai mult, că $\mathrm{d}c(\mathbf{x}_0) = 0$, $\mathrm{d}T(\mathbf{x}_0) = T$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Fie $\mathrm{pr}_i : D \to \mathbb{R}$ proiecția pe componenta i:

$$\mathrm{pr}_i\,(x_1,\ldots,x_n) = x_i,\ \ (x_1,\ldots,x_n) \in D,\ \ i = \overline{1,n}.$$

Diferențiala Fréchet a lui pr_k este în mod tradițional notată $\mathrm{d}x_k$:

$$\mathrm{d}x_i\,(u_1,\ldots,u_n) = u_i,\ \ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ i = \overline{1,n}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}x_i(\mathbf{u}),\ \ \forall \mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

avem

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}x_i.$$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție.

Prin contrast cu derivabilitatea Gâteaux, diferențiabilitatea Fréchet implică continuitatea:

Teoremă

Dacă f este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$, atunci f este continuă în $\mathbf{x}_0$.

O condiție suficientă pentru diferențiabilitatea Fréchet este dată de următorul rezultat:

Teoremă

Dacă există $V \in \mathscr{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ există pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue pe $V \cap D$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci f este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$.

O consecință a acestui rezultat este că dacă $f \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$, atunci f este Fréchet diferențiabilă.

Reguli de derivare

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și $E \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțimi deschise nevide.

i) Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferențiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ și

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) = \alpha \mathrm{d} f(\mathbf{x}_0) + \beta \mathrm{d} g(\mathbf{x}_0),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}^m$ și $\varphi : D \to \mathbb{R}$ sunt diferențiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci φf este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ și

$$\mathrm{d}(\varphi f)(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) + \varphi(\mathbf{x}_0) \mathrm{d} f(\mathbf{x}_0).$$

Teoremă

iii) Dacă $\varphi : D \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$ și $\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât $0 \notin \varphi[D_0]$, $\frac{1}{\varphi} : D_0 \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ și

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varphi}\right)(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{\varphi(\mathbf{x}_0)^2}\mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}_0).$$

iv) Dacă $f : D \to E$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$, $g : E \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $g \circ f$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0$ și

$$\mathrm{d}(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = \mathrm{d}g(f(\mathbf{x}_0)) \circ \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0) \ (\textit{regula lanțului})$$

În termeni de matrice jacobiene, regula lanțului poate fi scrisă ca

$$\mathrm{J}_{g\circ f}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{J}_g(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$$

sau, în termeni de derivate parțiale,

$$\frac{\partial(g_j \circ f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \ \forall i = \overline{1, n}, \ \forall j = \overline{1, p}.$$

În cazul $m = n = p$, aplicând determinanții relației matriceale de mai sus, obținem

$$\frac{\mathrm{D}(g_1 \circ f, \ldots, g_n \circ f)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{D}(g_1, \ldots, g_n)}{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0).$$

De aceea, dacă $f : D \to E$ este bijectivă și f^{-1} este de asemenea diferențiabilă Fréchet în $f(\mathbf{x}_0)$, atunci $\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0)$ este nesingulară, $\mathrm{J}_{f^{-1}}(f(\mathbf{x}_0)) = (\mathrm{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}$ și

$$\frac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0) \neq 0;$$

$$\frac{\mathrm{D}(f_1^{-1}, \ldots, f_n^{-1})}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(f(\mathbf{x}_0)) = \frac{1}{\frac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0)}.$$

Definiție

Fie $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ mulțimi deschise nevide. O funcție $f : D \to E$ se numește *difeomorfism* dacă f este bijectivă, $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ și $\mathrm{J}_f(\mathbf{x})$ este nesingulară pentru orice $\mathbf{x} \in D$.

Se poate arăta că dacă $f : D \to E$ este un difeomorfism, atunci $f^{-1} \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$.

Derivate de ordin superior

Vom considera mai întâi cazul funcțiilor reale de o variabilă.

- Pentru o funcție derivabilă $f : A \to \mathbb{R}$, se poate defini $f' : A \to \mathbb{R}$.
- De aceea, putem vorbi de derivabilitatea noii funcții f': derivata lui f' într-un punct $x_0 \in A$, dacă există, va fi notată $f''(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ și este numită *derivata de ordin doi* a lui f în x_0.
- Dacă f' este derivabilă, atunci derivata lui f' definește o funcție, numită *derivata de ordin doi* a lui f: $f'' : A \to \mathbb{R}$.
- Procesul poate continua: dacă $f^{(n-1)} : A \to \mathbb{R}$ este derivata de ordin $n-1$ a lui f (pentru $n \geq 3$), atunci $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$ notează, în cazul în care există, derivata lui $f^{(n-1)}$ în $x_0 \in A$ și se numește *derivata de ordin n* a lui f în x_0.
- Dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă, atunci derivata acesteia definește funcția $f^{(n)} : A \to \mathbb{R}$, numită *derivata de ordin n* a lui f.

Un caz particular de derivate direcționale de ordin superior este constituit de *derivatele parțiale de ordin superior*:
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ pentru $p \geq 2$, *derivata parțială de ordin* p a lui f în raport cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ este definită recursiv ca

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(\mathbf{x}_0) := \frac{\partial \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}} \right)}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0),$$

cu condiția ca derivata parțială (de ordin $p-1$) $\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_2 \ldots \partial x_p}$ există într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ și admite derivată parțială în raport cu x_{i_1} în $\mathbf{x}_0$.
Dacă $i_1 = \cdots = i_p = i$, în loc de $\frac{\partial^p f}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}$ putem scrie $\frac{\partial^p f}{\partial x_i^p}$. Dacă nu este cazul, derivata parțială se numește *derivată parțială mixtă*. Următoarele rezultate oferă condiții suficiente pentru schimbarea ordinii indicilor $i_1, \ldots, i_p$.

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $\mathbf{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $i, j \in \{1, \dots n\}$ cu $i \neq j$.

Teoremă (Schwarz)

Dacă derivatele parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ și sunt continue în $\mathbf{x}_0$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

Teoremă (Young)

Dacă derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ există într-o vecinătate deschisă a lui $\mathbf{x}_0$ și sunt Fréchet diferențiabile în $\mathbf{x}_0$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există și sunt egale.

În condițiile teoremelor Schwarz sau Young, se pot ordona (și grupa) $i_1, \dots, i_p$ în derivata parțială mixtă $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}$ și aceasta se poate scrie ca

$$(\star) \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

unde, pentru $i = \overline{1, n}$, α_i este numărul de i care apar în lista $i_1, \dots, i_p$. Vectorul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se numește *multi-indice* și avem $p = |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. De fapt, în expresia $(\star)$, se pot omite termenii $\partial x_i^{\alpha_i}$ dacă $\alpha_i = 0$.

Diferențiabilitatea Fréchet de ordin superior poate fi introdusă după cum urmează:

Definiție

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

- Spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* de ordin p în $\mathbf{x}_0 \in D$ dacă există o vecinătate deschisă $D_0 \subseteq D$ a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât toate derivatele parțiale de ordin $p-1$ există în D_0 și sunt diferențiabile Fréchet în $\mathbf{x}_0$.
- Spunem că f este *diferențiabilă Fréchet* de ordin p într-o submulțime $D_0 \subseteq D$ dacă f diferențiabilă Fréchet de ordin p în orice punct $\mathbf{x}_0 \in D_0$.
- Dacă f este Fréchet diferențiabilă Fréchet de ordin p în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci *diferențiala Fréchet* de ordin p în $\mathbf{x}_0$ este definită ca $\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ prin

$$\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) := \sum_{1 \le i_1, \dots, i_p \le n} u_{i_1} \cdot \dots \cdot u_{i_p} \cdot \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\mathbf{x}_0), \ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Folosind multiindici, formula ce definește pe $\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0)$ este similară cu cea care definește pe $(u_1 + \dots + u_n)^p$. De exemplu, dacă $n = 2$ și $m = 1$,

$$\mathrm{d}^p(\mathbf{x}_0)(u_1, u_2) = \sum_{j=0}^{p} C_p^j \frac{\partial^p f}{\partial x_1^j \partial x_2^{p-j}}(\mathbf{x}_0) u_1^j u_2^{p-j}.$$

Serii Taylor

O aplicație importantă a derivatelor de ordin superior este *formula lui Taylor*, care poate fi scrisă acum pentru funcții de mai multe variabile.

Teoremă (formula lui Taylor)

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție Fréchet diferențiabilă de ordin $p+1$ pe o bilă $B(\mathbf{x}_0; r) \subseteq D$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)$ există $t \in (0,1)$ astfel încât

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \cdots + \frac{1}{p!}\mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{(p+1)!}\mathrm{d}^p f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

unde $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$.

Definiție

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și $f \in C^\infty(D)$.

- *Seria Taylor* asociată lui f într-o vecinătate a unui punct (în jurul punctului) $\mathbf{x}_0 \in D$ este următoarea serie:

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \mathrm{d}^p f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- În cazul $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ seria Taylor de mai sus se numește *seria Maclaurin* asociată lui f.
- Spunem că o funcție este *analitică* într-o bilă $B(\mathbf{x}_0; r) \subseteq D$ dacă seria Taylor asociată lui f în jurul lui $\mathbf{x}_0$ converge la $f(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)$.

- În cazul $n = 1$, seria Taylor asociată unei funcții este o serie de puteri.
- Reciproc, dacă o funcție f este definită de o serie de puteri $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pe domeniul ei de convergență, atunci f este analitică în $(-r, r)$, unde $r \in [0, +\infty]$ este raza ei de convergență.

- De fapt,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdot\cdots\cdot(k+p)a_{k+p}(x-x_0)^k,\ \forall x \in (-r,r),\ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, $f^{(p)}(x_0) = p!a_p$ și seria Taylor asociată lui f în jurul lui x_0 este chiar $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ (ceea ce demonstrează că f este analitică în $(-r,r)$).

- Totuși, convergența seriei Taylor asociată unei funcții f nu implică faptul că suma ei este f. De exemplu, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Atunci $f^{(p)}(0) = f(0) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deci seria Maclaurin asociată este seria nulă; așadar suma ei (zero) este diferită de f pe orice interval centrat în 0.

Examples

Mai jos redăm câteva serii Maclaurin pentru câteva funcții analitice cunoscute:

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,\ x \in (-1,1);$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots,\ x \in (-1,1);$
- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$
- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}.$

- E. Cioară, M. Postolache, *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
- R. M. Dăneț, S. D. Niță, I. Popescu, M. V. Popescu, F. Voicu, *Curs modern de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
- D. Guichard & al., *Single and Multivariable Calculus,* Creative Commons, San Francisco, 2016.
- F. Iacob, *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.
- R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
- David B. Massey, *Worldwide Multivariable Calculus,* Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2015.
- E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.