CURS 4

SERII NUMERICE CU TERMENI OARECARE. SERII DE PUTERI

A. Arusoaie

e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

18 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAȘI

Structura cursului

1. Serii cu termeni oarecare
   - Criterii de convergență
   - Criteriul lui Abel
   - Serii absolut convergente
   - Serii alternate

2. Serii de puteri
   - Teorema lui Abel
   - Determinarea razei de convergență
   - Exemple de serii de puteri

Structura cursului

Serii cu termeni oarecare

- Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni oarecare*, dacă termenul general al seriei, x_n, nu are același semn pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

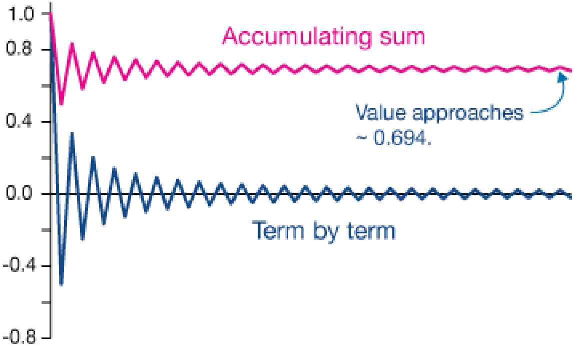
- Un caz particular de serii cu termeni oarecare îl reprezintă *seriile alternate* de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n$.

Serii cu termeni oarecare

Exemplu: *Seria armonică alternată* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este convergentă.

Serii cu termeni oarecare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$



Criteriul lui Dirichlet

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șiruri de numere reale, și fie $S_n = x_1 + \ldots + x_n, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă

1. șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit;
2. șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exemplu

Exemplu: Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ două șiruri de numere reale. Dacă

1. seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;
2. șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton și mărginit,

atunci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exemplu

Exemplu: Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n} \right)$ este convergentă.

Serii absolut convergente

Definiție

Spunem că seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este

i) **absolut convergentă**, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă - notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) **semiconvergentă**, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este divergentă - notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (SC)$.

Serii absolut convergente

Observație: Pentru serii cu termeni pozitivi, absoluta convergență este echivalentă cu convergența.

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este semiconvergentă deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(C)$, însă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(D)$ (seria armonică simplă).

Serii absolut convergente

Propoziție

Dacă o serie de numere reale este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstrație: Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie absolut convergentă.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| (C)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Însă cum $|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}|$, obținem

$$|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_e, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Conform teoremei lui Cauchy, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Criteriul rădăcinii

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.
Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (D)$;

Criteriul raportului -D'Alembert

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.

Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (AC)$;

ii) dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| (D)$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale cu termeni oarecare.

Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:

i) dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \,(AC)$;

ii) dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \,(D)$.

Serii alternate

- Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este *alternată*, dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Orice serie alternată poate fi scrisă astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n, \text{ unde } y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teoremă (Criteriul lui Leibniz)

Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale pozitive, descrescător și convergent la 0, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă.

Demostrație: Folosim criteriul lui Dirichlet.

Exemplu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ este convergentă.

Structura cursului

Serii de puteri

Definiție

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.
Se numește **serie de puteri** centrată în $y_0 \in \mathbb{R}$ o serie de forma

$$a_0 + a_1(y-y_0) + \ldots + a_n(y-y_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-y_0)^n, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Termenii a_n se numesc **coeficienți ai seriei**.
Dacă facem schimbarea de variabilă $x = y - y_0$, seria (1) se poate scrie în forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Teorema (Abel)

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, există un număr R, $0 \leq R \leq +\infty$, numit *rază de convergență* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, astfel încât:

i. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)$ pentru orice $x \in (-R, R)$;

ii. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (D)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

Serii de puteri

Putem rescrie *teorema lui Abel* și astfel:

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *există* R, $0 \leq R \leq +\infty$ *așa încât:*

i) *dacă* $R = 0$, *atunci unicul punct de (absolută) convergență pentru seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este* $x = 0$;

ii) *dacă* $R > 0$, *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)$ *pe intervalul* $(-R, R)$;

iii) *dacă* $0 < R < +\infty$, *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (D)$ *pe* $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$;

iv) *dacă* $R = +\infty$, *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (C)$ *pe* $\mathbb{R}$;

Serii de puteri

Dacă notăm

- *D_c - domeniul de convergență* - $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (C)\right\}$,
- *D_{ac} - domeniul de absolută convergență* - $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (AC)\right\}$,

atunci, pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au loc următoarele incluziuni:

$$(-R, R) \subseteq D_{ac} \subseteq D_c \subseteq [-R, R].$$

Determinarea razei de convergență

Propoziție

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza ei de convergență.

Dacă există $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este

$$R = \begin{cases} 0, & \text{când } \rho = +\infty; \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{când } 0 < \rho < +\infty; \\ \infty, & \text{când } \rho = 0. \end{cases}$$

- Dacă nu există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, vom calcula R similar, doar că de data asta, $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Exemplu

Să se studieze convergența seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

Determinarea razei de convergență

Propoziție

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza ei de convergență.

Dacă există $\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci raza de convergență este dată de

$$R = \begin{cases} 0, & \text{când } \ell = +\infty; \\ \frac{1}{\ell}, & \text{când } 0 < \ell < +\infty; \\ \infty, & \text{când } \ell = 0. \end{cases}$$

Exemplu

Să se studieze convergența seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n$.

Exemple de serii de puteri

1. *Seria nulă:* $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$. În acest caz, $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$.
2. *Seria geometrică,* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Avem $R = 1$, $D_{ac} = D_c = (-1, 1)$.
   - Dacă $x \in (-1, 1)$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1 - x}$
3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$: $R = 0, D_{ac} = D_c = \{0\}$.

Exemple de serii de puteri

4. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} x^n$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Avem $R = 1$ și

$$D_{ac} = \begin{cases} (-1,1), & \alpha \leq 1; \\ [-1,1], & \alpha > 1; \end{cases}$$

,

$$D_c = \begin{cases} (-1,1), & \alpha \leq 0; \\ [-1,1), & \alpha \in (0,1]; \\ [-1,1], & \alpha > 1; \end{cases} .$$

Exemple de serii de puteri

5. *Seria exponențială*, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Avem $R = +\infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

6. *Seriile trigonometrice*, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

   Avem $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult, avem

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

7. *Seriile hiperbolice*, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$.

Avem $R = \infty$, $D_{ac} = D_c = \mathbb{R}$. Mai mult, avem

$$\mathrm{shx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{chx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

Bibliografie

- Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
- V. Postolică - *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
- M. Postolache - *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
- Steven Heilman - *Sequences and Series of Functions.Convergence*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2015.
- M. Deisenroth, M. Cheraghchi - *Mathematical Methods (Chap.4:Power Series)*, Imperial College London, Department of Computing, 2016.