Cursul 5
Spaţii liniare

Spaţii liniare. Subspaţii liniare

Definiţia 2.1 *Fie V o mulţime nevidă şi K un corp comutativ. Spunem că pe V, este definită o* ***structură algebrică de spaţiu liniar peste corpul*** *K dacă şi numai dacă există o lege internă $+ : V \times V \to V$ şi o lege de compoziţie externă $\cdot : K \times V \to V$, astfel încât sunt îndeplinite următoarele axiome:*

i) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$;

ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$;

iii) $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} :\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \exists (-\mathbf{x}) \in \mathbf{V} :\ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

v) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$*,* $\forall\, \alpha \in K$*,* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*;*

vi) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$*,* $\forall\, \alpha, \beta \in K$*,* $\mathbf{x} \in V$*;*

vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$*,* $\forall\, \alpha, \beta \in K$*,* $\mathbf{x} \in V$*;*

viii) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$*,* $\forall\, \mathbf{x} \in V$*, unde* 1 *este elementul unitate din* K*.*

Ansamblul $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte ***spaţiu liniar*** (sau ***spaţiu vectorial***) peste K. Elementele spaţiului liniar V se numesc ***vectori***, iar elementele lui K sunt numite ***scalari***. Legea de compoziţie internă " $+$ " poartă denumirea de ***adunare a vectorilor***, iar legea de compoziţie externă " $\cdot$ " se numeşte ***înmulţire cu scalari***.

Când $K = \mathbb{R}$, V se mai numeşte ***spaţiul liniar real***, iar când $K = \mathbb{C}$, V se mai numeşte ***spaţiu liniar complex***. Elementul neutru $\mathbf{0} \in V$ se numeşte ***vector nul***, în timp ce vectorul $-\mathbf{x}$ se numeşte ***vectorul opus*** lui $\mathbf{x} \in V$.

Primele patru proprietăţi din definiţia de mai sus afirmă că $(V, +)$ este grup comutativ. Celelalte patru arată legătura între operaţia externă $\cdot$ şi operaţia internă $+$. Dacă $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt doi vectori, se obişnuieşte a se nota $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ în loc de $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$(ca în cazul grupurilor aditive).

Se poate arăta cu uşurinţă că $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ are o structură de spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$. Un exemplu mai general este dat de spaţiul $\mathbb{R}^n$, pe care îl vom utiliza destul de des în cadrul acestui curs.

Propoziţia 2.2 *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fie mulţimea $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$, şi fie operaţiile $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, respectiv $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definite prin*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{R}$.

Dacă nu este specificat altfel, vom considera că spaţiul $\mathbb{R}^n$ este dotat cu operaţiile de mai sus, numite şi *operaţii canonice*. Dacă $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci vom numi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *coordonatele* lui $\mathbf{x}$.

Demonstraţie: Vom verifica proprietăţile care definesc un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.
Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ în $\mathbb{R}^n$. Definim de asemenea $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, şi $(-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

i) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$
$= (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n)$
$= ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$;

ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n)$
$= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$;

iv) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) = (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n) = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$;

v) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (\alpha(x_1 + y_1), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$
$= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$;

vi) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n)$
$= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) = \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \beta \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$;

vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \ldots, (\alpha\beta)x_n)$
$= (\alpha\beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$;

viii) $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{1} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \ldots, 1 \cdot x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$.

În concluzie, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar real. ◀

Exemple de spaţii liniare

1. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a matricilor cu m linii şi n coloane formează, împreună cu operaţiile de adunare a matricilor şi de înmulţire a matricilor cu numere reale, un spaţiu liniar real.

2. Fie $\mathbb{R}[X]$ mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali. Dacă $+$ notează adunarea polinoamelor, iar $\cdot$ reprezintă înmulţirea polinoamelor cu numere reale, atunci $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este un spaţiu liniar real.

3. Fie X o mulţime nevidă, $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \to V\}$. Dacă definim $+ : \mathcal{F}(X, V) \times \mathcal{F}(X, V) \to \mathcal{F}(X, V)$ şi $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X, V) \to \mathcal{F}(X, V)$ prin
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in X\ f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X,\ f \in \mathcal{F}(X, V),$$
atunci $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ formează un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.
Particularizând X şi V, obţinem diverse exemple de spaţii vectoriale:
   - Dacă $X = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $V = \mathbb{R}$, atunci obţinem spaţiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
   - Dacă $X \subseteq \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}$, se obţine spaţiul liniar $(\mathcal{F}, (X, \mathbb{R}) +, \cdot)$ al funcţiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X.

- Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $V = \mathbb{R}^m$, atunci $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m), +, \cdot)$ este spaţiul liniar real al funcţiilor de n variabile cu valori în $\mathbb{R}^m$.
- Dacă $X = \mathbb{N}$ şi $V = \mathbb{R}$, mulţimea $(\mathcal{F}(X, V), +, \cdot)$ spaţiul liniar real al şirurilor de numere reale.

Propoziţia 2.3 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real. Atunci:*

i) $0 \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$;

ii) $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$;

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$;

iv) $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *sau* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demonstraţie: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\mathbf{x} \in V$.

i) Avem $0 \cdot \mathbf{x} = (0 + 0) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, de unde $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. (putem scădea $0 \cdot \mathbf{x}$) De asemenea, avem
$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}$, deci $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

ii) $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} = (\alpha - \alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha) \cdot \mathbf{x} \Rightarrow (-\alpha) \cdot \mathbf{x} = -\alpha \cdot \mathbf{x}$ şi $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) = \alpha \cdot (-\mathbf{x}) + \alpha \cdot \mathbf{x}$ $\Rightarrow \alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot \mathbf{x}$;

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -(-(\alpha \cdot \mathbf{x})) = \alpha \cdot \mathbf{x}$;

iv) Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, atunci $\mathbf{x} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \left(\alpha^{-1} \cdot \alpha\right) \cdot \mathbf{x} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Altfel, dacă $\alpha = 0$ şi $\mathbf{x}$ este arbitrar în V, avem $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. ◀

Definiţia 2.4 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi W o submulţime nevidă a lui V. Spunem că $(W, +, \cdot)$ este este **subspaţiu liniar** al lui $(V, +, \cdot)$ dacă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, şi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, avem $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ şi $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W$.*

Exemple:

1) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulţimea $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ şi înmulţirea lor cu scalari din $\mathbb{R}$, un subspaţiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

2) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli (adică, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_2) \neq \mathbf{0}$). Mulţimea

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0\}$$

este un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, numit *hiperplan*.

3) Mulţimea *funcţiilor pare*, definită prin

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Propoziţia 2.5 *Fie W_1 şi W_2 două subspaţii liniare ale lui $(V, +, \cdot)$. Atunci*

i) $W_1 \cap W_2$ *este tot un subspaţiu liniar al lui V.*

ii) $W_1 \cup W_2$ *nu este întotdeauna un subspaţiu liniar al lui V.*

Demonstraţie: i) Ţinând seama de Propoziţia 2.3 şi de Definiţia 2.4, putem afirma că orice subspaţiu liniar al lui V conţine vectorul nul $\mathbf{0}$. Aşadar $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$.

Fie $x, y \in W_1 \cap W_2$. Cum W_1 şi W_2 sunt subspaţii liniare ale lui $(V, +, \cdot)$, reiese că,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_1 \text{ şi } \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_2.$$

Deci $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$, adică $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu liniar al lui V.

ii) Observăm că deşi mulţimile $V_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathbb{R}^n$, iar vectorii $(1, 0, \ldots, 0) \in V_1$ şi $(0, 0, \ldots, 1) \in V_2$, aparţin reuniunii $V_1 \cup V_2$, suma lor, adică vectorul $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, nu mai aparţine acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspaţiilor liniare V_1 şi V_2 nu este un subspaţiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^n$. ◀

Combinaţii liniare

Definiţia 2.6 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar. O* ***combinaţie liniară*** *a vectorilor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, este un vector $\mathbf{y} \in V$, ce se poate scrie astfel*

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.7 *O submulţime nevidă W a unui spaţiu liniar $(V, +, \cdot)$ se numeşte* ***subspaţiu liniar*** *al lui V dacă şi numai dacă*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in W.$$

Definiţia 2.8 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi U o submulţime nevidă a lui V. Atunci mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente din U,*

$$\{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in U\}$$

se numeşte ***subspaţiul liniar generat de*** *U, notat $Lin(U)$ sau $Span(U)$.*

Se poate constata uşor că $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui $(V, +, \cdot)$ (de unde şi notaţia), şi că are loc $U \subseteq Lin(U)$. Mai mult, se poate demonstra că $Lin(U)$ este cel mai mic subspaţiu al lui V, care îl conţine pe U.

Exemplu: Dacă $V = \mathbb{R}^3$, subspaţiul liniar generat de $U = \{(1, -2, 1)\}$ este dreapta $\{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Liniară dependenţă şi independenţă

Definiţia 2.9 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$.*

a) *Elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se numesc* ***liniar dependente*** *dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dintre care cel puţin unul nenul, astfel încât*

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

b) *Elementele* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *se numesc* ***liniar independente*** *dacă ecuaţia*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

are soluţie unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

c) *O submulţime* U *a lui* V *se numeşte* ***liniar independentă*** *dacă pentru orice vectori* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in U$, *distincţi,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *sunt liniar independenţi.*

Observaţii: O submulţime liniar independentă a unui spaţiu liniar nu conţine vectorul nul $\mathbf{0}$.

Teorema 2.10 *Vectorii* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ai unui spaţiu liniar sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă unul dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$:" Într-adevăr, dacă vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sunt liniar dependenţi, atunci, conform Definiţiei 2.9, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Presupunem că $\alpha_1 \neq 0$, ar reieşi atunci că avem: $\mathbf{x}_1 = -\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\alpha_1^{-1}\cdot\alpha_k\right)x_k$. Deci, unul dintre elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, aici $\mathbf{x}_1$, ar fi o combinaţie liniară de celelalte.

"$\Leftarrow$:" Dacă $\mathbf{x}_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\beta_k\mathbf{x}_k$, atunci $\mathbf{x}_j - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\beta_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că, pentru elementele $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, există scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n$, evident nu toţi nuli, aşa încât se poate vorbi despre o combinaţie liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul. ◀

Exemple:

1. Mulţimea $\{\mathbf{0}\}$ este liniar dependentă deoarece are loc $\alpha\cdot\mathbf{x} = 0, \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

2. Fie spaţiul liniar $\mathbb{R}^n$, şi sistemul de vectori

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

   Atunci, sistemul de vectori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ este liniar independent.
   Într-adevăr, fie $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Atunci avem

$$\alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

   Prin urmare, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
   Deci din orice combinaţie liniară obţinem coeficienţii nuli.

3. Fie spaţiul liniar al tuturor polinoamelor de grad cel mult n. Atunci polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent, deoarece

$$\alpha_0 1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

   are loc doar dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Dimensiunea unui spaţiu liniar. Bază algebrică. Schimbare de bază

Definiţia 2.11 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar.*

*i) Se numeşte **dimensiune (algebrică)** a spaţiului liniar V numărul maxim de elemente liniar independente din V. Vom nota dimensiunea spaţiului V cu $dim(V)$.*

*ii) Spaţiul liniar V este numit **infinit-dimensional** dacă există cel puţin o submulţime infinită şi liniar independentă a lui V. În caz contrar, V este numit **spaţiu liniar finit-dimensional**.*

Exemple:

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}^n) = m \cdot n$.

Definiţia 2.12 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi fie B o submulţime nevidă a lui V.*
*Se numeşte **bază algebrică** sau **bază Hamel** (sau, mai simplu **bază**) a lui V dacă B este o submulţime liniar independentă şi $Lin(B) = V$.*

În cazul unui spaţiu liniar n-dimensional V, o bază a lui V este o mulţime B alcătuită din n elemente, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, liniar independente, din V. Fiecare element $\mathbf{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{b}_k.$$

Scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se numesc ***coordonatele lui $\mathbf{x}$ în baza B*** .

Orice bază a unui spaţiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V. Altfel spus, $dim(V)$ nu depinde de baza lui V.

Dacă notăm cu X_B matricea coloană $X_B \overset{not}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în baza şi cu $\tilde{B} \overset{not}{=} [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ \ldots \ \mathbf{b}_n^T] \in \mathcal{M}_n$ matricea ce are pe coloana k coordonatele vectorului $\mathbf{b}_k$, atunci relaţia $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{b}_k$ se poate reda, matriceal, sub forma:

$$\mathbf{x}^T = \tilde{B} \cdot X_B = [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T \ldots \mathbf{b}_n^T] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.13 *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci mulţimea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, este o bază a lui $\mathbb{R}^n$, numită **baza canonică** a lui $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie: Multimea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ este liniar independentă (a se vedea Exemplul 2.). Arătăm că $Lin(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$.

Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrar, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Atunci

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $Lin(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$. ◀

Propoziţia 2.14 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar cu $dim(V) = n$. Atunci*

1. *Orice mulţime de m elemente din V, cu $m > n$, este liniar dependentă;*

2. *Orice mulţime de n elemente din V este bază a lui V dacă şi numai dacă este mulţime liniar independentă.*

3. *Orice mulţime de n vectori din V este bază a lui V dacă şi numai dacă mulţimea este un sistem de generatori al lui V.*

Exemplu: Să se arate că mulţimea $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$. Determinaţi coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în această bază.

Soluţie: Cum mulţimea $\mathcal{B}$ are 3 elemente, iar $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, este suficient să arătăm, conform Propoziţiei 2.14, că $\mathcal{B}$ este o mulţime liniar independentă.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(2, 1, 0) + \alpha_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Atunci, utilizând proprietăţile operaţiilor "+" şi "$\cdot$" pe mulţimea $\mathbb{R}^3$, deducem:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Avem astfel un sistem liniar şi omogen de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Deoarece determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

este nenul, rezultă că sistemul omogen are soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Aşadar, vectorii mulţimii $\mathcal{B}$ sunt liniar independenţi şi deci mulţimea $\mathcal{B}$ formează o bază.

Pentru a doua parte a exerciţiului, trebuie să determinăm scalarii $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cu proprietatea că

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 3, \end{cases}$$

obţinem soluţia $\beta_1 = -3, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0$. Aşadar, coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în baza $\mathcal{B}$ sunt $(-3, 2, 0)$.

Definiţia 2.15 *Se numeşte* ***rang al unei mulţimi*** U*, de vectori din spaţiul vectorial* $(V,+,\cdot)$*, dimensiunea subspaţiului generat de* U*, adică* $dim\,(Lin(U))$ *şi se notează cu* $rang(U)$*.*

Observaţie: Dacă V este un spaţiu liniar n-dimensional, atunci orice mulţime de n vectori liniar independenţi din V este o bază a lui V şi, de asemenea, orice sistem de n vectori din V care generează spaţiul liniar V alcătuieşte o bază a lui V.

Definiţia 2.16 *Fie* $(V,+,\cdot)$ *un spaţiu liniar cu* $dim(V)=n\in\mathbb{N}^*$*, fie* $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ *o bază a lui* V *şi fie* $B'=\{\mathbf{b}'_1,\mathbf{b}'_2,\ldots,\mathbf{b}'_m\}$ *o mulţime de* m *vectori din* V

Se numeşte ***matrice de trecere (schimbare) de la baza*** B ***la sistemul de vectori*** B' *matricea*

$$S_{B,B'}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1m}\\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nm}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,m}$$

unde, pentru $1\le k\le m$*,* $s_{1k},\ldots,s_{nk}$*, sunt coordonatele vectorului* $\mathbf{b}'_k$*, în raport cu* $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$*. Cu alte cuvinte,* s_{ij} *sunt astfel încât*

$$\begin{cases}\mathbf{b}'_1 &= s_{11}\mathbf{b}_1+s_{21}\mathbf{b}_2+\ldots+s_{n1}\mathbf{b}_n\\ \mathbf{b}'_2 &= s_{12}\mathbf{b}_1+s_{22}\mathbf{b}_2+\ldots+s_{n2}\mathbf{b}_n\\ \vdots & \qquad\qquad\vdots\\ \mathbf{b}'_m &= s_{1m}\mathbf{b}_1+s_{2m}\mathbf{b}_2+\ldots+s_{nm}\mathbf{b}_n\end{cases}.$$

Din punct de vedere formal, putem scrie $\widetilde{B}'=\tilde{B}\cdot S$*, unde* $\widetilde{B}'=[\mathbf{b}'_1\ \mathbf{b}'_2\ldots\mathbf{b}'_m]$ *şi* $\tilde{B}=[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n]$*.*

Propoziţia 2.17 *Fie* $(V,+,\cdot)$ *un spaţiu liniar finit-dimensional, cu* $\dim V=n\in\mathbb{N}^*$*. Dacă* $B=\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$*,* $B'=\{\mathbf{b}'_1,\ldots,\mathbf{b}'_n\}$ *sunt două baze a lui* V*, iar* $S_{B,B'}$ *este matricea de trecere de la* B *la* B'*, atunci matricea* $S_{B,B'}$ *este nesingulară (adică cu determinantul diferit de* 0*) şi* $S^{-1}_{B,B'}$ *este matricea de trecere de la* B' *la* B*(adică* $\widetilde{B}=\widetilde{B}'\cdot S^{-1}_{B,B'}$*).*

Mai mult, dacă $\mathbf{x}\in V$*, iar* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$ *sunt coordonatele lui* $\mathbf{x}$ *în raport cu* $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$*, respectiv* $\mathbf{b}'_1,\ldots,\mathbf{b}'_n$*, atunci*

$$X_{B'}=S^{-1}_{B,B'}\cdot X_B,$$

unde $X_B\overset{not}{=}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}$*, iar* $X_{B'}\overset{not}{=}\begin{bmatrix}\alpha'_1\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}$*.*

Definiţia 2.18 *Fie* $(V,+,\cdot)$ *un spaţiu liniar, finit-dimensional şi două baze ale sale,* B *şi* B'*. Spunem că* ***bazele*** B *şi* B' *sunt* ***la fel orientate*** *dacă determinantul matricii* $S_{B,B'}$ *de trecere de la* B *la* B' *este pozitiv. Bazele* B *şi* B' *se numesc* ***contrar orientate*** *dacă* $det(S_{B,B'})<0$*.*

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 2.19 *Fie* $(V,+,\cdot)$ *un spaţiu vectorial.*

a) *Se numeşte* ***produs scalar*** *pe* V *o aplicaţie* $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$*, care satisface următoarele proprietăţi:*

PS1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este* ***pozitiv definită****, adică*

i. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geqslant 0,\ \forall\, \mathbf{x}\in V$ *şi*

ii. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0,$ *dacă şi numai dacă* $\mathbf{x}=\mathbf{0}\in V$*;*

PS2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este* ***simetrică****, adică*

i. $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle,\ \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\in V$*;*

PS3) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este* ***biliniară****, adică*

i. $\langle \alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+\beta\langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle,$ *şi*

ii. $\langle \mathbf{x},\alpha\cdot\mathbf{y}+\beta\cdot\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\beta\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle,\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V.$

b) *Cvadruplul* $(V,+,\cdot,\langle\cdot,\cdot\rangle)$*, în care* $(V,+,\cdot)$ *este un spaţiu liniar, iar* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este un produs scalar pe* V *se numeşte* ***spaţiu prehilbertian****. Pentru simplitate, vom nota* $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *în loc de* $(V,+,\cdot,\langle\cdot,\cdot\rangle)$*.*

Propoziţia 2.20 *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$ *şi* $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *definită prin*

$$\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle := x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,\quad \forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

Atunci $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este un produs scalar pe* $\mathbb{R}^n$*, numit* ***produsul scalar euclidian*** *(canonic).*

Demonstraţia acestui rezultat este imediată şi este lăsată ca exerciţiu. Dacă nu este precizat altfel, spaţiul $\mathbb{R}^n$ va fi întotdeauna considerat ca dotat cu produsul scalar euclidian.

Definiţia 2.21 *Fie* $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu prehilbertian.*

1) Doi vectori $\mathbf{x}\in V$ *şi* $\mathbf{y}\in V$ *se numesc* ***ortogonali****, şi notăm* $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ *dacă* $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$*.*

2) Fie $\mathbf{x}\in V$ *şi* U *o submulţime nevidă a lui* V*. Spunem* $\mathbf{x}$ *este* ***ortogonal pe mulţimea*** U *(notăm* $\mathbf{x}\perp U$*), dacă* $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0,\ \forall\,\mathbf{y}\in U$*.*

3) Dacă U *este o submulţime nevidă a lui* V*, numim* U ***sistem ortogonal*** *dacă* $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$*,* $\forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$*, cu* $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$*.*

4) Dacă $U\subseteq V$*, atunci prin* ***suplimentul ortogonal al lui*** U*, înţelegem mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe* U*. Altfel scris*

$$U^{\perp} := \{\mathbf{x}\in V \mid \mathbf{x}\perp U\}$$

Definiţia 2.22 *Fie* $(V,+,\cdot,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$*.* ***Unghiul dintre vectorii*** $\mathbf{x}$ ***şi*** $\mathbf{y}$*, notat prin* $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *sau* $\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$*, se defineşte prin relaţia:*

$$\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \arccos\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}}.$$

Observaţie: Are loc $\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})}=\widehat{(\mathbf{y},\mathbf{x})},\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V\setminus\{0\}$. Mai mult, dacă $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V\setminus\{0\}, \widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})}=\frac{\pi}{2}$, dacă şi numai dacă $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

Definiţia 2.23 *Fie* $(V,+,\cdot)$ *un spaţiu liniar real. Spunem că aplicaţia* $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ *este o* ***normă*** *pe* V *dacă*

N1) $\|\mathbf{x}\|\geqslant 0,\ \forall\,\mathbf{x}\in V$

N2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$*;*

N3) $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$*,* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$*,* $\forall\, \mathbf{x} \in V$ *(omogenitate);*

N4) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$*,* $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* ***spaţiu normat****.*

Propoziţia 2.24 *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$*. Norma indusă de produsul scalar euclidian pe* $\mathbb{R}^n$*, definită prin*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

se numeşte norma euclidiană.

Demonstraţie: Se verifică axiomele *N1)-N4)* din Definiţia 2.23:

N1): $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \geqslant 0, \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

N2): $\|\mathbf{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

N3): $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha|\|\mathbf{x}\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

N4): aplicând inegalitatea lui Minkowski, pentru $p = 2$, obţin concluzia.

◀

Propoziţia 2.25 *Fie* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu prehilbertian. Atunci aplicaţia* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *definită de*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall\, \mathbf{x} \in V$$

este o normă pe V *numită* ***norma indusă de produsul scalar*** $\langle \cdot, \cdot \rangle$*.*

Demonstraţie: Proprietăţile $N1) - N3)$ sunt evidente. Vom demonstra proprietatea $N4)$. Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Cum produsul scalar este biliniar şi simetric, vom putea scrie

$$\langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Însă, $\langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Prin urmare, discriminantul ecuaţiei de gradul II, în λ este negativ, adică

$$\Delta = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \leq 0.$$

Aşadar, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (inegalitate cunoscută sub numele de *Inegalitatea lui Schwarz*). Dacă luăm $\lambda = 1$ în (1), vom obţine

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Deci, inegalitatea triunghiulară are loc. ◀

Observaţie: Există şi norme neinduse de vreun produs scalar.

Definiţia 2.26 *Fie* $(V, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi* $\mathbf{x} \in V$*. Elementul* $\mathbf{x}$ *se numeşte* ***versor*** *dacă* $\|\mathbf{x}\| = 1$*.*

Baze ortonormale. Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Definiţia 2.27 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian.*

a) *O submulţime nevidă $U \subseteq V$ se numeşte sistem ortonormal dacă U este un sistem ortogonal şi fiecare element al lui U este un versor.*

b) *Dacă B este o bază a lui V şi B este un sistem ortogonal, atunci B se numeşte* ***bază ortogonală*** *a lui V.*

c) *Dacă B este o bază a lui V şi B este un sistem ortonormal, atunci B se numeşte* ***bază ortonormală*** *a lui V.*

Cu alte cuvinte, U este *un sistem ortonormal* dacă şi numai dacă, pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{când } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Bineînteles, baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, a lui $\mathbb{R}^n$, este o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 2.28 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui V. Se numeşte* ***determinantul Gram*** *asociat unei baze B, numărul $\det G \in \mathbb{R}$, unde*

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle & \ldots & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n\rangle \\ \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2\rangle & \ldots & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2\rangle & \ldots & \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{2}$$

Se poate observa că G este o matrice simetrică şi nesingulară. Într-adevăr, dacă notăm $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle$, pentru $1 \leq i, j \leq n$, atunci a rezolva sistemul omogen cu n ecuaţii şi n necunoscute

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + \ldots + g_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

revine la a găsi $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$, astfel încât $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}\rangle = 0, \ldots \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}\rangle = 0$, adică $\mathbf{x} \perp B$. Deoarece $B^\perp = Lin(B)^\perp = V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}$ nu poate fi decât $\mathbf{0}$, ceea ce înseamnă, datorită liniarei independenţe a vectorilor $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$, că sistemul (3) are doar soluţia trivială, deci G este inversabilă.

Dacă $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$, respectiv $\mathbf{y}$, în raport cu $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle = X_B^T \cdot G \cdot Y_B,$$

unde $X_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, iar $Y_B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vom spune că baza B este *ortogonală*, respectiv *ortonormală* dacă şi numai dacă matricea G este diagonală, adică $g_{ij} = 0$, $\forall\, i, j \in \overline{1, n}, i \neq j$, respectiv dacă G este matricea unitate I_n.

Teorema 2.1 ***(Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt)***
Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci există o bază ortonormală $B' = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$, astfel încât $Lin(\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_k\}) = Lin(\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_k\})$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstraţie: Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian n-dimensional şi $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ o bază a lui.

Plecând de la B, se poate construi o bază $B' = \{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiaşi spaţiu V, utilizând **algoritmul lui Gram-Schmidt**, după cum urmează:

1. Pasul 1: $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1$.
2. Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, aşa încât vectorul $\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 + \lambda_1 \mathbf{b}'_1$ să fie ortogonal pe $\mathbf{b}'_1$, adică să avem $0 = \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2\rangle + \lambda_1 \langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1\rangle$. Rezultă $\lambda_1 = -\dfrac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2\rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1\rangle}$. Astfel,
$$\mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_2\rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1\rangle}\mathbf{b}'_1.$$
3. Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 şi μ_2 din $\mathbb{R}$, aşa încât $\mathbf{b}'_3 = \mathbf{b}_3 + \mu_1 \mathbf{b}'_1 + \mu_2 \mathbf{b}'_2$ să fie ortogonal pe sistemul $\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2\}$, adică să avem $\langle \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_1\rangle = 0$ şi $\langle \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_2\rangle = 0$.
Găsim $\mu_1 = -\dfrac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_3\rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1\rangle}$ şi $\mu_2 = -\dfrac{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_3\rangle}{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2\rangle}$. Prin urmare, avem:
$$\mathbf{b}'_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}_3\rangle}{\langle \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1\rangle}\mathbf{b}'_1 - \frac{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_3\rangle}{\langle \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2\rangle}\mathbf{b}'_2.$$
4. Pasul k: Continuând procedeul, obţinem formula generală:
$$\mathbf{b}'_k = \mathbf{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_k\rangle}{\langle \mathbf{b}'_i, \mathbf{b}'_i\rangle}\mathbf{b}'_i, k = \overline{2,n}.$$

Aşadar, am găsit baza ortogonală B'. În cele din urmă, pentru a obţine o bază ortonormală, vom considera $B'' = \{\mathbf{b}''_1, \mathbf{b}''_2, \ldots, \mathbf{b}''_n\}$, unde $\mathbf{b}''_k = \dfrac{\mathbf{b}'_k}{\|\mathbf{b}'_k\|}$, $k = \overline{1,n}$, iar $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, considerat pe V. ◀

Observaţie: O consecinţă importantă a acestui rezultat este că orice spaţiu prehilbertian finit dimensional admite o bază finit dimensională.

Bibliografie orientativă

[1] D. Buşneag, D. Piciu - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[2] Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

[3] Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.

[5] F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

[6] T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar in algebra superioară*, Matrix Rom Bucureşti, 2012.

[7] J. Harcet, L Heinrichs, P. M. Seiler - *Mathematics. Higher Lever*, Oxford Univ. Press, 2012.

[8] R. Solomon - *Notes on Ordinals and Cardinals*, math.uconn.edu, 2014.