Cursul 2
Şiruri de numere reale. Inegalităţi remarcabile.

Mulţimea numerelor reale

În cele ce urmează, vom indica, sub formă de axiome, proprietăţile fundamentale ale unui sistem de numere reale, adică ale unui corp total ordonat complet.

Definiţia 2.1 *Se numeşte* ***mulţime de numere reale*** *o mulţime* $\mathbb{R}$ *înzestrată cu două operaţii algebrice:* $+$ *(adunarea) şi* $\cdot$ *(înmulţirea), precum şi cu o relaţie de ordine:* $\leq$*, în raport cu care sunt îndeplinite următoarele trei grupe de axiome:*

I. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *este un corp, adică au loc:*

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

(I.2) $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;

(I.3) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$;

(I.4) $x + y = y + x,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

(I.5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

(I.6) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

(I.7) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

(I.8) $x \cdot y = y \cdot x,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

II. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *este un corp ordonat, adică:*

(II.1) $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

(II.2) $(x \leq y) \vee (y \leq x),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

(II.3) $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

(II.4) $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow x \leq z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

(II.5) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

(II.6) $((x \leq y) \wedge (0 \leq z)) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

*III. (****Axioma de completitudine Cantor-Dedekind****) Orice submulţime nevidă* A *a lui* $\mathbb{R}$ *care este majorată admite cel puţin o margine superioară în* $\mathbb{R}$*.*

Observaţii:

1) Orice proprietate a numerelor reale poate fi demonstrată pornind de la aceste axiome. Spre exemplu, *scăderea* şi *împărţirea* pot fi introduse astfel:

$$x - y := x + (-y), x, y \in \mathbb{R};$$

$$\frac{x}{y} := x \cdot (y^{-1}), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

2) Ţinând cont de axiomele lui $\mathbb{R}$ se observă cu uşurinţă că, întrucât $1 \in \mathbb{R}$, atunci şi elementele $2 = 1+1, 3 = (1+1)+1, ...$ aparţin mulţimii numerelor reale. Aceste elemente $1, 2, 3, ...$ le vom numi *numere naturale*, iar mulţimea lor o vom nota cu $\mathbb{N}$. De asemenea, odata cu orice element $n \in \mathbb{N}$, avem că $-n \in \mathbb{R}$. Totalitatea elementelor $0, 1, -1, 2, -2, ...$ se notează cu $\mathbb{Z}$, şi numeşte *mulţimea numerelor întregi.* Mai mult, dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ iar $y \neq 0$, atunci $x \cdot y^{-1} \in \mathbb{R}$. Mulţimea numerelor reale care satisfac această proprietate se numeşte *mulţimea numerelor raţionale* şi se notează cu $\mathbb{Q}$.

Aşadar, între submulţimile remarcabile ale lui $\mathbb{R}$, avem următoarele relaţii

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Definiţia 2.2 *Pentru $x \in \mathbb{R}$, definim* ***valoarea absolută*** *a lui x prin*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propoziţia 2.3 *Au loc următoarele proprietăţi:*

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

iii)$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

iv)$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4 *Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$.*

1. *Un element $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A, dacă şi numai dacă:*
   - *(i)* $x \leq \alpha,\ \forall\ x \in A$;
   - *(ii)* $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.
2. *Un element $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A, dacă şi numai dacă:*
   - *(i)* $\beta \leq x,\ \forall\ x \in A$;
   - *(ii)* $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

Demonstraţie: Vom demonstra prima proprietate, cea legată de marginea inferioară se demonstrează analog.

$\Longrightarrow$: Cum $\alpha = \sup(\mathrm{A})$, α este majorant al mulţimii A: $x \leq \alpha, \forall x \in A$. Pe de altă parte, α este cel mai mic majorant, prin urmare, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\alpha - \varepsilon$ sa nu fie majorant pentru A. Aşadar, relaţia de ordine $\leq$ fiind totală, există $x_\varepsilon \in A$, astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

$\Longleftarrow$: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ ce satisface (i) şi (ii). Conform punctului (i), α este un majorant pentru A. Să presupunem că mai există $\gamma \in \mathbb{R}$, un alt majorant pentru A, astfel încât $\alpha > \gamma$. Atunci, luând $\varepsilon := \alpha - \gamma > 0$, din (ii) obţinem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$, adică $\gamma < x_\varepsilon$. Dar acest lucru contrazice faptul că γ este un majorant pentru A. Prin urmare, α este marginea superioară a mulţimii A. $\square$

Observaţii:

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, atunci

$$\sup[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \sup[\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \sup(\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \sup(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{b}$$
$$\inf[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \inf[\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \inf(\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \inf(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$$

2. Dacă o mulţime A are un cel mai mare (cel mai mic) element, atunci $\max\mathrm{A} = \sup\mathrm{A}$ (respectiv, $\min\mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$).

Deoarece între mulţimea $\mathbb{R}$ şi mulţimea punctelor de pe o dreaptă (pe care s-a stabilit un punct numit origine, un sens, o orientare şi o unitate de măsură) se poate pune în evidenţă o corespondenţă biunivocă (bijecţie), vom identifica numerele reale cu punctele dreptei respective. Vom numi această dreaptă, ***dreapta reală***.

Cum, pentru o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ nevidă, nemajorată, nu mai avem asigurat faptul că $\sup A \in \mathbb{R}$, iar pentru o mulţime nevidă şi neminorată $B \subset \mathbb{R}$, nu putem spune că $\inf B \in \mathbb{R}$, vom considera două simboluri, numite ***plus infinit*** şi ***minus infinit***, notate cu $+\infty$ şi respectiv $-\infty$. Vom nota prin $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi vom numi această mulţime, ***dreapta reală extinsă*** .

Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, convenind ca

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Prin extensia menţionată, mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ este total ordonată, iar elementele $+\infty$ şi $-\infty$ – numite (acum) ***numere reale infinite*** (punctele de la infinit ale dreptei reale) sunt ***cel mai mare*** şi respectiv ***cel mai mic*** dintre elementele sale.

Se consideră lipsite de sens, fiind nedeterminate, operaţiile următoare: $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$; $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, $(+\infty)\cdot 0$,$(-\infty)\cdot 0$ şi $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Elucidarea sensului acestor operaţii are loc, de regulă, pe seama expresiilor din care provin.

Şiruri de numere reale

Definiţia 2.5 *Se numeşte* ***şir de numere reale*** *o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu x_n, valoarea funcţiei f în punctul $n \in \mathbb{N}$, adică $x_n = f(n)$. Numerele $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se numesc ***termeni ai şirului***, iar x_n se numeşte ***termenul general al şirului*** f, sau ***termenul de rang*** n al şirului. Un şir cu termenul general x_n, se va nota $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 0}$.

Dacă primii k termeni ai şirului, $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, nu sunt definiţi, adică funcţia este definită pe mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$, atunci vom nota şirul prin $(x_n)_{n\geq k}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **şir constant** dacă mulţimea valorilor sale este formată dintr-un singur element, adică $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.6 *Spunem că un şir de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este:*

i) ***mărginit inferior*** *dacă există* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$*;*

ii) ***mărginit superior*** *dacă există* $\beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$*;*

iii) ***mărginit*** *dacă există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha \leq x_n \leq \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) ***nemărginit*** *dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu este mărginit (adică fie nu este mărginit superior, fie nu este mărginit inferior, sau fie nu este mărginit nici superior, nici inferior).*

Observaţie: Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

1. Şirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ este mărginit deoarece $|x_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Şirul $x_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, deoarece este mărginit inferior ($x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$), dar nu este mărginit superior.
3. Şirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nu este mărginit inferior, dar admite margine superioară ($x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
4. Şirul $x_n = (-1)^n 3^n, n \in \mathbb{N}$ este nemărginit, nefiind mărginit superior şi nici inferior.

Definiţia 2.7 *Spunem că un şir de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este:*

i) ***crescător (strict crescător)*** *dacă* $x_{n+1} \geq x_n$ *(respectiv* $x_{n+1} > x_n$*), pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

ii) ***descrescător (strict descrescător)*** *dacă* $x_{n+1} \leq x_n$ *(respectiv* $x_{n+1} < x_n$*), pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

iii) ***(strict) monoton*** *dacă este sau (strict) crescător, sau (strict) descrescător.*

Exemple:

1. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este strict crescător.
2. Şirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este şir strict descrescător.
3. Şirul $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ nu este monoton.
4. Şirul $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, unde c este o constantă reală, este simultan crescător şi descrescător.

Definiţia 2.8 *Spunem că un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***convergent*** *dacă există un element* $l \in \mathbb{R}$*, numit* ***limita*** *şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, astfel încât:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

În acest caz spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* l*, şi scriem* $x_n \to l$*, sau* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$*.*

Definiţia 2.9 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Spunem că:*

i) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $+\infty$ *dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$*;*

ii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $-\infty$*, dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$*.*

Definiţia 2.10 *Spunem că şirul de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***divergent*** *dacă nu este convergent, adică dacă fie nu are limită, fie are limita* $+\infty$ *sau* $-\infty$*.*

Teorema 2.11 *Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.*

Demonstraţie: Presupunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la două elemente $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Fie $\varepsilon := \dfrac{|x-y|}{2} > 0$. Atunci, conform definiţiei 2.8, există $n_\varepsilon, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - y| < \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon$. Aşadar, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n''_\varepsilon$ să avem

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < 2\varepsilon = |x - y|,$$

ceea ce este absurd, întrucât $|x - y| > 0$. Prin urmare, nu putem avea $x \neq y$. $\square$

Propoziţia 2.12 *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie: Fie $x_n \to x$. Atunci, pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < 1$, pentru orice $n \geq n_1$. Aşadar, putem scrie

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \forall n \geq n_1.$$

Dacă fixăm $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_1-1}|, 1 + |x|\}$, atunci avem $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. $\square$

Exerciţiul 1: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este convergent la 0.

Soluţie: Vom folosi Definiţia 2.8. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Observăm că are loc relaţia

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

cu condiţia ca $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Atunci, aleg $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$, şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exerciţiul 2: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{2n+4}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ este convergent având limita 2.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci are loc:

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n+4}{n+3} - 2\right| = \frac{2}{n+3} < \varepsilon$$

cu condiţia ca $\dfrac{2}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 3 > \dfrac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{2}{\varepsilon} - 3$.

Atunci, $n_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 3\right] + 1 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] - 2$, iar pentru $n \geq n_\varepsilon, |x_n - 2| < \varepsilon$, de unde, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Exerciţiul 3: Să se arate că şirul $x_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}$ are limita $+\infty$.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Observăm că $x_n = 3n - 2 > \varepsilon$ dacă $n > \dfrac{\varepsilon + 2}{3}$.

Aşadar, luând $n_\varepsilon = \left[\dfrac{\varepsilon + 2}{3}\right] + 1$, obţinem că $x_n > \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Definiţia 2.13 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte* ***subşir*** *al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 2.14 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir convergent la $x\in\mathbb{R}$. Dacă $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge la x.*

Demonstraţie: Fie x_n un şir convergent la $x\in\mathbb{R}$. Atunci $\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $|x_n-x|<\varepsilon, \forall n\geq n_\varepsilon$. Pe de altă parte, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător, deci există $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$n_k\geq n_\varepsilon, \forall k\geq k_\varepsilon.$$

Aşadar, $|x_{n_k}-x|<\varepsilon, \forall k\geq k_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x$. □

Corolarul 2.15 *i. Dacă un şir are un subşir divergent, atunci acel şir este divergent.*

ii. Dacă un şir conţine două subşiruri convergente cu limite diferite, atunci şirul este divergent.

Exemple:

1. Şirul $x_n=(-1)^n, n\in\mathbb{N}^*$, este divergent. Acesta conţine subşirul $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ cu limita 1 şi subşirul $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ cu limita -1.
2. Şirul $x_n=(-1)^n n$, $n\in\mathbb{N}$ este divergent, deoarece conţine subşirul x_{2k} cu limita $+\infty$.
3. Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *periodic* dacă există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+p}=x_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Numărul p se numeşte *perioadă* a şirului. Orice şir periodic de perioada $p\geq 2$ este divergent.

Propoziţia 2.16 (Proprietăţi ale şirurilor convergente) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale, convergente la $x\in\mathbb{R}$, respectiv la $y\in\mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(P1) $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|x|$;

(P2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=x\pm y$;

(P3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=x\cdot y$;

(P4) dacă $y\neq 0$, atunci există un rang $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $y_n\neq 0, \forall n\geq n_0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{x}{y}$;

(P5) dacă $x_n\leq y_n, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci $x\leq y$;

(P6) (criteriul cleştelui) dacă există şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_n\leq z_n\leq y_n, \forall n\in\mathbb{N}$, iar $x=y$, atunci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x$;

Exerciţiul 4: Să se calculeze limita şirului $x_n=\dfrac{\sin n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie: Cum $-1\leq\sin n\leq 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$, avem $-\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\sin n}{n}\leq\dfrac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, din criteriul cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

Propoziţia 2.17 (Criteriul majorării) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi fie $x\in\mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero astfel încât*

$$|x_n-x|\leq\alpha_n, \forall n\in\mathbb{N}$$

atunci (x_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$, fixat. Cum $\alpha_n \to 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|\alpha_n| < \varepsilon$. Prin urmare, $|x_n - x| \leq \alpha_n \leq |\alpha_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Exerciţiul 5: Să se arate că şirul $x_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}, n \in \mathbb{N}^*$, converge la 1.

Soluţie: Evaluăm $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} - 1\right| = \left|\frac{n - 1}{n^2 + n + 1}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Cum $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, atunci, aplicând criteriul majorării, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Teorema 2.18 (Teorema convergenţei monotone (Weierstrass))
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

i) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi mărginit superior, atunci acesta converge la $\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

ii) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi mărginit inferior, atunci acesta converge la $\inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Putem rezuma teorema de mai sus în felul următor: *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie: i) Cum şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior, admite margine superioara; fie $\alpha = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Conform Teoremei 2.4, avem $x_n \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \alpha - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Cum şirul (x_n) este crescător avem $x_n \geq x_{n_\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Combinând cele două inegalităţi obţinem, pentru $\varepsilon > 0$, că $\alpha - \varepsilon < x_n, \forall n \geq n_\varepsilon$. Aşadar, avem

$$|x_n - \alpha| = \alpha - x_n < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era ales arbitrar, obţinem că x_n converge la α. Punctul ii) se demonstrează similar, considerând şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi utilizând punctul i). $\square$

Exerciţiul 6: Să se demonstreze convergenţa următorului şir

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluţie: Studiem mărginirea şi monotonia şirului. Observăm că

$$0 < x_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Aşadar, şirul este mărginit. Studiem acum monotonia:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0,$$

adică şirul este strict crescător. Conform Teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Teorema 2.19 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

i) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

În ambele cazuri, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Lema 2.20 *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale, atunci există un subşir al său care este monoton.*

Teorema 2.21 (Bolzano-Weierstrass) *Din orice şir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent.*

Teorema 2.22 (Stolz-Cesàro) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton şi nemărginit. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ şi este egală cu x.*

Exerciţiul 7: Să se calculeze limita şirului $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

Soluţie: Fie $x_n = \ln n$ şi $y_n = n, n \in \mathbb{N}^*$. Observăm că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător, cu limita $+\infty$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0.$$

Aşadar, conform Teoremei Stolz-Cesàro, există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Definiţia 2.23 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Definiţia 2.24 se poate scrie şi sub următoarea formă echivalentă:

Definiţia 2.24 *Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă pentru orice*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Intuitiv, într-un şir Cauchy de la un rang încolo toţi termenii sunt apropiaţi unul de celălalt.

Propoziţia 2.25 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy atunci el este mărginit.*

În particular, cum este mărginit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un subşir convergent.

Teorema 2.26 (Cauchy) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie:

$\Longrightarrow$: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, vom avea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare, dacă $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

aşadar, şirul este fundamental.

$\Longleftarrow$: Presupunem că (x_n) este un şir fundamental. Conform Propoziţiei 2.26, rezultă că (x_n) este şir mărginit (demonstraţia acestui rezultat este similară cu cea a Propoziţiei 2.12: dacă $\varepsilon = 1$, atunci $|x_n| \leq |x_{n_1}| + |x_n - x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|, \forall n \geq n_1$). Conform Teoremei Bolzano-Weierstrass, şirul mărginit (x_n) conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita acestui subşir. Arătăm că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $x_{n_k} \to x$, rezultă că există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, cum (x_n) este şir Cauchy, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Fie $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, cu $n'_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ şi k'_ε astfel încât $n_{k'_\varepsilon} \geq n'_\varepsilon$. Dacă $n \geq n_{k'_\varepsilon}$, rezultă

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_{k'_\varepsilon}}| + |x_{n_{k'_\varepsilon}} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deoarece $n \geq n_{k'_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ şi $k'_\varepsilon \geq k_\varepsilon$. Prin urmare, şirul (x_n) este convergent cu limita x. $\square$

Exerciţiul 8: Arătaţi că şirul $x_n = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + ... + \dfrac{\sin nx}{2^n}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ este un şir Cauchy, deci convergent.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$ şi $n, p \in \mathbb{N}$. Atunci, avem:

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| =& \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right] < \frac{1}{2^n}, \forall p \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Am obţinut o majorare independentă de $p \in \mathbb{N}$, şi, în plus, $\dfrac{1}{2^n} \to 0$. Deci, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Exerciţiul 9: Arătaţi că şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$ nu este Cauchy.

Soluţie: Vom arăta că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Luând $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, şi $p = n$, obţinem $|x_{n+p} - x_n| \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \varepsilon$. Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este Cauchy.

Puncte limită ale unui şir

Definiţia 2.27 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

*a) Spunem că $x \in \overline{\mathbb{R}}$ este **punct limită** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \to x$.*

b) Vom nota mulţimea tuturor punctelor limită cu $L(x_n)$.

Conform Lemei 2.20, avem $L(x_n) \neq \varnothing$, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale.

Definiţia 2.28 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

*a) Se numeşte **limită inferioară** a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea inferioară a mulţimii $L(x_n)$.*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L(x_n)$$

*b) Se numeşte **limită superioară** a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea superioară a mulţimii $L(x_n)$;*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L(x_n).$$

Observaţii: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

1) Avem:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent la un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ şi are loc:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x;$$

3) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se poate arăta că există un subşir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ şi, respectiv, un subşir monoton crescător care să conveargă la $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$.

Inegalităţi remarcabile

1. **Inegalitatea mediilor**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$[1]. Introducem următoarele notaţii:

$$m_a := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ - } \textit{media aritmetică} \text{ a numerelor } x_1, \ldots, x_n;$$
$$m_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ - } \textit{media geometrică} \text{ a numerelor } x_1, \ldots, x_n;$$
$$m_h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \text{ - } \textit{media armonică} \text{ a numerelor } x_1, \ldots, x_n.$$

   Atunci, are loc ***inegalitatea mediilor***

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

   Fiecare dintre aceste relaţii devine egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2. **Inegalitatea lui Hölder**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$ şi fie $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci, are loc:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

   Este uşor de arătat că are loc şi următoarea inegalitate numită ***inegalitatea lui Hölder cu ponderi***

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

   unde $\lambda_1, ..., \lambda_n, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   Dacă $p = q = 2$, atunci din (1) obţinem ***inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz***

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

   În relaţia (3) egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $u, v \in \mathbb{R}$, cu $u^2 + v^2 \neq 0$, astfel încât $ua_i + vb_i = 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

3. **Inegalitatea lui Minkowski**

   Fie $n \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi fie $p \in \mathbb{R}_+^*$.

   i) Dacă $p \geq 1$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

   ii) Dacă $0 < p < 1$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

   În ambele cazuri, dacă $p \neq 1$, egalitatea are loc dacă şi numai dacă n-uplele $(a_1, ..., a_n)$ şi $(b_1, ..., b_n)$ sunt proporţionale.

[1] Reamintim că $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, iar $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = (0, \infty)$

4. **Inegalitatea lui Carleman**

   Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_i)^{\frac{1}{i}} \leq e \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{6}$$

   Egalitatea are loc doar când $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Bibliografie orientativă

[1] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Universităţii “Al. I. Cuza”, Iaşi, 1993.

[2] G. Păltineanu, *Analiză matematică*, Editura Universitaria, Craiova, 2002,

[3] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2015.

[4] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Did actică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[5] M. O. Drâmbe, *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Editura GIL, Zalău, 2003.