— Curs 3 —

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \vee r)$ $\qquad$ $prop : LP \to 2^A$

$prop(\varphi) = prop((p \wedge \neg q)) \cup prop(r) = prop(p) \cup prop(\underbrace{\neg q}_{\varphi_1}) \cup \{r\}$

$= \{p\} \cup prop(q) \cup \{r\}$

$= \{p, r\} \cup \{q\} = \{p, q, r\}$

Atribuire : $\tau : A \to B$ $\qquad$ $B = \{0, 1\}$

$\hat{\tau} : LP \to B$ — extensia homomorfică a lui τ

φ este adevărată în $\tau \iff \hat{\tau}(\varphi) = 1$

φ - satisfiabilă ddacă există $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 1$.

φ - validă ddacă pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi) = 1$.

$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ddacă pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) = \hat{\tau}(\varphi_2)$

<u>Th</u> : pt orice $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$ avem :
1. $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ (1)
2. $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ (2)

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \varphi$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\} \models \varphi$ ddacă pt orice $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi_1) = \hat{\tau}(\varphi_2) = \ldots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$ avem și $\hat{\tau}(\varphi) = 1$.

<u>Aplicație</u> :

```
if(((y%4==0)&&(y%100!=0)) || (y%400==0))
    printf("%d is a leap year", y);
else
    printf("%d is not a leap year", y);
```

```
if(((y%4!=0)||(y%100==0))&&(y%400!=0))
    printf("%d is not a leap year", y);
else
    printf("%d is a leap year", y);
```

p : $y \% 4 == 0$

q : $y \% 100 == 0$

r : $y \% 400 == 0$

$\neg((p \wedge \neg q) \vee r) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg r)$

$$\neg((\underbrace{p\wedge\neg q}_{\varphi_1})\vee \underbrace{r}_{\varphi_2}) \overset{(1)}{\equiv} (\neg(p\wedge\neg q)\wedge\neg r) \overset{(2)}{\equiv} ((\neg p\vee\neg\neg q)\wedge\neg r)$$
$$\equiv ((\neg p\vee q)\wedge\neg r)$$

Implicatia : $(\varphi_1\to\varphi_2)\equiv(\neg\varphi_1\vee\varphi_2)$

Def: pt orice $\tau:A\to B$: $\hat{\tau}((\varphi_1\to\varphi_2)) = \overline{\hat{\tau}(\varphi_1)} + \hat{\tau}(\varphi_2)$

Dubla implicatie : $(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)\equiv((\varphi_1\to\varphi_2)\wedge(\varphi_2\to\varphi_1))$

Ex : $\varphi=(p\to p)$ valida ddacă ~~$(\neg p\vee p)=1$?~~ (ddacă $(\neg p\vee p)$ este validă)

ddacă pt orice $\tau:A\to B$ avem $\hat{\tau}((\overset{\varphi_1}{p}\to\overset{\varphi_2}{p}))=1$

ddacă —— " —— avem $\overline{\tau(p)}+\tau(p)=1$ "A".

Mai multe logici

LP : logica conectorilor $\neg, \wedge, \vee$ $\qquad LP = LP_{\neg,\wedge,\vee}$

1. $LP_{\neg,\vee}$ - logica prop în care singurii conectori permiși sunt $\neg$ și $\vee$

$\neg(p\vee\neg q)\in LP_{\neg,\vee}$ $\qquad (p\wedge\neg q)\notin LP_{\neg,\vee}$

pt. $\varphi=(p\wedge\neg q)\equiv\neg(\neg p\vee\neg\neg q)\in LP_{\neg,\vee}$

$\neg(\varphi_1\wedge\varphi_2)\equiv(\neg\varphi_1\vee\neg\varphi_2) \iff \neg\neg(\varphi_1\wedge\varphi_2)\equiv\neg(\neg\varphi_1\vee\neg\varphi_2)$

$(\varphi_1\wedge\varphi_2)\equiv\neg(\neg\varphi_1\vee\neg\varphi_2)$

Th1: LP este echiexpresivă cu $LP_{\neg,\vee}$

folosim echivalenta $\leftarrow$ $\begin{cases}\text{pt orice } \varphi\in LP \text{ există } \varphi'\in LP_{\neg,\vee} \text{ a.î. } \varphi\equiv\varphi' \\ \text{și} \\ \text{pt orice } \varphi'\in LP_{\neg,\vee} \text{ există } \varphi\in LP \text{ a.î. } \varphi'\equiv\varphi\end{cases}$

evident $\varphi=\varphi'$ $\leftarrow$

$LP_{\neg,\vee}\subseteq LP$

2. $LP_{\perp,\to}$ $\perp$ - o formulă care este falsă în orice atribuire.

$$\perp \equiv (p \wedge \neg p)$$

Th 2: $LP_{\perp,\to}$ este echiexpresivă cu $LP_{\neg,\vee}$

$\hookrightarrow$ tranzitivă $\Rightarrow$ $LP_{\perp,\to}$ echiexpresivă cu LP (din Th 1 + tranzit.)

pt. orice $\varphi \in LP_{\perp,\to}$ există $\varphi' \in LP_{\neg,\vee}$ a.î. $\varphi \equiv \varphi'$

pt orice $\varphi' \in LP_{\neg,\vee}$ există $\varphi \in LP_{\perp,\to}$ a.î. $\varphi' \equiv \varphi$

Folosim: $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \to \varphi_2)$ (φ_1')

$(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

$\neg\varphi \equiv (\underset{A}{\varphi} \to \underset{\cancel{A}}{\perp})$

$(\varphi \to \perp) \equiv \neg\varphi \vee \underbrace{\perp}_{\text{fals în orice } \tau} \equiv \neg\varphi$

$\overline{(\varphi_1 \to \varphi_2)} \equiv (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ($\neg\varphi_1'$)

$\varphi_1' = \neg\neg\varphi_1'$

$(\varphi_1' \vee \varphi_2) \equiv (\neg\neg\varphi_1' \vee \varphi_2)$

$\equiv (\neg\varphi_1' \to \varphi_2)$ ($\neg\neg\varphi_1$, φ_1)

3. $LP_{\vee,\wedge}$ nu este la fel de expresivă ca LP (este strict mai puțin expresivă decât LP)

$(\neg p \wedge q)$

Th. 72: pt orice $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$ avem

$\varphi_1 \models \varphi_2$ ddacă $\models (\varphi_1 \to \varphi_2)$

ddacă pt orice $\tau: A \to B$ a.î. — avem $\hat{\tau}((\varphi_1 \to \varphi_2)) = 1$ (inexistentă)

Def. pt orice $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi_1) = 1$ avem $\hat{\tau}(\varphi_2) = 1$

ddacă $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ - validă

pt orice $\tau: A \to B$ dacă $\hat{\tau}(\varphi_1) = 1$ atunci $\hat{\tau}(\varphi_2) = 1$

$\hat{\tau}((\varphi_1 \to \varphi_2)) = 1$

Th 73 : pt orice $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi \in LP$ avem

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \varphi$ ddacă pt orice $\tau: A \to B$ a.î. (dacă) $\hat{\tau}(\varphi_1) = \hat{\tau}(\varphi_2) = \ldots = \hat{\tau}(\varphi_n) = 1$

avem (atunci) $\hat{\tau}(\varphi) = 1$

ddacă $((((\varphi_1 \land \varphi_2) \land \varphi_3) \ldots \land \varphi_n) \to \varphi)$ validă

Th 74 pt orice $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$ avem

$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ddacă $\models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$

ddacă $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ validă

Traducere din Limba română în LP

Ex: (Vreau să învăț la logică și (vreau) să trec examenul) dacă materia este interesantă.

2 pași: 1) identificarea prop atomice (și asocierea lor cu var. prop)

2) identificarea conectorilor logici și a ordinii lor (paranteze)

p : vreau să învăț la logică

q : vreau să trec examenul

r : materia este interesantă

Dacă $\underbrace{\text{materia este interesantă}}_{r}$, atunci $\underbrace{\text{vreau să învăț la logică}}_{p}$ și (vreau) $\underbrace{\text{să trec examenul}}_{q}$.

$(r \to (p \land q))$

De citit: Aplicația 2.

Fie majordomul, fie bucătarul a comis crima.

p: majordomul a comis crima.

q: bucătarul a comis crima.

$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

$\overbrace{\text{majordomul sau bucătarul}}^{(p \vee q)}$

dar - $\wedge$

nu amândoi

$\neg(p \wedge q)$

Deducția Naturală

Secvență : $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \vdash \varphi$ (φ este consecință sintactică din $\varphi_1, \dots \varphi_n$)

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \varphi \in \mathbb{LP}_{\neg, \wedge, \vee, \to, \perp}$

Ex : $\{p, q\} \vdash (p \wedge q)$

Regula de inferență : NUME $\dfrac{S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_n}{S}$ condiție

opțional

Ex: $\wedge_i \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}$

scheme de secvență

Instanță a regulii $\wedge_i$: $\wedge_i \dfrac{\{p, q\} \vdash \overset{\varphi}{p} \qquad \{p, q\} \vdash \overset{\varphi'}{q}}{\{p, q\} \vdash (p \wedge q)}$

Reguli fără ipoteze = axiome

Ex : ipoteză $\dfrac{\quad}{\Gamma \vdash \varphi}$ $\underline{\varphi \in \Gamma}$

condiția

Sistem deductiv: mulțime de reguli de inferență.

Dem formală = o listă de secvențe

1. S_1
2. S_2
3. S_3
⋮
n: S_n

fiecare S_i este concluzia obținută prin aplicarea unei reguli de inferență, bazându-ne ca ipoteze pe secvențe dintre $S_1 \ldots S_{i-1}$

Ex:

1. $\underbrace{\{p, q\}}_{\Gamma} \vdash \underbrace{p}_{\varphi}$ (ipoteză $p \in \{p, q\}$)
2. $\{p, q\} \vdash \underbrace{q}_{\varphi'}$ (ipoteză)

$$\wedge_i \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}$$

n = 3. $\underbrace{\{p, q\} \vdash (p \wedge q)}_{S}$ ($\wedge_i$, 1, 2)

Secvența S este validă dacă există o dem formală a.î. $S_n = S$

Ex: $\{p, q\} \vdash (p \wedge q)$ este o secvență validă

$$\underbrace{\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}}_{\text{ipoteze}} \vdash \underbrace{\varphi}_{\text{concluzie}}$$