CURS 3

SERII DE NUMERE REALE. SERII CU TERMENI POZITIVI

A. Arusoaie
e-mail: andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Web: http://profs.info.uaic.ro/~andreea.arusoaie/math.html

Facultatea de Informatică,
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

11 Octombrie, 2021

UNIVERSITATEA
„ALEXANDRU IOAN CUZA“
din IAȘI

Structura cursului

1. Serii de numere reale
   - Definiţii. Proprietăţi
   - Exemple
   - Condiţia necesară de convergenţă
   - Criteriul lui Cauchy de convergenţă
   - Operaţii cu serii
2. Serii cu termeni din pozitivi
   - Criterii de comparaţie
   - Criteriul de condensare al lui Cauchy
   - Criteriul radacinii - al lui Cauchy
   - Criteriul lui Kummer
   - Criteriul raportului - al lui D'Alembert
   - Criteriul lui Raabe-Duhamel
   - Criteriul lui Bertrand
   - Criteriul lui Gauss

Structura cursului

1. Serii de numere reale
   - Definiții. Proprietăti
   - Exemple
   - Condiția necesară de convergență
   - Criteriul lui Cauchy de convergență
   - Operații cu serii
2. Serii cu termeni din pozitivi
   - Criterii de comparație
   - Criteriul de condensare al lui Cauchy
   - Criteriul radacinii - al lui Cauchy
   - Criteriul lui Kummer
   - Criteriul raportului - al lui D'Alembert
   - Criteriul lui Raabe-Duhamel
   - Criteriul lui Bertrand
   - Criteriul lui Gauss

Ce este o serie?

Ce este o serie?

Problemă:

John se antrenează pentru un maraton; totusi, are un plan de lucru destul de neobisnuit. În prima zi de antrenament, aleargă o milă. A doua zi, acesta aleargă 1/2 dintr-o milă, iar a treia zi inca 1/4 de milă. În următoarele zile acesta aleargă jumătatea distanței parcurse în ziua precedentă.
Presupunând că John se antrenează o veșnicie, câte mile va alerga în total?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

Ce este o serie?

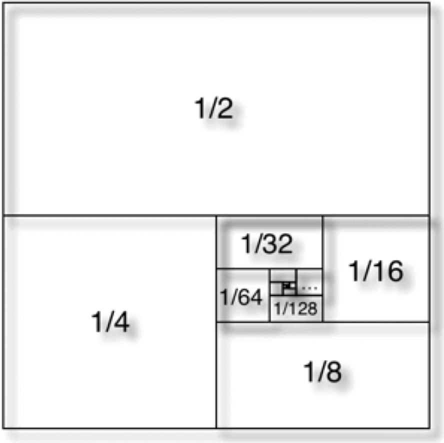
Problemă:

John se antrenează pentru un maraton; totusi, are un plan de lucru destul de neobisnuit. În prima zi de antrenament, aleargă o milă. A doua zi, acesta aleargă 1/2 dintr-o milă, iar a treia zi inca 1/4 de milă. În următoarele zile acesta aleargă jumătatea distanței parcurse în ziua precedentă.
Presupunând că John se antrenează o veșnicie, câte mile va alerga în total?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

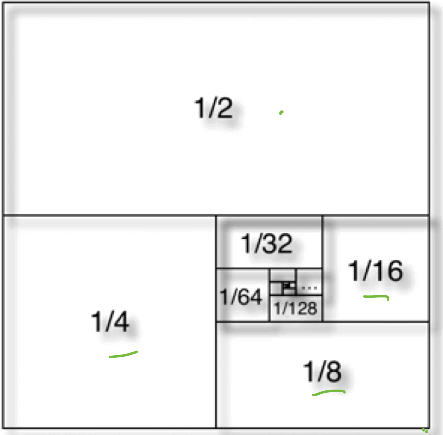
Răspuns: 2 mile

Ce este o serie?



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

Ce este o serie?



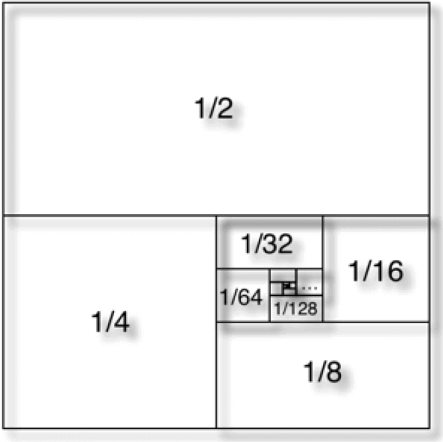
$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}+\ldots=?$$

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\dots+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=1$$

Ce este o serie?

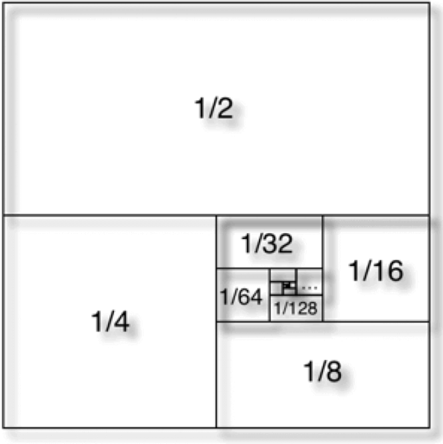


$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=?$$

Luăm suma primilor n termeni:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

Ce este o serie?



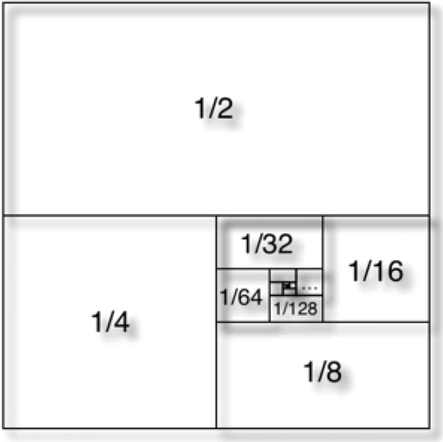
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=?$$

Luăm suma primilor n termeni:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

Ce se întâmplă când $n \to \infty$?

Ce este o serie?



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=?$$

Luăm suma primilor n termeni:

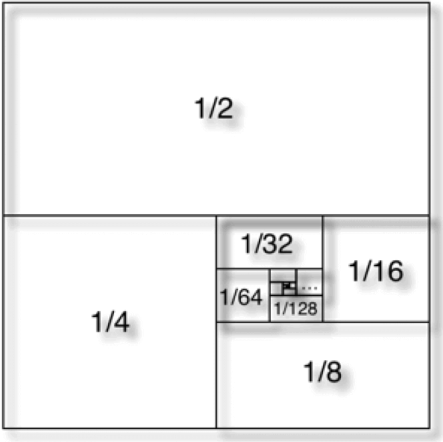
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

Ce se întâmplă când $n\to\infty$?

Seria:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=\mathbf{1}$$

Ce este o serie?



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=?$$

Luăm suma primilor n termeni:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

Ce se întâmplă când $n\to\infty$?

Seria:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\mathbf{\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=\mathbf{1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1+1$$

Definiție

Numim **serie de numere reale**, cuplul format din șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numește **șirul sumelor parțiale** atașat seriei, cu

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

Notație:

$$((x_n), (S_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} x_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Terminologie:

- termenul $x_n, n \in \mathbb{N}^*$ se numește **termen general al seriei**;
- termenul $S_n, n \in \mathbb{N}^*$ se numește **suma parțială de rang n** a seriei.

Serii de numere reale

- Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este *convergentă*;

  Notăm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

- Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este divergent*, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este *divergentă*;

  Notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (D)$;

- Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci numim S - *suma seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ și scriem

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Definiție

Pentru $p \in \mathbb{N}$, numim **restul de ordin** p al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n \stackrel{not}{=} R_p$.

Teoremă

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall p \in \mathbb{N}$, seria R_p este convergentă.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

Exemple

1. Seria geometrică de parametru $q \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Șirul sumelor parțiale atașat seriei are termenul general

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Așadar, avem că:

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n (C)$, pentru $q \in (-1, 1)$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n (D)$, pentru $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.
- În plus, avem $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, q \in (-1, 1); \\ +\infty, q \geq 1; \end{cases}$

Dacă $q = -1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ se numește *seria lui Grandi*, și este divergentă.

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{x_n}$ este divergentă.

$$S_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\dots} + \cancel{\ln n} - \cancel{\ln(n-1)} + \ln n+1 - \cancel{\ln n}$$

$$= \ln(n+1) - \ln 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$$\Rightarrow S_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ (D)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Exemple

3. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$ este convergentă.

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{k}{\sqrt{k(k-1)}} - \frac{\sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k-1)}} \right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}} \right) = \sqrt{\frac{2}{1}} - \cancel{\sqrt{\frac{3}{2}}} + \cancel{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \cancel{\sqrt{\frac{4}{3}}} + \dots + \cancel{\sqrt{\frac{n}{n-1}}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} = \underbrace{\sqrt{2}-1}_{\text{suma seriei}} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (S_n)$ converg $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x_n$ (c)

Condiția necesară de convergență

Teoremă

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$

Observații:

- Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge la 0, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.
- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nu implică neapărat convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$!

$\sum \frac{1}{n}$ (D) chiar dacă $\frac{1}{n} \to 0$

Criteriul lui Cauchy de convergență

Teoremă (Criteriul lui Cauchy)

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă (Sn) șir Cauchy ⟺

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* : |\underbrace{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}}_{S_{n+p} - S_n}| < \varepsilon.$$

Teorema

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă dacă și numai dacă

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_n \geq n, \exists p_n \in \mathbb{N}^* : |x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon.$$

Exemplu. Seria armonică

Seria armonică[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Arat că $S_n = 1 + \dots + \frac{1}{n}$ nu este șir Cauchy

Arătăm că șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este șir Cauchy.
Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$. Atunci avem

$$|S_{n+p} - S_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{> \frac{1}{n+p}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{> \frac{1}{n+p}} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, există $k_n := n, p_n := n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left| \frac{1}{k_n + 1} + \ldots + \frac{1}{k_n + p_n} \right| \geq \frac{p_n}{k_n + p_n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Prin urmare, seria armonică este divergentă.

[1] Se numește asa întrucât x_n verifică relația: $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, adică x_n este media armonică a numerelor x_{n-1} și x_{n+1}.

Operații cu serii

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii de numere reale.

- Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ se numește *suma* seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$;
- Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ se numește *produsul* seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$.

Operații cu serii

Teoremă

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ două serii convergente, cu $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ și $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

i) Dacă $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $S \leq T$;

ii) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ este convergentă și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S + T$.

iii) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ este convergentă și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda S$.

Observație: Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (D)$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n (D)$, este posibil ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)(C)$;

Spre exemplu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (D)$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (D)$, dar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] (C)$.

Teoremă

Dacă asociem termenii unei serii convergente în grupuri finite, păstrând ordinea termenilor, obținem tot o serie convergentă, cu aceeași sumă.

Observație:

Uneori, asocierea termenilor unei serii divergente definesc o serie convergentă.

Spre exemplu, dacă asociem doi câte doi termenii seriei lui Grandi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, care este divergentă, obținem seria

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots$$

care este convergentă, având suma 0.

Structura cursului

1. Serii de numere reale
   - Definiții. Proprietăți
   - Exemple
   - Condiția necesară de convergență
   - Criteriul lui Cauchy de convergență
   - Operații cu serii

2. Serii cu termeni din pozitivi
   - Criterii de comparație
   - Criteriul de condensare al lui Cauchy
   - Criteriul radacinii - al lui Cauchy
   - Criteriul lui Kummer
   - Criteriul raportului - al lui D'Alembert
   - Criteriul lui Raabe-Duhamel
   - Criteriul lui Bertrand
   - Criteriul lui Gauss

Serii cu termeni din pozitivi

Spunem că o serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are **termeni pozitivi** dacă $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este clar că și șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Așadar, are loc: $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$

Propoziție

Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este majorat.

Criteriul I de comparație - CCI

În cele ce urmează, vom prezenta unele criterii de convergență și de divergență pentru serii cu termeni pozitivi.

Teoremă - CCI

Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, astfel încât $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (C), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (D).

Exemple:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha < 1$ este divergentă.
2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha < 1$

$$\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \iff \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n} < \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha}}}_{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ (D) \xrightarrow{CCI} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ (D) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ (D)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 \quad (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum \frac{1}{n^2-n} \ (C) \\ \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n} \end{array}\right\} \xrightarrow{CCI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ (C)$$

Criteriul II de comparație - CCII

Teoremă - CCII

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0$ și

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \; \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

ii) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$.

Exemple: Să se studieze natura $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{4n+5}}{\frac{1}{4n+1}} = \frac{4n+1}{4n+5}$$

$$\frac{4n+1}{4n+5} \overset{?}{>} \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \iff \frac{4n+1}{4n+5} - \frac{n}{n+1} \overset{?}{>} 0 \iff \frac{\cancel{4n^2}+\cancel{4n}-\cancel{4n^2}-\cancel{5n}+\cancel{n}+1}{(4n+5)(n+1)} \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{1}{(4n+5)(n+1)} > 0 \implies \frac{4n+1}{4n+5} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} < \dfrac{\frac{1}{4n+5}}{\frac{1}{4n+1}} \\[2em] \sum \dfrac{1}{n} \ (D) \end{array}\right\} \underset{CC\ II}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \ (D)$$

Criteriul de comparație cu limită - CCIII

Teoremă - CCIII

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $y_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, atunci:

i) dacă $\ell \in (0, +\infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ au aceeași natură; $\left(\sum x_n \sim \sum y_n\right)$

ii) pentru $\ell = 0$, avem

a) dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n (C)$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

b) dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n (D)$;

iii) pentru $\ell = +\infty$, avem

a) dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (C)$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n (C)$;

b) dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n (D)$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (D)$.

Exemple:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin \frac{1}{n}\right|$ este divergentă.

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^4+1}$ este convergentă.

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Downarrow CC\ III$$

$$\sum \left|\sin\frac{1}{n}\right| \sim \sum \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum \frac{1}{n}\ (D) \\ \text{iar} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum \left|\sin\frac{1}{n}\right|\ (D)$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{2n^4+1}}{\frac{n}{n^4}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum x_n \sim \sum y_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\ (C) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{n+3}{2n^4+1}\ (C)$$

$$\left(\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2} \\ \sum \frac{1}{n^2}\ (C) \end{array}\right\} \xRightarrow{CC\ I} \sum \frac{1}{n^3}\ (C) \right)$$

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir descrescător de numere pozitive.

Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ are aceeași natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$$

Exemplu. Seria armonică generalizată

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se numește *serie armonică generalizată*.

- Aplicând criteriul condensării, obținem că natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este aceeași cu a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu rația $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$.
- Aceasta converge dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ și divergentă în rest.
- Așadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (C), \text{ dacă } \alpha > 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (D), \text{ dacă } \alpha \leq 1.$$

Criteriul rădăcinii - al lui Cauchy

Teoremă

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0,\infty]$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;

ii) dacă $\ell > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă;

iii) dacă $\ell = 1$, nu putem spune nimic despre natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\underbrace{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}_{x_n}\big)^n$ este convergentă.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\ )^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0 < 1 \overset{\text{crit răd}}{\Rightarrow} \sum x_n \ (C)$$

Criteriul lui Kummer

Teoremă

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Dacă există $\lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci:

i) când $\ell > 0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\ell < 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (D), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

iii) dacă $\ell = 0$ nu putem spune nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul raportului - al lui D'Alembert

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = 1, n \in \mathbb{N}^*$, obținem următorul rezultat:

Teoremă

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, \infty]$$

atunci:

i) dacă $\ell < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\ell > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\ell = 1$, *nu ne putem pronunța asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = n, n \in \mathbb{N}^*$, obținem următorul rezultat:

Teoremă

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \right] = \rho.$$

i) Dacă $\rho > 1$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\rho < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) Dacă $\rho = 1$, nu putem stabili natura seriei.

Criteriul lui Bertrand

- dacă luăm în criteriul lui Kummer, $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci obținem:

Teoremă

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. Presupunem că există

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln (n+1) \right) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

i) Dacă $\mu > 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\mu < 0$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) Dacă $\mu = 0$, *nu ne putem pronunța asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Criteriul lui Gauss

Teoremă

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir mărginit astfel încât

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) dacă $\alpha > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\alpha < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\alpha = 1$ și $\beta > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

iv) dacă $\alpha = 1$ și $\beta \leq 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

Exercițiu: Să se studieze natura seriilor:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)};$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}};$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots}(2n+1)}{\cancel{3\cdot 5\cdots}(3n+2)} \cdot \frac{\cancel{3\cdot 5\cdots(3n-1)}}{\cancel{1\cdot 3\cdots(2n-1)}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{3n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3} < 1 \underset{CR}{\Longrightarrow} \sum x_n \,(C)$$

2. $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!^2 \cdot 2^{2(n+1)}}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}} = \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\overbrace{(2n+2)}^{2\cancel{(n+1)}}}{\cancel{(n!)^2}\cdot(n+1)^{\cancel{2}} \cdot \underbrace{\cancel{2^{2n+2}}}_{2^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(2n+1)}{2^2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\cdot 2}{2^2} = 1$$ (nu știu natura cu CR)

$n! = 1\cdot 2\cdots n$

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\ldots}{\ldots(n+1)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{4n+4-4n-2}{2(2n+1)} = \frac{2}{4} < 1 \xRightarrow{CR-D} \sum x_n \,(D)$$

Bibliografie

- A. Precupanu, *Bazele analizei Matematice*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1993.
- F.L. Țiplea, *Introducere în teoria mulțimilor*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura Fair Partners, București, 2011.
- G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/)
- G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.