Forme liniare, biliniare și pătratice

Cursul 7

Matematică - anul I

Facultatea de Informatică, UAIC

e-mail: adrian.zalinescu@info.uaic.ro

web: https://profs.info.uaic.ro/~adrian.zalinescu

22 Noiembrie 2021

Cuprins

Forme liniare

Definiție

Fie V un spațiu liniar. O aplicație liniară $f : V \to \mathbb{R}$ se numește *formă liniară* sau *funcțională liniară*.

Exemplu

$V = \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Mai general, dacă $V = \mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}$ este funcțională liniară nenulă dacă și numai dacă f este polinom omogen de gradul 1.

Hiperplane vectoriale

Definiție

Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar. Un subspațiu $W \subseteq V$ se numește un *hiperplan* (*vectorial*) dacă există o funcțională liniară nenulă $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathrm{Ker}(f) = W.$$

Propoziție

Dacă V este un spațiu finit-dimensional cu $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$, atunci un subspațiu liniar $W \subseteq V$ este un hiperplan dacă și numai dacă $\dim W = n-1$.

Demonstrație

"$\Rightarrow$" Dacă $W = \mathrm{Ker}(f)$ pentru o funcțională liniară nenulă $f : V \to \mathbb{R}$, atunci, din teorema dimensiunii,

$$\dim W = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n-1,$$

deoarece f este nenulă și astfel $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

Demonstrație

"$\Leftarrow$" Reciproc, dacă $\dim W = n-1$, atunci există o bază $B = \{b_1, \dots, b_{n-1}, b_n\}$ a lui V astfel încât $\mathrm{Lin}\{b_1, \dots, b_{n-1}\} = W$. Luând $f : V \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) := \alpha_n$$

pentru $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, avem f nenulă și

$$f(b_1) = \cdots = f(b_{n-1}) = 0,$$

ceea ce implică $W \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ (adică $f(v) = 0$, $\forall v \in W$). Pe de altă parte, din implicația directă, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$ și deci $W = \mathrm{Ker}(f)$. $\square$

Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar finit-dimensional și $B=\{\mathrm{b}_1,\ldots,\mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V.

- Dacă W este un hiperplan cu $W=\mathrm{Ker}(f)$ și f formă liniară nenulă, fie $\beta_1 := f(\mathrm{b}_1),\ldots,\beta_n := f(\mathrm{b}_n)$. Atunci $\mathrm{v}\in W$ este caracterizată de ecuația

  (1) $$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0,$$

  unde $x_1,\ldots,x_n$ sunt coordonatele lui v în baza B. Așadar

  (2) $$W = \{x_1\mathrm{b}_1 + \cdots + x_n\mathrm{b}_n \in V \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0\}.$$

- Reciproc, fiind dați $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$, nu toți 0, submulțimea lui V definită de relația de mai sus este un hiperplan al lui V.
- Se poate arăta că orice subspațiu liniar al lui V (nu numai hiperplanele) pot fi caracterizate de sisteme de ecuații de forma (1).
- Dacă $V=\mathbb{R}^n$ și B este o bază canonică, relația (2) poate fi scrisă ca

  $$W = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0\}.$$

- În cazurile particulare $n=2$ și $n=3$, ecuația (1) caracterizează o *dreaptă* (1-dimensională), respectiv un *plan* (2-dimensional) ce trece prin origine.

Funcționale afine

Următoarea noțiune permite caracterizarea tuturor dreptelor (dacă $n = 2$) și planelor (când $n = 3$), nu neapărat a celor ce trec prin origine.

Definiție

Fie V un spațiu liniar. O funcție $f : V \to \mathbb{R}$ se numește *funcțională afină* dacă există o funcțională liniară $f_0 : V \to \mathbb{R}$ și o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\mathrm{v}) = f_0(\mathrm{v}) + c,\ \forall \mathrm{v} \in V$.

Exemplu

$V = \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5.$$

Mai general, dacă $V = \mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}$ este funcțională afină neconstantă dacă și numai dacă f este polinom de gradul 1.

Pentru o funcțională afină $f : V \to \mathbb{R}$ se poate defini *nucleul* ei în același mod ca pentru funcționalele liniare, adică $\operatorname{Ker}(f) := \{\mathrm{v} \in V \mid f(\mathrm{v}) = 0\}$.

Definiție

Fie V un spațiu liniar. O submulțime $U \subseteq V$ se numește *hiperplan afin* dacă există o funcțională afină neconstantă $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{Ker}(f) = U$.

- Cu alte cuvinte, U este un hiperplan afin dacă există un hiperplan vectorial W și un vector $\mathrm{v}_0 \in V$ astfel încât

$$U = W + \mathrm{v}_0 := \{\mathrm{v} + \mathrm{v}_0 \mid \mathrm{v} \in W\}.$$

- Dacă V este finit-dimensional cu o bază $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$, atunci hiperplanele afine sunt date de submulțimi de forma

$$U = \{x_1\mathrm{b}_1 + \cdots + x_n\mathrm{b}_n \in V \mid \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + c = 0\},$$

  unde $c, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.
- În cazurile $n = 2$ și $n = 3$, hiperplanele afine sunt dreptele, respectiv planele.

Forme biliniare

Definiție

Fie V și W spații liniare. O funcție $g : V \times W \to \mathbb{R}$ se numește *formă* (*aplicație*) *biliniară* pe $V \times W$ dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

1. $g(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}, \mathrm{w}) = \alpha g(\mathrm{u}, \mathrm{w}) + \beta g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\forall \mathrm{w} \in W$;
2. $g(\mathrm{v}, \lambda \mathrm{w} + \mu \mathrm{z}) = \lambda g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \mu g(\mathrm{v}, \mathrm{z})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{v} \in V$, $\forall \mathrm{w}, \mathrm{z} \in W$.

În cazul $W = V$, o formă biliniară pe $V \times V$ se mai numește *formă* (*aplicație*) *biliniară* pe V.

1. Să presupunem acum că V și W sunt finit-dimensionale, cu bazele $B = \{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_n\}$ și $\bar{B} = \{\bar{\mathrm{b}}_1, \dots, \bar{\mathrm{b}}_m\}$ pe V, respectiv W.

- Dacă $\mathrm{v} \in V$ și $\mathrm{w} \in W$ au coordonatele în bazele B, respectiv $\bar{B}$, pe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, respectiv $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, atunci

$$(3) \qquad g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i, \sum_{j=1}^{m} y_j \bar{\mathrm{b}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j g(\mathrm{b}_i, \bar{\mathrm{b}}_j).$$

- Scalarii $a_{ij} := g(\mathrm{b}_i, \bar{\mathrm{b}}_j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ sunt numiți *coeficienții* formei biliniare g în raport cu bazele B și $\bar{B}$;
- matricea $A^g_{B,\bar{B}} := (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ în $\mathscr{M}_{nm}$ se numește *matricea formei biliniare* g în raport cu bazele B și $\bar{B}$.
- Astfel, (3) se poate scrie

$$g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot A^g_{B,\bar{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2. Dacă $B' = \{\mathrm{b}'_1, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$ este o altă bază a lui V și $\bar{B}' = \{\bar{\mathrm{b}}'_1, \ldots, \bar{\mathrm{b}}'_m\}$ este o altă bază a lui W, să notăm $S = (s_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n$ matricea de trecere de la B la B' iar $\bar{S} = (\bar{s}_{ij})_{1\le i,j\le m} \in \mathscr{M}_m$ matricea de trecere de la $\bar{B}$ la $\bar{B}'$.

- Atunci matricea lui g în raport cu bazele B' și $\bar{B}'$ poate fi scrisă ca

$$A^g_{B',\bar{B}'} = S^{\mathrm{T}} \cdot A^g_{B,\bar{B}} \cdot \bar{S}.$$

- Se poate demonstra că $\operatorname{rang} A^g_{B',\bar{B}'} = \operatorname{rang} A^g_{B,\bar{B}}$, deci rangul matricei formei biliniare g nu depinde de bazele considerate. Această valoare comună se numește *rangul* lui g și este notată $\operatorname{rang} g$.

Nucleul unei forme biliniare

Definiție

Fie $g : V \times W \to \mathbb{R}$ o formă biliniară.

- Mulțimea
$$\mathrm{Ker}_{\,\mathrm{s}}(g) := \{\mathrm{v} \in V \mid g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0,\ \forall \mathrm{w} \in W\}$$
este subspațiu liniar al lui V, numit *nucleul stâng* al lui g.
- Mulțimea
$$\mathrm{Ker}_{\,\mathrm{d}}(g) := \{\mathrm{w} \in W \mid g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0,\ \forall \mathrm{v} \in V\}$$
este subspațiu liniar al lui W, numit *nucleul drept* al lui g.
- Dacă $\mathrm{Ker}_{\,\mathrm{s}}(g) = \{0_V\}$ și $\mathrm{Ker}_{\,\mathrm{d}}(g) = \{0_W\}$, atunci forma biliniară g se numește *nedegenerată*.

Forme biliniare simetrice

Definiție

O formă biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se numește *simetrică* dacă

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{u}), \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V,$$

respectiv *antisimetrică* dacă

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -g(\mathrm{v}, \mathrm{u}), \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Propoziție

Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică sau antisimetrică. Atunci nucleul ei drept coincide cu nucleul ei stâng.

Pentru o formă liniară ca mai sus, nucleul stâng (ce coincide cu cel drept) se numește *nucleul* lui g și se notează $\ker g$.

Teorema dimensiunii pentru forme biliniare

Propoziție

Fie V un spațiu liniar finit-dimensional și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci $\operatorname{rang} g + \dim(\ker g) = \dim V$.

Observație. Datorită rezultatului de mai sus, o condiție necesară și suficientă ca o formă biliniară simetrică să fie nedegenerată este ca $\operatorname{rang} g = \dim V$.

Definiție

Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică.

- Doi vectori $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ se numesc *ortogonali* în raport cu g dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 0$.
- Dacă $\emptyset \neq U \subseteq V$, spunem că U este *ortogonală* în raport cu g (sau *g-ortogonală*) dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 0$ pentru orice vectori distincți $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in U$.
- Dacă $\emptyset \neq U \subseteq V$, mulțimea $U^{\perp_g} := \{\mathrm{v} \in V \mid g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 0, \ \forall \mathrm{u} \in U\}$ e un subspațiu liniar al lui V, numit *suplimentul ortogonal* al lui U în raport cu g.

Observație. Dacă W este un subspațiu finit-dimensional al lui V cu $\{\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ bază a lui W, atunci $\mathrm{v} \in W^{\perp_g}$ dacă și numai dacă $g(\mathrm{b}_k, \mathrm{v}) = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

Legea inerției a lui Sylvester

Teoremă

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar n-dimensional și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci există $p, q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice bază g-ortogonală $\{\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, printre $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$:

- p reprezintă numărul de valori strict pozitive,
- q reprezintă numărul de valori strict negative,
- r reprezintă numărul de valori nule.

În plus,

$$r = n - \operatorname{rang} g.$$

- Numerele p și q sunt numiți *indicii de inerție pozitivă*, respectiv *negativă*.
- Tripletul (p, q, r) se numește *signatura* lui g.
- Evident, $p + q + r = n$ $(n = \dim V)$; mai mult, $\operatorname{rang} g = p + q = n - r$.

Forme pătratice

Definiție

Fie V un spațiu liniar și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Funcția $h : V \to \mathbb{R}$, definită de

$$h(\mathrm{v}) := g(\mathrm{v}, \mathrm{v}),\ \mathrm{v} \in V$$

se numește *forma* (*funcționala*) *pătratică* asociată lui g.

Observație. Deoarece
$h(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = g(\mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{u}+\mathrm{v}) = g(\mathrm{u}, \mathrm{u}) + g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) + g(\mathrm{v}, \mathrm{u}) + g(\mathrm{v}, \mathrm{v})$ și
$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, avem

$$h(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = h(\mathrm{u}) + 2g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) + h(\mathrm{v}),\ \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Din această formulă putem deduce pe g dacă-l cunoaștem pe h:

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \frac{1}{2}\left[h(\mathrm{u}+\mathrm{v}) - h(\mathrm{u}) - h(\mathrm{v})\right],\ \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$$

sau

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \frac{1}{4}\left[h(\mathrm{u}+\mathrm{v}) - h(\mathrm{u}-\mathrm{v})\right],\ \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

- Să presupunem acum că V este un spațiu liniar finit-dimensional și $B = \{\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V.
- Fie $A^g_{B,B} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ matricea lui g în raport cu B. Dacă $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sunt coeficienții unui vector $\mathrm{v} \in V$ în raport cu B, atunci

$$h(\mathrm{v}) = h(x_1\mathrm{b}_1 + \cdots + x_n\mathrm{b}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

  Partea dreaptă a acestei egalități este un polinom omogen de gradul 2, numit *polinomul pătratic* asociat cu forma pătratică h și bazei B.
- Determinantul matricei simetrice $A^g_{B,B}$ se numește *discriminantul* lui h în raport cu B, iar semnul acestuia este invariant în raport cu B.
- Spunem că h este o formă pătratică *nedegenerată* dacă g este o formă biliniară nedegenerată, adică discriminantul lui h este diferit de zero $(\operatorname{rang} A^g_{B,B} = \operatorname{rang} g = n)$. Altfel, spunem că h este o formă pătratică *degenerată*.
- Dacă (p, q, r) este signatura lui g, o vom numi de asemenea *signatura* lui h.

Forma redusă a unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu liniar finit-dimensional și $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică asociată unei forme biliniare $g : V \times V \to \mathbb{R}$.

- Dacă B este o bază a lui V astfel încât matricea lui g este diagonală, numim *forma canonică* (*redusă*) a lui h polinomul pătratic asociat lui h și B.
- Forma canonică a lui h se numește *normală* dacă matricea diagonală a lui g are pe diagonală numai elementele 1, -1 și 0.

Dacă $B = \{\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a lui V care dă forma canonică

$$\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2$$

lui h, atunci $B' = \{c_1\mathrm{b}_1, \ldots, c_n\mathrm{b}_n\}$ dă o formă normală lui h, unde $c_i = 1$ dacă $\omega_i = 0$, în timp ce $c_i = \frac{1}{\sqrt{|\omega_i|}}$ dacă $\omega_i \neq 0$, pentru $1 \leq i \leq n$.

Metoda lui Gauss

Teoremă

Fie V un spațiu liniar n-dimensional și $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază $\{b_1, \dots, b_n\}$ a lui V și $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ să avem

$$h(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n) = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2.$$

Observații.

- Polinomul pătratic $\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2$ este forma redusă a lui h (matricea lui g în raport cu $\{b_1, \dots, b_n\}$ este o matrice diagonală cu intrările $\omega_1, \dots, \omega_n$).
- Dacă signatura lui h este (p, q, r), atunci printre coeficienții $\omega_1, \dots, \omega_n$, p sunt strict pozitivi, q sunt strict negativi, iar r sunt egali cu 0.

Metoda lui Jacobi

Teoremă

Fie V un spațiu liniar n-dimensional și $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Fie Δ_i, $1 \leq i \leq n$ minorii principali ai matricei $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ asociate lui h în raport cu o bază a lui V, adică

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \; 1 \leq i \leq n.$$

Dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, atunci h poate fi redusă la forma canonică

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \dots + \mu_n x_n^2,$$

unde $\mu_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $\forall i = \{1, \dots, n\}$, cu $\Delta_0 = 1$.

Definiție

Fie V un spațiu liniar n-dimensional și $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică cu signatura (p, q, r).

- Dacă $p = n$, h se numește formă pătratică *pozitiv-definită*.
- Dacă $q = 0$, forma pătratică h se numește *pozitiv-semidefinită*.
- Dacă $q = n$, h se numește formă pătratică *negativ-definită*.
- Dacă $p = 0$, forma pătratică h se numește *negativ-semidefinită*.
- Forma pătratică h se numește *nedefinită* dacă $p > 0$ și $q > 0$.

Fie Δ_i, $1 \leq i \leq n$ minorii principali ai matricei asociate lui h în raport cu o bază a lui V. Atunci h este pozitiv-definită dacă și numai dacă

$$\Delta_i > 0, \ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

iar h este negativ-definită dacă și numai dacă

$$(-1)^i \Delta_i > 0, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Metoda valorilor proprii

Teoremă

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian cu $\dim V = n$ și $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormală în raport cu care h are forma canonică

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valorile proprii ale matricei asociate lui h în raport cu orice bază a lui V.

- Metoda demonstrației este similară cu algoritmul de diagonalizare pentru operatori liniari.

Funcționale pătratice neomogene

Definiție

Fie V un spațiu liniar, $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $f : V \to \mathbb{R}$ o funcțională afină. Suma $h + f$ se numește *funcțională (formă) pătratică neomogenă* pe V.

- Dacă V este finit-dimensional și $B = \{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci pentru orice $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(4) \qquad (h+f)(x_1\mathrm{b}_1 + \cdots + x_n\mathrm{b}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c,$$

  unde $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ este matricea asociată lui h, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ și $c \in \mathbb{R}$.
- Termenul din dreapta acestei egalități se numește *polinomul pătratic* asociat lui $h + f$ (acesta este un polinom de grad 2, nu necesar omogen).
- Dacă $V = \mathbb{R}^n$ și B este baza sa canonică, atunci (4) poate fi privit ca

$$(h+f)(\mathrm{x}) = \rho(\mathrm{x}) := \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x}\rangle + c, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

  (unde vectorul $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ este interpretat ca matrice coloană pentru înmulțirea cu A).

- Reciproc, pentru o matrice simetrică $A \in \mathscr{M}_n$, $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$ și $c \in \mathbb{R}$, funcția $\rho : V \to \mathbb{R}$ dată de

$$\rho(\mathrm{x}) := \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x}\rangle + c, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

definește o funcțională pătratică neomogenă pe V.

- Mai mult, A poate fi nesimetrică, deoarece

$$\begin{aligned} \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle A^{\mathrm{T}}\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{x}, \mathrm{x}\right\rangle, \end{aligned}$$

așadar matricea A poate fi înlocuită de matricea simetrică $\frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)$.

Forma normală a unei funcționale pătratice neomogene

Să considerăm acum o schimbare afină de coordonate, adică o transformare de forma

$$\mathrm{x}' = S\mathrm{x} + \mathrm{x}_0,$$

unde $S \in \mathscr{M}_n$ este o matrice nesingulară și $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
Se poate arăta că există o astfel de schimbare, cu S matrice ortonormală ($S^{-1} = S^{\mathrm{T}}$) astfel încât ρ are forma:

-
$$\rho(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2 + c_0, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

  dacă $\det A \neq 0$.

-
$$\rho(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i (x_i')^2 + \gamma x'_{n-r+1}, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

  dacă $\det A = 0$ și (p, q, r) este signatura lui h (deci $r > 0$, iar $n - r$ este rangul lui A).

Clasificare geometrică

Dintr-un punct de vedere geometric,

$$\ker \rho := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x) = 0\}$$

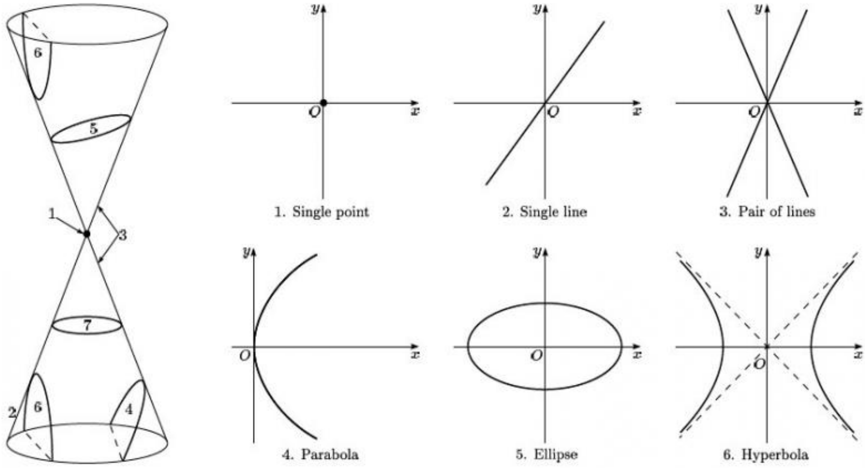
reprezintă o *conică* în cazul $n = 2$, o *cuadrică* în cazul $n = 3$, respectiv o *hipercuadrică* dacă $n \geq 4$.

1. Cazul $n = 1$: *formele normale* ale ρ sunt:

- $x^2 + 1$ ($\ker \rho = \emptyset$: două puncte "imaginare");
- $x^2 - 1$ ($\ker \rho = \{-1, 1\}$: două puncte distincte);
- x^2 ($\ker \rho = \{0\}$: două puncte identice).

2. Cazul $n = 2$: nouă tipuri de conice, după forma normală a lui ρ:

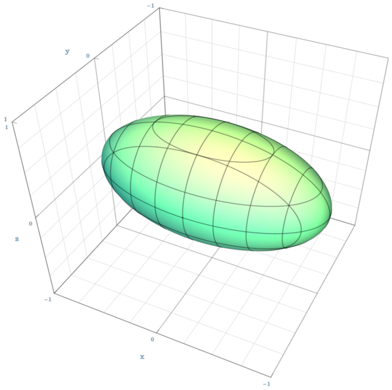
- $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ ($\emptyset$: *elipsă* "imaginară");
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (*hiperbolă*);
- $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (*elipsă*);
- $x_1^2 - x_2 = 0$ (*parabolă*);
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (un punct: două drepte "imaginare", conjugate);
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (două drepte ce se intersectează);
- $x_1^2 + 1 = 0$ ($\emptyset$: două drepte "imaginare");
- $x_1^2 - 1 = 0$ (două drepte paralele);
- $x_1^2 = 0$ (două drepte identice).



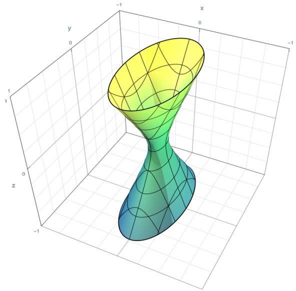
6
5
1
3
7
2
6
4
y
x
O
1. Single point
y
x
O
2. Single line
y
x
O
3. Pair of lines
y
x
O
4. Parabola
y
x
O
5. Ellipse
y
x
O
6. Hyperbola

3. Cazul $n = 3$: avem 17 tipuri de cuadrice, caracterizate de următoarele forme normale:

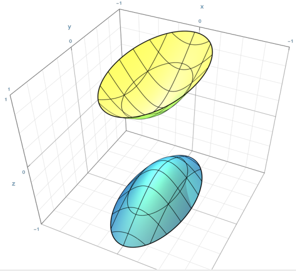
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (*elipsoid* "imaginar");
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ (*elipsoid*);



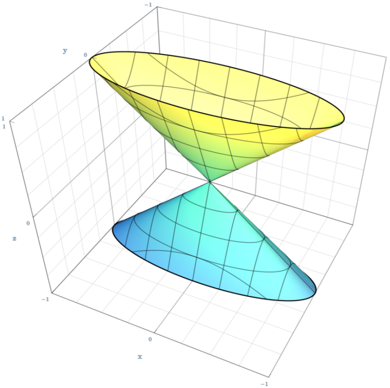
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu o pânză*);



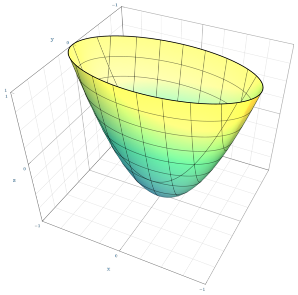
- $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu două pânze*);



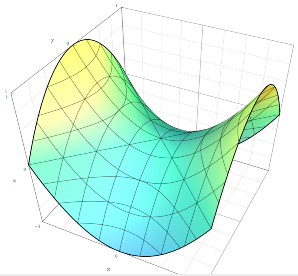
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (un punct: *con* “imaginar”);
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (*con*);



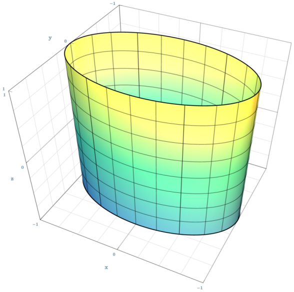
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ (*paraboloid eliptic*);

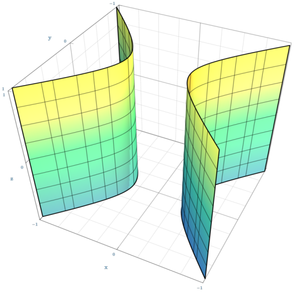


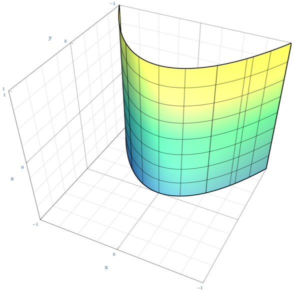
- $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$ (*paraboloid hiperbolic*).



Celelalte 9 forme normale rămase sunt aceleași ca în cazul $n = 2$, care în $\mathbb{R}^3$ reprezintă *cilindri* de diferite tipuri: *eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic*. Primele 6 cuadrice sunt *cuadrice nesingulare*, în timp ce celelalte sunt *cuadrice singulare*.







- M. Ariciuc, S. Roatesi, *Lecții de algebră liniară și geometrie analitică*, Editura Matrix Rom, București, 2008.
- K. C. Border, *More than you wanted to know about quadratic forms*, Caltech, 2016.
- K. Conrad, *Bilinear Forms*, Notes on Advanced Linear Algebra, 2015.
- C. Costinescu, *Algebră liniară și aplicații în geometrie*, Editura Matrix Rom, București, 2005.
- D. Drăghici, *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
- G. Galbură, F. Radó, *Geometrie*, Ed. Didactică și Pedag., București, 1979.
- M. Neagu, *Geometria curbelor și suprafețelor. Teorie și aplicații*, Editura Matrix Rom, București, 2013.
- P. Ott, *Bilinear and Quadratic Forms*, Prof. Robert Beezer's Notes on Advanced Linear Algebra, 2014.
- I. Radomir, *Elemente de algebră vectorială, geometrie și calcul diferențial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.