CURSUL 8
LIMITE ÎN SPAŢII EUCLIDIENE. FUNCŢII CONTINUE

1. Spaţii metrice

În spaţiul fizic uzual, noţiunea de *distanţă* sau *lungime* este un concept familiar. Astfel, daca P şi Q sunt doua puncte în spaţiu având coordonatele carteziene (x_P, y_P, z_P),respectiv (x_Q, y_Q, z_Q), distanţa între P şi Q (sau lungimea segmentului PQ) este

$$\mathrm{d}(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Scopul nostru este de a extinde acest concept la spaţii mai generale, numite *spaţii metrice*. Vom vedea că în astfel de spatii putem defini noţiuni precum *convergenţa* si *continuitatea*, la fel ca pentru dreapta reală. Ca în cursul precedent, exemplele predilecte vor veni din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$.

Definiţie. Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe X dacă:

(D_1) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ \forall x,y \in X$;

(D_2) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x),\ \forall x,y \in X$ (*simetrie*);

(D_3) $\mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z),\ \forall x,y,z \in X$ (*inegalitatea triunghiulară*).

În acest caz, cuplul (X, d) se numeşte *spaţiu metric*.

Propoziţia 1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci:*

i) $\mathrm{d}(x_0, x_n) \le \mathrm{d}(x_0, x_1) + \mathrm{d}(x_1, x_2) + \cdots + \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$;

ii) $|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(y,z)| \le \mathrm{d}(x,y),\ \forall x,y,z \in X$;

iii) $|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y')| \le \mathrm{d}(x,x') + \mathrm{d}(y,y'),\ \forall x,y,x',y' \in X$ *(*inegalitatea cuadrilaterală*).*

Demonstraţie.

i) Pentru $n = 2$, această proprietate este inegalitatea triunghiulară din definiţia distanţei (pentru $n = 1$, este o egalitate trivială).

Pentru a o arăta în cazul $n \ge 3$, apelăm la inducţia matematică. Să presupunem că este adevărată pentru un $n \ge 2$ şi să luăm $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$. Atunci, din inegalitatea triunghiulară pentru d şi din ipoteza de inducţie, obţinem

$$\mathrm{d}(x_0, x_{n+1}) \le \mathrm{d}(x_0, x_n) + \mathrm{d}(x_0, x_{n+1}) \le \mathrm{d}(x_0, x_1) + \mathrm{d}(x_1, x_2) + \cdots + \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n) + \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n).$$

ii) Fie $x,y,z \in X$. Cum $\mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ şi $\mathrm{d}(y,z) \le \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(x,z)$ (inegalitatea triunghiulară), găsim, datorită simetriei lui d,

$$\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(y,z) \le \mathrm{d}(x,y) \text{ şi } \mathrm{d}(y,z) - \mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y),$$

ceea ce implică

$$|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(y,z)| \le \mathrm{d}(x,y).$$

iii) Pentru $x,y,x',y' \in X$ avem

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y')\right| &= \left|(\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y)) + (\mathrm{d}(x',y) - \mathrm{d}(x',y'))\right| \\ &\le \left|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y)\right| + \left|\mathrm{d}(x',y) - \mathrm{d}(x',y')\right|.\end{aligned}$$

Datorită punctului precedent, avem

$$\left|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y)\right| + \left|\mathrm{d}(x',y) - \mathrm{d}(x',y')\right| \le \mathrm{d}(x,x') + \mathrm{d}(y,y'),$$

obţinând rezultatul precedent.

□

În spaţii liniare, unele distanţe provin din norme, ce au fost introduse în cursurile anterioare.

Definiţie. Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Atunci funcţia $\mathrm{d} : V \times V \to \mathbb{R}_+$ definită de

$$\mathrm{d}(x,y) := \|x - y\|,\ x,y \in \mathbb{R}$$

este o metrică, numită *metrica indusă* de norma $\|\cdot\|$.

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subseteq X$ o submulţime nevidă a sa. Spunem că mulţimea A este *mărginită* dacă există un număr $M > 0$ astfel încât

$$\mathrm{d}(x, y) \leq M, \ \forall x, y \in A.$$

Se observă uşor că într-un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$, o submulţime nevidă $A \subseteq V$ este mărginită dacă şi numai dacă există un număr $M > 0$ astfel încât

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Exemple.

1. Pe $\mathbb{R}$, funcţia $\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := |x - y|, \ x, y \in \mathbb{R}$$

este o distanţă, numită *distanţa canonică* în $\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}^n$, metrica indusă de norma euclidiană se numeşte *metrica euclidiană* pe $\mathbb{R}^n$ şi se notează d_2. Avem

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

3. Fie, pentru $p \in [1, +\infty)$, aplicaţia $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită de

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci $\|\cdot\|_p$ este o normă (în cazul $p = 2$, ştim deja asta, deoarece $\|\cdot\|_p$ coincide cu norma euclidiană, ce este indusă de produsul scalar euclidian). Într-adevăr, primele proprietăţi din definiţia unei norme sunt uşor de demonstrat, în timp ce ultima, inegalitatea triunghiulară, este echivalentă cu

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}, \ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

care este inegaliatea lui Minkowski (formulată în cursul 2).

Putem de asemenea introduce o normă pe $\mathbb{R}^n$ chiar în cazul $p = +\infty$, prin

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Din nou, primele proprietăţi se pot deduce uşor. Pentru a arăta inegalitatea triunghiulară, fie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ în $\mathbb{R}^n$. Atunci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|). \tag{1}$$

Deoarece pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$ şi $|y_i| \leq \|\mathbf{y}\|_\infty$, avem

$$|x_i| + |y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aceasta înseamnă că $\max\limits_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$. Combinată cu (1), obţinem $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.

Metrica indusă pe $\mathbb{R}^n$ de norma p se numeşte *distanţa Minkowski* şi se notează cu d_p. Avem deci

$$\mathrm{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \begin{cases} \left(|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}, & p \in [1, +\infty); \\ \max \{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}, & p = +\infty, \end{cases}$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Metrica d_1 se mai numeşte câteodată *distanţa taxi-cab* sau *distanţa Manhattan*, în timp ce metrica d_∞ se mai numeşte *distanţa Chebyshev.*

Dacă $n = 1$, toate aceste distanţe coincid: $\mathrm{d}_p(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [1, +\infty]$.

4. Funcţia $\tilde{\mathrm{d}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\tilde{\mathrm{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este o distanţă pe $\mathbb{R}^n$, dar nu este indusă de vreo normă, deoarece funcţiei $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathrm{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ îi lipseşte proprietatea de omogenitate.

5. Fie X o mulţime nevidă. Funcţia $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

pentru $x, y \in X$, este o metrică pe X, numită *metrica discretă* pe X.

6. Pe dreapta reală extinsă putem considera metrica $\mathrm{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$, definită de

$$\mathrm{d}(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \; x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

(am extins funcţia arctg la $\overline{\mathbb{R}}$ prin $\operatorname{arctg}(-\infty) := -\pi/2$, $\operatorname{arctg}(+\infty) := \pi/2$).

O normă importantă pe un spaţiu de funcţii este următoarea:

Definiţie. Fie E o mulţime nevidă şi $\mathscr{B}(E)$ spaţiul liniar al funcţiilor mărginite $f : E \to \mathbb{R}$ (*adic*ă $\operatorname{Im} f$ este o mulţime mărginită). Definim $\|\cdot\|_{\sup} : \mathscr{B}(E) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Atunci $\|\cdot\|_{\sup}$ este o normă pe $\mathscr{B}(E)$, numită *norma uniformă* sau *norma supremum*. Metrica indusă de $\|\cdot\|_{\sup}$ se numeşte *distanţa uniformă*, notată $\mathrm{d}_{\sup}$.

Faptul că $\|\cdot\|_{\sup}$ este o normă poate fi arătat în acelaşi mod ca pentru $\|\cdot\|_{\infty}$. Într-adevăr,

- $\|f\|_{\sup} = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in E} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \; \forall x \in E \Leftrightarrow f(x) = 0, \; \forall x \in E \Leftrightarrow f = \mathbf{0}$;
- $\|\lambda \cdot f\|_{\sup} = \sup\limits_{x \in E} |\lambda f(x)| = \sup\limits_{x \in E} [|\lambda| \, |f(x)|] = |\lambda| \sup\limits_{x \in E} [|f(x)|] = |\lambda| \, \|f\|_{\sup}$;
- $\|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup} = \sup\limits_{x \in E} |f(x)| + \sup\limits_{x \in E} |g(x)| \geq |f(y)| + |g(y)| \geq |f(y) + g(y)|, \; \forall y \in E \Rightarrow \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup} \geq \sup\limits_{y \in E} |f(y) + g(y)| = \|f + g\|_{\sup}$.

Definiţie.

a) Fie X o mulţime nevidă. Spunem că două metrici d şi d' pe X sunt *echivalente* dacă există două constante $c_1, c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \mathrm{d}'(x, y) \leq \mathrm{d}(x, y) \leq c_2 \mathrm{d}'(x, y), \; \forall x, y \in X.$$

b) Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar. Spunem că două norme $\|\cdot\|$ şi $\|\cdot\|'$ sunt *echivalente* dacă există două constante $c_1, c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \|\mathbf{x}\|' \leq \|\mathbf{x}\| \leq c_2 \|\mathbf{x}\|', \; \forall \mathbf{x} \in V.$$

Două norme pe V sunt echivalente dacă şi numai dacă metricile induse sunt echivalente.

Teorema 1.2. *Pe $\mathbb{R}^n$, toate normele $\|\cdot\|_p$ cu $p \in [1, +\infty]$ sunt echivalente.*

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că dacă $p \in [1, +\infty)$, atunci metricile $\|\cdot\|_p$ şi $\|\cdot\|_\infty$ sunt echivalente. Într-adevăr, pentru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\|_\infty^p\right)^{1/p} = \left(n \|\mathbf{x}\|_\infty^p\right)^{1/p} = n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty .$$

şi

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \geq \left(\max_{1 \leq i \leq n} [|x_i|^p]\right)^{1/p} = \left(\left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\right)^p\right)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty .$$

Aceasta înseamnă că în precedenta definiţie putem lua $c_1 = 1$ şi $c_2 = n^{1/p}$.

Să arătăm acum că oricare două norme $\|\cdot\|_p$ şi $\|\cdot\|_{p'}$, cu $p, p' \in [1, +\infty)$, sunt echivalente. Datorită precedentelor inegalităţi avem, pentru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{n^{1/p'}} \|\mathbf{x}\|_{p'} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty \leq n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{p'} . \tag{2}$$

□

Inegalitatea (2) se poate îmbunătăţi, datorită inegalităţii lui Hölder. Într-adevăr, dacă $p \leq p'$ şi $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, avem

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n \left(|x_i|^p \cdot 1\right) \leq \left[\sum_{i=1}^n \left(|x_i|^p\right)^{\frac{p'}{p}}\right]^{\frac{p}{p'}} \left[\sum_{i=1}^n 1^q\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^{p'}\right]^{\frac{p}{p'}} n^{\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_{p'}^p ,$$

unde q este ales astfel încât $\frac{1}{\frac{p'}{p}} + \frac{1}{q} = 1$, adică $q = \frac{\frac{p'}{p}}{\frac{p'}{p} - 1} = \frac{p'}{p' - p}$. Acest lucru implică

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|\mathbf{x}\|_{p'} .$$

Pe de altă parte, $|x_i| \le \|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_p$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$. De aceea, presupunând că $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\|\mathbf{x}\|_{p'}^{p'} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'} = \|\mathbf{x}\|_p^{p'} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \right)^{p'} \le \|\mathbf{x}\|_p^{p'} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \right)^{p} = \|\mathbf{x}\|_p^{p'-p} \|\mathbf{x}\|_p^{p} = \|\mathbf{x}\|_p^{p'},$$

de unde

$$\|\mathbf{x}\|_{p'} \le \|\mathbf{x}\|_p .$$

Deoarece această inegalitate are loc şi pentru $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, obţinem în final

$$\|\mathbf{x}\|_{p'} \le \|\mathbf{x}\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|\mathbf{x}\|_{p'}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

pentru orice $p, p' \in [1,+\infty)$ şi $p \le p'$. Din demonstraţia rezultatului de mai sus, putem permite ca p şi/sau p' să ia valoarea $+\infty$.

În continuare, introducem câteva noţiuni asociate spaţiilor metrice, de care vom avea ocazional nevoie.

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric.

1. *Bila deschisă centrată* în $x_0 \in X$, de *rază* $r > 0$, este mulţimea
$$B(x_0; r) := \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, x_0) < r\} .$$
2. O *vecinătate* a unui punct $x_0 \in X$ este o submulţime $V \subseteq X$ pentru care există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x_0; \varepsilon) \subseteq V$.
3. Un punct $x_0 \in X$ se numeşte *punct interior* al unei submulţimi $A \subseteq X$ dacă A este vecinătate a lui x.
4. O submulţime $A \subseteq X$ se numeşte *deschisă* dacă orice element al său îi este punct interior.
5. O submulţime $A \subseteq X$ se numeşte *închisă* dacă $X \setminus A$ este mulţime deschisă.

2. Şiruri în spaţii metrice

Fie X o mulţime nevidă. Precum în cazul şirurilor reale, un *şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X este pur şi simplu o funcţie $x : \mathbb{N} \to X$. Toată terminologia legată de şiruri de numere reale poate fi translatată în acest caz. Dacă d este o metrică pe un spaţiu X, următoarele noţiuni pot fi introduse:

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir în X.

a) Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă mulţimea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginită.

b) Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent* dacă există $x \in X$ astfel încât $\mathrm{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *adic*ă
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \ge n_\varepsilon : \mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon.$$
În acest caz, vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \overset{\mathrm{d}}{\to} x$, $x_n \overset{X}{\to} x$ sau chiar $x_n \to x$; elementul x va fi numit *limita* lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *Cauchy* sau *fundamental* dacă
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \ge n_\varepsilon : \mathrm{d}(x_m, x_n) < \varepsilon$$
sau, echivalent,
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \ge n_\varepsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}^* : \mathrm{d}(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Precum în cazul şirurilor reale, limita unui şir într-un spaţiu metric este unică. Într-adevăr, dacă un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are două limite x şi x' în X, atunci $\mathrm{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ şi $\mathrm{d}(x_n, x') \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Deoarece $\mathrm{d}(x, x') \le \mathrm{d}(x_n, x) + \mathrm{d}(x_n, x')$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(x, x') = 0$, de unde obţinem $\mathrm{d}(x, x') = 0$ şi deci $x = x'$.

Propoziţia 2.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir convergent în X. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy.*

Demonstraţie. Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, există $x \in X$ astfel încât $\mathrm{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. În consecinţă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon/2$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$. De aceea, luând $m, n \ge n_\varepsilon$ avem

$$\mathrm{d}(x_m, x_n) \le \mathrm{d}(x_m, x) + \mathrm{d}(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost ales în mod arbitrar, obţinem ceea ce am dorit. □

Reciproca acestui rezultat nu mai este adevărată, adică nu orice şir Cauchy într-un spaţiu metric arbitrar este convergent. De exemplu, în spaţiul $X = (0,1)$ dotat cu metrica uzuală ($\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$, $x, y \in X$)), şirul $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este Cauchy (deoarece este Cauchy în $\mathbb{R}$), dar nu este convergent (limita lui este de obicei luată în $\mathbb{R}$, nu în $(0,1)$).

Să arătăm acum că proprietăţile unui şir într-un spaţiu euclidean pot fi reduse la proprietăţile şirurilor coordonatelor.

Teorema 2.2. *Fie $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ cu metrica euclidiană d_2 şi $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir în $\mathbb{R}^m$ cu*

$$\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

i) *Şirul $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă toate şirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt mărginite.*

ii) *Şirul $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă toate şirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt convergente. În acest caz, dacă $\mathbf{x} := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ şi $x^i := \lim\limits_{n\to\infty} x_n^i$, $1 \leq i \leq m$, atunci $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$.*

iii) *Şirul $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy dacă şi numai dacă toate şirurile $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, sunt Cauchy.*

Demonstraţie.

i) Şirul $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât $\|\mathbf{x}_n\|_2 \leq r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit de $r > 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_n^k| \leq \|\mathbf{x}_n\|_2 = \sqrt{|x_n^1|^2 + |x_n^2|^2 + \cdots + |x_n^m|^2}, \ \forall k \in \{1, \ldots, m\},$$

de unde $\left|x_n^k\right| < r$, $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică fiecare şir $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, este mărginit.

Reciproc, dacă fiecare şir $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m$, este mărginit, putem găsi $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$|x_n^k| \leq r_k, \ \forall k \in \{1, \ldots, m\}.$$

În consecinţă,

$$\|\mathbf{x}_n\|_2^2 = |x_n^1|^2 + |x_n^2|^2 + \cdots + |x_n^m|^2 < r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ceea ce implică faptul că $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

ii) Să presupunem că $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la un vector $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Atunci $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Deoarece

$$|x_n^k - x^k| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2, \ \forall k \in \{1, \ldots, m\},$$

obţinem că $|x_n^k - x^k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pentru toţi $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Reciproc, dacă fiecare şir $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la un $x^k \in \mathbb{R}$, avem

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_n^1 - x|^2 + |x_n^2 - x|^2 + \cdots + |x_n^m - x|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

unde $\mathbf{x} := (x^1, x^2, \ldots, x^m)$.

iii) Demonstraţia acestui punct urmează pe cea a punctului precedent, aşa că o vom omite.

□

3. Limite de funcţii

În cele ce urmează, presupunem că cititorul este familiarizat cu conceptele de limită şi continuitate pentru funcţii reale de o variabilă. Scopul nostru este de a extinde aceste noţiuni la funcţii reale sau vectoriale de mai multe variabile, sau, mai general, la funcţii între spaţii metrice.

Pentru a introduce noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct, dăm mai întâi următoarea definiţie:

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subseteq X$ o mulţime nevidă. Spunem că un punct $x \in X$ este punct de acumulare pentru A dacă există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vom nota A' mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale lui A.

Definiţie. Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, o funcţie $f : A \to Y$ şi $x_0 \in A'$. Spunem că un element $l \in Y$ este *limita* lui f în x_0 dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in X : 0 < \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'(f(x), l) < \varepsilon.$$

Ca şi în cazul limitelor de şiruri, putem arăta că limita unei funcţii într-un punct, dacă există, este unică. Spunem că funcţia f are limită în punctul x_0 dacă există $l \in Y$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

În cazul particular în care X şi Y sunt spaţii normate, avem:

Propoziţia 3.1. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|')$ spaţii normate, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă şi o funcţie $f : A \to Y$. Un element $l \in Y$ este limita lui f într-un punct $x_0 \in A'$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|' < \varepsilon.$$

Cu ajutorul şirurilor convergente putem da o caracterizare importantă a limitelor de funcţii.

Teorema 3.2. *Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă şi o funcţie $f : A \to Y$. Un element $l \in Y$ este limita lui f într-un punct $x_0 \in A'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

Observaţii.
1. Dacă dorim să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$, este de ajuns dă găsim un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ ce converge la x_0 astfel încât $f(x_n)$ nu converge la l.

2. Dacă, mai mult, dorim să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nu există, este de ajuns să găsim două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ în $A \setminus \{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \ell'$, cu $\ell \neq \ell'$.

Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Atunci $(0,0) \in A'$, unde $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dacă luăm un şir $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ şi

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă luăm şirul $(x'_n, y'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definit de $x'_n := \frac{1}{n}$, $y'_n := \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $(x'_n, y'_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ şi

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{n}{n^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Concluzia este că f nu are limită în punctul $(0,0)$.

Ca şi în cazul limitelor de şiruri, următoarele criterii se aplică pentru limitele de funcţii.

Propoziţia 3.3. *Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, funcţiile $f : A \to Y$, $g : A \to \mathbb{R}_+$ şi $x_0 \in A'$, $l \in Y$. Dacă*

(i) $\mathrm{d}'(f(x), l) \leq g(x), \ \forall x \in A$;
(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Teorema 3.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, $x_0 \in A'$ şi o funcţie $f : X \to Y$.*

i) *Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.*
ii) *Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$.*
iii) *Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| > 0$, atunci există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, $\forall x \in B(x_0; \delta) \setminus \{x_0\}$.*

Pentru funcţii cu valori într-un spaţiu normat, adunarea şi înmulţirea cu scalari sunt închise în raport cu limitele. Mai precis, avem:

Teorema 3.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă şi $x_0 \in A'$.*

i) *Dacă $f, g : X \to Y$ sunt funcţii astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in Y$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in Y$ există, atunci avem*

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

ii) *Dacă $f : X \to Y$ şi $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sunt funcţii astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in Y$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ există, atunci avem*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) f(x) = \alpha l.$$

În cazul spaţiilor euclidiene, limitele funcţiilor se pot determina pe componente:

Teorema 3.6. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi $\mathbf{x}_0 \in A'$. Atunci există $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ dacă şi numai dacă pentru orice $k \in \{1, \ldots, m\}$ există limita $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_k(\mathbf{x}) = l_k \in \mathbb{R}$, unde f_k, $1 \leq k \leq m$ sunt cele m componente ale funcţiei f. Mai mult, în acest caz, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m)$.*

Următorul rezultat arată cum să calculăm limitele funcţiilor compuse:

Teorema 3.7 (principiul substituţiei). *Fie (X, d), (Y, d') şi (Z, d'') trei spaţii metrice, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ submulţimi nevide, funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to Z$ şi $x_0 \in A'$, $y_0 \in B'$. Dacă*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

(ii) $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l \in Z$;

(iii) $\exists \delta > 0,\ \forall x \in X : 0 < \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \neq y_0$,

atunci $\lim\limits_{y \to y_0} g(f(x)) = l$.

O greşeală des întâlnită atunci când calculăm limite de funcţii de mai multe variabile este să *iterăm* limita. Să exemplificăm această greşeală prin considerarea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definite de

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Atunci, fixând un $y \in \mathbb{R}^*$, avem

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

Lăsând acum y să tindă la 0, obţinem *limita iterată*

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

Prin simetrie, deducem cealaltă *limită iterată*

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

Totuşi, f nu are o limită în $(0,0)$, deoarece $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$ şi $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Pe de altă parte, o funcţie f poate să aibă o limită într-un punct, dar nu limite iterate. Pentru aceasta, fie $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x, y) := (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}.$$

Atunci $|f(x, y)| \leq g(x, y) := |x| + |y|$. Deoarece $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = 0$, avem, datorită propoziţiei 3.3 că $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$. Pe de altă parte, dacă încercăm să calculăm $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ pentru un $y \in \mathbb{R}^*$, obţinem $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (deoarece $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$), dar $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în 0. De aceea, deoarece

$$f(x, y) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right) \sin \frac{1}{y} + \left(\sin \frac{1}{x}\right)\left(y \sin \frac{1}{y}\right),$$

$f(x, y)$ nu are limită pentru $x \to 0$ dacă $\sin \frac{1}{y} \neq 0$, adică $y \neq \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Este clar acum că problema existenţei limitei iterate $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ are un răspuns negativ.

Consideraţiile de mai sus pot fi extinse cu uşurinţă la cazul mai multor variable.

Să vedem acum ce se întâmplă dacă cerem ca limitele să fie luate după o direcţie prestabilită (într-un spaţiu liniar).

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Spunem că o funcţie f are *limită* în $\mathbf{x}_0$ *în direcţia* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dacă $0 \in \{t \geq 0 \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\}'$ (adică există $t_n \searrow 0$ astfel încât $\mathbf{x}_0 + t_n \mathbf{u} \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$) şi există limita funcţiei $(0, +\infty) \ni t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ în $t = 0$:

$$l_{\mathbf{u}} := \lim_{t \to 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}).$$

b) Spunem că f are (a k-a) *limită parţială* în $\mathbf{x}_0$ dacă f are limită în $\mathbf{x}_0$ în direcţia $\mathbf{e}_k$, pentru $k \in \{1, \ldots, n\}$, unde $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Existenţa unei limite globale implică existenţa limitelor direcţionale. Mai precis, avem:

Propoziţia 3.8. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi $\mathbf{x}_0 \in A'$ astfel încât există $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \in \mathbb{R}^m$. Dacă $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ este astfel încât $0 \in \{t \geq 0 \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\}'$, atunci există limita lui f în $\mathbf{x}_0$ în direcţia $\mathbf{u}$ şi este egală cu ℓ.*

Reciproca acestui rezultat nu este adevărată; de fapt, chiar dacă limitele în toate direcţiile există şi sunt egale, s-ar putea ca o limită globală să nu existe, aşa cum arată următorul exemplu:
Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Fie (u,v) o direcţie în $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Atunci, pentru $t > 0$,

$$f\left((0,0) + t(u,v)\right) = f(tu,tv) = \frac{t^3uv^2}{t^2(u^2 + t^2v^4)} = \frac{tuv^2}{u^2 + t^2v^4}.$$

Deoarece $\lim\limits_{t \searrow 0} f\left((0,0) + t(u,v)\right) = 0$, adică limita lui f în $(0,0)$ în direcţia (u,v) există şi este egală cu 0. Bineînţeles, acest lucru are loc chiar dacă $(u,v) = (0,0)$.

Totuşi, f nu are limită globală în $(0,0)$ deoarece $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0$.

Când f este o funcţie de o variabilă, singurele direcţii nenule posibile (până la multiplicarea cu un scalar) sunt -1 şi 1. În acest caz, vom vorbi de limitele la *stânga* şi la *dreapta*.

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă.

a) Spunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ este un *punct de acumulare la stânga* (*punct de acumulare la dreapta*) a lui A dacă x este punct de acumulare pentru mulţimea $A \cap (-\infty, x_0)$ ($A \cap (x_0, +\infty)$).

b) Dacă $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcţie şi x_0 este un punct de acumulare la stânga (punct de acumulare la dreapta) a lui A, spunem că f are *limită la stânga* (*limită la dreapta*) în x_0 dacă există limita lui f în x_0 în direcţia -1 (1). În acest caz, vom nota această limită cu $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0^-)$ ($\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$, $f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0^+)$).

În cazul $n = 1$, reciproca propoziţiei 3.8 are totuşi loc:

Propoziţia 3.9. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi x_0 un punct de acumulare atât la stânga, cât şi la dreapta a lui A. Atunci limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există dacă şi numai dacă ambele limite $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ există şi sunt egale. În acest caz, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.*

La sfârşitul acestei secţiuni reamintim unele dintre cele mai importante limite de funcţii reale:

- $\lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{1/t} = \mathrm{e}$;
- $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log_a(1+t)}{t} = \dfrac{1}{\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = \ln a$ $(a > 0)$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(1+t)^r - 1}{t} = r$ $(r \in \mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\arcsin t}{t} = 1$;
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$.

4. Funcţii continue

Definiţie. Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă şi o funcţie $f : A \to Y$.

a) Spunem că f este *continuă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X : \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

b) Spunem că f este *discontinuă* într-un punct $x_0 \in A$ dacă f nu este continuă în x_0; în acest caz, spunem de asemenea că x_0 este un *punct de discontinuitate* a lui f.

c) Spunem că f este *continuă* dacă f este continuă în x_0, pentru orice $x_0 \in A$.

Putem vedea că noţiunea de continuitate într-un punct a unei funcţii f este foarte apropiată de noţiunea de limită într-un punct. De fapt, f este continuă într-un punct $x_0 \in A$ dacă şi numai dacă fie x_0 este un punct de acumulare a lui A şi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, fie x_0 este un *punct izolat* (adică nu este punct de acumulare pentru A).

Continuitatea într-un punct poate fi caracterizată cu şiruri.

Teorema 4.1. *Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, o funcţie $f : A \to Y$ şi $x_0 \in A$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Definiţie. Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, o funcţie $f : A \to Y$ şi $x_0 \in A'$. Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in Y$, atunci funcţia $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to Y$ definită de

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\}; \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

este continuă în x_0 şi se numeşte *extensia prin continuitate* a lui f în x_0.

Conform aşteptărilor, compunerea a două funcţii continue este continuă:

Teorema 4.2. *Fie (X, d), (Y, d') şi (Z, d'') trei spaţii metrice, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to Z$.*

- ***i)*** *Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in A$ şi g este continuă în $y_0 := f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.*
- ***ii)*** *Dacă f şi g sunt continue, atunci $g \circ f$ este continuă.*

În cazul în care codomeniul este un spaţiu normat, proprietatea de continuitate se păstrează în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari.

Teorema 4.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă şi $x_0 \in A$.*

- ***i)*** *Dacă funcţiile $f, g : X \to Y$ sunt continue în x_0, atunci $\alpha f + \beta g$ este continuă în x_0.*
- ***ii)*** *Dacă funcţiile $f : X \to Y$ şi $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sunt continue în x_0, atunci $\varphi \cdot f$ este continuă în x_0.*

Definiţie. Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice.

- ***a)*** Spunem că o funcţie bijectivă $f : X \to Y$ este un *homeomorfism* dacă f şi f^{-1} sunt ambele continue.
- ***b)*** Spunem că (X, d) şi (Y, d') sunt *homeomorfe* dacă există un homeomorfism între ele.
- ***c)*** Spunem că o funcţie $f : X \to Y$ este o *izometrie* între (X, d) şi (Y, d') dacă

$$\mathrm{d}'(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Observaţie. Dacă f este o izometrie între (X, d) şi (Y, d'), atunci f este continuă. Mai mult, dacă f este în plus bijectivă, atunci f este un homeomorfism.

Să analizăm acum continuitatea funcţiilor între spaţii euclidiene.

Teorema 4.4. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi $\mathbf{x}_0 \in A$. Atunci f este continuă în $\mathbf{x}_0$ dacă şi numai dacă f_k este continuă în $\mathbf{x}_0$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

Propoziţia 4.5. *Dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie liniară, atunci T este continuă.*

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}^m$.

- ***a)*** Spunem că f este *continuă la stânga* (*continuă la dreapta*) în $x_0 \in A$ dacă $f|_{A \cap (-\infty, x_0]}$ ($f|_{A \cap [x_0, +\infty)}$) este continuă în x_0.
- ***b)*** Spunem că f este *continuă la stânga* (*continuă la dreapta*) dacă f este continuă la stânga (continuă la dreapta) în orice $x_0 \in A$.

Propoziţia 4.6. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ şi $x_0 \in A$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă f este continuă şi la stânga şi la dreapta în x_0.*

Vom introduce acum câteva noţiuni mai tari de continuitate.

Definiţie. Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie.

- ***a)*** Funcţia f se numeşte *uniform continuă* dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x, y \in X : \mathrm{d}(x, y) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- ***b)*** Funcţia f se numeşte *Lipschitz-continuă* dacă există o constantă $c_1 > 0$, numită *constanta Lipschitz* a lui f, astfel încât

$$\mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq c_1 \mathrm{d}(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

c) Funcţia f se numeşte *Hölder-continuă* de ordinul $\alpha \in (0,1]$ dacă există o constantă $c_\alpha > 0$ astfel încât

$$\mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq c_\alpha \, [\mathrm{d}(x,y)]^\alpha, \ \forall x, y \in X.$$

Observaţie.
1. O funcţie uniform continuă este continuă.
2. O funcţie Lipschitz continuă este o funcţie Hölder-continuă de ordinul 1 (şi reciproc).
3. Orice funcţie Hölder continuă este uniform continuă (pentru $\varepsilon > 0$, e de ajuns să luăm $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{c_\alpha}\right)^{1/\alpha}$).

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric. Spunem că o submulţime $K \subseteq X$ este *compactă* dacă orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ admite un subşir convergent la un element din K.

Datorită teoremei Bolzano-Weierstrass, submulţimile compacte ale lui $\mathbb{R}$ sunt submulţimile închise şi mărginite.

Teorema 4.7. *Fie (X, d), (Y, d') spaţii metrice, $K \subseteq X$ o submulţime compactă nevidă şi $f : K \to Y$ o funcţie continuă. Atunci $f[K]$ este compactă.*

O consecinţă imediată a acestui rezultat este următorul:

Teorema 4.8 (Weierstrass). *Fie (X, d) un spaţiu metric, $K \subseteq X$ o submulţime compactă şi nevidă, iar $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci funcţia f este mărginită şi există $x_0, x_1 \in K$ astfel încât $f(x_0) = \min\limits_{x\in K} f(x)$ şi $f(x_1) = \max\limits_{x\in K} f(x)$.*

O altă proprietate importantă a submulţimilor compacte este faptul că orice funcţie continuă definită pe o astfel de mulţime devine uniform continuă:

Teorema 4.9 (Cantor). *Fie (X, d), (Y, d') spaţii metrice, $K \subseteq X$ o submulţime compactă şi nevidă, iar $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este uniform continuă.*

Bibliografie selectivă

[1] C. Canuto, A. Tabacco, *Mathematical Analysis II (2nd ed.)*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
[2] C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă, *Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[3] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science, 2010.
[4] R. Heath-Brown, *Analysis II. Continuity and Differentiability*, Hilary Term, 2016.
[5] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
[6] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[7] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.
[8] V. Postolică, *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[9] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.
[10] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2009.