$subf((p \wedge q))$ $\qquad \varphi = \underbrace{(p \wedge q)}_{\in LP}$ $\qquad (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

notatie pt formula

Ex $\varphi = ((\underbrace{p \wedge q}_{\varphi_1}) \vee (\underbrace{\neg p}_{\varphi_2} \wedge \underbrace{\neg q}_{\varphi_3})) \equiv (\boxed{((p \wedge q) \vee \neg p)} \wedge \boxed{((p \wedge q) \vee \neg q)}) \equiv$

$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$

$\equiv (((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge \boxed{((p \wedge q) \vee \neg q)} \equiv$

$\equiv \underbrace{((\underbrace{p \vee \neg p}) \wedge (\underbrace{q \vee \neg p}))}_{\varphi_1} \wedge ((\underbrace{p \vee \neg q}_{\varphi_2}) \wedge (\underbrace{q \vee \neg q}_{\varphi_3})) \equiv$

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \overset{not}{\equiv} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

6. $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3$

$\equiv ((\underbrace{((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p))}_{\varphi_1} \wedge (\underbrace{p \vee \neg q}_{\varphi_2})) \wedge (\underbrace{q \vee \neg q}_{\varphi_3}) \equiv$

$\equiv ((\underbrace{p \vee \neg p}_{\varphi_1}) \wedge (\underbrace{q \vee \neg p}_{\varphi_2})) \wedge \underbrace{(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)}_{\varphi_3} \equiv$

$\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)$ FNC.

$p \vee p \vee q$

$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

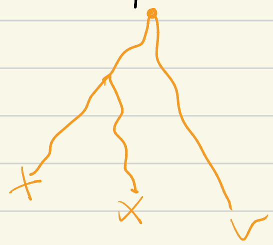
$p \to q \equiv \underbrace{\neg p \vee q}_{C_1}$ FNC.

$\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \quad n \geq 1$

$C_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{im_i} \quad m_i \geq 1$

$L_{ij} = a \quad \neg a$

DN - sist. deductiv - seamănă cu gândirea umană. (mai greu de implementat)



Rezoluția : sistem deductiv cu o singură regulă

↳ lucrează cu clauze (formule în FNC)

↳ utilă pt a dem nesatisfiabilitatea

$C_1 = p \vee \neg q \vee r$

1. Clauzele ca mulțimi de literali

$\vee$ are prop :

1) asociativ $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ pt orice $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{LP}$

2) comutativ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \vee \varphi_1)$

3) idempotența $(\varphi_1 \vee \varphi_1) \equiv \varphi_1$

$p \vee \neg q \vee r \longrightarrow \underbrace{\{p, \neg q, r\}}_{\text{clauză (abuz de limbaj)}}$

$\equiv$

$p \vee p \vee \neg q \vee r$

$\equiv$

$\neg q \vee p \vee r$

$p \vee q \vee p \equiv p \vee p \vee q \equiv p \vee q$

$\{p, \neg p\}$ - clauză validă
formulă validă $(p \vee \neg p)$ $((p \vee p) \vee \neg p)$ ....

Clauza vidă $(\square)$ - clauză cu 0 literali reprezentant pt contradicție
$\emptyset$

2. FNC ca mulțimi de clauze

$\wedge$ are prop :

1) asociativă $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$

2) comutativă $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$

3) idempotentă $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee p) \longrightarrow \{ p \vee \neg q , q \vee r \vee p \}$

$\downarrow$

$\{ \{p, \neg q\}, \{q, r, p\} \}$

Rezolutia

Rezolutia binară

clauză ce conține a — clauză cu ¬a

$$\frac{C \cup \{a\} \qquad D \cup \{\neg a\}}{C \cup D}$$

— clauză rezolvent

ipoteze și concluzii: mulțimi de literali

$\varphi = \underbrace{(p \vee q)} \wedge \underbrace{(\neg p \vee \neg r)}$ FNC.

dacă există $\tau: A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 1 \Rightarrow \hat{\tau}((p \vee \overset{C}{q})) = 1$ și $\hat{\tau}((\neg p \vee \underbrace{\neg r}_{D})) = 1$

dacă $\tau(p) = 1 \Rightarrow \hat{\tau}(D) = 1$

sau

dacă $\tau(p) = 0 \Rightarrow \hat{\tau}(C) = 1$

$$\frac{\overset{a}{\{p \vee q\}} \qquad \overset{\neg a}{\{\neg p, \vee \neg r\}}}{\{q \vee \neg r\}}$$

1. $\{p, q\}$ (premisă)
2. $\{\neg p, \neg r\}$ (prem)
3. $\{q, \neg r\}$ (RB, 1, 2, $a = p$)

Ex $\varphi = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\{ \{p, q\}, \{\neg p, \neg q, r\} \}$

1. $\{p, q\}$
2. $\{\neg p, \neg q, r\}$
3. $\{q, \neg q, r\}$ (RB, 1, 2, $a = p$) ← rezolventul după / în funcție de p
4. $\{p, \neg p, r\}$ (RB, 1, 2, $a = q$) ← rezolvent după q.
5. ~~$\{r\}$ (RB, 1, 2)~~ greșit !!
6. $\{p, q, r\}$ (RB, 1, 3, $a = q$)

← Rezolventul a două clauze nu este unic.

Demonstrația formală a unei clauze φ plecând de la clauzele $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$

este o listă
1. φ_1
2. φ_2
3. φ_3
- - -
i. φ_i (R.B.
- - -
m. $\varphi_m = \varphi$

φ_i → premisă $\in \{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$

sau

→ rezolventul a două clauze φ_j și φ_k a.î. $j, k < i$

Ex: $\{p, \neg q\}$ din $\{\neg r, p, \neg r'\}, \{r, p\}, \{r', \neg q\}$

1. $\{\neg r, p, \neg r'\}$ (prem)
2. $\{r, p\}$ (prem)
3. $\{r', \neg q\}$ (prem)
4. $\{p, \neg r'\}$ (RB, 2, 1, $a = r$)
5. ~~r.~~ $\{p, \neg q\}$ (RB, 3, 4, $a = r'$)

dem a clauzei $\{p, \neg q\}$

↓

derivare (prin rez)

Ex $\square$ din $\{p, \neg q\}, q, \neg p$

1. $\{p, \neg q\}$ (prem)
2. q (prem)
3. $\neg p$ (prem)
4. p (RB, 2, 1, $a = q$)
5. $\square$ (RB, 4, 3, $a = p$)

$\Rightarrow \varphi = (p \vee \neg q) \wedge q \wedge \neg p$ - nu este satisf.

Corectitudinea

Lema 1: $\varphi \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

Lema 2. Fie C, D două clauze, $a \in A$

atunci $C \cup \{a\}, D \cup \{\neg a\} \models C \cup D$

Th de corectitudine a rezoluției:

Dacă există o dem prin rez a clauzei φ din $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

atunci $\varphi_1 \dots \varphi_n \models \varphi$ $P(\varphi)$

Dem prin inducție după lungimea dem prin rezoluție.

Dem prin rez:

1. ψ_1
2. ψ_2
3. $\vdots$

$\vdots$

n. $\psi_n = \varphi$

pt i fixat

pp. $P(\psi_j)$ are loc pt $j < i$

și arătăm că $P(\psi_i)$ — $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi_i$

2 cazuri pt linia i: → "regula" aplicată (prem)

$\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \xRightarrow{\text{Lem 1}} \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi_i$

↓ "regula" este RB

$j_1.\ \psi_{j_1} = C \cup \{a\} \xRightarrow{\text{ip ind}} \varphi_1 \dots \varphi_n \models C \cup \{a\}$

$j_2.\ \psi_{j_2} = D \cup \{\neg a\} \xRightarrow{\text{ip ind}} \varphi_1, \dots, \varphi_n \models D \cup \{\neg a\}$ ip ind

$i.\ \psi_i = C \cup D$ (RB, j_1, j_2, a)

Tb. arătat $\varphi_1 \dots \varphi_n \vDash C \cup D$ folosind ip. ind. De terminat.

Completitudine

complet dacă pot dem prin rez. orice cons. sem.

Th. (Rezolutia nu este completă) Există clauze $\varphi_1, \dots \varphi_n, \varphi$ a.î.

$$\varphi_1, \dots \varphi_n \vDash \varphi$$

dar nu există dem prin rez pt φ din $\varphi_1 \dots \varphi_n$

Dem
$\varphi_1 = p$
$\varphi_2 = q$
$\varphi = (p \wedge q)$

$\{p, q\} \vDash (p \wedge q)$

– plecând de la p și q, nu putem aplica RB.

Th: Completitudine Refutationala

Dacă $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_n$ în FNC nu este satisfiabilă, atunci există o derivare prin rez a lui $\square$ plecând de la $\varphi_1, \dots \varphi_n$

φ – nesatisf $\Rightarrow \varphi \equiv \varphi'$ (FNC) $\Rightarrow$ aplic rez pe clauzele lui φ' și obțin $\square$ $\Rightarrow \varphi'$ nesatisf.
$\Rightarrow \varphi$ nesatisf.

φ – validă $\rightarrow \neg\varphi \equiv \dots \equiv \varphi'$ (FNC) $\rightarrow$ aplic rez pe clauzele lui φ' și obțin $\square$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi'$ nesatisf $\Rightarrow \neg\varphi$ nesat $\xRightarrow{\text{Th 160}} \varphi$ validă.

Th.160 φ validă ddacă $\neg\varphi$ nesatisf.

Th 163

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ ddacă $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ validă

ddacă $\neg\left((\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_n) \to \varphi\right)$ nesat.

Ex: $\varphi = (p \vee q) \to (q \vee p)$ validă

$\neg\varphi = \neg\left((p \vee q) \to (q \vee p)\right) \equiv$

$\vdots$

$\equiv (p \vee q) \wedge \neg q \wedge \neg p = \varphi'$ FNC.

1. $\{p, q\}$ (prem)
2. $\neg q$ (prem)
3. $\neg p$ (prem)
4. p (RB, 1, 2, $a = q$)
5. $\square$ (RB, 4, 3, $a = p$)

$\overset{\text{corect}}{\Longrightarrow}$ φ' nu este satisf. $\left.\begin{matrix} \\ \varphi' \equiv \neg\varphi \end{matrix}\right]$ $\Rightarrow \neg\varphi$ nesatisf $\overset{\text{Th 160}}{\Longrightarrow}$

$\{p \vee q, \neg q, \neg p\} \models \perp$

$\Rightarrow \varphi$ valid.