$\mathcal{S}, \alpha \models \varphi$

1. Formule echivalente

Def. 1 $\varphi_1, \varphi_2 \in LP1$.

φ_1 echivalent în $\mathcal{S}$ cu φ_2 ddacă

pt orice $\mathcal{S}$-atribuire α avem

$\mathcal{S}, \alpha \models \varphi_1$ ddacă $\mathcal{S}, \alpha \models \varphi_2$

$$\varphi_1 \overset{\mathcal{S}}{\equiv} \varphi_2$$

Ex: $\Sigma = (\{P\}, \{f, i, e\})$

ar: P: 2; f: 2, i: 1, e: 0

$\mathcal{S}_1 = (\mathbb{Z}, \{=\}, \{+, -, 0\})$

$P(x, y) \overset{\mathcal{S}_1}{\equiv} P(y, x)$ ddacă pt orice $\mathcal{S}_1$-atr α avem

$\mathcal{S}_1, \alpha \models P(x, y)$ ddacă $\mathcal{S}_1, \alpha \models P(y, x)$

Fie α o $\mathcal{S}_1$-atr arbitrară.

$\mathcal{S}_1, \alpha \models P(x, y)$ ddacă $P^{\mathcal{S}_1}(\overline{\alpha}(x), \overline{\alpha}(y))$

ddacă $\overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(y)$ $\in \mathbb{Z}$ $\quad \overline{\alpha}: T \to \mathbb{Z}$

ddacă (simetria $=$)

ddacă $\overline{\alpha}(y) = \overline{\alpha}(x)$

ddacă $P^{\mathcal{S}_1}(\overline{\alpha}(y), \overline{\alpha}(x))$

ddacă $\mathcal{S}_1, \alpha \models P(y, x)$.

$\Rightarrow P(x, y) \overset{\mathcal{S}_1}{\equiv} P(y, x)$ (deoarece α arbitrar)

$$P(x_1, x_3) \overset{S_1}{\equiv} P(x_2, x_3)$$

ddacă pt orice α – S_1 atr avem $S_1, \alpha \models P(x_1, x_3)$ ddacă $S_1, \alpha \models P(x_2, x_3)$

Pt. un α ales

$S_1, \alpha \models P(x_1, x_3)$ ddacă $\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}(x_3)$

ddacă $\alpha(x_1) = \alpha(x_3)$ (1) "1"

$S_1, \alpha \models P(x_2, x_3)$ ddacă $\alpha(x_2) = \alpha(x_3)$ (2) "F"

Fie $\alpha : X \to \mathbb{Z}$

$\alpha(x_1) = 2$

$\alpha(x_2) = 1$

$\alpha(x_3) = 2$

$\alpha(y) = 0$ pt orice $y \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$

$\Rightarrow$ nu pt orice α avem $S_1, \alpha \models P(x_1, x_3)$ ddacă $S_1, \alpha \models P(x_2, x_3)$

$\Rightarrow P(x_1, x_3) \overset{S_1}{\not\equiv} P(x_2, x_3)$

Def $\varphi_1, \varphi_2 \in LP1$

φ_1 echivalent cu φ_2 ddacă $\boxed{\varphi_1 \equiv \varphi_2}$

pt orice S, și pt orice S-atr α avem

$S, \alpha \models \varphi_1$ ddacă $S, \alpha \models \varphi_2$

Ex1. $P(x, y) \equiv P(y, x)$

Fie $S_6 = (\mathbb{Z}, \{>\}, \{+, -, 0\})$

$\alpha : X \to \mathbb{Z}$, $\alpha(x) = 2$ $\alpha(y) = 3$

$\alpha(z) = 0$ pt orice $z \in X \setminus \{x, y\}$

$S_6, \alpha \models P(x, y)$ ddacă ....

ddacă $\alpha(x) > \alpha(y)$

ddacă $2 > 3$ "F".

$S_6, \alpha \models P(y, x)$ ddacă ....

$\alpha(y) > \alpha(x)$

$3 > 2$ "A".

$\Rightarrow P(x, y) \not\equiv P(y, x)$

Ex 2: $\forall x. P(x) \equiv \forall y. P(y)$ "A" (de dew)

$\neg \exists x. P(x) \equiv \forall x. \neg P(x)$ "A" (de dew)

Forma normală Prenex (FNP)

φ este în FNP dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \dots Q_n x_n . \varphi'$$

a.î. $\begin{cases} \cdot\ Q_i \in \{\forall, \exists\} \\ \cdot\ \varphi' \text{ nu conține cuantificatori} \end{cases}$ (toți cuantif "în față")

Ex: $\underbrace{\forall x}_{Q_1} . \underbrace{\exists y}_{Q_2} . \underbrace{(P(x) \land P(y))}_{\varphi'}$ în FNP

$\forall x. (\underbrace{(\exists y. P(y))}\land P(x))$ nu este în FNP

$\forall x. \underbrace{P(x) \land \exists y. P(y)}$ nu este în FNP

Th 138 Pt orice $\varphi \in \mathbb{LP}1$, există $\varphi' \in \mathbb{LP}1$ a.î.

- φ' – în FNP
- $\varphi' \equiv \varphi$

Th de înlocuire

$\varphi, \varphi' \in \mathbb{LP}1$ a.î. $\varphi \equiv \varphi'$

$\varphi_1 \in \mathbb{LP}1$ conține pe φ ca subformulă

φ_2 obținut din φ_1 prin înlocuirea unei apariții a lui φ cu φ'

Atunci $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Lema redenumirii

$\varphi \in \mathbb{LP}1$, $x, y \in \mathcal{X}$, $y \notin free(\varphi)$

$$\forall x. \varphi \equiv \forall y. \sigma^\flat(\varphi) \qquad \sigma = \{x \mapsto y\}$$

$$\exists x. \varphi \equiv \exists y. \sigma^\flat(\varphi)$$

Ex. $\forall x. \underbrace{\boxed{P(x, y)}}_{\varphi} \equiv \forall z. P(z, y)$

$free(\varphi) = \{x, y\} \not\ni z$

$\forall x. P(x, y) \not\equiv \forall y. P(y, y)$

nu este justificat de lema redenumirii

$y \in free(\varphi)$

Ex. 142

$$\varphi = \underbrace{\left(\forall x.\ \neg\underbrace{\left(P(x,x) \wedge \neg \exists y.\ P(x,y)\right)}_{\varphi_1}\right)} \wedge \underbrace{\boxed{P(x,x)}}_{\varphi_2}$$

$$(\forall x.\ \varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x.\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ dacă } x \notin free(\varphi_2)$$

$$= \{x\}$$

$$\forall x.\ \varphi_1 \overset{LR.}{\equiv} \forall z.\ \sigma^b(\varphi_1) \qquad \sigma = \{x \mapsto z\}$$

$$free(\varphi_1) = \{x\}$$

$$\overset{LR.}{\underset{+Th.\ Înloc.}{\equiv}} \left(\forall z.\ \neg\underbrace{\left(P(z,z) \wedge \neg\exists y.\ P(z,y)\right)}_{\varphi_1}\right) \wedge \underbrace{P(x,x)}_{\varphi_2}$$

$$\equiv \forall z.\ \left(\neg\left(P(z,z) \wedge \neg\exists y.\ P(z,y)\right) \wedge P(x,x)\right)$$

$$\neg\exists x.\ \varphi \equiv \forall x.\ \neg\varphi$$

$$\equiv \forall z.\ \left(\neg\left(P(z,z) \wedge (\forall y.\ \neg P(z,y))\right) \wedge P(x,x)\right)$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$$

$$\equiv \forall z.\ \left(\neg\underbrace{\left(\underbrace{(\forall y.\ \neg P(z,y))}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{P(z,z)}_{\varphi_2}\right)} \wedge P(x,x)\right)$$

$$y \notin free(\varphi_2) = \{z\}$$

$$\equiv \forall z.\ \left(\underbrace{\neg\left(\forall y.\ (\neg P(z,y) \wedge P(z,z))\right)} \wedge P(x,x)\right)$$

$$\neg(\forall x.\ \varphi) \equiv \exists x.\ (\neg\varphi)$$

$$\equiv \forall z. \Big(\big(\exists y. \underbrace{\neg \big(\neg P(z,y) \wedge P(z,z) \big)}_{\varphi_1} \big) \wedge \underbrace{P(x,x)}_{\varphi_2} \Big)$$

$$\equiv \underline{\forall z. \exists y.} \underbrace{\Big(\neg \big(\neg P(z,y) \wedge P(z,z) \big) \wedge P(x,x) \Big)}_{\varphi' \text{ nu conține cuantif.}} \qquad \text{FNP}$$

Formule închise

$\varphi \in \mathbb{LP}1$ este închisă dacă $free(\varphi) = \emptyset$

Ex: $\forall x. \big(P(x,x) \wedge \exists y. P(x,y) \big)$ – închisă

$\forall x. P(x,y)$ – nu este închisă (deschisă)

Def $\varphi \in \mathbb{LP}1$, $free(\varphi) = \{x_1, \dots x_n\}$

$\varphi_1 = \exists x_1. \exists x_2. \dots \exists x_n. \varphi$ – închiderea existențială

Def. φ_1 echisatisf φ_2 dacă

- φ_1 și φ_2 sunt satisfiabile

sau

- nici φ_1 și nici φ_2 nu sunt satisf.

Th 152 φ este echisat cu închiderea ei existențială.

!! nu echivalente

Def $\varphi \in LP1$ $free(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\varphi_1 = \forall x_1 . \forall x_2 . \dots \forall x_n . \varphi$ – închiderea universală

Th: φ validă ddacă închiderea universală este validă.

Ex. $\varphi = \forall x . P(x, y)$ $free(\varphi) = \{y\}$

$\exists y . \forall x . P(x, y)$ – închiderea exist.

$\forall y . \forall x . P(x, y)$ – închiderea univ.

Forma normală Skolem (FNS)

φ – în FNS dacă $\varphi = \forall x_1 . \forall x_2 . \dots \forall x_n . \varphi'$

a.î. • φ' nu conțin cuantificatori

• $free(\varphi') \subseteq \{x_1, \dots x_n\}$ (φ – închisă)

Th. de aducere în FNS

pt orice $\varphi \in LP1$ există $\varphi' \in LP1$ a.î.

• φ' – în FNS

• φ și φ' sunt echisatisfiabile.

Alg

$\varphi \in LP1 \xrightarrow{FNP} \varphi_1$ – FNP $\xrightarrow{\text{închiderea existent.}} \varphi_2$ – FNP închisă $\xrightarrow[\text{de mai multe ori}]{\text{Skolemizare}} \varphi_3$ – FNS.

$\varphi \equiv \varphi_1$ $\quad$ φ_1 echisat φ_2 $\quad$ echisat cu φ_2

φ_4 – FNSC

$\varphi_4 \equiv \varphi_3$

Skolemizare

$$\varphi = \forall x_1 . \forall x_2 . \dots . \forall x_k . \exists x . \varphi'$$ (φ' poate conține alți cuantif)

Fie $f \in \mathcal{F}_k$ – simb. fct de aritate k, fresh (nu apare în φ)

$$\varphi_1 = \forall x_1 . \forall x_2 . \dots . \forall x_k . \sigma^{b}(\varphi')$$

$$\sigma = \{ x \mapsto f(x_1, \dots x_k) \}$$

φ echisat cu φ_1

FNSC

$$\varphi = \forall x_1 . \forall x_2 . \dots . \forall x_n . \varphi'$$

– FNS

φ' – FNC