CURSUL 11
INTEGRARE

Noţiunea de *integrală* este esenţială multor arii ale matematicii, dar şi altor domenii ce se bazează pe matematică. De exemplu, ea serveşte: determinării stării unui sistem dinamic a cărui viteză de evoluţie este cunoscută, la calculul caracteristicilor numerice ale unor obiecte geometrice (lungime, arie, volum, centru de greutate), ale cantităţilor fizice (moment, lucru mecanic) sau ale variabilelor aleatoare în teoria probabilităţilor (funcţie de distribuţie, medie şi varianţă).

1. Primitive

Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interiorul nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$.

a) O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte o *primitivă* a lui f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

b) Dacă f are cel puţin o primitivă pe I, atunci mulţimea primitivelor lui f se numeşte *integrala nedefinită* a lui f şi se notează $\int f(x)dx$.

Observaţii.

1. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă a lui f are forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Notând $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor constante pe I, avem $\int f(x)dx = F + \mathcal{C}$. Prin abuz de limbaj, putem scrie $\int f(x)dx = F(x) + c,\ \forall x \in I$.

2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci f este primitiva lui f'.

3. Orice primitivă a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, deoarece orice funcţie derivabilă este continuă.

4. Spaţiul $\mathcal{P}(I)$ al tuturor funcţiilor $f : I \to \mathbb{R}$ ce admit primitive este un spaţiu liniar (subspaţiu al spaţiului liniar $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$), deoarece

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5. Orice funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ ce admite primitive are *proprietatea lui Darboux*: pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi λ între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există $\tilde{x}$ între x_1 şi x_2 astfel încât $f(\tilde{x}) = \lambda$.

În ceea ce urmează vom analiza unele metode standard de calcul al primitivelor, pornind cu lista integralelor nedefinite uzuale:

- $\int x^\alpha dx = c + \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \\ \ln|x|, & \alpha = -1; \end{cases}$
- $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c; \quad \int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c,\ a \in \mathbb{R}^*;$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c; \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + c,\ a \in \mathbb{R}^*;$
- $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + c,\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x dx = \sin x + c;$
- $\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \operatorname{ch} x + c; \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \operatorname{sh} x + c,$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval cu interior nevid astfel încât funcţiile de sub semnul integralei sunt definite pe I.

Integrare prin părţi. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile, cu f' şi g' continue pe I. Atunci

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,\ x \in I,$$

Putem aplica această formulă pentru a completa lista de mai sus:

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{|a|} + c,\ a \in \mathbb{R}_+^*;$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ a \in \mathbb{R}^*$;
- $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + c$.

Integrarea prin părţi este recomandată pentru integrale de forma

$$\int P(x)f(x)dx,$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ şi f este o funcţie elementară de tipul: a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, etc. Aplicând această metodă, putem reduce cu o unitate gradul polinomului P.

Metoda transformărilor algebrice. Este cel mai des utilizată pentru calculul primitivelor *funcţiilor raţionale* de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\mathring{I} \neq \emptyset$ şi $Q(x) \neq 0$ pe I. Este bine cunoscut (din algebră) faptul că f poate fi descompusă în mod unic ca suma unor funcţii raţionale “simple”:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum\nolimits_2 \frac{B_{k,m}x + C_{k,m}}{(x^2 + p_k x + q_k)^m},\ x \in I,$$

unde G este o funcţie polinomială (egală cu 0 dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H este o funcţie polinomială cu $\operatorname{grad} H < \operatorname{grad} Q$, $\sum_1$ este o sumă finită după toate rădăcinile reale x_k ale lui Q şi $\sum_2$ este o sumă finită după toate rădăcinile complexe ale lui Q ($p_k, q_k \in \mathbb{R}$ astfel încât $p_k^2 - 4q_k < 0$). Integrarea lui f este astfel redusă la calculul primitivelor componentelor descompunerii de mai sus.

Dacă Q are rădăcini multiple, calculul primitivei lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi făcută după *metoda Gauss-Ostrogradski*, bazată pe formula

$$(*) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,\ x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q şi Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \frac{Q}{Q_1}$, iar P_1, P_2 sunt polinoame ce au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$, respectiv $\operatorname{grad} Q_2$. Pentru a găsi P_1 şi P_2 se poate deriva relaţia $(*)$, adică

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},\ x \in I.$$

Metoda transformărilor trigonometrice. Este adesea combinată cu *metoda substituţiei* şi este folosită pentru calculul primitivelor funcţiilor ce se exprimă cu ajutorul funcţiilor trigonometrice.

Pentru *integralele trigonometrice* de forma

$$\int E(\sin x, \cos x)dx,\ x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcţie raţională de două variabile se poate utiliza substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Deoarece $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, a calcula integrala de mai sus se reduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în noua variabilă t. Există unele cazuri în care calculele pot fi simplificate, prin folosirea altor substituţii:

i) dacă $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, atunci se recomandă substituţia $\cos x = t$;
ii) dacă $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$, atunci se recomandă substituţia $\sin x = t$;
iii) dacă $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară în $\sin x$ şi $\cos x$, atunci se recomandă substituţia $\operatorname{tg} x = t$.

Vom aplica de asemenea metoda substituţiei pentru calculul aşa-ziselor *integrale iraţionale,* pentru a le reduce la integrale de funcţii raţionale. Vom utiliza *substituţiile Euler* pentru integralele de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx,\ x \in I,$$

cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi E o funcţie raţională de două variabile. Schimbarea de variabilă se va face după cum urmează:

i) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, dacă $a > 0$;
ii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, dacă $c > 0$;
iii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, dacă $b^2 - 4ac > 0$, unde x_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

Pentru integrale iraţionale de forma

$$\int E\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx,\ x \in I,$$

unde E este o funcţie raţională de $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) variabile reale, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, $cx+d \neq 0$, $\forall x \in I$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\forall x \in I$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i = \overline{1,k}$, vom folosi substituţia $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Substituţiile Cebîşev sunt folosite pentru calculul *integralelor binomiale*, ce au forma

$$\int x^p (ax^q + b)^r\, dx,\ x \in I,$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ şi $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Calculul unor astfel de integrale se reduce la cel al primitivelor de funcţii raţionale doar în următoarele trei cazuri:

i) $r \in \mathbb{Z}$: substituţia $x = t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al lui p şi q;
ii) $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$: substituţia $ax^q + b = t^l$, unde l este numitorul lui r.
iii) $\frac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$: substituţia $a + bx^{-q} = t^l$, l fiind numitorul lui r.

Pentru a calcula integralele de forma

$$\int E\left(a^{r_1 x}, a^{r_2 x}, \ldots, a^{r_n x}\right)\, dx,$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ şi E o funcţie raţională de n ($n \in \mathbb{N}^*$) variabile reale se poate face prin substituţia $a^x = t^\nu$, unde $t > 0$ şi ν este cel mai mic multiplu comun al numărătorilor numerelor $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

La final, dorim să subliniem că există funcţii elementare ce nu posedă primitive elementare. Este cazul *integralelor eliptice*

$$\int \sqrt{(1 - a^2 \sin^2 x)^{\pm 1}}\, dx,\ a \in (0,1),$$

dar şi al următoarelor integrale:

- $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$;
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$, $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\, dx$;
- $\displaystyle\int e^{-x^2}\, dx$ (*primitiva Poisson*), $\displaystyle\int \cos(x^2) dx$, $\displaystyle\int \sin(x^2) dx$ (*primitivele Fresnel*).

2. Integrala Riemann

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definiţie.

a) Numim o *diviziune* (sau *partiţie*) a intervalului $[a,b]$ o mulţime finită $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$) sunt numite *subintervalele* diviziunii Δ.

b) Numărul

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

(notat de asemenea $\nu(\Delta)$) se numeşte *norma* diviziunii Δ.

c) O diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ se numeşte *echidistantă* dacă $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall i = \overline{1,n}$; în acest caz $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$ şi $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $\forall i = \overline{0,n}$.

Vom nota cu $\mathcal{D}[a,b]$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului compact $[a,b]$. Fie $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a,b]$. Spunem că Δ_2 este mai *fină* decât Δ_1 şi notăm $\Delta_1 \le \Delta_2$ dacă $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$.

Definiţie. Fie $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

a) Un n-uplu $\xi_\Delta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte un *sistem de puncte intermediare* al lui Δ dacă $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1,n}$. Mulţimea tuturor *sistemelor de puncte intermediare* ale lui Δ este notată Ξ_Δ.

b) Numim *suma Riemann* corespunzătoare funcţiei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ în raport cu Δ şi un sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$,numărul

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţie. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă Riemann* (sau *$\mathcal{R}$-integrabilă*) dacă există un număr real I, numit *integrala Riemann* a lui f, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice $\xi_\Delta \in \Xi_\Delta$ să avem $\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I\right| < \varepsilon$.

Integrala Riemann (ce este unică) va fi notată prin $\int_a^b f(x)dx$ (sau $(\mathcal{R}) \int_{[a,b]} f(x)dx$). Mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe $[a, b]$ este notată $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziţia 2.1. *Dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este Riemann integrabilă, atunci ea este mărginită.*

Observaţie. Dacă notăm $\mathcal{B}([a, b])$ mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, atunci, datorită rezultatului de mai sus, $\mathcal{R}[a, b] \subseteq \mathcal{B}([a, b])$. Incluziunea este totuşi strictă, deoarece există funcţii mărginite ce nu sunt integrabile. Un exemplu este funcţia lui Dirichlet, $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

O condiţie necesară şi suficientă pentru integrabilitatea Riemann este dată de următoarea condiţie de tip Cauchy:

Teorema 2.2 (criteriul Cauchy de integrabilitate Riemann). *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este $\mathcal{R}$-integrabilă dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b],\ \forall \xi'_\Delta, \xi''_\Delta \in \Xi_\Delta : \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\sigma_f(\Delta, \xi'_\Delta) - \sigma_f(\Delta, \xi''_\Delta)\right| < \varepsilon.$$

Următorul rezultat prezintă unele proprietăţi utile ale funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile.

Propoziţia 2.3.

i) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c, d]$, pentru orice interval $[c, d] \subseteq [a, b]$.*

ii) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a, b)$. Dacă $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c]$ şi $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

iv) *Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi are loc* inegalitatea Cauchy-Schwarz *pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

v) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $|f(x)| \ge \mu > 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.*

vi) *Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

(cu alte cuvinte, $\mathcal{R}[a, b]$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathscr{F}([a, b]; \mathbb{R})$).

vii) *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.*

Observaţii.

1. O generalizare a inegalităţii Cauchy-Schwarz este, ca în cazul sumelor finite de numere reale, *inegalitatea lui Hölder* pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

unde $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Integrala Riemann este o funcţională monotonă, adică dacă $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$ astfel încât $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

3. Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, definim $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$ şi $\int_a^a f(x)dx := 0$.

4. Fie $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Datorită monotoniei integralei Riemann, avem

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Mai mult, dacă $f \in C([a,b])$ (adică f este continuă pe $[a,b]$), atunci există $x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$; rezultă că

$$f(x_1) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(x_2)$$

Deoarece f are proprietatea lui Darboux (ce este implicată de continuitatea lui f), atunci există c între x_1 şi x_2 (cu posibilitate de egalitate) astfel încât $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, adică are loc următoarea formulă a mediei:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Sume Darboux.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ este o diviziune a lui $[a,b]$, vom defini *sumele Darboux inferioare* şi *superioare* asociate lui Δ, după cum urmează:

$$s_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1});$$

$$S_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $m_i := \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ şi $M_i := \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Definiţie. Numărul $\underline{I} := \sup\limits_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} s_f(\Delta)$ se numeşte *integrala Darboux inferioară*, în timp ce numărul $\overline{I} := \inf\limits_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} S_f(\Delta)$ se numeşte *integrala Darboux superioară*.

Vom avea întotdeauna $\underline{I} \le \overline{I}$. Următorul rezultat precizează o altă condiţie necesară şi suficientă pentru $\mathcal{R}$-integrabilitate:

Teorema 2.4 (Criteriul Darboux de integrabilitate Riemann). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I}$, condiţie ce este echivalentă cu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a,b] : S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

În acest caz, $\underline{I} = \overline{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Folosind criteriile Cauchy sau Darboux, se pot sublinia câteva categorii de funcţii ce sunt integrabile Riemann.

Teorema 2.5. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

- ***i)*** *Dacă $f \in C([a,b])$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*
- ***ii)*** *Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ (sau, mai general,* monotonă pe porţiuni *pe $[a,b]$, adică $f|_{[c_{i-1},c_i]}$ este monotonă pentru orice $i = \overline{1,n}$, unde $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$), atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Teorema 2.6. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Definim $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b].$$

Atunci:

- *i) $F \in C([a,b])$; mai mult, există $L > 0$ astfel încât*

$$|F(x) - F(\tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}|,\ \forall x, \tilde{x} \in [a,b]$$

(adică F este Lipschitz-continuă);

- *ii) dacă f este continuă în $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Observaţii.

1. O consecinţă a celei de a doua parte a teoremei de mai sus este că dacă $f \in C([a,b])$, atunci F este o primitivă a lui f.

2. O altă consecinţă este că dacă $f \in C([a,b])$ şi f are o primitivă F, atunci are loc formula *Leibniz-Newton*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Pentru a calcula integrala Riemann a unei funcţii $f \in C([a,b])$, putem utiliza *schimbarea de variabilă*, prin formula

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx,$$

unde $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ este o funcţie de clasă C^1. O a doua formulă de schimbare de variabilă, echivalentă cu prima, este

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)dt,$$

unde $\psi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ este o funcţie bijectivă, de clasă C^1.

O altă manieră de a calcula o integrală Riemann este *integrarea prin părţi*, dată de formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

pentru $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a,b]$ cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, $f,g \in C^1[a,b]$).

Uniforma convergenţă a funcţiilor păstrează integrabilitatea Riemann, după cum afirmă următorul rezultat:

Propoziţia 2.7. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{R}[a,b]$ un şir de funcţii, uniform convergent la o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

3. Integrale multiple

Integralele multiple sunt o extensie naturală a integralei Riemann la cazul funcţiilor de mai multe variabile. În particular, atunci când funcţia ce trebuie integrată are două variabile, vorbim despre integrala dublă; în cazul în care avem de a face cu trei variabile, vorbim de integrala triplă. În acest fel, putem calcula unele caracteristici numerice ale obiectelor 3D (volum, masă, etc.)

3.1. **Măsura Jordan.**
Deoarece noţiunea de integrală (chiar în $\mathbb{R}$) este puternic legată de măsura unei mulţimi (precum lungimea, aria sau volumul), vom începe prin a defini un astfel de concept în $\mathbb{R}^n$.

Definiţie.

a) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Mulţimea

$$I_0 = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n] = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \le x_k \le b_k,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\}$$

se numeşte un *interval compact n-dimensional* (dacă $n = 2$ sau $n = 3$, îl numim de asemenea *dreptunghi*, respectiv *paralelepiped* cu *laturile*, respectiv *feţele paralele la axele de coordonate*).

Măsura (*Jordan* a) lui este numărul

$$\mu(I_0) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n).$$

(dacă $n = 2$ sau $n = 3$, aceasta este *aria*, respectiv *volumul* dreptunghiului sau paralelipipedului I_0).

b) Numim *mulţime elementară* (*măsurabilă Jordan*) orice mulţime din $\mathbb{R}^n$ ce poate fi scrisă ca o reuniune finită de intervale compacte n-dimensionale ce nu au puncte interioare comune, adică o mulţime de forma

$$E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$$

astfel încât $I_l = [a_1^l, b_1^l] \times [a_2^l, b_2^l] \times \cdots \times [a_n^l, b_n^l]$, $l = \overline{1,q}$ şi astfel încât $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_l = \varnothing$, $\forall j,l \in \{1,2,\ldots,q\}$, $j \ne l$.

Măsura Jordan a mulţimii E este definită ca

$$\mu(E) := \sum_{l=1}^{q} \mu(I_l),$$

unde $\mu(I_l) = \prod_{k=1}^{n}(b_k^l - a_k^l)$.

Vom nota $\mathcal{E}_J^n$ familia tuturor mulţimilor elementare din $\mathbb{R}^n$.

Măsura unei mulţimi elementare este bine definită din cauză că se poate arăta ca ea nu depinde (exerciţiu!) de reprezentarea ei (ce nu este unică) ca o reuniune finită de intervale compacte ce nu au puncte interioare comune.

Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită.

a) Numim *măsura Jordan interioară* a mulţimii A numărul

$$\mu_*(A) = \sup\left\{\mu(E) \mid E \subseteq A,\ E \in \mathcal{E}_J^n\right\}$$

(dacă nu există o mulţime elementară inclusă în A, $\mu_*(A)$ este atunci 0).

b) *Măsura Jordan exterioară* a mulţimii A este numărul

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\mu(E) \mid E \supseteq A,\ E \in \mathcal{E}_J^n\right\}.$$

c) Spunem că A este *măsurabilă Jordan* dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Valoarea ei comună se numeşte *măsura Jordan* a mulţimii A şi se notează $\mu_J(A)$ (se obişnuieşte să o numim *arie* dacă $n = 2$ sau *volum* dacă $n = 3$)

Este evident că pentru o mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu_*(A)$ şi $\mu^*(A)$ sunt numere reale pozitive ce satisfac $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Observaţii.

1. Orice mulţime elementară $E \in \mathcal{E}_J^n$ este măsurabilă Jordan, prin definiţie.

2. Nu orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan. De exemplu, în $\mathbb{R}^2$ considerăm

$$A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f_D(x)\}$$

unde $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia lui Dirichlet function, definită de

$$f_D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Atunci $\mu_*(A_D) = 0$, deoarece nu există mulţime elementară $E \subseteq A_D$; pe de altă parte, $\mu^*(A_D) = 1$, deoarece orice mulţime elementară $E \supseteq A$ trebuie să includă dreptunghiul $[0, 1] \times [0, 1]$. De aceea, E nu este măsurabilă Jordan.

3. Există mulţimi ne-elementare ce sunt măsurabile Jordan. De exemplu, subgraficul unei funcţii integrabile Riemann $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, adică mulţimea

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

este măsurabilă Jordan, cu $\mu_J(\Gamma_f) = \text{aria}(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Pentru orice partiţie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ a intervalului $[a, b]$, fie numerele reale $m_i := \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Dacă definim $E'_\Delta := \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$, avem: $E'_\Delta \in \mathcal{E}_J^2$, $E'_\Delta \subseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E'_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = s_f(\Delta)$ (suma Darboux inferioară ce corespunde lui f şi Δ). În consecinţă, rezultă că $s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f)$.

În mod similar, dacă definim $E''_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$, observăm că $E''_\Delta \in \mathcal{E}_J^2$, $E''_\Delta \supseteq \Gamma_f$ şi $\mu^*(\Gamma_f) \leq \mu(E''_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}_f(\Delta)$ (suma Darboux inferioară ce corespunde lui f şi Δ).

De aceea,

$$s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f) \leq \mu^*(\Gamma_f) \leq S_f(\Delta),\ \forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b].$$

Pe de altă parte, deoarece f este integrabilă pe $[a, b]$, avem $\underline{I} = \sup_\Delta s_f(\Delta) = \inf_\Delta S_f(\Delta) = \overline{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Combinând cele două relaţii, obţinem $\mu_*(\Gamma_f) = \mu^*(\Gamma_f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, adică Γ_f este măsurabilă Jordan şi aria ei este egală cu $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

4. Mai general, putem afirma că dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii Rieman integrabile pe $[a, b]$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$ este măsurabilă Jordan cu

$$\mu_J\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Ca o aplicaţie, vom calcula aria unei elipse. Fie $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ şi $a := -\tilde{a}$, $b := \tilde{a}$. Definim funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ prin $f(x) := -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}$ şi $g(x) := \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}$, $x \in [a, b] = [-\tilde{a}, \tilde{a}]$. Reuniunea graficelor lor determină o elipsă de ecuaţie $\frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2} - 1 = 0$; de aceea, domeniul mărginit de această elipsă este dat de

$$\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\tilde{a} \le x \le \tilde{a},\ -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2} \le y \le \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}\right\},$$

Prin calcul integral, găsim $\mu_J(\Gamma_{f,g}) = \dfrac{2\tilde{b}}{\tilde{a}}\displaystyle\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}dx = \pi\tilde{a}\tilde{b}$. În consecinţă aria unei elipse de semiaxe $\tilde{a}$ şi $\tilde{b}$ este $\pi\tilde{a}\tilde{b}$.

5. Din definiţie, o mulţime $B \subseteq \mathbb{R}^n$ este măsurabilă şi are măsura Jordan nulă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$.

Unele condiţii necesare şi suficiente pentru ca o mulţime din $\mathbb{R}^n$ să fie măsurabilă Jordan se regăsesc în rezultatul următor:

Teorema 3.1. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *A este măsurabilă Jordan;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n : E'_\varepsilon \subseteq A \subseteq E''_\varepsilon$ *şi* $\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(E''_\varepsilon) < \varepsilon$;

(iii) *∂A este măsurabilă Jordan şi $\mu_J(\partial A) = 0$;*

(iv) *există şiruri* $(\tilde{E}_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$ *şi* $(\hat{E}_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$ *astfel încât* $\tilde{E}_m \subseteq A \subseteq \hat{E}_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_J(\tilde{E}_m) = \lim\limits_{m\to\infty}\mu_J(\hat{E}_m)$.

Observaţie. Pentru o mulţime măsurabilă Jordan A, $\mu_J(A) \neq 0$ este echivalentă cu $\mathring{A} \neq \varnothing$.

Fie $\mathcal{M}_J^n$ familia tuturor mulţimilor din $\mathbb{R}^n$ ce sunt măsurabile Jordan.

Teorema 3.2 (Proprietăţi ale măsurii Jordan).

i) $\mu_J(A) \ge 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$ (pozitivitate).

ii) $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ *cu* $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$ (aditivitate).

iii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n : B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$ (substracţie).

iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n : B \subseteq A \Rightarrow \mu_J(B) \le \mu_J(A)$ (monotonie).

v) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n, \forall B \subseteq \mathbb{R}^n : \mu_J(A) = 0, B \subseteq A \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(B) = 0$ (completitudine).

Demonstraţie.

i) Această proprietate este evidentă, deoarece pentru orice mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu_*(A) \ge 0$.

ii) Deoarece $A \in \mathcal{M}_J^n$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. De asemenea, $B \in \mathcal{M}_J^n$ implică faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $F'_\varepsilon, F''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $F'_\varepsilon \subset B \subset F''_\varepsilon$ şi $\mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci

$$\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \le \mu_J(A) + \mu_J(B) \le \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon),$$

$E'_\varepsilon \cup F'_\varepsilon, E''_\varepsilon \cup F''_\varepsilon \in \mathcal{M}_J^n$ (exerciţiu!) şi

$$\mu_J(E'_\varepsilon \cup F'_\varepsilon) \le \mu_*(A \cup B) \le \mu^*(A \cup B) \le \mu_J(E''_\varepsilon \cup F''_\varepsilon).$$

Dar $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$ implică $\mathring{E}'_\varepsilon \cap \mathring{F}'_\varepsilon = \varnothing$, deci $\mu_J(E'_\varepsilon \cup F'_\varepsilon) = \mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon)$ (exerciţiu!). Pe de altă parte, $\mu_J(E''_\varepsilon \cup F''_\varepsilon) \le \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$ (exerciţiu!). Combinând cele două relaţii obţinem

$$\mu^*(A \cup B) - \varepsilon \le \mu_J(A) + \mu_J(B) \le \mu_*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Lasând $\varepsilon \searrow 0$, deducem

$$\mu^*(A \cup B) = \mu_*(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B),$$

adică $A \cup B$ este măsurabilă Jordan şi $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$.

iii) Din nou, pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi mulţimi $E'_\varepsilon, E''_\varepsilon, F'_\varepsilon, F''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$, $F'_\varepsilon \subset B \subset F''_\varepsilon$, $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $E'_\varepsilon \setminus F''_\varepsilon, E''_\varepsilon \setminus F'_\varepsilon \in \mathcal{M}_J^n$ (exerciţiu!) şi

$$\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(F''_\varepsilon) \le \mu_J(E'_\varepsilon \setminus F''_\varepsilon) \le \mu_*(A \setminus B) \le \mu^*(A \setminus B) \le \mu_J(E''_\varepsilon \setminus F'_\varepsilon) = \mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon).$$

De aceea, cu un argument similar celui din punctul precedent,

$$\mu^*(A \setminus B) = \mu_*(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B),$$

ce arată că $A \setminus B$ este măsurabilă Jordan şi $\mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$.

iv) Rezultă din prima şi a treia proprietate.

v) Deoarece $\mu_J(A) = 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ putem găsi $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $A \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$. Prin urmare, $B \subseteq E_\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$; împreună cu inegalitatea $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, aceasta implică $B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(B) = 0$.

$\square$

Observaţii.

1. Din demonstraţia acestei teoreme putem de asemenea vedea că dacă $A, B \in \mathcal{M}_J^n$, atunci $A \cup B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$. Mai mult, are loc proprietatea de subaditivitate: $\mu_J(A \cup B) \leq \mu_J(A) + \mu_J(B)$.

2. graficul unei funcţii continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ are aria nulă (adică are măsura Jordan 0). Într-adevăr, deoarece $f \in \mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$ şi $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ este măsurabilă Jordan. Aşadar, din echivalenţa între primul şi al treilea punct al teoremei 3.1, mulţimea ∂A are arie nulă. Deoarece $G_f \subseteq \partial(\Gamma_f)$, G_f este de asemenea măsurabilă Jordan şi are arie nulă.

3. Orice mulţime din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră se poate scrie ca o reuniune finită de grafice ale unor funcţii continue pe intervale compacte este măsurabilă Jordan.

3.2. **Integrala Riemann multiplă pe mulţimi compacte**. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă nevidă (deci, mărginită şi închisă) astfel încât $D \in \mathcal{M}_J^n$. Vom considera de asemenea funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ ce trebuie integrată.

Definiţie.

a) Numim *diviziune* a lui D orice familie finită $\{D_i\}_{1\leq i\leq p}$ de submulţimi ale lui D astfel încât:

i) $D_i \in \mathcal{M}_J^n$, $\forall i \in \overline{1,p}$;

ii) $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}$ cu $i \neq j$;

iii) $D = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$.

Notăm $\mathcal{D}(D)$ familia tuturor diviziunilor lui D.

b) Pentru o diviziune Δ definim *norma* ei $\|\Delta\| := \max\limits_{1\leq i\leq p}\{\mathrm{diam}(D_i)\}$, unde $\mathrm{diam}(D_i)$ este diametrul lui D_i.

Observaţie. Din proprietatea de aditivitate a măsurii Jordan, avem $\mu_J(D) = \sum\limits_{i=1}^{p}\mu_J(D_i)$.

Definiţie. Fie $\Delta = \{D_i\}_{1\leq i\leq p}$ o diviziune a lui D.

a) Un p-uplu $\xi_\Delta = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ se numeşte un *sistem de puncte intermediare* ale lui Δ dacă $\xi^i \in D_i$, $\forall i = \overline{1,n}$. Mulţimea tuturor sistemelor de puncte intermediare ale lui Δ este notată Ξ_Δ.

b) Numim *suma Riemann* a funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ în raport cu Δ şi un sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, numărul

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi^i)\mu_J(D_i).$$

Definiţie. Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *integrabilă Riemann* dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta = \{D_i\}_{1\leq i\leq p}$ a lui D cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)$ ale lui Δ, să avem

$$|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I)| < \varepsilon.$$

Numărul I se numeşte *integrala multiplă* (dacă $n = 2$ sau $n = 3$, *integrala dublă*, respectiv *triplă*) a lui f şi se notează

$$\int\cdots\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Ca în cazul unu-dimensional, se poate arăta că o funcţie integrabilă Riemann pe o mulţime compactă este mărginită. Putem de asemenea defini *sumele Darboux inferioară* şi *superioară* a unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$ prin

$$s_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{p} m_i\mu_J(D_i);$$

$$S_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{p} M_i\mu_J(D_i),$$

unde $\Delta = \{D_i\}_{1\leq i\leq p}$ este o diviziune a lui D şi $m_i := \inf\limits_{x\in D_i} f(x)$, $M_i := \sup\limits_{x\in D_i} f(x)$, $i = \overline{1,p}$.

Este uşor de văzut că are loc următoarea relaţie:

$$m \cdot \mu_J(D) \leq s_f(\Delta) \leq S_f(\Delta) \leq M \cdot \mu_J(D),$$

unde Δ este o diviziune arbitrară a lui D şi $m := \inf\limits_{x\in D} f(x)$, $M := \sup\limits_{x\in D} f(x)$.

Dacă notăm $\underline{I} := \sup_{\Delta\in\mathcal{D}(D)} s_f(\Delta)$ şi $\overline{I} := \inf_{\Delta\in\mathcal{D}(D)} s_f(\Delta)$, *integrala Darboux inferioară*, respectiv *superioară* a lui f, deducem

$$m \cdot \mu_J(D) \le \underline{I} \le \overline{I} \le M \cdot \mu_J(D).$$

Ca şi în cazul $n = 1$, putem arăta următorul rezultat:

Propoziţia 3.3. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă nevidă ce este măsurabilă Jordan şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I}$, condiţie ce este echivalentă cu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Delta \in \mathcal{D}(D) : S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

În acest caz, $\underline{I} = \overline{I} = \int\cdots\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$.

Putem acum demonstra următorul rezultat:

Teorema 3.4. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă nevidă care este măsurabilă Jordan şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Deoarece D este compactă, f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in D$ cu $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{\mu_J(D)}$.

Fie $\Delta = \{D_i\}_{1\le i\le p}$ o diviziune arbitrară a lui D cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$. Atunci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)\mu_J(D_i),$$

unde $m_i := \inf_{x\in D_i} f(x)$, $M_i := \sup_{x\in D_i} f(x)$, $i = \overline{1,p}$. Datorită continuităţii lui f pe D, deoarece D_i sunt submulţimi compacte ale lui D, rezultă că există $\xi^i, \eta^i \in D_i$ astfel încât $m_i = f(\xi^i)$ şi $M_i = f(\eta^i)$. De aceea,

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p}(f(\eta^i) - f(\xi^i))\mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}\sum_{i=1}^{p}\mu_J(D_i) = \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}\mu_J(D) = \varepsilon.$$

Din propoziţia precedentă, f este integrabilă Riemann. □

O generalizare a rezultatului de mai sus este dată de următoarea teoremă:

Teorema 3.5. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă nevidă care este măsurabilă Jordan şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în orice element al lui D cu excepţia unei mulţimi măsurabile Jordan de măsură nulă. Atunci f este integrabilă Riemann.*

Proprietăţile unei funcţii integrabile Riemann sunt similare cu cele din cazul $n = 1$:

Propoziţia 3.6. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă nevidă ce este măsurabilă Jordan. Atunci:*

i) $\int\cdots\int_D 1 \cdot dx_1dx_2\ldots dx_n = \mu_J(D)$;

ii) pentru orice funcţii integrabile Riemann $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann şi

$$\int\cdots\int_D (\alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n))dx_1\ldots dx_n = \alpha\int\cdots\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n + \beta\int\cdots\int_D g(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n;$$

iii) pentru orice funcţii integrabile Riemann $f, g : D \to \mathbb{R}$ cu $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in D$, avem:

$$\int\cdots\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n \le \int\cdots\int_D g(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n;$$

iv) pentru orice funcţie integrabilă Riemann $f : D \to \mathbb{R}$, $|f|$ este de asemenea integrabilă Riemann şi

$$\left|\int\cdots\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n\right| \le \int\cdots\int_D \left|f(x_1, \ldots, x_n)\right|dx_1\ldots dx_n;$$

v) pentru orice funcţie integrabilă Riemann $f : D \to \mathbb{R}$, există $\lambda \in \left[\inf_{x\in D} f(x), \sup_{x\in D} f(x)\right]$ astfel încât:

$$\int\cdots\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n = \lambda\mu_J(D).$$

Dacă, în plus, $f \in C(D)$ şi D este conexă (adică nu poate fi împărţită în două mulţimi închise disjuncte), atunci există $\xi \in D$ astfel încât

$$\int\cdots\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n = f(\xi)\mu_J(D);$$

vi) dacă D este reuniunea a două mulţimi compacte nevide D_1 şi D_2 ce sunt măsurabileJordan, cu $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset$, şi f este integrabilă Riemann şi pe D_1 şi pe D_2, atunci f este integrabilă Riemann pe D şi

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_{D_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \int \cdots \int_{D_2} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

vii) pentru orice $f, g \in C(D)$ cu $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, există $\eta \in D$ astfel încât

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(\eta) \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

3.3. **Integrala dublă pe mulţimi compacte.**

După cum am menţionat deja, în cazul particular $n = 2$, integrala multiplă se mai numeşte *integrala dublă*. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann pe o mulţime compactă nevidă şi măsurabilă Jordan $D \subseteq \mathbb{R}^2$, vom nota integrala ei dublă prin $\iint_D f(x, y) dx\, dy$. În cele ce urmează vom prezenta câteva metode de a o calcula.

Propoziţia 3.7 (cazul dreptunghiului). *Dacă pentru orice $x \in [a, b]$, $f(x, \cdot)$ este integrabilă Riemann şi funcţia $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ este de asemenea Riemann integrabilă pe $[a, b]$, atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y) dy \Big) dx.$$

Mai mult, dacă $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ şi $f_1 \in \mathcal{R}[a, b]$, $f_2 \in \mathcal{R}[c, d]$, atunci avem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x) f_2(y) dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

Observaţii.
1. Un rezultat similar obţinem inversând rolurile lui x şi y, prin egalitatea

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y) dx \Big) dy.$$

2. O condiţie suficientă pentru ca ipoteza rezultatului de mai sus să fie îndeplinită este $f \in C([a, b] \times [c, d])$.

Definiţie.

a) O submulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte *simplă în raport cu axa Oy* dacă există funcţiile continue $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $\forall x \in [a, b]$, astfel încât

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

b) O submulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte *simplă în raport cu axa Ox* dacă există funcţiile continue $\gamma, \omega : [c, d] \to \mathbb{R}$ cu $\gamma(y) \leq \omega(y)$, $\forall y \in [c, d]$, astfel încât

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y),\ c \leq y \leq d\}.$$

Teorema 3.8. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi $f \in C(D)$. Atunci*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \Big) dx,$$

unde funcţiile $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x) < \psi(x)$ sunt astfel încât $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

Observaţie. Dacă $f \in C(D)$, cu D simplă în raport cu axa Ox, adică având forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y),\ c \leq y \leq d\},$$

atunci are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\omega(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemplu. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | 1 \leq xy \leq 3,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\}$. Vom calcula aria lui D.

Aplicând punctul *i)* al propoziţiei 3.6, avem

$$\text{aria}(D) = \mu_J(D) = \iint_D 1 dx\, dy.$$

Deoarece $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, cu $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, unde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_1(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_1(y) = y, 1 \leq y \leq \sqrt{3}\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_2(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_2(y) = \frac{3}{y}, \sqrt{3} \leq y \leq 2\}$ şi $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_3(y) = \frac{y}{4} \leq x \leq \omega_3(y) = \frac{3}{y}, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}\}$, obţinem, deoarece D_1, D_2, D_3 sunt domenii simple în raport cu axa Ox:

$$\begin{aligned}
\text{aria}(D) &= \iint_D 1 dx\, dy = \iint_{D_1} 1 dx\, dy + \iint_{D_2} 1 dx\, dy + \iint_{D_3} 1 dx\, dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{1/y}^{y} 1 dx \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_{1/y}^{3/y} 1 dx \right) dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\int_{y/4}^{3/y} 1 dx \right) dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{y} dy + \int_2^{2\sqrt{3}} (\frac{3}{y} - \frac{y}{4}) dy = \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \ln y \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} + 2 \ln y \Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(3 \ln y - \frac{y^2}{8} \right) \Bigg|_2^{2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 - \ln 3 + 3 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} - 3 \ln 2 + \frac{1}{2} = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

În anumite condiţii, o integrală dublă pe o mulţime compactă nevidă, măsurabilă Jordan, poate fi calculată printr-o schimbare de variabilă, scopul fiind în principal transformarea domeniului şi/sau funcţiei de integrat astfel încât calculele să se simplifice.

Definiţie. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime compactă nevidă, măsurabilă Jordan şi $F : \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}^2$, definită de $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \Omega$ o funcţie bijectivă ce poate fi extinsă la o funcţie de clasă C^1pe o mulţime deschisă $\Omega' \supseteq \Omega$ astfel încât

$$\det(J_F)(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in \Omega$$

(reamintim că J_F este matricea jacobiană a lui F, în timp ce determinantul său, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ se numeşte jacobianul lui F). Atunci D este de asemenea o mulţime compactă, măsurabilă Jordan, iar F se numeşte o schimbare de variabile (coordonate) de la Ω la D.

Următorul rezultat ne spune cum poate o integrală pe D poate fi transformată într-una pe Ω printr-o schimbare de coordonate.

Propoziţia 3.9. *Fie $F : \Omega \to D$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \Omega$ o schimbare de variabile şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci*

$$\iint_D f(x,y) dx\, dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) du dv.$$

Observaţii.
1. Pentru exemplul precedent am fi putut aplica de asemenea o schimbare de variabile. Să considerăm schimbarea de variabile dată de $xy = u$ şi $\frac{y}{x} = v$, echivalent $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ şi $y = \sqrt{uv}$, cu $u \in [1,3]$ şi $v \in [1,4]$. Atunci avem

$$\text{aria}(D) = \iint_D 1 dx dy = \iint_\Omega \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) du dv,$$

unde $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 4\} = [1,3] \times [1,4]$ şi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} (u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Astfel

$$\text{aria}(D) = \int_1^3 du \cdot \int_1^4 \left| \frac{1}{2v} \right| dv = \left(u\Big|_1^3 \right) \left(\frac{1}{2} \ln v \Bigg|_1^4 \right) = 2 \frac{1}{2} \ln 4 = 2 \ln 2,$$

ceea ce confirmă valoarea obţinută mai sus.

2. O schimbare de variabile des întâlnită este dată de trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la *coordonatele polare* (r, θ), prin relaţiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \text{with } r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi].$$

Jacobianul acestei transformări este $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$

3. Câteodată putem folosi *coordonatele polare generalizate*:

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\theta; \\ y = br\sin^\alpha\theta, \end{cases}$$

cu $r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty)$ şi $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi]$, cu a, b şi α parametri potriviţi. Dacă $\alpha = 1$, r şi θ sunt numite *coordonate eliptice*, corespunzând ecuaţiei elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (în coordonate eliptice, această ecuaţie devine $r = 1$).

Exemplu. Să calculăm $\iint_D (y - x + 2)dxdy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

Folosind transformarea eliptică $(x, y) \to (r, \theta)$ dată de $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$, cu $0 \le r < 1$ şi $0 \le \theta \le 2\pi$, găsim

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x + 2)dx\,dy &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2) \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| (r, \theta)dr \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)6rdr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} (6\sin\theta - 4\cos\theta + 6)d\theta = \\ &= (-6\cos\theta - 4\sin\theta + 6\theta)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

O altă aplicaţie a integralei duble este calculul masei unui obiect material D în plan, cu densitate de masă cunoscută ρ. Aceasta este dată de formula

$$\mathrm{mass}(D) = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

Putem de asemenea determina coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) al lui D, prin formulele

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy}.$$

3.4. **Integrala triplă pe mulţimi compacte.**

Integrala triplă reprezintă integrala multiplă în cazul $n = 3$. Se notează

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

unde $f : D \to \mathbb{R}$ şi $D \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulţime compactă nevidă, măsurabilă Jordan. Prin analogie cu cazul $n = 2$, metodele de calcul ale integralei triple sunt similare.

Definiţie. O submulţime $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se numeşte *simplă în raport cu axa Oz* dacă există o mulţime compactă, măsurabilă Jordan $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue $\varphi, \psi : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x, y) \le \psi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \tilde{D}$, astfel încât

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y),\ (x, y) \in \tilde{D}\}.$$

Un astfel de domeniu în $\mathbb{R}^3$ are *volum* (adică măsură Jordan) dat de formula

$$\mathrm{vol}(D) = \mu_J(D) = \iint_{\tilde{D}} \psi(x, y)dxdy - \iint_{\tilde{D}} \varphi(x, y)dxdy.$$

Mai general, putem formula un rezultat similar teoremei 3.8 pentru cazul 3D:

Propoziţia 3.10. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulţime simplă în raport cu Oz şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci*

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdy\,z = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.$$

Exemplu. Să calculăm $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde D este domeniul mărginit de suprafeţele $z=0$, $z=1$ şi $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Observăm că

$$D=\{(x,y,z)\in\tilde{D}\times\mathbb{R}\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}.$$

unde $\tilde{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$. Luăm $\varphi(x,y):=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $\psi(x,y):=1$, aşa că obţinem

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\iint_{\tilde{D}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\right)\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{\tilde{D}}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Pentru a calcula această integrală dublă, vom folosi coordonatele polare (r,θ):

$$\iint_{\tilde{D}}\sqrt{x^2+y^2}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r(1-r)rdr\right)d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^1(r^2-r^3)dr=2\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

O formulă de schimbare de variabilă asemănătoare are loc şi în cazul $n=3$:

Propoziţia 3.11. *Fie $F:\Omega\to D$, $F(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$, $(u,v,w)\in\Omega$ o schimbare de variabile între mulţimi compacte, măsurabile Jordan, Ω şi D. Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|(u,v,w)dudvdw.$$

Observaţii.
1. Cea mai folosită schimbare de variabile în $\mathbb{R}^3$ este trecerea de la coordonatele carteziene x,y,z la *coordonatele sferice* r,θ,φ, dată de

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, & r\in[r_1,r_2]\subseteq[0,+\infty],\\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in[\theta_1,\theta_2]\subseteq[0,\pi],\\ z=r\cos\theta, & \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]\subseteq[0,2\pi].\end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x,y,z,)}{D(r,\theta,\varphi)}(r,\theta,\varphi)=\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{bmatrix}=r^2\sin\theta.$$

2. Un alt tip de schimbare de variabile este dat de *coordonatele cilindrice*, transformare definită de

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, & r\in[r_1,r_2]\subseteq[0,+\infty],\\ y=r\sin\theta, & \theta\in[\theta_1,\theta_2]\subseteq[0,2\pi],\\ z=z, & z\in[z_1,z_2]\subseteq\mathbb{R}.\end{cases}$$

În acest caz avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}(r,\theta,z)=r$.

Întorcându-ne la exemplul de mai sus, putem calcula integrala

$$\iiint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$$

unde $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\le z\le 1,\ (x,y)\in\tilde{D}\}$ şi $\tilde{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$; folosind această ultimă schimbare de variabile obţinem

$$\iiint_D\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_r^1 rdz\right)d\theta\right)rdr=2\pi\int_0^1(1-r)r^2dr=\frac{\pi}{6}.$$

Din nou, integrala triplă poate fi folosită pentru a calcula masa şi centrul de greutate a unui corp material D, cu densitate de masă ρ, prin formulele

$$\mathrm{mass}(D)=\iiint_D\rho(x,y,z)dxdydz$$

şi

$$x_G=\frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},\ y_G=\frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},\ z_G=\frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}.$$

3.5. Întorcându-ne acum la cazul general al integralei multiple pe un domeniu compact, măsurabil Jordan, calculul ei poate fi făcut de obicei cu ajutorul a două formule:

$$\int\cdots\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int\cdots\int_{\tilde{D}} \left(\int_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n\right)dx_1\ldots dx_n$$

(când D este simplă în raport cu Ox_n, adică $D = \{(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}) \le x_n \le \psi(x_1,\ldots,x_{n-1}),\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \tilde{D}\}$, unde $\tilde{D}$ este un domeniu compact, măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^{n-1}$, iar φ şi ψ sunt două funcţii reale definite pe $\tilde{D}$ cu $\varphi \le \psi$) şi

$$\int\cdots\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\cdots\int_\Omega f(x_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,x_n(y_1,\ldots,y_n)) \left|\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\right|(y_1,y_2,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_n$$

(pentru o schimbare de variabile de la $(x_1,\ldots,x_n) \in D$ la coordonatele $(y_1,\ldots,y_n) \in \Omega$).

Exemplu. Să calculăm $\int\cdots\int_D 1dx_1\ldots dx_n$, unde D este mulţimea

$$D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ldots x_n \ge 0,\ x_1+x_2+\ldots+x_n \le 1\}.$$

Utilizând prima formulă, obţinem

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_D 1dx_1\ldots dx_n &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x_1}\ldots\left(\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} 1dx_n\right)\ldots dx_2\right)dx_1 = \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x_1}\ldots\left(\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1-x_1-\ldots-x_{n-1})\,dx_{n-1}\right)\ldots dx_2\right)dx_1 = \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x_1}\ldots\left(\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \frac{(1-x_1-\ldots-x_{n-2})^2}{2!}dx_{n-2}\right)\ldots dx_2\right)dx_1 = \ldots = \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Bibliografie selectivă

[1] G. Apreutesei, N. A. Dumitru, *Introducere în teoria integrabilităţii*, Editura "Performantica", Iaşi, 2005.
[2] I. Bârză, *Calcul intégral.Calcul différentiel. Équations différentielles. Éléments de Géométrie différentielle,* Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2010.
[3] B.M. Budak, S.V. Fomin, *Multiple Integrals. Field Theory and Series*, Edit. "Mir", 1973.
[4] D. Cioroboiu, A. Pitea, M. Postolache, *Calcul integral,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.
[5] Ş. Frunză, *Analiză matematică*, Edit. Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1992.
[6] M. Gorunescu, F. Gorunescu, A. Prodan, *Matematici superioare. Biostatistică şi Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
[7] L. Larson, *Introduction to Real Analysis,* Univ of Louisville Publ., 2014.
[8] G. Mocică, *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.
[9] C. P. Niculescu, *Calcul integral pe* $\mathbb{R}^n$, Edit. Universităţii din Craiova, 2000.
[10] S. A. Popescu, *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.
[11] V. Postolică, *Analiză matematică. Eficienţă prin matematică aplicată*, Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[12] H. Tudor, Analiză matematică, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.