

Cursul 6

Aplicații liniare pe \mathbb{R}^n . Vectori și valori proprii

Funcții reale. Generalități

În această secțiune, vom prezenta unele noțiuni fundamentale legate de aplicații liniare pe spații vectoriale. Amintim următoarea definiție a noțiunii de funcție (v. Cursul 1)

Definiția 7.1 Fie X și Y două mulțimi nevide. Spunem că $f \subseteq X \times Y$ se numește **funcție** dacă satisface următoarele condiții:

- 1) $\text{Dom}(f) = A$;
- 2) $(x, y) \in f$ și $(x, z) \in f \Rightarrow y = z, \forall x \in X, \forall y, z \in Y$.

În acest caz, vom nota $f : X \rightarrow Y$.

Amintim și următoarele noțiuni

- **Imaginea lui X prin f (mulțimea valorilor)** este

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : xy = f(x)\};$$

- Dacă $A \subseteq X$, mulțimea $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ se numește **imagea lui A prin $f : X \rightarrow Y$** ;
- Dacă $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ se numește **contraimagea** mulțimii B prin f .
- **Graficul funcției $f : X \rightarrow Y$** este dat de mulțimea

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

- Dacă $A \subseteq X$, atunci funcția definită prin $f|_A := f \cap (A \times Y)$ ($f|_A(x) = f(x), \forall x \in A$) se numește **restricția funcției f la mulțimea A** .
- $f : X \rightarrow Y$ este **surjectivă** dacă $f(X) = Y$.
- $f : X \rightarrow Y$ este **injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funcția $f : X \rightarrow Y$ este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

În cele ce urmează, vom considera $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$, unde $n, m \in \mathbb{N}^*$, adică vom considera funcții de forma

$$f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Dacă $n > 1$, acestea se vor numi *funcții de n variabile (reale)*, iar dacă $n = 1$, le vom numi *funcții de o variabilă (reală)*. În cazul în care $m = 1$ le vom numi *funcții reale*, iar dacă $m > 1$, ele vor fi numite *funcții vectoriale (sau cu valori în \mathbb{R}^m)*.

Dacă $m > 1$, atunci, dacă $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f)$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, are m componente, notate, de regulă astfel $f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \dots, x_n)$. Așadar, vom avea m funcții de n variabile $f_k : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m$, astfel încât

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f).$$

În continuare, vom prezenta câteva exemple de funcții reale:

1. *Funcții elementare de bază:*

- funcția constantă: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$;
- funcția identitate: $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- funcția exponențială de bază a , $a > 0$: funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- funcția logaritm de bază $a > 0$, $a \neq 1$: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$;
- funcția putere de exponent $a \in \mathbb{R}$: $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- funcții trigonometrice (directe): $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$;
- funcții trigonometrice inverse: $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$.

2. *Funcții elementare:* adică o funcție obținută prin aplicarea uneia sau a mai multor operații de bază cu funcțiile elementare de bază: *adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea.*

3. *Funcții speciale:*

- funcția parte întreagă: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$;
- funcția parte fracționară: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită de $f(x) = \{x\} = x - [x]$;
- funcția semn: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită de $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$;
- funcția valoare absolută: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$;
- funcția parte pozitivă: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $f(x) = x^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$;
- funcția parte negativă: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $f(x) = x^- = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$;
- funcția lui Dirichlet: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
- funcția lui Heaviside: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$;
- funcția lui Riemann, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}, (p, q) = 1 \end{cases}$.

Exemple de funcții reale de mai multe variabile:

1) Funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{\sin(x_1^2 + x_2^2)}, (x_1, x_2) \in A,$$

unde

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x_1^2 + x_2^2) \geq 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} : 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi\}.$$

2) Funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_3)^{x_2}, (x_1, x_2, x_3) \in A,$$

unde

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0 \text{ și } x_1 + x_3 > 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 + x_3 < 1 - x_2\}.$$

3) Funcția polinomială $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Numerele $a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienții* polinomului P . Fiecare termen $a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, unde $a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \neq 0$ se numește *monom* (al lui P). *Gradul* acestui monom este $i_1 + i_2 + \dots + i_n \in \mathbb{N}$. Cum $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o sumă finită de monoame, numim *gradul polinomului* P ca fiind cel mai mare grad dintre gradele monoamelor ce îl compun.

Spunem că polinomul P este *omogen* dacă toate monoamele sale au același grad. Un exemplu de polinom omogen este următorul polinom de grad 1:

$$P(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Un polinom P de forma (1) se numește **simetric** dacă, pentru orice permutare

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

cu $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall i = \overline{1, n}$ și $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \dots x_{\sigma(n)}^{i_n}.$$

Spre exemplu, funcția $P(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ este un polinom simetric dacă și numai dacă $a = c$.

Aplicații liniare pe spații vectoriale

Definiția 7.2 Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare reale. O aplicație $T : V \rightarrow W$ se numește **liniară** dacă

$$(i) \quad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (\text{aditivitate}),$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{omogenitate}).$$

Vom utiliza de asemenea denumirile de *operator liniar* sau *transformare liniară* pentru o aplicație liniară.

Exemplu: Toate polinoamele omogene de grad 1 (definite pe \mathbb{R}^n) sunt aplicații liniare între \mathbb{R}^n și \mathbb{R} .

Propoziția 7.3 Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare reale. Aplicația $T : V \rightarrow W$ este liniară dacă și numai dacă

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație: Cum $T : V \rightarrow W$ este aplicație liniară, din Definiția 7.2, avem:

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = T(\alpha \mathbf{u}) + T(\beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, dacă T satisface $T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rezultă că, pentru $\alpha = \beta = 1$ avem i), iar pentru $\beta = 0$, are loc ii). ◀

Observații:

1. Dacă $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ sunt două spații liniare, iar $T : V \rightarrow W$ este o aplicație liniară bijectivă, atunci T se numește **izomorfism** între spațiile liniare V și W .
2. Dacă $V = W$, aplicația liniară $T : V \rightarrow V$ se numește **endomorfism liniar** pe V . Funcția identitate 1_V este un endomorfism liniar pe V .

3. Dacă endomorfismul liniar $T : V \rightarrow V$ este și bijectiv, atunci el se numește **automorfism liniar** pe V .
4. Dacă $T : V \rightarrow W$ este o aplicație liniară, iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$, atunci avem

$$T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Dacă $T : V \rightarrow W$ este o aplicație liniară, atunci

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W,$$

unde $\mathbf{0}_V$ și $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V și din W . Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \rightarrow W$ nu este liniară.

6. Se poate arăta că mulțimea $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$, a tuturor aplicațiilor liniare de la spațiul liniar V la spațiul liniar W , formează un spațiu liniar în raport cu operația de adunare a aplicațiilor și cu operația de înmulțire a unei aplicații cu un scalar din \mathbb{R} . Dacă $V = W$, vom nota mai simplu $\mathcal{L}(V)$, în loc de $\mathcal{L}(V, W)$.
7. Fie U, V și W spații liniare reale. Dacă $T_1 : U \rightarrow V$ și $T_2 : V \rightarrow W$ sunt aplicații liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$ este tot o aplicație liniară.

Definiția 7.4 Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare și fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară.

a) Mulțimea

$$\text{Ker}(T) \stackrel{\text{not}}{=} T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

se numește **nucleul aplicației liniare** T .

b) Mulțimea

$$\text{Im}(T) \stackrel{\text{not}}{=} T(V) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

se numește **imagea aplicației liniare** T .

Propoziția 7.5 Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare și fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci $\text{Ker}(T)$ este un subspațiu liniar al lui V , iar $\text{Im}(T)$ un subspațiu liniar al lui W .

Demonstrație: Știm că $T : V \rightarrow W$ este aplicație liniară dacă are loc:

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker}(T), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

adică, am obținut $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in \text{Ker}(T)$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker}(T)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pe de altă parte, $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \text{Im}(T)$, există \mathbf{v}_1 și $\mathbf{v}_2 \in V$, astfel încât $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ și $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Prin urmare, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \in \text{Im}(T)$:

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) \in T(V) = \text{Im}(T).$$

◀

Teorema 7.6 (Teorema dimensiunii) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci $\text{Im}(T)$ este un subspațiu finit dimensional al lui W și are loc **relația dimensiunilor**:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Demonstrație: Cum spațiul liniar V este finit dimensional, rezultă că $\text{Ker}(T)$ este finit dimensional. Fie $m = \dim(\text{Ker}(T))$, cu $m \in \mathbb{N}$ și fie $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ o bază a lui $\text{Ker}(T)$. Dacă $n = \dim(V)$, atunci există vectorii $\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n \in V$ astfel încât $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n\}$ să fie o bază a lui V . Să demonstrăm că $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui $\text{Im}(T)$.

Fie $\mathbf{w} \in \text{Im}(T)$. Atunci există $\mathbf{v} \in V$ astfel încât $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Cum $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V , există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n,$$

de unde

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{b}_1) + \dots + \alpha_m T(\mathbf{b}_m) + \alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n) \end{aligned}$$

Cum $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in \text{Ker}(T)$, avem că $T(\mathbf{b}_1) = \dots = T(\mathbf{b}_m) = \mathbf{0}$, adică $\mathbf{w} = \alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n)$. Prin urmare, $\text{Lin}\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{b}_n)\} = \text{Im}(T)$.

Arătăm liniara independentă. Presupunem că $\alpha_{m+1} T(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}_W$, pentru $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Atunci $T(\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) = \mathbf{0}_W$, deci $\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \in \text{Ker}(T)$. Pe de altă parte, $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ este bază a lui $\text{Ker}(T)$, deci există $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ astfel încât

$$\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m$$

adică

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m - \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} - \dots - \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0}_V.$$

Cum $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V , avem $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Așadar, mulțimea $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este liniar independentă.

Am demonstrat că mulțimea $\{T(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui $\text{Im}(T)$, deci $\text{Im}(T)$ este subspațiu finit dimensional al lui W și are dimensiunea $n - m$, adică $\dim(V) - \dim(\text{Ker}(T))$. Așadar, are loc relația dimensiunilor. ◀

Definiția 7.7 Fie $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ două spații vectoriale, și fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci,

- $\dim(\text{Ker}(T))$ se numește **defectul lui T** și se notează $\text{def}(T)$;
- $\dim(\text{Im}(T))$ se numește **rangul lui T** și se notează $\text{rang}(T)$.

Așadar, formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:

$$\dim(V) = \text{rang}(T) + \text{def}(T). \quad (2)$$

Următoarele rezultate, ne oferă caracterizări ale injectivității, surjectivității și a bijectivității aplicațiilor liniare utilizând teorema dimensiunilor.

Propoziția 7.8 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) T este injectivă;
- b) $\text{def}(T) = 0$;
- c) $\text{rang}(T) = \dim(V)$;
- d) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem liniar independent în V , atunci $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este sistem liniar independent în W .

Propoziția 7.9 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) T este surjectivă;
- ii) $\text{rang}(T) = \dim(W)$;
- iii) $\text{Im}(T) = W$;
- iv) Dacă $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ este un sistem de generatori pentru V , atunci $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ este un sistem de generatori pentru W .

Pe baza Propozițiilor 7.8 și 7.9, se poate vedea că are loc și următorul rezultat:

Propoziția 7.10 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional, $(W, +, \cdot)$ un spațiu liniar, și $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

- j) T este bijectivă;
- jj) $\dim(V) = \dim(W) = \text{rang}(T)$;
- jjj) Pentru orice bază $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a lui V , mulțimea $T(B) = \{T(\mathbf{b}_1), \dots, T(\mathbf{b}_n)\}$ este o bază a lui W .

Reprezentarea matriceală a aplicațiilor liniare

Fie $(V, +, \cdot)$ și $(W, +, \cdot)$ două spații liniare, finit-dimensionale cu $\dim(V) = n$ și $\dim(W) = m$, și fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V , iar $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_m\}$ este bază a lui W , atunci, pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$ putem scrie

$$T(\mathbf{b}_k) = a_{1k}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{mk}\mathbf{b}'_m,$$

unde $a_{1k}, \dots, a_{mk} \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui $T(\mathbf{b}_k)$ în raport cu baza B' . Matricea $A_{B,B'} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, se numește **matricea asociată** aplicației T în raport cu bazele B, B' .

Dacă $\mathbf{v} \in V$, iar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele vectorului \mathbf{v} în raport cu baza B , atunci

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(\alpha_1\mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{b}_n) = \alpha_1T(\mathbf{b}_1) + \dots + \alpha_nT(\mathbf{b}_n) \\ &= \alpha_1(a_{11}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{m1}\mathbf{b}'_m) + \dots + \alpha_n(a_{1n}\mathbf{b}'_1 + \dots + a_{mn}\mathbf{b}'_m) \\ &= (\alpha_1a_{11} + \dots + \alpha_na_{1n})\mathbf{b}'_1 + \dots + (\alpha_1a_{m1} + \dots + \alpha_na_{mn})\mathbf{b}'_m \end{aligned} \quad (3)$$

Adică $T(\mathbf{v}) \in W$ are coordonatele $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ în raport cu baza B' , unde $\beta_k = \alpha_1a_{k1} + \dots + \alpha_na_{kn}$.

Dacă $\mathbf{v} \in V$ are coordonatele $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ în baza B iar $T(\mathbf{v}) \in W$ are coordonatele $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ în baza B' , atunci putem scrie relația

$$X_{B'} = A_{B,B'} \cdot X_B,$$

unde

$$X_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X_{B'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

Rangul aplicației liniare. Rangul matricii asociate:

Fie $r \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$ rangul matricii $A_{B,B'}$. Cum r este numărul maxim de vectori liniar independenți, avem $\dim(\text{Im}(T)) \geq r$. Pe de altă parte, dacă presupunem că $\dim(\text{Im}(T)) > r$, putem găsi $\mathbf{v} \in V$ astfel încât $T(\mathbf{b}_{k_1}), \dots, T(\mathbf{b}_{k_r})$ și $T(\mathbf{v})$ sunt liniar independenți. Dar $T(\mathbf{v})$ este o combinație liniară a vectorilor $T(\mathbf{b}_1), \dots, T(\mathbf{b}_n)$. Cum pentru orice $k \notin \{k_1, \dots, k_r\}$, $T(\mathbf{b}_k)$ este o combinație liniară a vectorilor $T(\mathbf{b}_{k_1}), \dots, T(\mathbf{b}_{k_r})$, obținem contradicție. Așadar, $\dim(\text{Im}(T)) = r$, adică

$$\text{rang}(A_{B,B'}) = \text{rang}(T).$$

Schimbări de baze:

Vrem să vedem cum se schimbă matricea asociată aplicației liniare T la schimbări de bază. Fie $\tilde{B} = \{\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n\}$ o altă bază a lui V și $\tilde{B}' = \{\tilde{\mathbf{b}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}'_m\}$ o altă bază a lui W . Vom nota cu $S_{B, \tilde{B}} = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la baza B la baza \tilde{B} și cu $S'_{B', \tilde{B}'} = (s'_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la B' la \tilde{B}' .

Cu alte cuvinte, vom avea

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_k &= s_{1k}\mathbf{b}_1 + \dots + s_{nk}\mathbf{b}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \\ \tilde{\mathbf{b}}'_\ell &= s'_{1\ell}\mathbf{b}'_1 + \dots + s'_{m\ell}\mathbf{b}'_m, \forall \ell \in \{1, \dots, m\}.\end{aligned}$$

Fie $A_{\tilde{B}, \tilde{B}'} := (\tilde{a}_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, matricea asociată operatorului T în raport cu bazele \tilde{B}, \tilde{B}' . Atunci pentru orice $1 \leq k \leq n$ avem

$$\begin{aligned}T(\tilde{\mathbf{b}}_k) &= \tilde{a}_{1k}\tilde{\mathbf{b}}'_1 + \dots + \tilde{a}_{mk}\tilde{\mathbf{b}}'_m = \tilde{a}_{1k}(s'_{11}\mathbf{b}'_1 + \dots + s'_{m1}\mathbf{b}'_m) + \dots + \tilde{a}_{mk}(s'_{1m}\mathbf{b}'_1 + \dots + s'_{mm}\mathbf{b}'_m) \\ &= (\tilde{a}_{1k}s'_{11} + \dots + \tilde{a}_{mk}s'_{1m})\mathbf{b}'_1 + \dots + (\tilde{a}_{1k}s'_{m1} + \dots + \tilde{a}_{mk}s'_{mm})\mathbf{b}'_m.\end{aligned}\quad (4)$$

Pe de altă parte, din (3) avem

$$T(\tilde{\mathbf{b}}_k) = (s_{1k}a_{11} + \dots + s_{nk}a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \dots + (s_{1k}a_{m1} + \dots + s_{nk}a_{mn})\mathbf{b}'_m.$$

Identificând coordonatele vectorilor $T(\tilde{\mathbf{b}}_k)$ în raport cu baza B' obținem

$$\tilde{a}_{1k}s'_{j1} + \dots + \tilde{a}_{mk}s'_{jm} = s_{1k}a_{j1} + \dots + s_{nk}a_{jn}, \forall 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

adică

$$S'_{B', \tilde{B}'} \cdot A_{\tilde{B}, \tilde{B}'} = A_{B, B'} \cdot S_{B, \tilde{B}},$$

sau, echivalent

$$A_{\tilde{B}, \tilde{B}'} = (S'_{B', \tilde{B}'})^{-1} \cdot A_{B, B'} \cdot S_{B, \tilde{B}}.$$

Matricea asociată compunerii a două aplicații:

Presupunem acum că $(W', +, \cdot)$ este un alt spațiu finit dimensional având $\dim(W') = m'$, și fie $T' : W \rightarrow W'$ un operator liniar. Dacă $\tilde{B}' = \{\tilde{\mathbf{b}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}'_{m'}\}$ este o bază a lui W' și $A_{B', \tilde{B}'} \in \mathcal{M}_{m', m'}(\mathbb{R})$ este matricea asociată operatorului T' în raport cu B' și \tilde{B}' , se poate arăta că operatorul $T' \circ T : V \rightarrow W'$ are pe $A_{B', \tilde{B}'} \cdot A_{B, B'}$ ca matrice asociată în raport cu B și \tilde{B}' .

Așadar, vom putea spune că operatorul liniar T este bijectiv dacă și numai dacă matricea sa asociată (în raport cu orice bază a lui V) este inversabilă.

Reciproc, dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, atunci se poate defini o funcție $T : V \rightarrow W$ după formula (3):

$$T(\mathbf{v}) = (\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n})\mathbf{b}'_1 + \dots + (\alpha_1 a_{m1} + \dots + \alpha_n a_{mn})\mathbf{b}'_m,$$

unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui \mathbf{v} în raport cu baza B . Se poate demonstra, cu ușurință, că T este o aplicație liniară numită **operatorul liniar asociat** lui A în raport cu bazele B și B' . În acest caz, matricea asociată lui T în raport cu bazele B, B' este chiar A .

Caz particular: Dacă presupunem că $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar că B și B' sunt bazele canonice în \mathbb{R}^n , respectiv \mathbb{R}^m , atunci formula (3) devine

$$T(\mathbf{v}) = A_{B, B'} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

unde am identificat vectorii din \mathbb{R}^n , respectiv \mathbb{R}^m , cu matricele coloană $\mathcal{M}_{n,1}$, respectiv $\mathcal{M}_{m,1}$.

Așadar, un operator liniar între \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m se poate identifica cu o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ prin formula

$$T(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

cu convenția ca vectorii din spațiile euclidiene să fie considerați ca matrice coloană.

Operatori adjuncți

Definiția 7.11 Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ și $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ spații prehilbertiene și $T : V \rightarrow W$ un operator liniar.

i) Un operator $T^* : W \rightarrow V$ care satisface

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W,$$

se numește **operatorul adjunct** al lui T .

ii) Dacă $V = W$, operatorul T se numește **autoadjunct** sau **simetric** dacă $T = T^*$, adică

$$\langle T(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_V, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

ii) Dacă $V = W$, operatorul T se numește **antisimetric** dacă $T = -T^*$, adică

$$\langle T(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = -\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_V, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Observații:

1. Adjunctul unui operator este unic. Într-adevăr, dacă presupunem că T^* și \bar{T}^* sunt doi adjuncți ai lui T , atunci

$$\langle T^*(\mathbf{w}) - \bar{T}^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = 0, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W,$$

adică $T^*(\mathbf{w}) - \bar{T}^*(\mathbf{w}) \in V^\perp$, pentru $\mathbf{w} \in W$. Însă, cum $V^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$, rezultă că $T^* = \bar{T}^*$.

2. Dacă $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ sunt spații prehilbertiene, finit-dimensionale, atunci adjunctul operatorului liniar $T : V \rightarrow W$ există întotdeauna. Într-adevăr, conform procedurii de ortonormalizare Gram-Schmidt, există baze ortonormale $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ și $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_m\}$ în V , respectiv, în W . Fie $A_{B,B'}$ matricea asociată operatorului T în raport cu bazele B și B' . Dacă $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ și $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele a doi vectori $\mathbf{v} \in V$ și $\mathbf{w} \in W$ în raport cu baza B , respectiv B' , atunci obținem din formula (3)

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W &= \langle (\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n}) \mathbf{b}'_1 + \dots + (\alpha_1 a_{m1} + \dots + \alpha_n a_{mn}) \mathbf{b}'_m, \beta_1 \mathbf{b}'_1 + \dots + \beta_m \mathbf{b}'_m \rangle_W \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n}) \beta_1 + \dots + (\alpha_1 a_{m1} + \dots + \alpha_n a_{mn}) \beta_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j a_{ji}. \end{aligned}$$

Definind acum $T^* : W \rightarrow V$ ca operatorul asociat matricei $A_{B,B'}^T \in \mathcal{M}_{mn}$, observăm (schimbând rolurile lui V cu W) că

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j a_{ji}.$$

Deci $\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W$, adică T^* este adjunctul lui T .

3. T este simetric dacă și numai dacă matricea $A_{B,B}$ este simetrică, adică $A_{B,B}^T = A_{B,B}$. T este antisimetric dacă $A_{B,B}^T = -A_{B,B}$.

Definiția 7.12 Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ două spații prehilbertiene.

i) Spunem că o aplicație $f : V \rightarrow W$ este o **izometrie** dacă

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_W = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

unde $\|\cdot\|_V$ reprezintă norma indusă de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

ii) Dacă aplicația $T : V \rightarrow V$ este un endomorfism liniar, atunci spunem că T este **ortogonal** dacă

$$\|T(\mathbf{u})\|_V = \|\mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in V.$$

Observații:

1. Un endomorfism liniar $T \in \mathcal{L}(V)$ este o izometrie dacă și numai dacă T este ortogonal.
2. Presupunem că V este finit dimensional, și că $T \in \mathcal{L}(V)$ este un endomorfism ortogonal. Atunci T este bijectiv. Într-adevăr, dacă notăm $\tilde{T} := T^* \circ T$, atunci avem

$$\langle \tilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle (T^* \circ T)(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Prin urmare, $\langle \tilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \|T(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2, \forall \mathbf{u} \in V$. Mai mult, avem $\langle \tilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \tilde{T}(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, adică \tilde{T} este autoadjunct. În consecință, putem scrie

$$4\langle \tilde{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \tilde{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle - \langle \tilde{T}(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Deci $\tilde{T}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, adică $\tilde{T} = 1_V$. Prin urmare, T^* este inversa operatorului liniar T , deci T trebuie să fie bijectivă.

În plus, dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază ortonormală a lui V , se poate arăta că matricea $A = A_{B,B}$, asociată lui V în raport cu baza B , este ortonormală, adică

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

Prin urmare, avem că A este inversabilă, cu $A^{-1} = A^T$ și $\det A \in \{-1, 1\}$.

Vectori și valori proprii

Definiția 7.13 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar și fie $T \in \mathcal{L}(V)$.

- a) Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$, se numește **vector propriu** al lui T dacă

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}. \quad (5)$$

Scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ se numește **valoare proprie** a lui T , corespunzătoare vectorului propriu \mathbf{v} .

- b) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T , atunci subspațiul liniar

$$\text{Ker}(T - \lambda \cdot 1_V) = \{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{u}\}$$

se numește **subspațiu propriu** (subspațiul caracteristic) asociat lui λ .

Observații:

1. Un vector $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ este vector propriu pentru T , corespunzător valorii proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T - \lambda 1_V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.
2. Spațiul caracteristic asociat unei valori proprii $\lambda \in \mathbb{R}$ este subspațiul tuturor vectorilor proprii asociați lui λ , la care se adaugă $\mathbf{0}$, deci este un spațiu strict mai mare ca $\{\mathbf{0}\}$. Așadar, există mai mult de un vector propriu ce corespunde unei valori proprii, dar numai o valoare proprie ce corespunde unui vector propriu.
3. Spațiul caracteristic $V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda 1_V)$, asociat unei valori proprii $\lambda \in \mathbb{R}$, este invariant în raport cu T , adică $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{v} \in V_\lambda$, atunci

$$T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot T(\mathbf{v}),$$

deci $T(\mathbf{v}) \in V_\lambda$.

4. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sunt două valori proprii distincte, atunci $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$.

Propoziția 7.14 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional și fie $T \in \mathcal{L}(V)$. Dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valori proprii distincte ale lui T , iar $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ sunt vectorii proprii corespunzători, atunci $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sunt liniar independenți.

Demonstrație: Utilizăm inducția matematică: Pentru $n = 1$, este ușor de observat, deoarece $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Presupunem că rezultatul are loc pentru $n \geq 1$ și demonstrăm că are loc pentru $n+1$. Fie valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, și vectorii proprii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$. Presupunem că avem

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

pentru $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) + \alpha_{n+1} T(\mathbf{v}_{n+1}) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Înmulțind cu $-\lambda_{n+1}$ și adăugând-o la egalitatea de mai sus, obținem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Cum vectorii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sunt liniar independenți (din ipoteza de inducție), iar $\lambda_{n+1} \neq \lambda_k, 1 \leq k \leq n$, obținem $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Din (6) deducem și că $\lambda_{n+1} = 0$. În concluzie, vectorii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ sunt liniar independenți. ◀

Presupunem că $(V, +, \cdot)$ este finit dimensional și că $T \in \mathcal{L}(V)$. Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V , iar matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea asociată operatorului T în raport cu B . Atunci, orice valoare proprie $\lambda \in \mathbb{R}$ satisface ecuația

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

deoarece $A - \lambda I_n$ este matricea asociată operatorului $T - \lambda 1_V$, ce nu este bijectiv. Funcția polinomială $\lambda \rightarrow P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ se numește **polinomul caracteristic** al lui A .

Fie B' o altă bază a lui V , și fie S matricea de trecere de la baza B la baza B' și fie $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea asociată lui T în raport cu baza B' . Atunci, din formula schimbării de bază, avem

$$A' - \lambda I_n = S^{-1} \cdot (A - \lambda I_n) \cdot S, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Așadar, polinomul caracteristic este invariant la schimbări de bază, așa că îl vom numi **polinomul caracteristic** al lui T .

Toate valorile proprii ale lui T sunt rădăcini reale ale polinomului caracteristic al lui T .

- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a lui T , atunci numărul $\dim(\text{Ker}(T - \lambda 1_V))$ se numește **multiplicitatea geometrică** a lui λ .
- Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului $P_A \in \mathbb{R}[X]$, vom numi **multiplicitatea algebrică** a lui λ , cel mai mare număr $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(X - \lambda)^m$ este un divizor al lui $P_A(X)$.

Observație Se poate arăta că multiplicitatea geometrică a unei valori proprii λ este mai mică decât multiplicitatea algebrică a lui λ în raport cu polinomul caracteristic al lui T . De aceea, dacă λ are multiplicitatea algebrică egală cu 1, atunci multiplicitatea geometrică λ trebuie să fie 1 (adică $\dim(\text{Ker}(T - \lambda I_n)) = 1$).

Definiția 7.15 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit-dimensional, cu $\dim(V) = n$, și fie $T \in \mathcal{L}(V)$. Spunem că endomorfismul T este **diagonalizabil** dacă există B o bază a lui V în raport cu care matricea asociată lui T , este o matrice diagonală, adică există $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A_{B,B} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.16 Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar finit dimensional și $T \in \mathcal{L}(V)$. Atunci T este diagonalizabil dacă și numai dacă mulțimea tuturor vectorilor proprii generează pe V .

Demonstrație: Dacă $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ este o bază a lui V și matricea asociată lui T în raport cu B este $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, atunci $T(\mathbf{b}_k) = \lambda_k \mathbf{b}_k, 1 \leq k \leq n$. Deci vectorii $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ sunt proprii, iar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii corespunzătoare. Cum $\text{Lin}(B) = V$, cu atât mai mult mulțimea tuturor vectorilor proprii va genera pe V .

Reciproc, dacă mulțimea tuturor vectorilor proprii generează pe V , pot alege vectorii proprii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ astfel încât $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ să fie o bază pentru V . Atunci, matricea asociată lui T în raport cu baza $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ este diagonală, și are drept componente valorile proprii corespunzătoare vectorilor proprii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. ◀

Observații:

1. Dacă un endomorfism T pe un spațiu prehilbertian finit-dimensional este autoadjunct, atunci acesta este diagonalizabil.
2. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spațiul liniar finit dimensional V dacă și numai dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile din \mathbb{R} , iar subspațiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

În cazul $V = \mathbb{R}^n$, există o metodă practică pentru **diagonalizarea endomorfismului** $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

- Se consideră baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a lui \mathbb{R}^n . În raport cu această bază se găsește matricea A asociată operatorului T , precum și polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuației algebrice caracteristice $P(\lambda) = 0$. Dacă toate cele n rădăcini ale lui P sunt reale, putem continua. Dacă nu, spunem că T nu este diagonalizabilă și ne putem opri aici.
- Pentru fiecare valoare proprie calculăm $r_\lambda = \text{rang}(A - \lambda I_n)$ ($n - r_\lambda$ va fi multiplicitatea geometrică a lui λ). Dacă $r_\lambda = n - m_\lambda$, pentru orice valoare proprie λ , unde m_λ este multiplicitatea algebrică a lui λ în P , putem conchide că T este diagonalizabil. În caz contrar, concluzionăm că endomorfismul nu este diagonalizabil.
- Pentru fiecare valoare proprie λ , rezolvăm ecuația $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, unde vectorii $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sunt considerați matrice coloană. Cum $\text{rang}(A - \lambda I_n) = r_\lambda$, putem găsi vectorii liniari independenți $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ ce rezolvă ecuația. Mai mult, conform procedurii de ortonormalizare Gram-Schmidt, putem alege ca $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$ să fie ortonormali.
- Baza B a lui V pentru care matricea lui T este diagonală este atunci mulțimea $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_\lambda}$, pentru toate valorile proprii λ . Matricea de trecere S de la $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la B este atunci matricea ce diagonalizează pe A , adică

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Bibliografie

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. D. Drăghici - *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
3. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie și calcul diferențial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.
4. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică*, Ed. "Fair Partners", Buc., 2010.
5. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications*, The Saylor Foundation, 2013.
6. Sheldon Axler - *Linear Algebra Done Right*, Springer International Publishing AG, 2015.