EXERCÍCIOS

60. Construa os gráficos cartesianos das seguintes funções exponenciais:

a) $y = 3^x$ c) $y = 4^x$ e) $y = 10^{-x}$

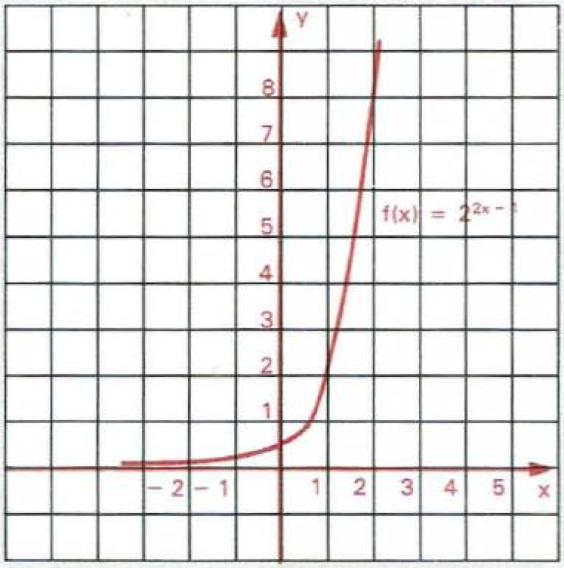
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y = 10^x$ f) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

61. Construa o gráfico cartesiano da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{2x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x - 1$, calculamos 2^{2x-1} e finalmente x.

x	$2x-1$	$y=2^{2x-1}$
-1	-3	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	2
$\frac{3}{2}$	2	4
2	3	8



62. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = 2^{1-x}$ c) $f(x) = 2^{|x|}$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

b) $f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$

63. Represente graficamente a função $f(x) = e^{x^2}$.

64. Represente graficamente a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x^2}$.

65. Construa o gráfico da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x + 1$.

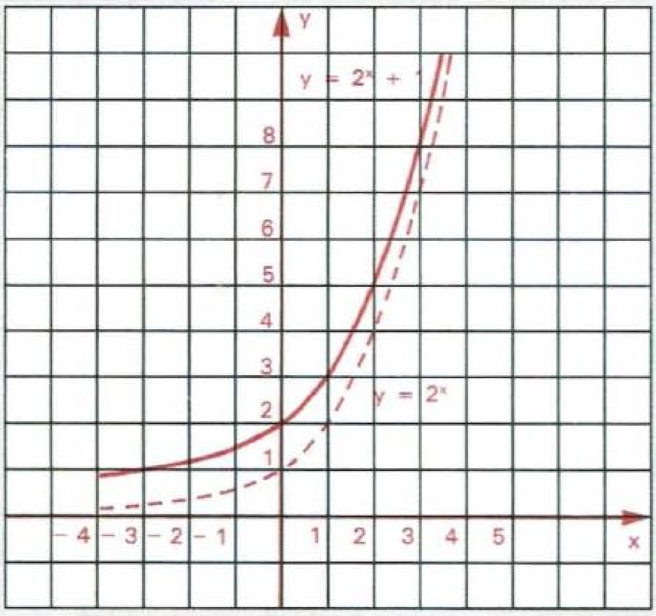
Solução

x	2^x	$y=2^x+1$
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

x	2^x	$y=2^x+1$
−3	$\frac{1}{8}$	
−2	$\frac{1}{4}$	
−1	$\frac{1}{2}$	
0	1	
1	2	
2	4	
3	8	

x	2^x	$y=2^x+1$
−3	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	2
1	2	3
2	4	5
3	8	9

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o valor de 2^x mais uma unidade. Assim, se cada 2^x sofre um acréscimo de 1, tudo se passa como se a exponencial $y = 2^x$ sofresse uma translação de uma unidade "para cima".



66. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = 2^x - 3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

c) $f(x) = 2 - 3^x$

d) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

67. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

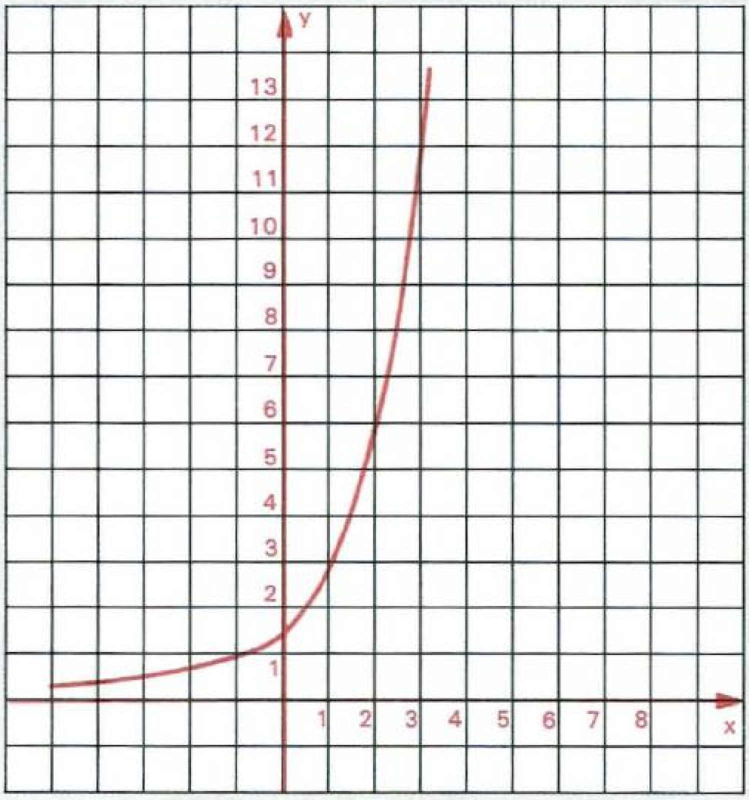
a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

68. Construa o gráfico da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela dando valores a $x - 1$ e calculando 2^{x-1}, $3 \cdot 2^{x-1}$ e x. Temos:

x	x − 1	2^{x-1}	$y = 3 \cdot 2^{x-1}$
−2	−3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
−1	−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	0	1	3
2	1	2	6
3	2	4	12
4	3	8	24



Solução

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

$S = \left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

71. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 128$

b) $3^x = 243$

c) $2^x = \dfrac{1}{16}$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$

e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$

g) $9^x = 27$

h) $4^x = \dfrac{1}{8}$

i) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^x = 25$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

k) $100^x = 0{,}001$

l) $8^x = 0{,}25$

m) $125^x = 0{,}04$

n) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$

72. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} = 32$

b) $7^{4x+3} = 49$

c) $11^{2x+5} = 1$

d) $2^{x^2-x-16} = 16$

e) $3^{x^2+2x} = 243$

f) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

g) $81^{1-3x} = 27$

h) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

i) $5^{3x-1} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x+3}$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

l) $4^{x^2-1} = 8^x$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x}$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

73. Resolva a equação $4^{x^2+4x} = 4^{12}$.

74. Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1\,000^5}$.

75. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Solução

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{5}, \qquad S = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{2x-5}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{4x-10}{x} = \dfrac{3x-2}{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -6$ (não serve pois $x > 0$)

$S = \{3\}$

76. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $(2^x)^{x+4} = 32$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

f) $\dfrac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \dfrac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$

g) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5}$

h) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1}$

i) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$

j) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot \sqrt[x+1]{4^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}}$

77. Determine os valores de x que satisfazem a equação $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

78. Resolva a equação exponencial: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$.

Solução

Resolvemos colocando 2^{x-1} em evidência:

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 15 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4, \qquad S = \{4\}.$$

79. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

b) $5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} = 505$

c) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} = 240$

d) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

e) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$

f) $2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20$

80. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x = 56$

b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Solução

a) $4^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$

Empregando uma incógnita auxiliar, isto é, pondo $2^x = y$, temos:

$y^2 - y - 56 = 0 \Leftrightarrow y = 8$ ou $y = -7$.

Observemos que $y = -7$ não convém, pois $y = 2^x > 0$.

De $y = 8$, temos: $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

$S = \{3\}$.

b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Pondo $2^x = y$, temos:

$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = \dfrac{1}{4}$

mas $y = 2^x$; então:

$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2^x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -2$.

$S = \{1, -2\}$.

81. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x - 2 = 0$
b) $9^x + 3^x = 90$
c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$
d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$
e) $9^x + 3^{x+1} = 4$
f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$
g) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$
h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$
i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$
j) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x - \frac{1}{2}} - 8 = 0$

82. Resolva a equação $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.

83. Calcule o produto das soluções da equação $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$.

84. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \dfrac{23}{3^{x-2}}$

b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \dfrac{3}{2^{x-1}} = \dfrac{30}{2^x}$

c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

85. Resolva a equação exponencial:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$$

86. Determine o número de soluções distintas da equação $2^x - 2^{-x} = k$, para k real.

87. Resolva a equação exponencial:

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$$

88. Resolva a equação exponencial:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

89. Resolva a equação:

$$3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x}$$

90. Resolva a equação:

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$

91. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^{x^2-5x+6} = 1$

b) $x^{2x^2-7x+4} = x$

Solução

a) Devemos examinar inicialmente se *0* ou *1* são soluções da equação.
Substituindo $x = 0$ na equação proposta, temos:

$$0^6 = 1 \quad \text{(falso)}$$

logo, *0* não é solução.
Substituindo $x = 1$ na equação, temos:

$$1^2 = 1 \quad \text{(verdadeiro)}$$

logo, *1* é solução da equação.
Supondo agora $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{x^2-5x+6} = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
Os valores $x = 2$ ou $x = 3$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.
$S = \{1, 2, 3\}$.

b) Examinemos inicialmente se *0* ou *1* são soluções da equação proposta:

$$0^4 = 0 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$
$$1^{-1} = 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 1 \text{ é solução.}$$

Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{2x^2-7x+4} = x \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Os valores $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.

$S = \left\{0, 1, 3, \frac{1}{2}\right\}$.

92. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^{2-3x} = 1$

b) $x^{2x+5} = 1$

c) $x^{x^2-2} = 1$

d) $x^{x^2-7x+12} = 1$

e) $x^{x^2-3x-4} = 1$

93. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^x = x$

b) $x^{x+1} = x$

c) $x^{4-2x} = x$

d) $x^{2x^2-5x+3} = x$

e) $x^{x^2-2x-7} = x$

94. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $(x^2 - x + 1)^{(2x^2-3x-2)} = 1$.

95. Determine o conjunto solução da equação $x^{x^3-8} = 1$.

96. Determine o número de soluções de $2^x = x^2$.
Sugestão: Faça os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$.
Observe que $2^{100} > 100^2$.

97. Resolva em $\mathbb{R}_+$ a equação $x^{2x} - (x^2 + x)\,x^x + x^3 = 0$.

98. Resolva a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Solução

Dividindo por 9^x, temos:

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, temos:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = -2 \quad \text{(não convém)} \end{cases}$$

mas $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, então:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$S = \{0\}$.

99. Resolva as equações:

a) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x$

b) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$

100. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{2(x^2-y)} = 100 \cdot 5^{2(y-x^2)} \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\left(\frac{y^2}{2}\right)} = 7 \end{cases}$

101. Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, calcule o valor de $x - y$.

102. Calcule o produto das soluções das equações:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$$

103. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^{y^2-15y+56} = 1 \\ y - x = 5 \end{cases}$$

104. Resolva os sistemas de equações para $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$

105. Resolva o sistema de equações para $x > 0$ e $y > 0$ e sendo $m \cdot n > 0$:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$$

106. Para que valores reais de m a equação $4^x - (m - 2) \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real?

Solução

Pondo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - (m - 2)\,y + (2m + 1) = 0$$

Lembrando que a equação exponencial admitirá pelo menos uma raiz real se existir $y = 2^x > 0$, a equação acima deverá ter pelo menos uma raiz real e positiva.

Sendo $f(y) = y^2 - (m - 2)y + (2m + 1)$, temos:

a) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0,\ \frac{S}{2} > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 12m \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad m \geqslant 12 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{S}{2} > 0 \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{m-2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2 \qquad \text{(II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow a \cdot f(0) = 2m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \qquad \text{(III)}$$

113. Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) as seguintes sentenças:

a) $2^{1,3} > 2^{1,2}$

b) $(0,5)^{1,4} > (0,5)^{1,3}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1,7}$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3,1} < \left(\frac{5}{4}\right)^{2,5}$

e) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

f) $(0,11)^{-3,4} < (0,11)^{4,2}$

g) $e^{2,7} > e^{2,4}$

h) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{4,3} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1,5}$

i) $(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{4}} > (\sqrt[3]{3})^{\frac{2}{3}}$

j) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{3}{5}} < \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{5}{7}}$

114. Classifique em *V* ou *F* as seguintes sentenças:

a) $2^{0,4} > 4^{0,3}$

b) $8^{1,2} > 4^{1,5}$

c) $9^{3,4} < 3^{2,3}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5,4} < \left(\frac{1}{8}\right)^{1,6}$

e) $(\sqrt[3]{3})^{-0,5} < 27^{-0,1}$

f) $(\sqrt{8})^{-1,2} > (\sqrt[3]{4})^{2,1}$

g) $8^{-1,2} > 0,25^{2,2}$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2,5} < (2,25)^{-1,2}$

115. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x > 128$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \frac{125}{27}$

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

Solução

a) $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7$

Como a base é maior que 1, vem $x > 7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

Como a base está compreendida entre *0* e *1*, temos $x \leqslant -3$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$.

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$

Como a base é maior que *1*, temos: $\frac{x}{3} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{4}\right\}$.

116. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x < 32$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

c) $3^x < \frac{1}{27}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geqslant 125$

e) $(\sqrt[3]{3})^x \leqslant \frac{1}{9}$

f) $(\sqrt{2})^x > \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

g) $4^x \geqslant 8$

h) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqslant 243$

i) $(\sqrt[5]{25})^x < \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$

j) $(0{,}01)^x \leqslant \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$

k) $(0{,}008)^x > \sqrt[3]{25}$

l) $0{,}16^x > \sqrt[5]{15{,}625}$

117. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $3^{2x+3} > 243$

b) $2^{5x-1} \geqslant 8$

c) $(0{,}1)^{3-4x} < 0{,}0001$

d) $7^{5x-6} < 1$

e) $(0{,}42)^{1-2x} \geqslant 1$

f) $3^{x^2-5x+6} > 9$

g) $2^{x^2-x} \leqslant 64$

h) $(0{,}3)^{x^2-2x-8} \geqslant 1$

i) $4^{x^2+1} \leqslant 32^{1-x}$

j) $27^{x^2-3} > 9$

k) $(0{,}01)^{2x^2+1} \geqslant (0{,}001)^{3x}$

l) $8^{3x^2-5x} > \frac{1}{16}$

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{1}{32}\right)^{2x+1}$

n) $(\sqrt{0{,}7})^{x^2+1} \geqslant (\sqrt[3]{0{,}7})^{2x+1}$

118. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geqslant \frac{1}{2}$.

119. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $8 < 2^x < 32$

b) $0{,}0001 < (0{,}1)^x < 0{,}01$

c) $\frac{1}{27} < 3^x < 81$

d) $\frac{1}{8} \leqslant 4^x \leqslant 32$

e) $\frac{8}{27} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{3}{2}$

f) $0{,}1 < 100^x < 1\,000$

g) $4 < 8^{|x|} < 32$

h) $25 < 125^{2x-1} < 125$

i) $(0{,}3)^{x-5} \leqslant (0{,}09)^{2x+3} \leqslant (0{,}3)^{x+6}$

j) $1 \leqslant 7^{x^2-4x+3} \leqslant 343$

k) $3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9$

120. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $(3^x)^{2x-7} > \dfrac{1}{27}$

b) $\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geqslant \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1}$

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343}$

Solução

a) $(3^x)^{2x-7} > \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x^2-7x} > 3^{-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 7x > -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}.$

b) $\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geqslant \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]^{3x+1} \cdot \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1+2x-x^2} \geqslant$

$\geqslant \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{x-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2-4x+2x^2} \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x^2-3x-2} \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 2 \leqslant 3x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1\right\}.$

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343} \Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x+1)(x-1)} < 0$

		-1		$-\frac{1}{3}$		1		3	
$-3x^2 + 8x + 3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x+1)(x-1)}$	$-$		$+$	0	$-$		$+$		$-$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 3\right\}.$$

121. Resolva as inequações exponenciais:

a) $(2^{x+1})^{2x-3} < 128$

b) $(27^{x-2})^{x+1} \geqslant (9^{x+1})^{x-3}$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^{x-3}$

d) $25^{3-4x} : 125^{2-x} > 5^{3x+1}$

e) $\dfrac{0{,}04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0{,}008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1$

f) $2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} > 4$

g) $(0{,}1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0{,}01)^{\frac{1}{x+3}} < (0{,}001)^{\frac{1}{x+2}}$

h) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leqslant \left[\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}}$

122. Resolva a inequação:

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4}$$

Solução

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x(1 - 2 - 2^2 - 2^3 + 2^4) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 3 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}.$$

123. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$
b) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540$
c) $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^x - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geqslant 144$
d) $3^{2x+1} - 9^x - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leqslant 42$
e) $3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^x < 60$
f) $3^{(x^2)} + 5 \cdot 3^{(x^2+1)} + 2 \cdot 3^{(x^2+2)} - 4 \cdot 3^{(x^2+3)} + 3^{(x^2+4)} < 63$

124. Resolva as seguintes inequações:

a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$
b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$
c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$

Solução

a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^3 - 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\,(3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 3 > 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$9y^2 - 28y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < \dfrac{1}{9}$ ou $y > 3$; mas $y = 3^x$, logo:

$3^x < \dfrac{1}{9}$ ou $3^x > 3 \Leftrightarrow 3^x < 3^{-2}$ ou $3^x > 3 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 1$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$.

b) $2^x - 1 > 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^x - 1 > \dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow 2^x(2^x - 1) > 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 > 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - y - 2 > 0 \Leftrightarrow y < -1$ ou $y > 2$.
Mas $2^x = y$, logo: $2^x < -1$ ou $2^x > 2$.
Lembrando que $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:
$2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$2y^2 + 5y + 2 > 0 \Leftrightarrow y < -2$ ou $y > -\dfrac{1}{2}$; mas $y = 2^x$, logo:

$2^x < -2$ ou $2^x > -\dfrac{1}{2}$.

Lembrando que $2^x > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, temos:

$2^x > -\frac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

$S = \mathbb{R}.$

125. Resolva as seguintes inequações:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

c) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0$

d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leqslant 0$

e) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$

f) $2^x (2^x + 1) < 2$

g) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

h) $3^x (3^x + 6) < 3 (2 \cdot 3^{x-1} - 3)$

i) $2^{x+3} + 2^{-x} < 6$

j) $3 (3^x - 1) \geqslant 1 - 3^{-x}$

k) $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geqslant 2^{x+1} - 1$

l) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0$

126. Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

127. Resolva a inequação $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x$.

128. Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais $\dfrac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$.

129. Resolva a inequação $x^{2x^2-9x+4} < 1$ em $\mathbb{R}_+$.

Solução

1º) Verificamos se 0 ou 1 são soluções:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \implies 0^4 < 1 \ \ (V) \\ x = 1 \implies 1^{-3} < 1 \ \ (F) \end{array}\right\} \implies S_1 = \{0\}$$

2º) Supomos $0 < x < 1$ e resolvemos:

$$x^{2x^2-9x+4} < x^0 \implies 2x^2 - 9x + 4 > 0 \implies x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4$$

Lembrando que $0 < x < 1$, vem $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

3º) Supomos $x > 1$ e resolvemos:

$$2^{2x^2-9x+4} < x^0 \implies 2x^2 - 9x + 4 < 0 \implies \frac{1}{2} < x < 4$$

Lembrando que $x > 1$, vem $S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$.

A solução é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < 4\right\}$.

130. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

a) $x^{5x-2} > 1$ c) $x^{2x^2+x-1} < 1$ e) $x^{3x^2-7x+2} \leqslant 1$
b) $x^{4x-3} < 1$ d) $x^{2x^2-5x-3} > 1$ f) $x^{4x^2-11x+6} \geqslant 1$

131. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $|x|^{3x^2-4x-4} > 1$.

132. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

a) $x^{2x+4} < x$ c) $x^{4x^2-17x+5} < x$ e) $x^{x^2-5x+7} \leqslant x$
b) $x^{4x-1} \geqslant x$ d) $x^{5x^2-11x+3} > x$

133. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

a) $x^{(x^2)} > x^{2x}$ b) $x^2 < x^{x^2-7x+8}$ c) $x^{x^2-x-2} \geqslant x^4$

LEITURA

Os Logaritmos segundo Napier

Hygino H. Domingues

Certamente não era nada confortável uma viagem de Londres a Edimburgo no distante ano de 1615. Em veículos puxados a cavalos, por estradas esburacadas e poeirentas, o percurso parecia interminável. Mas para o eminente professor Henry Briggs (1556-1630), que ocupava no Gresham College de Londres a primeira cátedra de matemática criada na Inglaterra, valia a pena o sacrifício. Afinal, ia conhecer John Napier (1550-1617), que no ano anterior tornara pública uma invenção sua que sacudira a matemática da época: os logaritmos.

O nobre escocês John Napier, Barão de Murchiston, ao contrário de Briggs, não era um matemático profissional. Além de administrar suas grandes propriedades, dedicava-se a escrever sobre vários assuntos. Às vezes sem conseguir se livrar dos preconceitos da época, como num trabalho de 1593 em que procurava mostrar que o papa era o anticristo e que o Criador pretendia dar fim ao mundo entre 1688 e 1700. Às vezes como um visionário iluminado, como quando previu os submarinos e os tanques de guerra, por exemplo. Às vezes com a ponderação de um autêntico cientista, como no caso dos logaritmos, em cuja criação trabalhou cerca de 20 anos.

O termo *logaritmo* foi criado por Napier: de *logos* e *arithmos*, que significam, respectivamente, "razão" e "número". E a obra em que, no ano de 1614, apresentou essa sua descoberta recebeu o título de *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* (ou seja, *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*). Nela Napier explica a natureza dos logaritmos, segundo sua concepção, e fornece uma tábua de loga-