PARTE

1

Probabilidade

CAPÍTULO 1

Espaço amostral

1.1 Introdução

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

Os fenômenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas.

Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Este exemplo caracteriza um fenômeno determinístico.

Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno.

Por exemplo: se considerarmos um pomar com centenas de laranjeiras, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, umidade, solo etc. sejam as mesmas para todas as árvores.

Podemos considerar os *experimentos aleatórios* como fenômenos produzidos pelo homem.

Nos experimentos aleatórios, mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis.

Exemplos

a) lançamento de uma moeda honesta;
b) lançamento de um dado;
c) lançamento de duas moedas;
d) retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas;
e) determinação da vida útil de um componente eletrônico.

A cada experimento aleatório está associado o resultado obtido, que não é previsível, chamado *evento aleatório*.

No exemplo *a* os eventos associados são cara (c) e coroa (r); no exemplo *b* poderá ocorrer uma das faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

1.2 Espaço amostral

Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados do experimento. Os elementos do espaço amostral serão chamados também de *pontos amostrais*.

Representaremos o espaço amostral por Ω.

Nos exemplos dados na seção anterior, os espaços amostrais são:

a) $\Omega = \{c, r\}$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $\Omega = \{(c, r), (c, c), (r, c), (r, r)\}$

d) $\Omega = \{A_0 ... K_0, A_p ... K_p, A_E ... K_E, A_c ... K_c\}$

e) $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$

O evento aleatório pode ser um único ponto amostral ou uma reunião deles, como veremos no exemplo a seguir:

Lançam-se dois dados. Enumerar os seguintes eventos:

A: saída de faces iguais;

B: saída de faces cuja soma seja igual a 10;

C: saída de faces cuja soma seja menor que 2;

D: saída de faces cuja soma seja menor que 15;

E: saída de faces onde uma face é o dobro da outra.

Determinação do espaço amostral: podemos determiná-lo por uma tabela de dupla entrada (produto cartesiano).

D1 \ D2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Os eventos pedidos são:

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

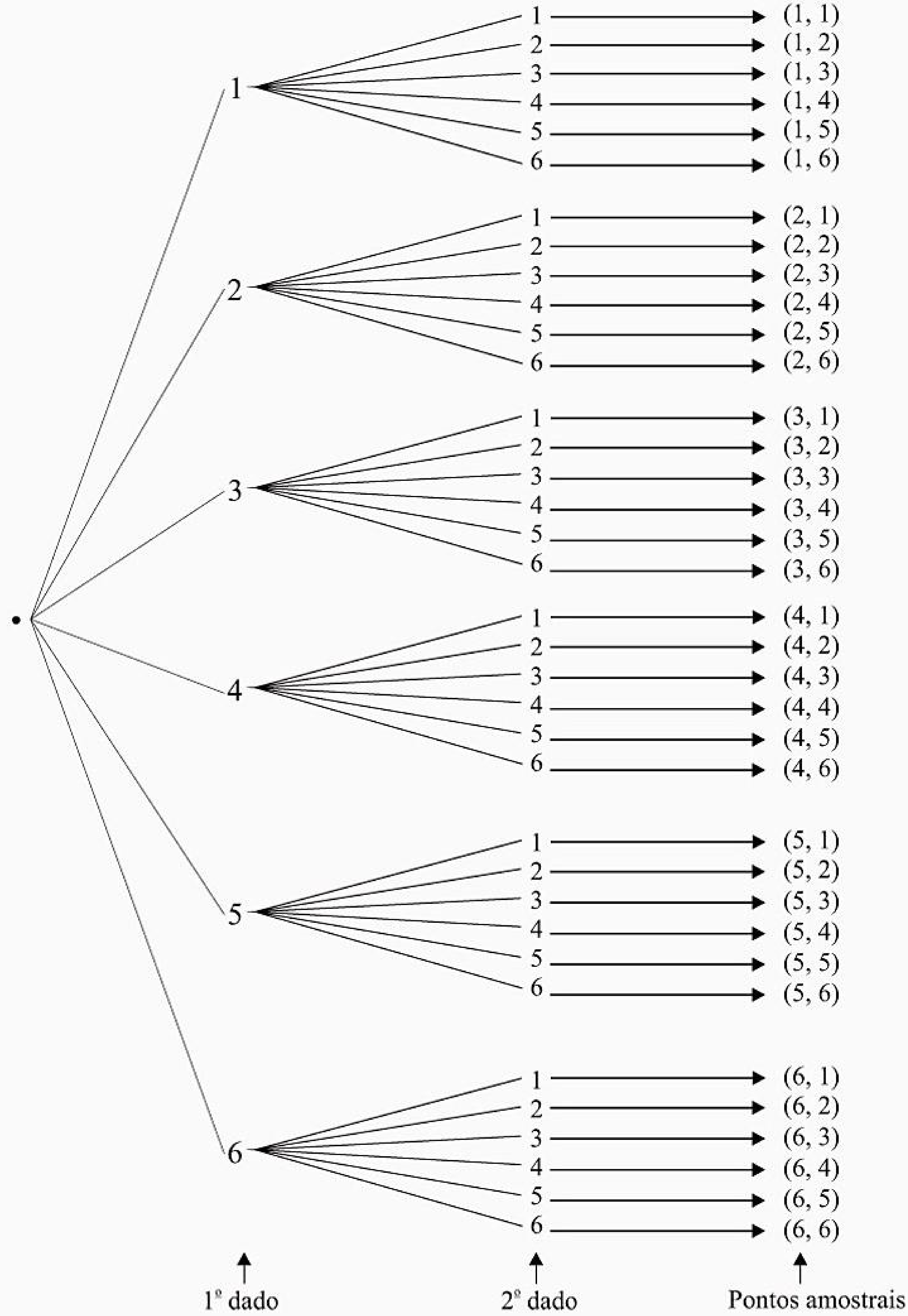
$C = \phi$ (evento impossível)

$D = \Omega$ (evento certo)

$E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (6, 3)\}$

Uma outra maneira de determinar o espaço amostral desse experimento é usar o diagrama em árvore, que será útil para a resolução de problemas futuramente.

Eis o processo:



1.3 Classe dos eventos aleatórios

DEFINIÇÃO

É o conjunto formado de todos os eventos (subconjuntos) do espaço amostral.

Para efeito de exemplo, consideremos um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

A classe dos eventos aleatórios é:

$$F(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\} \\ \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\} \\ \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\} \\ \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \end{array} \right\}$$

Para determinarmos o número de elementos (eventos) de $F(\Omega)$, observamos que:

ϕ corresponde a $\binom{4}{0}$

$\{e_1\}, ..., \{e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{1}$

$\{e_1, e_2\}, ..., \{e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{2}$

$\{e_1, e_2, e_3\}, ..., \{e_2, e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{3}$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{4}$

Portanto, $n(F) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

Genericamente, se o número de pontos amostrais de um espaço amostral finito é n, então o número de eventos de F é 2^n, pois

$$n(F) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

1.4 Operações com eventos aleatórios

Consideremos um espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$.

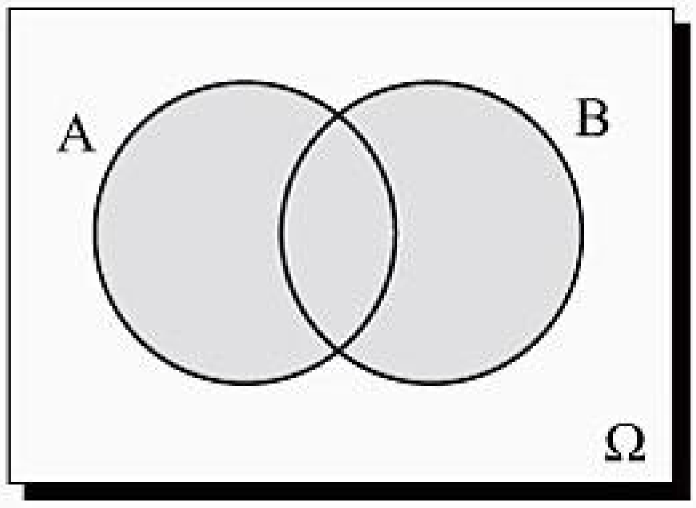
Sejam A e B dois eventos de F(Ω).

As seguintes operações são definidas:

a) Reunião

DEFINIÇÃO

$A \cup B = \{e_i \in \Omega \mid e_i \in A \text{ ou } e_i \in B\}$, $i = 1, 2, ..., n$. O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

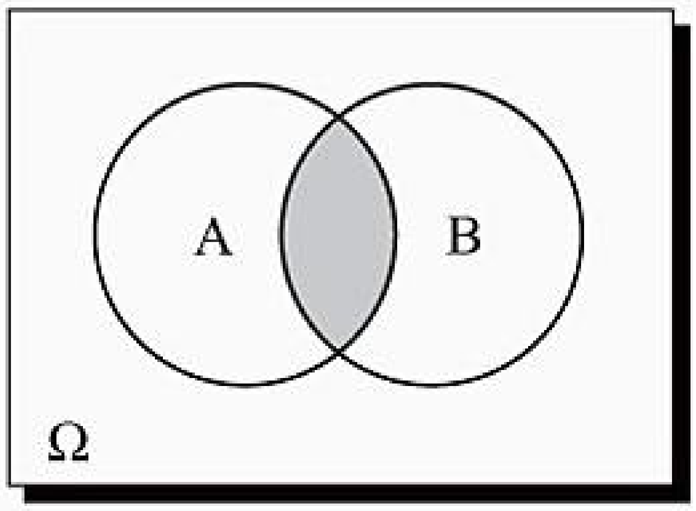


b) Intersecção

DEFINIÇÃO

$A \cap B = \{e_i \in \Omega \mid e_i \in A \text{ e } e_i \in B\}, i = 1,...,n$. O *evento intersecção* é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B.

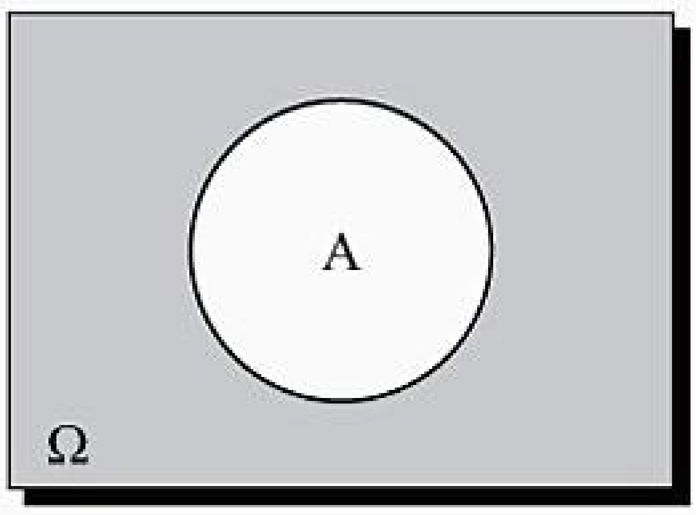
Obs. Se $A \cap B = \phi$, A e B são eventos *mutuamente exclusivos*.



c) Complementação

DEFINIÇÃO

$\Omega - A = \overline{A} = \{e_i \in \Omega \mid e_i \notin A\}$.



EXEMPLO

Lançam-se duas moedas. Sejam A: saída de faces iguais; e B: saída de cara na primeira moeda.

Determinar os eventos:

$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $(\overline{A \cup B})$, $(\overline{A \cap B})$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $B - A$, $A - B$, $\overline{A} \cap B$ e $\overline{B} \cap A$.

Resolução:

$$\Omega = \{(c, c),(c, r),(r, c),(r, r)\}$$

$$A = \{(c, c),(r, r)\}$$

$$B = \{(c, c),(c, r)\}$$

$$A \cup B = \{(c, c),(c, r),(r, r)\}$$

$$A \cap B = \{(c, c)\}$$

$$\overline{A} = \{(c, r),(r, c)\}$$

$$\overline{B} = \{(r, c),(r, r)\}$$

$$\left(\overline{A \cup B}\right) = \{(r, c)\}$$

$$\left(\overline{A \cap B}\right) = \{(c, r),(r, c),(r, r)\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{(r, c)\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(c, r),(r, c),(r, r)\}$$

$$B - A = \{(c, r)\}$$

$$A - B = \{(r, r)\}$$

$$\overline{A} \cap B = \{(c, r)\}$$

$$\overline{B} \cap A = \{(r, r)\}$$

1.5 Propriedades das operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As seguintes propriedades são válidas:

a) Idempotentes

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

b) Comutativas

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

c) Associativas

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) Distributivas

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) Absorções

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

f) Identidades

$A \cap \Omega = A$

$A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \phi = \phi$

$A \cup \phi = A$

g) Complementares

$\overline{\Omega} = \phi$

$\overline{\phi} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \phi$

$A \cup \overline{A} = \Omega$

$\overline{(\overline{A})} = A$

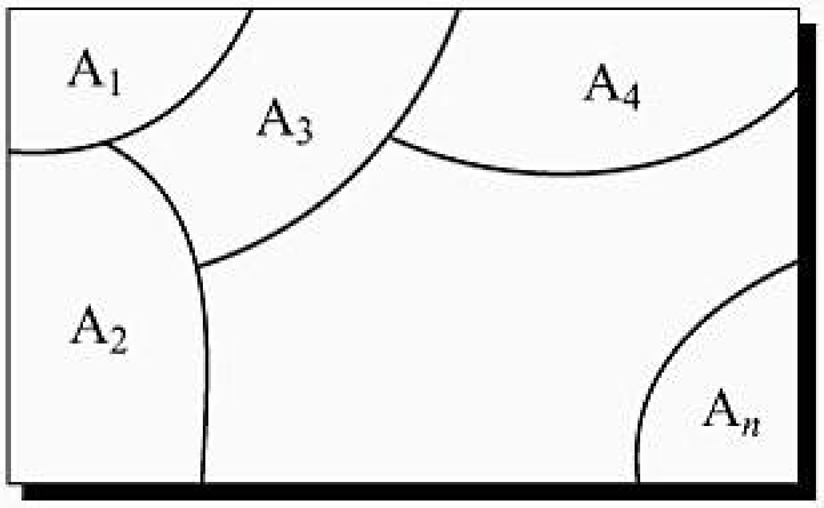
h) "Leis das dualidades" ou "Leis de Morgan"

$\left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$

Essas propriedades são facilmente verificadas.

1.6 Partição de um espaço amostral



DEFINIÇÃO

Dizemos que os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma *partição* do espaço amostral Ω se:

a) $A_i \neq \phi$, $i = 1, ..., n$

b) $A_i \cap A_j = \phi$, para $i \neq j$

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exercícios propostos

Respostas

1. Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos:
   a) faces iguais;
   b) cara na 1ª moeda;
   c) coroa na 2ª e 3ª moedas.

2. Considere a experiência que consiste em pesquisar famílias com três crianças, em relação ao sexo delas, segundo a ordem do nascimento. Enumerar os eventos:
   a) ocorrência de dois filhos do sexo masculino;
   b) ocorrência de pelo menos um filho do sexo masculino;
   c) ocorrência de no máximo duas crianças do sexo feminino.

3. Um lote contém peças de 5, 10, 15,..., 30 mm de diâmetro. Suponha que 2 peças sejam selecionadas no lote. Se x e y indicam respectivamente os diâmetros da 1ª e 2ª peças selecionadas, o par (x, y) representa um ponto amostral. Usando o plano cartesiano, indicar os seguintes eventos:

   a) $A = \{x = y\}$

   b) $B = \{y < x\}$

Respostas

c) $C = \{x = y - 10\}$

d) $D = \left\{\frac{x+y}{2} < 10\right\}$

4. Sejam A, B e C três eventos de um espaço amostral. Exprimir os eventos abaixo usando as operações reunião, intersecção e complementação:

a) somente A ocorre;

b) A e C ocorrem, mas B não;

c) A, B e C ocorrem;

d) pelo menos um ocorre;

e) exatamente um ocorre; **R**

f) nenhum ocorre;

g) exatamente dois ocorrem;

h) pelo menos dois ocorrem;

i) no máximo dois ocorrem.

CAPÍTULO

2 Probabilidade

2.1 Função de probabilidade

DEFINIÇÃO

É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo [0, 1], satisfazendo os axiomas:

I) $P(\Omega) = 1$

II) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem mutuamente exclusivos.

III) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, se $A_1, A_2, ..., A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos.

Observamos pela definição que $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ para todo evento $A, A \subset \Omega$.

2.2 Teoremas

Teorema 1 "Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1."$$

Demonstração: Pela definição de partição, os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são mutuamente exclusivos e

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Logo $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega)$. Usando os axiomas I e III da definição, temos: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Teorema 2 "Se ϕ é o evento impossível, então $P(\phi) = 0$."

Demonstração: Como $\phi \cap \Omega = \phi$ e $\phi \cup \Omega = \Omega$, temos

$$\begin{aligned} P(\phi \cup \Omega) &= P(\Omega) \\ P(\phi) + P(\Omega) &= P(\Omega) \\ P(\phi) &= 0 \end{aligned}$$

Obs: A recíproca não é verdadeira, pois o fato de $P(A) = 0$ não implica que A seja impossível.

Teorema 3 Teorema do evento complementar: "Para todo evento $A \subset \Omega$, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$."

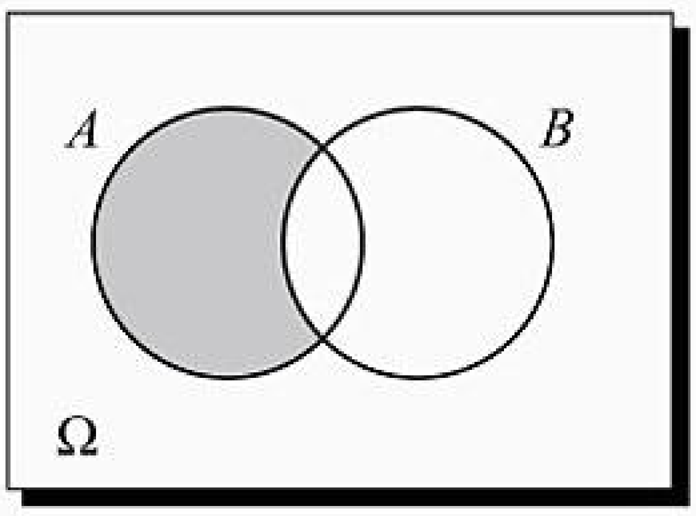
Demonstração: Como

$$\begin{aligned} &A \cap \bar{A} = \phi \text{ e} \\ &A \cup \bar{A} = \Omega, \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= P(\Omega) \\ P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \end{aligned}$$

Teorema 4 Teorema da soma: "Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$."



Demonstração: Escreveremos os eventos $(A \cup B)$ e A como reuniões de eventos mutuamente exclusivos, como segue:

$$\begin{cases} A \cup B = (A - B) \cup B \\ A = (A - B) \cup (A \cap B) \end{cases}$$

Usando o axioma, temos:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \qquad \mathbf{1}$$

e

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \qquad \mathbf{2}$$

De **2** tiramos: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Substituindo-se esse resultado em **1**, chegamos a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se $A \cap B = \phi$, então $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$ vale o axioma II.

Teorema 5 "Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$."

(A demonstração fica a cargo do leitor.)

Teorema 6 "Dado o espaço amostral Ω e os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)."$$

Demonstração: Por indução finita.

Teorema 7 "Dados os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, então: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$."

Exemplos de aplicação

1. Sendo $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$, calcular:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$; b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$;

c) $P(\bar{A} \cap B)$; d) $P(\bar{A} \cup B)$.

Resolução:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - z$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} = 1 - x - y + z$

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = y - z$

d) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = (1 - x) + y - (y - z) = 1 - x + z$

2. Demonstrar que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$

$$-P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Demonstração:

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) -$$

$$-P[(A \cup B) \cap C] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) +$$

$$+P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B) +$$

$$+P(C) - P(A \cap B) - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\} \therefore$$

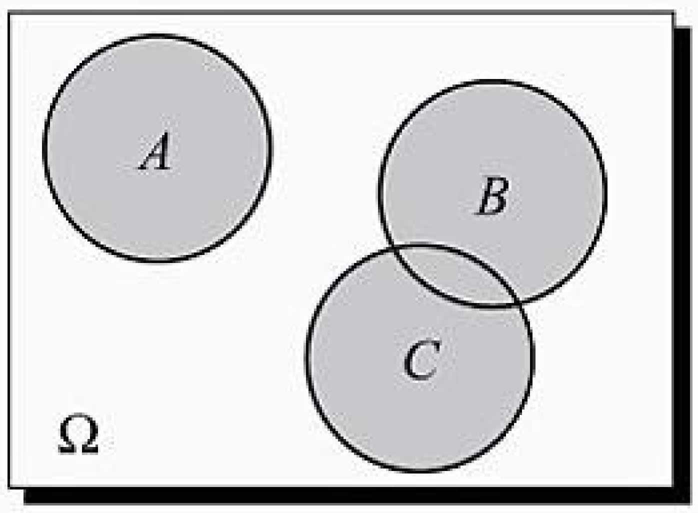
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$

$$-P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3. Sejam A, B e C eventos tais que

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ e $P(B \cap C) = \frac{1}{7}$.

Calcule a probabilidade de que pelo menos um dos eventos A, B ou C ocorra.



Resolução: Pelo diagrama vemos que $A \cap B \cap C = \phi$, logo $P(A \cap B \cap C) = 0$. Aplicando o resultado do problema anterior, temos:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 - 0 - \frac{1}{7} + 0 = \frac{16}{35}$$

2.3 Eventos equiprováveis

Consideremos o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ associado a um experimento aleatório.

Chamemos $P(e_i) = p_i$, $i = 1, ..., n$.

Temos $\sum_{i=1}^{n} P(e_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. **1**

DEFINIÇÃO

Os eventos e_i, $i = 1, ..., n$ são *equiprováveis* quando $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n) = p$, isto é, quando todos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

1 fica: $\sum_{i=1}^{n} p = 1 \Rightarrow np = 1 \therefore$ $\boxed{p = \frac{1}{n}}$

Logo, se os n pontos amostrais (eventos) são equiprováveis, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais é $\frac{1}{n}$.

Vamos calcular a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$. Suponhamos que A tenha K pontos amostrais:

$A = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, $1 \leq k \leq n \therefore$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(e_i) = \sum_{i=1}^{k} p = K \cdot p = K \cdot \frac{1}{n} \therefore$$

$$\therefore \boxed{P(A) = \frac{K}{n}}$$

Exemplos de aplicação

1. Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

   Seja A: saída de um rei; e B: saída de uma carta de espada.

   Então:

   $$A = \{R_o, R_e, R_c, R_p\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$$

   $$B = \{A_e,\ 2_e,\ ...,\ R_e\} \rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$$

   Observamos que $A \cap B = \{R_e\} \therefore$

   $$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \therefore$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

2. O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as 18. Os seguintes eventos são definidos:

   A: a pessoa tem mais de 21 anos;

   B: a pessoa tem menos de 21 anos;

   C: a pessoa é um rapaz;

   D: a pessoa é uma moça.

   Calcular:

   a) $P(B \cup D)$;

   b) $P(\overline{A} \cap \overline{C})$.

   Resolução:

   $$\Omega = \{5R,\ 4r,\ 6M,\ 3m\} \ \therefore\ p = \frac{1}{18}$$

   $$A = \{5R,\ 6M\} \rightarrow P(A) = \frac{11}{18}$$

   $$B = \{4r,\ 3m\} \rightarrow P(B) = \frac{7}{18}$$

   $$C = \{5R,\ 4r\} \rightarrow P(C) = \frac{9}{18}$$

   $$D = \{6M,\ 3m\} \rightarrow P(D) = \frac{9}{18}$$

   a) $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$

      Como $B \cap D = \{3m\}$, temos que $P(B \cap D) = \frac{3}{18}\cdot$

      Logo:

      $$P(B \cup D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{C})=P(\overline{A\cup C})=1-P(A\cup C)=1-\{P(A)+P(C)-P(A\cap C)\}$

Como $A\cap C=\{5R\}$ e $P(A\cap C)=\frac{5}{18}$, temos que:

$p(\overline{A}\cap\overline{C})=1-\left\{\frac{11}{18}+\frac{9}{18}-\frac{5}{18}\right\}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ ou

Como $\overline{A}=B$ e $\overline{C}=D$, temos:

$\overline{A}\cap\overline{C}=B\cap D=\{3m\}$ $\therefore$

$\therefore$ $P(\overline{A}\cap\overline{C})=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral. Nesses casos, deveremos usar a análise combinatória como processo de contagem. Veremos isso nos próximos exemplos.

3. Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

Resolução: A: comissão de 3 matemáticos e 2 estatísticos.

$n=\binom{27}{5}$: comissões

$k=\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{2}$: comissões com 3 matemáticos e 2 estatísticos

$$P(A)=\frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{27}{5}}$$

4. Qual a probabilidade de, num baralho com 52 cartas, ao se retirarem 4 cartas, ao acaso, sem reposição, se obter uma quadra?

Resolução: A: saída de uma quadra.

$n=\binom{52}{4}\leftarrow$ número de quádruplas

$K=13\leftarrow$ número de quadras $\therefore$ $\quad P(A)=\frac{13}{\binom{52}{4}}$

5. Calcular a probabilidade de se obter exatamente 3 caras e 2 coroas em 5 lances de uma moeda.

Resolução: A: saída de 3 caras e 2 coroas.

$n = 2^5 = 32$: número de quíntuplas

$k = \binom{5}{3} = 10$: números de quíntuplas com 3 caras e 2 coroas

$$P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

6. Uma urna contém as letras A, A, A, R, R, S. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra *araras*?

Resolução: A: saída de palavra *araras*.

$$n = (PR)^{6}_{3,2,1} = \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!} = 60$$

$k = 1 \ \therefore$

$$\therefore\ P(A) = \frac{1}{60}$$

Obs.:

$$(PR)^{n}_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_n!}, \text{ com } n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$$

2.4 Probabilidade condicional

Introduziremos a noção de *probabilidade condicional* através do seguinte exemplo:

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam química (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Disciplina / Sexo	F	Q	**Total**
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

Pelo quadro vemos que esta probabilidade é de $\frac{80}{150}$ e representamos:

$P(Q/M)=\frac{80}{150}$ (probabilidade de que o aluno curse química, condicionado ao fato de ser mulher).

Observamos, porém, que $P(M\cap Q)=\frac{80}{250}$ e $P(M)=\frac{150}{250}$. Para obtermos o resultado do problema, basta considerar que:

$$P(Q/M)=\frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}}=\frac{80}{150}$$

Logo:

$$P(Q/M)=\frac{P(M\cap Q)}{P(M)}$$

Sejam $A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$. Definimos a **probabilidade condicional de A, dado que B ocorre** (A/B) como segue:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \text{se } P(B)\neq 0$$

Também:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)},\ \text{se } P(A)\neq 0$$

EXEMPLO

Sendo $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ e $P(A\cup B)=\frac{11}{12}$, calcular $P(A/B)$.

Resolução:

Como $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, devemos calcular $P(A\cap B)$.

Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, temos:

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-P(A\cap B)\ \therefore\ P(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Logo, $P(A/B) = \dfrac{1/6}{3/4} = \dfrac{2}{9}$

Tiramos da definição da probabilidade condicional o chamado *TEOREMA DO PRODUTO*: Sejam A $\subset \Omega$ e B $\subset \Omega$. Então, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

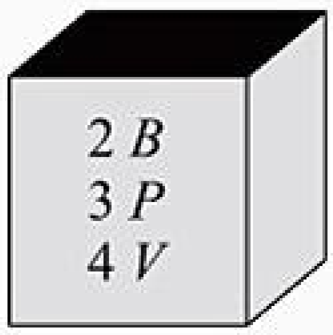
EXEMPLO

Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas

a) sejam verdes?

b) sejam da mesma cor?

Resolução:



a) $P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V/V) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{6}$

b) $P(MC) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$

$$P(MC) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$P(MC) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

A generalização do teorema do produto é:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Resolvendo o *Problema 6 da Seção 2.3*, usando essa generalização, temos:

$$P(A \cap R \cap A \cap R \cap A \cap S) = P(A) \cdot P(R/A) \cdot P(A/A \cap R) \cdot$$

$$\cdot P(R/A \cap R \cap A) \cdot P(A/A \cap R \cap A \cap R) \cdot P(S/A \cap R \cap A \cap$$

$$\cap R \cap A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{60}$$

2.5 Eventos independentes

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.

Intuitivamente, se A e B são independentes, $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.

DEFINIÇÃO

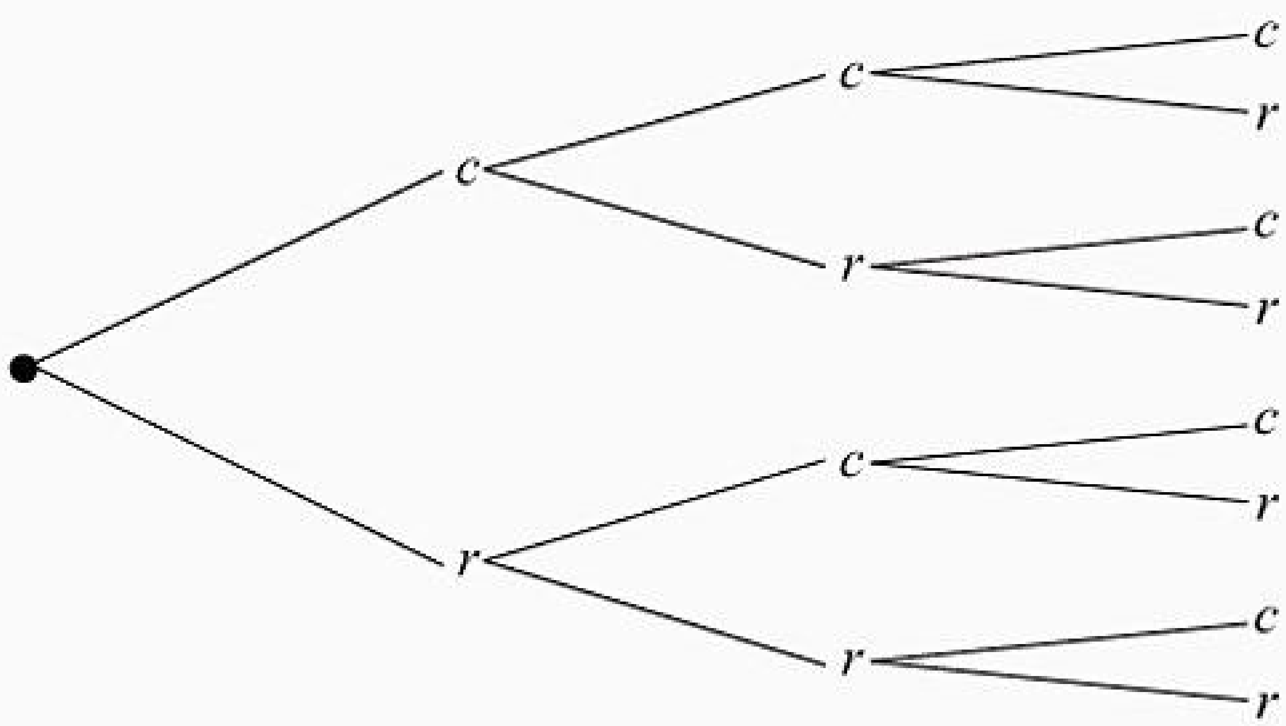
A e B são eventos independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

EXEMPLO

Lançam-se 3 moedas. Verificar se são independentes os eventos:

A: saída de cara na 1ª moeda;

B: saída de coroa na 2ª e 3ª moedas.



$\Omega = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr), (rcc), (rcr), (rrc), (rrr)\}$

$A = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{(crr), (rrr)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Logo:

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

Como

$A \cap B = \{(crr)\}$ e $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$,

temos que A e B são eventos independentes, pois $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Obs. 1: Para verificarmos se 3 eventos A, B e C, são independentes, devemos verificar se as 4 proposições são satisfeitas:

1: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

2: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

4: $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Se apenas uma não for satisfeita, os eventos não são independentes.

Obs. 2: Se A e B são *mutuamente* exclusivos, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, isto é, a ocorrência de um evento condiciona a não ocorrência do outro.

Resolveremos um problema que mostrará bem a distinção entre eventos mutuamente exclusivos e independentes.

Exercício resolvido

Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = P$, $P(A \cup B) = 0,6$. Calcular P considerando A e B:

a) mutuamente exclusivos;

b) independentes.

Resolução:

a) A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$, como
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ vem $0,6 = 0,2 + P - 0 \quad \therefore \quad \boxed{P = 0,4}$

b) A e B independentes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot P$, como

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ vem $0,6 = 0,2 + P - 0,2P \therefore$

$\therefore 0,4 = 0,8P \qquad \boxed{P = 0,5}$

Obs. 3: Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes, então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

onde $\prod_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$.

EXEMPLO

A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é 2/5; a de sua mulher é de 2/3. Determinar a probabilidade de que daqui a 30 anos:

a) ambos estejam vivos;
b) somente o homem esteja vivo;
c) somente a mulher esteja viva;
d) nenhum esteja vivo;
e) pelo menos um esteja vivo.

Resolução: Chamaremos de *H:* o homem estará vivo daqui a 30 anos;
M: a mulher estará viva daqui a 30 anos.

$$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\bar{H}) = \frac{3}{5}$$

$$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\bar{M}) = \frac{1}{3}$$

a) $P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

b) $P(H \cap \bar{M}) = P(H) \cdot P(\bar{M}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

c) $P(\bar{H} \cap M) = P(\bar{H}) \cdot P(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

d) $P(\bar{H} \cap \bar{M}) = P(\bar{H}) \cdot P(\bar{M}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

e) $P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

ou *X*: pelo menos um vivo

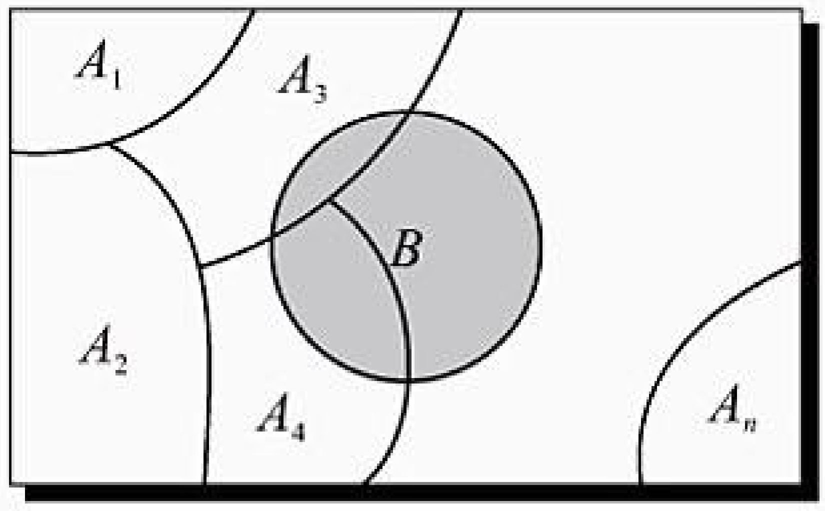
$$P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2.6 Teorema de Bayes

Teorema da probabilidade total

"Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)."$$



Demonstração: Os eventos $(B \cap A_i)$ e $(B \cap A_j)$, para $i \neq j$, $i = 1, 2, ..., n$ e $j = 1, 2, ..., n$, são mutuamente exclusivos, pois:

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \mathrm{B} \cap \phi = \phi$$

O evento B ocorre como segue:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \therefore$$

$$\therefore P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

E usando o teorema do produto, vem:

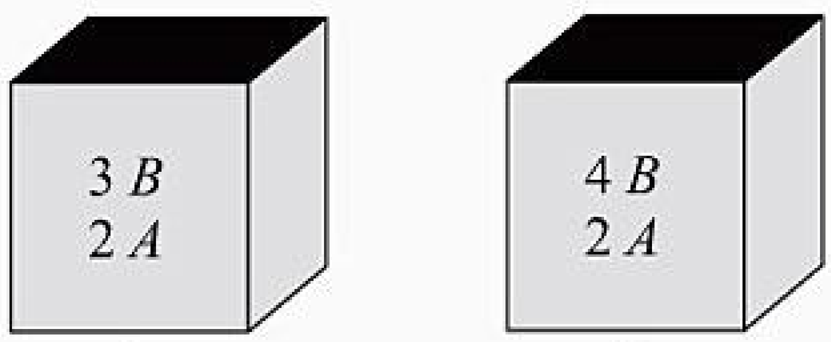
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

ou $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$.

EXEMPLO

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

Resolução:



I II

$P(\mathrm{I}) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P(B/\mathrm{I}) = \dfrac{3}{5}$

$P(\mathrm{II}) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P(B/\mathrm{II}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Logo, a bola branca pode ocorrer:

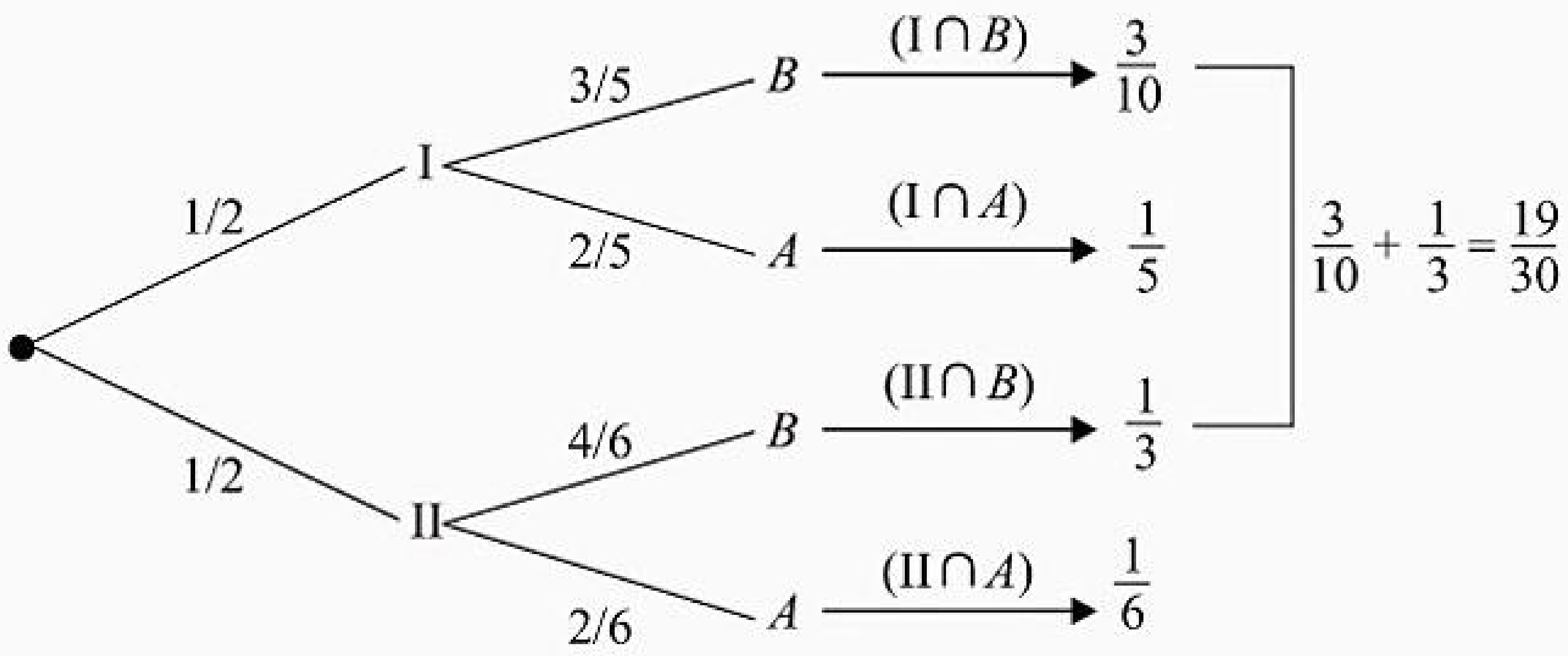
$B = (B \cap \text{I}) \cup (B \cap \text{II})$

$P(B) = P(B \cap \text{I}) + P(B \cap \text{II})$

$P(B) = P(\text{I}) \cdot P(B/\text{I}) + P(\text{II}) \cdot P(B/\text{II}) \therefore$

$\therefore P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{30}$

O problema também pode ser resolvido usando-se o diagrama em árvore:



Teorema de Bayes

"Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas $P(A_i)$ e $P(B/A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Então:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, j = 1, \ldots, n.\text{"}$$

Demonstração:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

Usando-se o teorema do produto e o teorema da probabilidade total, temos:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, j = 1, \ldots, n.$$

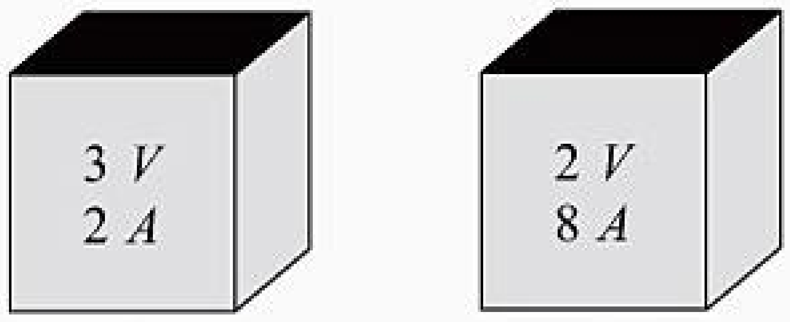
O teorema de Bayes é também chamado de *teorema da probabilidade a posteriori*. Ele relaciona uma das parcelas da probabilidade total com a própria probabilidade total.

EXEMPLO

A urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna B contém 2 vermelhas e 8 azuis. Joga-se uma moeda “honesta”. Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna A; se der coroa, extrai-se uma ficha da urna B. Uma ficha vermelha é extraída.

Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

Resolução:



A B

Queremos: $P(C/V)$

$P(C) = \dfrac{1}{2}$ $P(V/C) = \dfrac{3}{5}$

$P(r) = \dfrac{1}{2}$ $P(V/r) = \dfrac{2}{10}$

Como:

$$P(V) = P(C \cap V) + P(r \cap V),$$

temos:

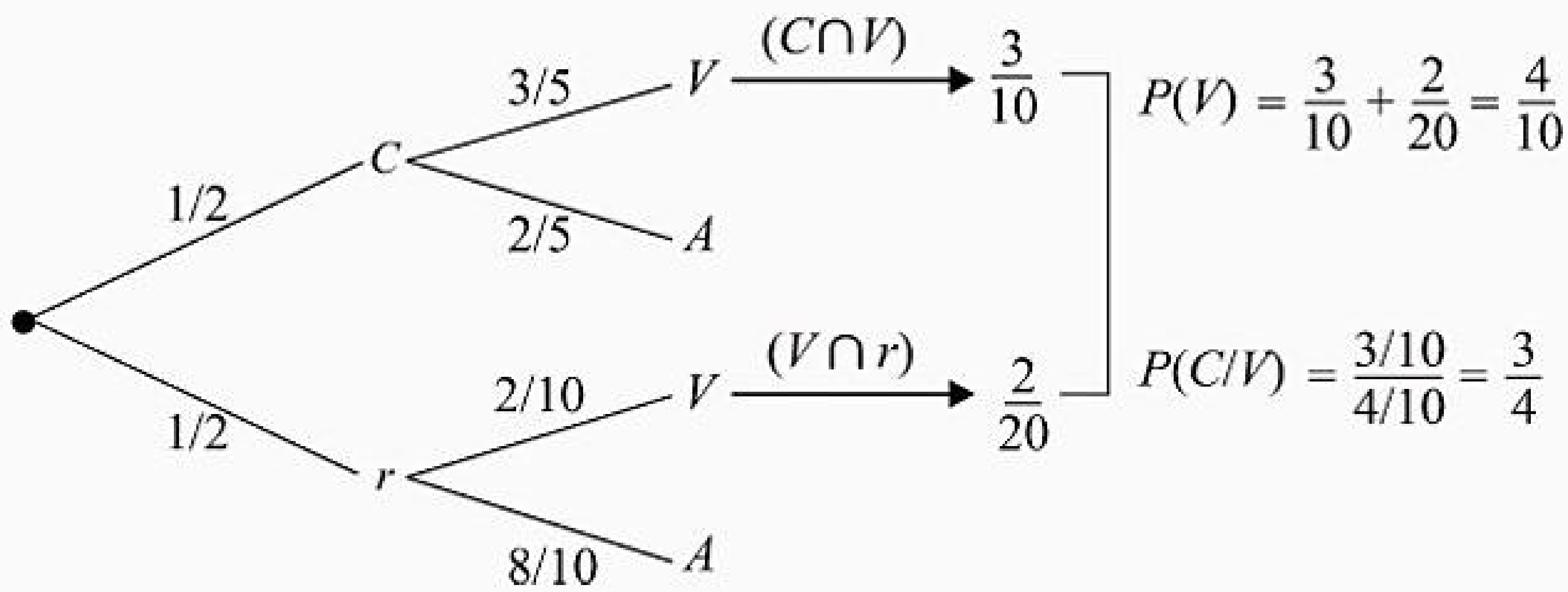
$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(r) \cdot P(V/r)$$

$$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Calculamos agora $P(C/V)$:

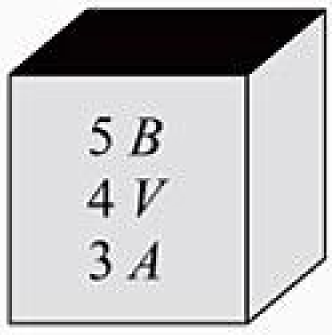
$$P(C/V) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

O problema também pode ser resolvido pelo diagrama em árvore, como segue:



Exercícios resolvidos

1. Uma urna contém 5 bolas brancas, 4 vermelhas e 3 azuis. Extraem-se simultaneamente 3 bolas. Achar a probabilidade de que:
   a) nenhuma seja vermelha;
   b) exatamente uma seja vermelha;
   c) todas sejam da mesma cor.



Resolução:

a) $P(N.S.V) = P(\bar{V} \cap \bar{V} \cap \bar{V}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$

b) $P(E.U.S.V) = P(V \cap \bar{V} \cap \bar{V}) \cdot (PR)^{3}_{2,1} = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot 3 = \frac{28}{55}$

c) $P(T.S.M.C.) = P(B \cap B \cap B) + P(V \cap V \cap V) + P(A \cap A \cap A) =$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{44}}$$

2. As probabilidades de 3 jogadores, A, B e C, marcarem um gol quando cobram um pênalti são $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ e $\frac{7}{10}$, respectivamente. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que pelo menos um marque um gol?

Resolução:

$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{7}{10}$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = 1 - \frac{1}{50} = \boxed{\frac{49}{50}}$$

3. Em uma indústria há 10 pessoas que ganham mais de 20 salários mínimos (s.m.), 20 que ganham entre 10 e 20 s.m., e 70 que ganham menos de 10 s.m. Três pessoas desta indústria são selecionadas. Determinar a probabilidade de que pelo menos uma ganhe menos de 10 s.m.

Resolução:

A: a pessoa ganha mais de 20 s.m. → $P(A) = 0{,}10$

B: a pessoa ganha entre 10 e 20 s.m. → $P(B) = 0{,}20$

C: a pessoa ganha menos de 10 s.m. → $P(C) = 0{,}70$

$$P(C \cup C \cup C) = 1 - P(\overline{C \cup C \cup C}) =$$

$$= 1 - P(\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) =$$

$$= 1 - 0{,}30 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 =$$

$$= 1 - 0{,}027 = \boxed{0{,}973}$$

4. A e B jogam 120 partidas de xadrez, das quais A ganha 60, B ganha 40 e 20 terminam empatadas. A e B concordam em jogar 3 partidas. Determinar a probabilidade de:
   a) A ganhar todas as três;
   b) duas partidas terminarem empatadas;
   c) A e B ganharem alternadamente.

Resolução:

$$P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

a) $P(A \cap A \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P(2E) = P(E \cap E \cap \bar{E}) \cdot (PR)^{3}_{2,1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{72}$

c) $P(A \text{ e } B \text{ alternadamente}) = P(A \cap B \cap A) + P(B \cap A \cap B) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \boxed{\frac{5}{36}}$$

5. São retiradas uma a uma, aleatoriamente, bolas de uma urna até obter-se a primeira bola branca. Mas a cada tentativa dobra-se a quantidade de bolas azuis colocadas na urna. Sabendo que inicialmente a urna contém 4 bolas azuis e 6 brancas, calcular a probabilidade de obter-se a primeira bola branca no máximo na 3ª tentativa.

Resolução:

$$1^{a} \text{ tentativa} \begin{cases} 4A \\ 6B \end{cases}$$

$$2^{a} \text{ tentativa} \begin{cases} 8A \\ 6B \end{cases}$$

$$3^{a} \text{ tentativa} \begin{cases} 16A \\ 6B \end{cases}$$

P(Primeira Branca no máximo na 3^{a} tentativa) =

$= P(B_{1^a}) + P(A_{1^a} \cap B_{2^a}) + P(A_{1^a} \cap A_{2^a} \cap B_{3^a}) =$

$$\frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{22} = 0{,}8338$$

6. Um lote de 120 peças é entregue ao controle de qualidade de uma firma. O responsável pelo setor seleciona 5 peças. O lote será aceito se forem observadas 0 ou 1 defeituosas. Há 20 defeituosas no lote. a) Qual a probabilidade de o lote ser aceito? b) Admitindo-se que o lote seja aceito, qual a probabilidade de ter sido observado só um defeito?

Resolução:

$$P(d) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \qquad P(\bar{d}) = \frac{5}{6}$$

a) $P(A) = P(0d \text{ ou } 1d) = P(5\bar{d}) + P(1d \text{ e } 4\bar{d}) =$

$= P(\bar{d}\ \bar{d}\ \bar{d}\ \bar{d}\ \bar{d}) + P(d\ \bar{d}\ \bar{d}\ \bar{d}\ \bar{d}) \cdot PR_{1,4}^{5} =$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 5 = 0{,}4019 + 0{,}4019$

$P(A) = 0{,}8038$

b) $P(1d/A) = \dfrac{P(1d \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4019}{0{,}8038} = 0{,}5$

7. A caixa A tem 9 cartas numeradas de 1 a 9. A caixa B tem 5 cartas numeradas de 1 a 5. Uma caixa é escolhida ao acaso e uma carta é retirada. Se o número é par, qual a probabilidade de que a carta sorteada tenha vindo de A?

Resolução:

$$P(A) = \frac{1}{2} \rightarrow P(P/A) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \rightarrow P(P/B) = \frac{2}{5}$$

$$P(P) = P(A \cap P) + P(B \cap P)$$

$$P(P) = P(A) \cdot P(P/A) + P(B) \cdot P(P/B)$$

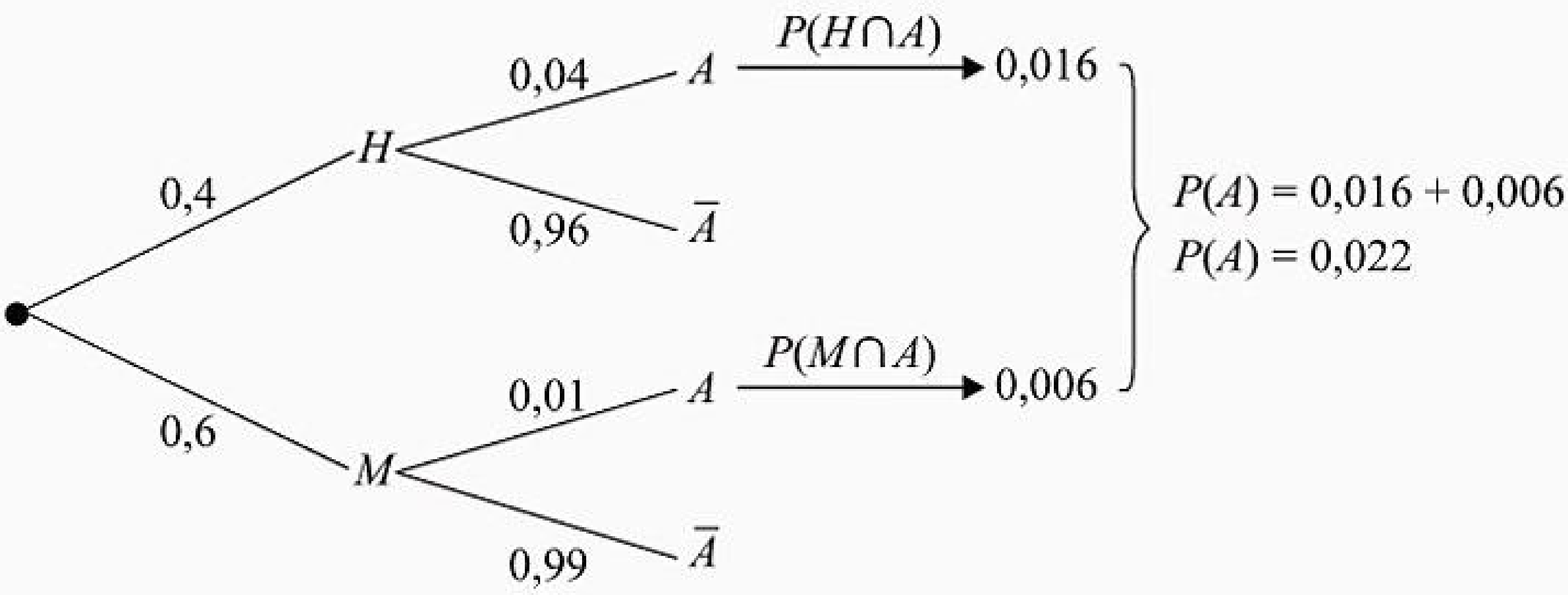
$$P(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45} \therefore$$

$$\therefore P(A/P) \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{2/9}{19/45} = \boxed{\frac{10}{19}}$$

8. Num certo colégio, 4% dos homens e 1% das mulheres têm mais de 1,75 de altura. 60% dos estudantes são mulheres. Um estudante é escolhido ao acaso e tem mais de 1,75 m. Qual a probabilidade de que seja homem?

Resolução:

A: o estudante tem mais de 1,75 m



Logo:

$$P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}016}{0{,}022} = \boxed{\frac{8}{11}}$$

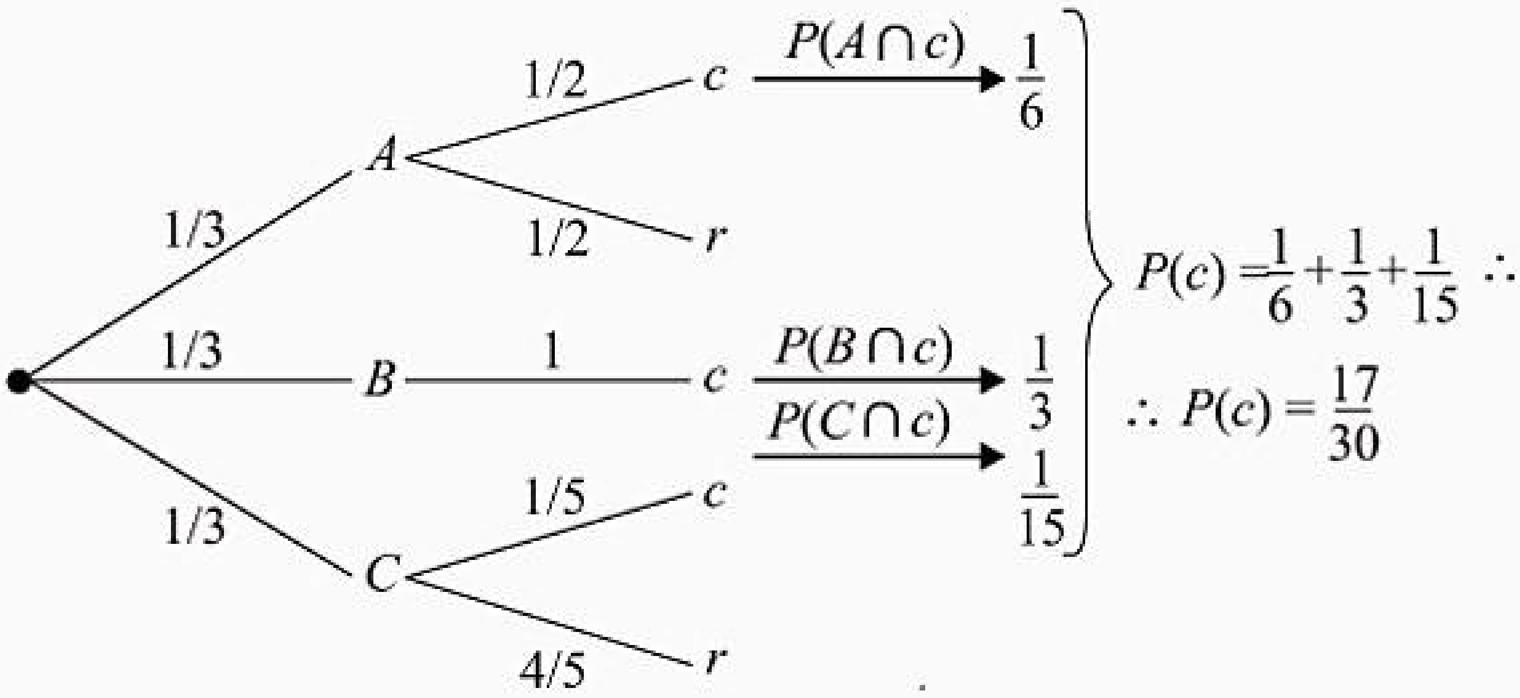
9. Uma caixa tem 3 moedas: uma não viciada, outra com 2 caras e uma terceira viciada, de modo que a probabilidade de ocorrer cara nesta moeda é de 1/5. Uma moeda é selecionada ao acaso na caixa. Saiu cara. Qual a probabilidade de que a 3ª moeda tenha sido a selecionada?

Resolução:

A: primeira moeda

B: segunda moeda

C: terceira moeda

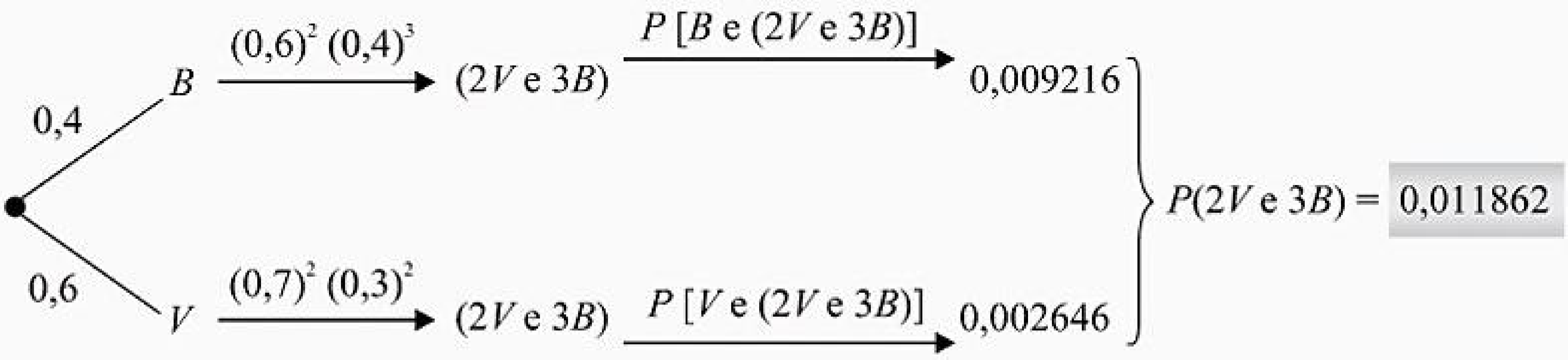


Logo:

$$P(C/c) = \frac{P(C \cap c)}{P(c)} = \frac{1/15}{17/30} = \boxed{\frac{2}{17}}$$

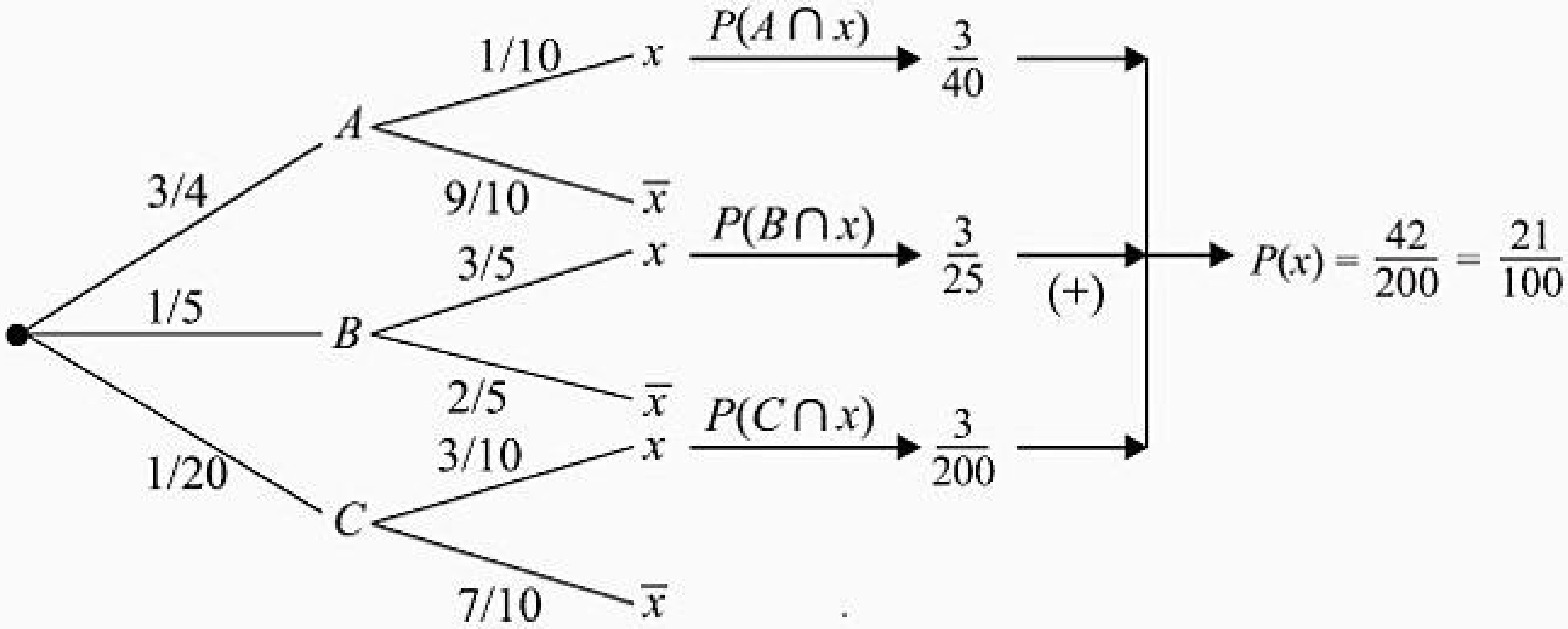
10. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas vermelhas; outra urna contém 3 bolas brancas e 6 vermelhas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso, da primeira para a segunda urna, e, em seguida, retiram-se 5 bolas desta última, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram 2 vermelhas e 3 brancas nessa ordem?

Resolução:



11. A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro é de 3/4, da B é de 1/5 e da C é de 1/20. As probabilidades de os indivíduos comprarem um carro da marca x são 1/10, 3/5 e 3/10, dado que sejam de A, B e C, respectivamente. Certa loja vendeu um carro da marca x. Qual a probabilidade de que o indivíduo que o comprou seja da classe B?

Resolução:



$$\therefore P(B/x) = \frac{P(B \cap x)}{P(x)} = \frac{3/25}{21/100} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

12. Um certo programa pode ser usado com uma entre duas sub-rotinas A e B, dependendo do problema. A experiência tem mostrado que a sub-rotina A é usada 40% das vezes e B é usada 60% das vezes. Se A é usada, existe 75% de chance de que o programa chegue a um resultado dentro do limite de tempo. Se B é usada, a chance é de 50%. Se o programa foi realizado dentro do limite de tempo, qual a probabilidade de que a sub-rotina A tenha sido a escolhida?

Resolução:

$$P(A) = 0{,}4 \rightarrow P(R/A) = 0{,}75 \rightarrow P(A \cap R) = 0{,}300$$

$$P(B) = 0{,}6 \rightarrow P(R/B) = 0{,}50 \rightarrow P(B \cap R) = 0{,}300$$

Logo: $P(R) = 0{,}300 + 0{,}300 = 0{,}600$

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \boxed{0{,}5 \text{ ou } 50\%}$$

13. A urna X contém 2 bolas azuis, 2 brancas e 1 cinza, e a urna Y contém 2 bolas azuis, 1 branca e 1 cinza. Retira-se uma bola de cada urna. Calcule a probabilidade de saírem 2 bolas brancas sabendo que são bolas de mesma cor.

Resolução:

$$P(\text{mesma cor}) = P(A \cap A) + P(B \cap B) + P(C \cap C)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(\text{mesma cor}) = \frac{7}{20}$$

$$P(B \cap B/\text{mesma cor}) = \frac{P(B \cap B)}{P(\text{mesma cor})} =$$

$$\frac{2/20}{7/20} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

$$P(B \cap B)/\text{mesma cor}) = \frac{2}{7}$$

14. Num período de um mês, 100 pacientes sofrendo de determinada doença foram internados em um hospital. Informações sobre o método de tratamento aplicado em cada paciente e o resultado final obtido estão no quadro a seguir.

Tratamento / Resultado	*A*	*B*	Soma
Cura total	24	16	40
Cura parcial	24	16	40
Morte	12	8	20
Soma	60	40	100

a) Sorteando aleatoriamente um desses pacientes, determinar a probabilidade de o paciente escolhido:

a_1) ter sido submetido ao tratamento A;

a_2) ter sido totalmente curado;

a_3) ter sido submetido ao tratamento A e ter sido parcialmente curado;

a_4) ter sido submetido ao tratamento A ou ter sido parcialmente curado.

b) Os eventos "morte" e "tratamento A" são independentes? Justificar.

c) Sorteando dois dos pacientes, qual a probabilidade de que:

c_1) tenham recebido tratamentos diferentes?

c_2) pelo menos um deles tenha sido curado totalmente?

Resolução:

a) a_1) $P(A) = \dfrac{60}{100} = \boxed{0,6}$

a_2) $P(TC) = \dfrac{40}{100} = \boxed{0,4}$

a_3) $P(A \cap PC) = \dfrac{24}{100} = \boxed{0,24}$

a_4) $P(A \cup PC) = P(A) + P(PC) - P(A \cap PC) = 0,6 + 0,4 - 0,24 = \boxed{0,76}$

b) $$\left.\begin{array}{l} P(M) = \dfrac{20}{100} = 0,2 \\ P(A) = 0,6 \end{array}\right\} P(M) \cdot P(A) = 0,2 \times 0,6 = \boxed{0,12}$$

Como:

$$P(M \cap A) = \frac{12}{100} = 0,12,$$

temos:

$$\boxed{P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A)}\ .$$

Logo, os eventos "morte" e "tratamento A" são independentes.

c) c_1) x = tratamentos diferentes

$$P(x) = P(A \cap B) + P(B \cap A) = 2 \times 0,6 \times 0,4 = \boxed{0,48}$$

c_2) z = curado totalmente

$$P(z_1 \cup z_2) = 1 - P(\overline{z_1 \cup z_2}) = 1 - P(\overline{z}_1) \cdot P(\overline{z}_2) =$$

$$= 1 - 0,6 \cdot 0,6 = 1 - 0,36 = \boxed{0,64}$$

15. A probabilidade de que um atleta A ultrapasse 17,30 m num único salto triplo é de 0,7. O atleta dá 4 saltos. Qual a probabilidade de que em pelo menos num dos saltos ultrapasse 17,30 m?

Resolução:

$$P(u) = 0,7$$

e $$P(\overline{u}) = 0,3$$

$$P(u_1 \cup u_2 \cup u_3 \cup u_4) = 1 - P(\overline{u}_1 \cap \overline{u}_2 \cap \overline{u}_3 \cap \overline{u}_4) =$$

$$= 1 - P(\overline{u}_1) \cdot P(\overline{u}_2) \cdot P(\overline{u}_3) \cdot P(\overline{u}_4) =$$

$$= 1 - 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 1 - 0,0081 = \boxed{0,9919}$$

16. Um dado A tem 3 faces brancas e 3 pretas; um dado B possui 2 faces brancas, 2 pretas e 2 vermelhas; um dado C possui 2 faces brancas e 4 pretas, e um dado D, 3 brancas e 3 pretas. Lançam-se os quatro dados. Qual a probabilidade de que:

a) pelo menos uma face seja branca?

b) três sejam pretas?

Resolução:

$$A\begin{cases} 3B \\ 3P \end{cases} \quad B\begin{cases} 2B \\ 2P \\ 2V \end{cases}$$

$$C\begin{cases} 2B \\ 4P \end{cases} \quad D\begin{cases} 3B \\ 3P \end{cases}$$

Cuidado: as probabilidades das cores não são as mesmas nos quatro dados.

a) $$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = 1 - P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) \cdot P(\overline{B}_4) =$$

$$= 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = 1 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

b) $P(3\ \text{Pretas}) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P}_4) + P(P_1 \cap P_2 \cap \overline{P}_3 \cap P_4) +$

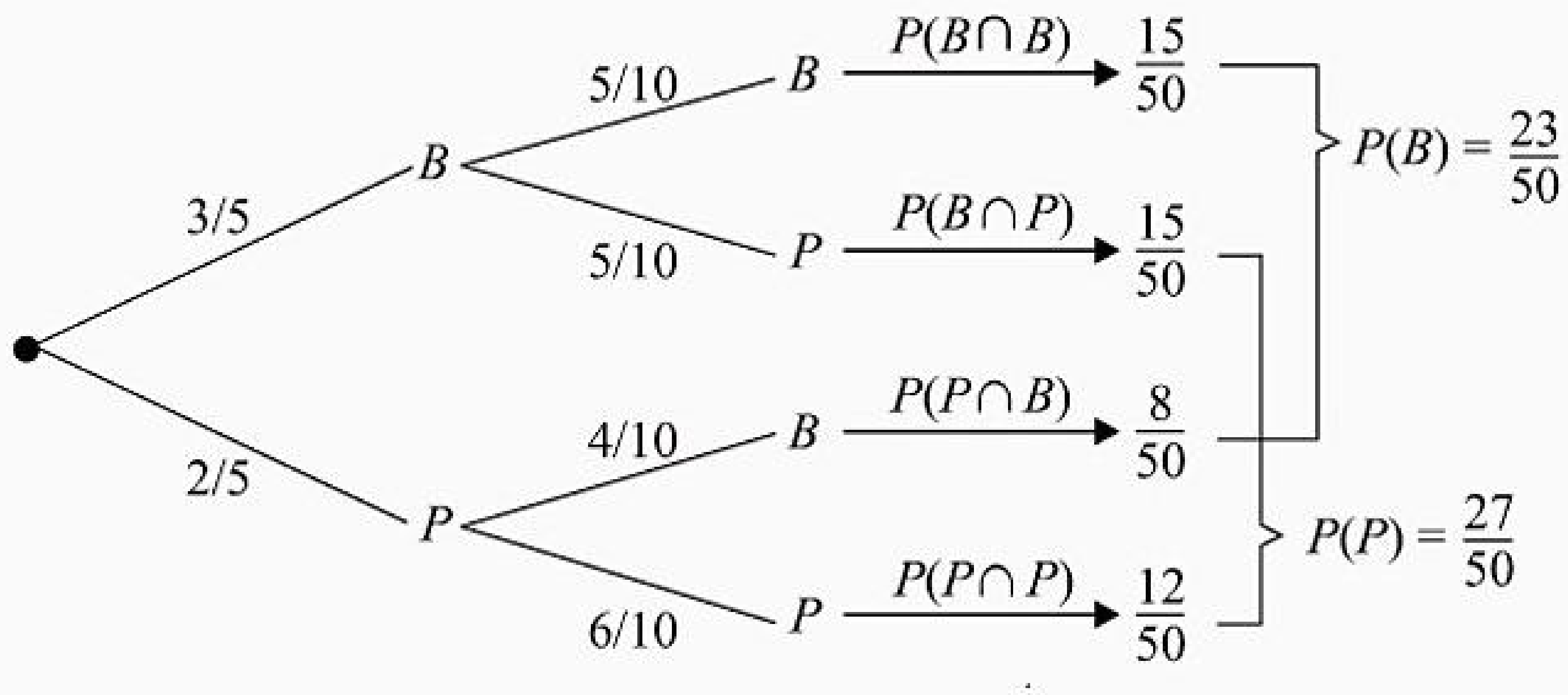
$$+P(P_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(\overline{P}_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) =$$

$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} +$$

$$+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

17. A urna I tem 3 bolas brancas e 2 pretas, a urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas, a urna III tem 3 bolas brancas e 4 pretas. Passa-se uma bola, escolhida aleatoriamente, de I para II. Feito isto, retira-se uma bola de II e retiram-se 2 bolas de III. Qual a probabilidade de saírem 3 bolas da mesma cor?

Resolução:



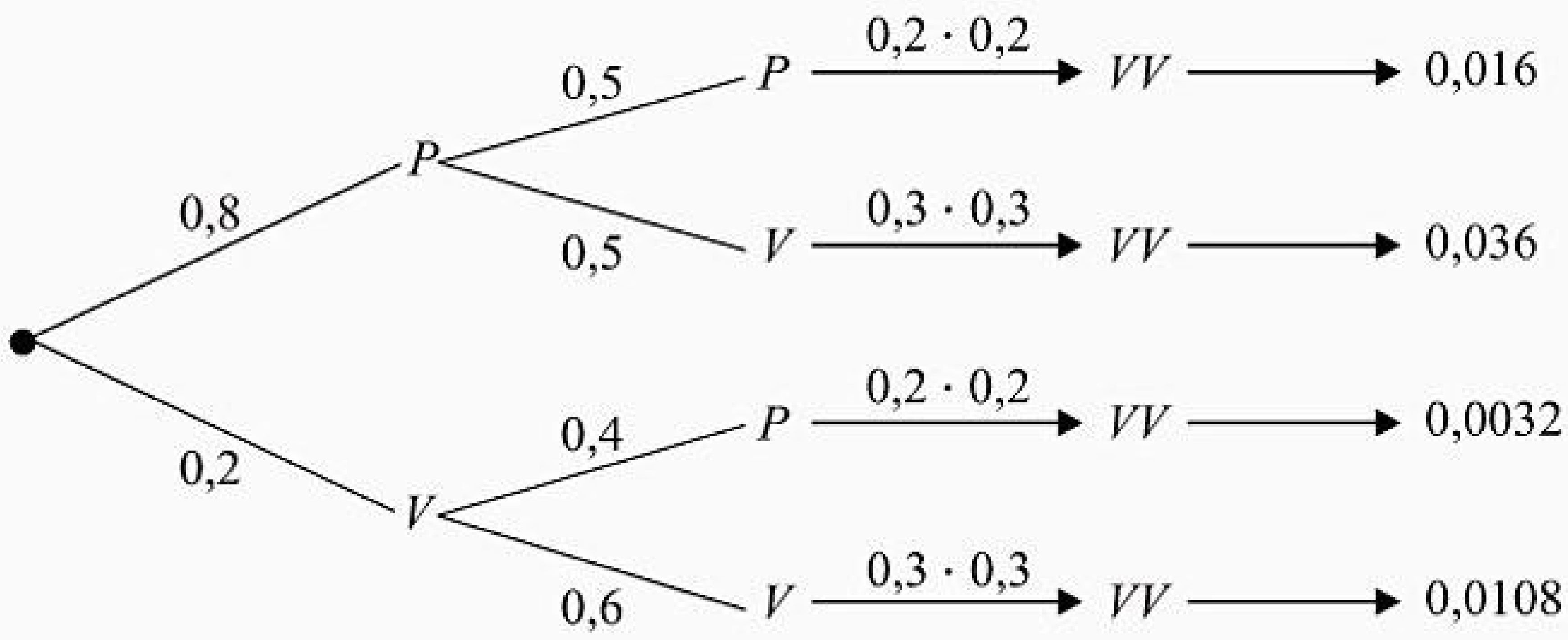
$$\text{III}\begin{cases} P(B \cap B) = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6} \\[2ex] P(P \cap P) = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6} \end{cases}$$

$$P(MC) = P(B \text{ e } 2B) + P(P \text{ e } 2P)$$

$$P(MC) = \frac{23}{50}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{27}{50}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \boxed{\frac{11}{50}}$$

18. Uma urna *x* tem 8 bolas pretas e 2 verdes. A urna *y* tem 4 pretas e 5 verdes, e a urna *z* tem 2 verdes e 7 pretas. Passa-se uma bola de *x* para *y*. Feito isto, passa-se uma bola de *y* para *z*. A seguir, retiram-se 2 bolas de *z*, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram duas bolas verdes?

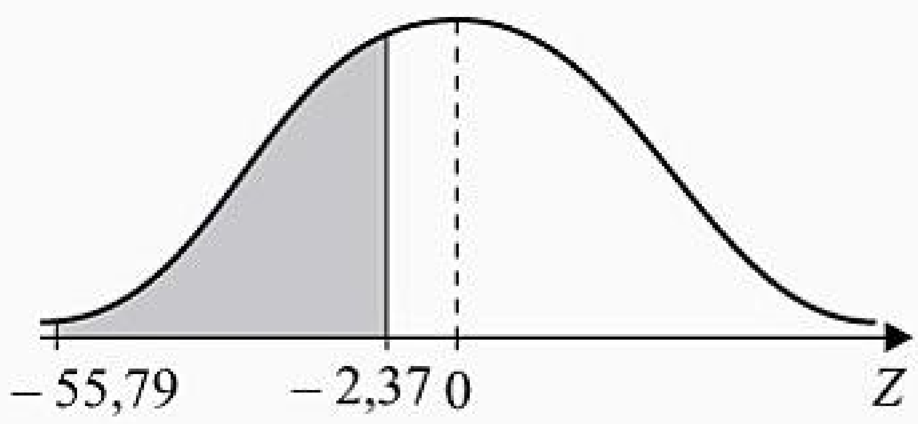
Resolução:



$$P(V \cap V) = 0{,}016 + 0{,}036 + 0{,}0032 + 0{,}0108 = \boxed{0{,}066}$$

19. Um aluno responde a um teste de múltipla escolha com 4 alternativas com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa de uma questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola". Se ele acertou a questão, qual a probabilidade de ele realmente saber a resposta?

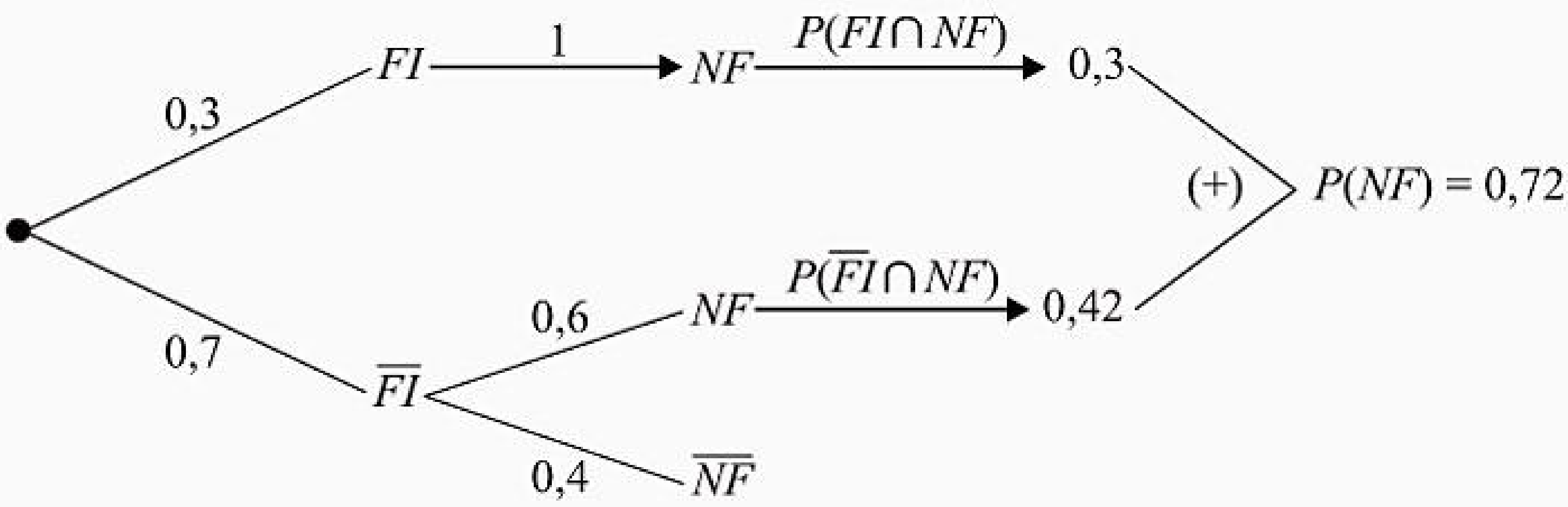
Resolução:



$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}475} = \boxed{0{,}6316}$$

20. Um analista de uma empresa fotográfica estima que a probabilidade de que uma firma concorrente planeje fabricar equipamentos para fotografias instantâneas dentro dos próximos 3 anos é 0,30. Se a firma concorrente tem tais planos, será certamente construída uma nova fábrica. Se não tem tais planos, há ainda uma probabilidade de 0,60 de que, por outras razões, construa uma nova fábrica. Se iniciou os trabalhos de construção de uma nova fábrica, qual a probabilidade de que tenha decidido entrar para o campo da fotografia instantânea?

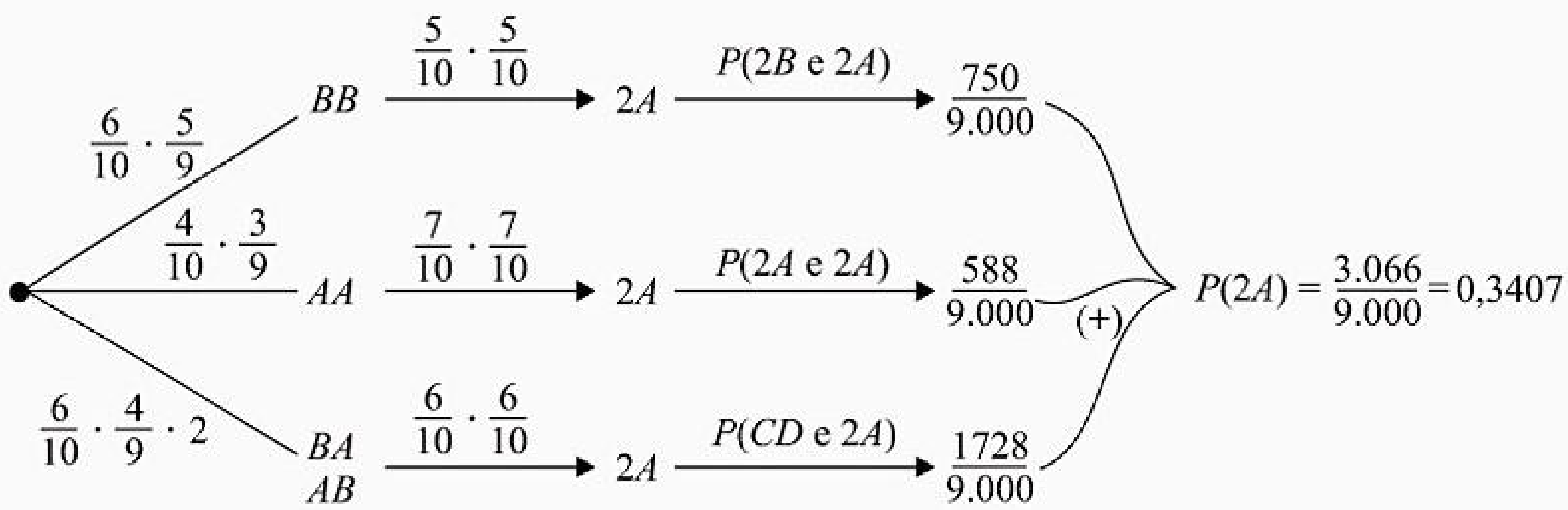
Resolução:



$$P(FI/NF) = \frac{P(FI \cap NF)}{P(NF)} \frac{0,3}{0,72} = \frac{5}{12} = \boxed{0,4167}$$

21. Uma urna X tem 6 bolas brancas e 4 azuis. A urna Y tem 3 bolas brancas e 5 azuis. Passam-se duas bolas de X para Y e a seguir retiram-se duas bolas de Y, com reposição. Sabendo-se que ocorreram duas bolas azuis, qual a probabilidade que duas azuis tenham sido transferidas de X para Y?

Resolução:



$$P(2A/2A) = P\frac{(2Ae2A)}{P(2A)} = \frac{588/9.000}{3.066/9.000} = \frac{588}{3.066} = \boxed{0,1918}$$

Exercícios propostos

Respostas

1. A seguinte afirmação trata da probabilidade de que *exatamente* um dos eventos, A ou B, ocorra. Prove que:

$$P\{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\} = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

2. Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um problema. Qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:
   a) não tenha acertado nenhum problema?
   b) tenha acertado apenas o segundo problema?
3. Em uma cidade onde se publicam três jornais, *A*, *B* e *C*, constatou-se que, entre 1.000 famílias, assinam: A: 470; B: 420; C: 315; A e B: 110; A e C: 220; B e C: 140; e 75 assinam os três. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:
   a) não assine nenhum dos três jornais?
   b) assine apenas um dos três jornais?
   c) assine pelo menos dois jornais?
4. A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos quatro tipos sanguíneos, numa certa comunidade.

Tipo sanguíneo	**A**	**B**	**AB**	**O**
Probabilidade de ter o tipo especificado	0,2			
Probabilidade de não ter o tipo especificado		0,9	0,95	

   Calcular a probabilidade de que:
   a) um indivíduo, sorteado ao acaso nessa comunidade, tenha o tipo O;
   b) dois indivíduos, sorteados ao acaso nessa comunidade, tenham tipo A e tipo B, nessa ordem;
   c) um indivíduo, sorteado ao acaso nessa comunidade, não tenha o tipo B ou não tenha o tipo AB.
5. Quinze pessoas em uma sala estão usando insígnias numeradas de 1 a 15. Três pessoas são escolhidas ao acaso e são retiradas da sala. Os números de suas insígnias são anotados. Qual a probabilidade de que:
   a) o menor número seja 7?
   b) o maior número seja 7?
6. Uma urna contém bolas numeradas: 1, 2, 3, 4, ..., *n*. Duas bolas são escolhidas ao acaso. Encontre a probabilidade de que os números das bolas sejam inteiros consecutivos se a extração é feita:
   a) sem reposição;
   b) com reposição.
7. Colocam-se 4 números positivos e 6 negativos em 10 memórias de uma máquina de calcular (um em cada memória). Efetua-se o produto dos conteúdos de 4 memórias selecionadas ao acaso. Qual a probabilidade de que seja positivo?

Respostas

8. Três cartas vão ser retiradas de um baralho de 52 cartas. Calcular a probabilidade de que:
   a) todas as três sejam espadas;
   b) as três cartas sejam do mesmo naipe;
   c) as três cartas sejam de naipes diferentes.
9. Uma urna contém 10 bolas verdes e 6 azuis. Tiram-se 2 bolas ao acaso. Qual a probabilidade de que as duas bolas:
   a) sejam verdes?
   b) sejam da mesma cor?
   c) sejam de cores diferentes?

Resp

10. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão boas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso e que são testadas a seguir. Qual a probabilidade de que:
    a) todas acendam?
    b) pelo menos uma lâmpada acenda?
11. Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 vermelhas, 3 azuis e 2 amarelas. Extraem-se simultaneamente 5 bolas. Qual a probabilidade de que saiam 2 bolas pretas, 2 azuis e uma amarela?
12. Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 vermelhas e 2 pretas. Outra urna contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 3 pretas. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual a probabilidade de que sejam da mesma cor?
13. Uma caixa contém 6 lâmpadas de 40 W, 3 de 60 W e 1 de 100 W. Retiram-se 5 lâmpadas com reposição. Qual a probabilidade de que:
    a) saiam 3 de 40 W, 1 de 60 W e 1 de 100 W?
    b) saiam 4 de 40 W e 1 de 60 W?
    c) não saia nenhuma de 60 W?
14. Numa sala há 4 casais. De cada casal um dos componentes é escolhido. Qual a probabilidade de serem escolhidos 3 homens ou 4 mulheres?
15. As probabilidades de um estudante do curso básico de uma faculdade escolher entre matemática, física e estatística são 0,5, 0,3 e 0,2, respectivamente. Selecionam-se ao acaso 3 estudantes do ciclo básico desta faculdade. Qual a probabilidade de que pelo menos um escolha estatística?
16. Duas pessoas lançam, cada uma, 3 moedas. Qual a probabilidade de que tirem o mesmo número de caras?
17. De um grupo de 12 homens e 8 mulheres, retiram-se 4 pessoas para formar uma comissão. Qual a probabilidade de:
    a) pelo menos uma mulher fazer parte da comissão?
    b) uma mulher fazer parte da comissão?
    c) haver pessoas dos dois sexos na comissão?

18. A e B alternadamente e nessa ordem, lançam independentemente 3 moedas. Ganha o primeiro que tirar faces iguais. O jogo termina com a vitória de um deles. Qual a probabilidade de A ganhar? Qual a probabilidade de B ganhar?

19. Um tabuleiro quadrado contém 9 orifícios dispostos em 3 linhas e 3 colunas. Em cada buraco cabe uma única bola. Jogam-se 3 bolas sobre o tabuleiro. Qual a probabilidade de que os orifícios ocupados não estejam alinhados?

20. Uma urna contém 1 bola azul e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas azuis e as restantes brancas, num total de 10 bolas. Realizam-se 2 experimentos, separadamente e independentes entre si:

    a) retirar ao acaso uma bola de cada urna;

    b) reunir as bolas das 2 urnas e em seguida retirar 2 bolas ao acaso.

    Calcular o valor mínimo de x, a fim de que a probabilidade de saírem 2 bolas azuis seja maior no 2º que no 1º experimento.

21. Duas lâmpadas ruins são misturadas com 2 lâmpadas boas. As lâmpadas são testadas uma a uma, até que as 2 ruins sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última ruim seja encontrada no:

    a) segundo teste;

    b) terceiro teste;

    c) quarto teste.

22. Da produção diária de peças de uma determinada máquina, 10% são defeituosas. Retiram-se 5 peças da produção dessa máquina num determinado dia. Qual a probabilidade de que:

    a) no máximo duas sejam boas? R

    b) pelo menos quatro sejam boas?

    c) exatamente três sejam boas?

    d) pelo menos uma seja defeituosa?

23. Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes: 12 do primeiro ciclo e 18 do segundo ciclo. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:

    a) um do primeiro ciclo;

    b) no máximo um do segundo ciclo;

    c) pelo menos um de cada ciclo.

24. A probabilidade de que a porta de uma casa esteja trancada à chave é de 3/5. Há 10 chaves em um chaveiro. Qual a probabilidade de que um indivíduo entre na casa podendo utilizar, se necessário, apenas uma das chaves, tomada ao acaso do chaveiro?

25. Em uma urna estão colocadas 5 bolas azuis e 10 bolas brancas.

    a) Retirando-se 5 bolas, sem reposição, calcular a probabilidade;

        a_1) de as três primeiras serem azuis e as duas últimas brancas;

        a_2) de ocorrer 3 bolas azuis e duas brancas.

 Respostas

b) Retirando-se 2 bolas, sem reposição, calcular a probabilidade:

b_1) de a segunda ser azul;

b_2) de ter sido retirada a primeira branca, sabendo-se que a segunda é azul.

26. Num supermercado há 2000 lâmpadas, provenientes de 3 fábricas distintas, *X*, *Y* e *Z*. *X* produziu 500, das quais 400 são boas. *Y* produziu 700, das quais 600 são boas, e Z as restantes, das quais 500 são boas. Se sortearmos ao acaso uma das lâmpadas nesse supermercado, qual a probabilidade de que:

    a) seja boa?

    b) sendo defeituosa, tenha sido fabricada por *X*?

27. Uma em cada dez moedas apresenta o defeito de ser viciada, isto é, a probabilidade de obtermos cara nessa moeda é 0,8. Sorteamos ao acaso uma moeda e a lançamos 5 vezes, obtendo-se 3 caras e 2 coroas. Qual a probabilidade de termos escolhido a moeda viciada?

28. Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 azuis. Uma outra contém 4 brancas e 5 azuis. Passa-se uma bola da primeira para a segunda urna e, em seguida, extrai-se uma bola da segunda urna. Qual a probabilidade de ser branca?

29. Uma pessoa joga um dado. Se sair 6, ganha a partida. Se sair 3, 4 ou 5, perde. Se sair 1 ou 2, tem o direito de jogar novamente. Desta vez, se sair 4, ganha, e se sair outro número, perde. Qual a probabilidade de ganhar?

30. A urna A tem 3 bolas pretas e 4 brancas. A urna B tem 4 bolas brancas e 5 pretas. Uma bola é retirada ao acaso da urna A e colocada na urna B. Retiram-se ao acaso 2 bolas da urna B. Qual a probabilidade de que:

    a) ambas sejam da mesma cor?

    b) ambas sejam de cores diferentes?

31. A fábrica *A* produziu 4000 lâmpadas, e a fábrica *B*, 6000 lâmpadas. 80% das lâmpadas de *A* são boas, e 60% das de *B* são boas também. Escolhe-se uma lâmpada ao acaso das 10000 lâmpadas. Qual a probabilidade que:

    a) seja boa, sabendo-se que é da marca *A*?

    b) seja boa?

    c) seja defeituosa e da marca *B*?

    d) sendo defeituosa, tenha sido fabricada por *B*?

32. A porcentagem de carros com defeito entregue no mercado por certa montadora é historicamente estimada em 6%. A produção da montadora vem de três fábricas distintas, da matriz, *A*, e das filiais, *B* e *C*, nas seguintes proporções: 60%, 30% e 10%, respectivamente. Sabe-se que a proporção de defeitos na matriz é o dobro da filial *B* e, a da filial *B* é o quádruplo da filial *C*. Determinar a porcentagem de defeito de cada fábrica.

33. Uma urna contém 4 bolas brancas e 5 pretas. Duas bolas são retiradas ao acaso dessa urna e substituídas por 2 bolas verdes. Depois disto, retiram-se 2 bolas. Qual a probabilidade de saírem bolas brancas?

34. A urna I tem 3 bolas brancas e 2 pretas. A urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas, e a urna III tem 3 bolas brancas e 4 pretas. Passa-se uma bola, escolhida aleatoriamente, de I para II. Depois disso, passa-se uma bola da urna II para a urna III e, em seguida, retiram-se 2 bolas de III. Qual a probabilidade de saírem 2 bolas brancas?

35. Uma urna tem 5 bolas verdes, 4 azuis e 5 brancas. Retiram-se 3 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam brancas?

36. Num congresso científico, a composição de 4 comissões, A, B, C e D, é a seguinte: 5 homens (h) e 5 mulheres (m); 3 h e 7 m; 4 h e 6 m; e 6 h e 4 m, respectivamente. Uma pessoa é escolhida ao acaso de cada comissão e é formada uma nova comissão, E. Qual a probabilidade de que E seja composta por:

   a) 2 mulheres;

   b) pessoas do mesmo sexo;

   c) somente por homens.

37. A experiência mostra que determinado aluno, A, tem probabilidade 0,9 de resolver e acertar um exercício novo que lhe é proposto. Seis novos exercícios são apresentados ao aluno A para serem resolvidos. Qual a probabilidade de que ele resolva e acerte:

   a) no máximo 2 exercícios;

   b) pelo menos um exercício; R

   c) os seis exercícios.

38. A urna I tem 3 bolas brancas e 4 pretas. A urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas. A urna III tem 3 bolas brancas e 2 pretas, e a urna IV tem 4 bolas brancas e 3 pretas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso, de I para II, e também passa-se uma bola, escolhida ao acaso, de III para IV. Feito isto, retira-se uma bola da urna II e uma bola da urna IV. Qual a probabilidade de saírem bolas da mesma cor?

39. Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso dessa urna e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se 1 bola. Qual a probabilidade de sair bola azul?

40. Uma caixa, A, contém 6 bolas azuis e 4 vermelhas, e outra, B, contém 4 bolas azuis e 6 vermelhas. Uma pessoa extrai ao acaso uma bola de uma das caixas. A probabilidade de que seja azul é 0,44. Qual a preferência (probabilidade) da pessoa pela caixa A?

41. São dadas as urnas A, B e C. Da urna A é retirada uma bola e colocada na urna B. Da urna B retira-se uma bola, que é colocada na urna C. Retira-se então uma bola da urna C. A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha é de 0,537. Determinar o valor de x sabendo que as urnas têm as seguintes composições:

$$A\begin{cases}7 \text{ vermelhas}\\ 3 \text{ brancas}\end{cases} \qquad B\begin{cases}3 \text{ vermelhas}\\ 6 \text{ brancas}\end{cases} \qquad C\begin{cases}(9-\text{x}) \text{ vermelhas}\\ \text{x brancas}\end{cases}$$

42. Uma empresa produz o produto *X* em 3 fábricas distintas, *A*, *B* e *C*, como segue: a produção de *A* é 2 vezes a de *B*, e a de *C* é 2 vezes a de *B*. O produto *X* é armazenado em um depósito central. As proporções de produção defeituosa são: 5% de *A*, 3% de *B* e 4% de *C*. Retira-se uma unidade de *X* do depósito e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por *B*?

43. Três máquinas, *A*, *B* e *C*, produzem, respectivamente, 40%, 50% e 10% da produção da empresa *X*. Historicamente as porcentagens de peças defeituosas produzidas em cada máquina são: 5%, 3% e 3%, respectivamente. A empresa *X* contratou um engenheiro para fazer uma revisão nas máquinas e no processo de produção. Tal engenheiro conseguiu reduzir pela metade a probabilidade de peças defeituosas da empresa e, ainda, igualou as porcentagens de defeitos das máquinas *A* e *B*, e a porcentagem de defeitos em *C* ficou na metade da conseguida para *B*. Quais são as novas porcentagens de defeitos de cada máquina?

Respostas