



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 01: Conceitos Básicos

Professor Pablo Soares
2022.1

***“Quem não luta pelo futuro que quer,
tem que aceitar o futuro que vier”***

Introdução: Notação Básica

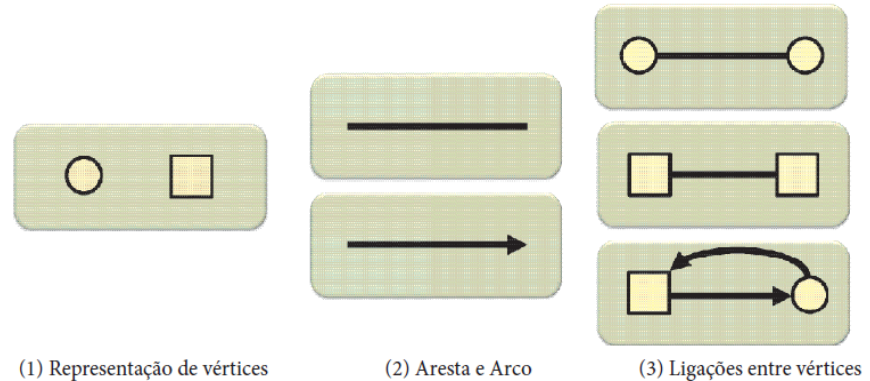
- Grafo (Composição)

- Elementos

- Nós ou **vértices**

- Relações

- **Arestas** ou **arcos**



- Representação Matemática

- $G = (V, E)$

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ *conjunto de vértices*

- $v_i, i = 1, 2, \dots, n$

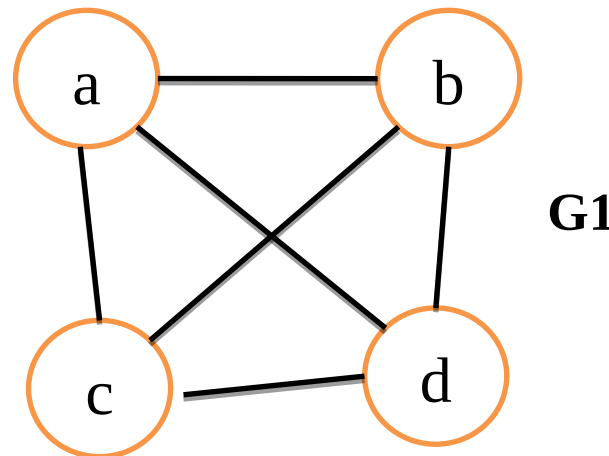
- $E = \{1, 2, \dots, m\}$ *conjunto de arestas*

- $e_{ij}, (v_i, v_j)$

Grafo Simples

- Grafo Simples

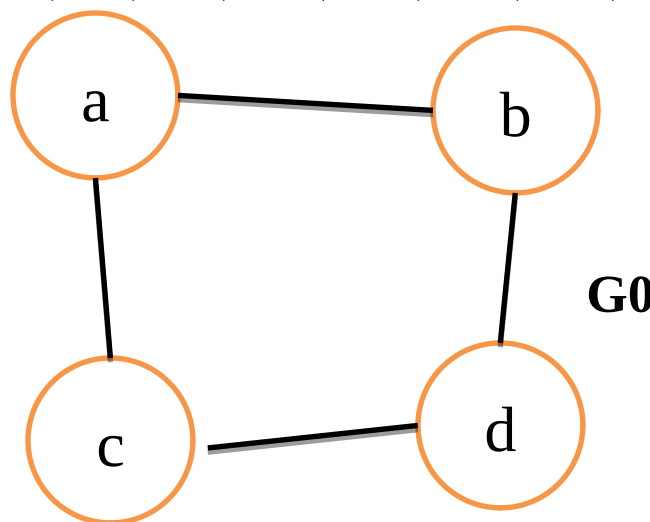
- Não possui **laços** e arestas **paralelas**
- Para qualquer conjunto V , denotamos por V_p , o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de V
- $V = \{a, b, c, d\}$
- $V_p = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- Portanto, em um grafo simples $E \subseteq V_p$



Grafo Simples

- Grafo Simples

- Outro Exemplo, o grafo simples G_0 é denotado por
- $G_0 = (V, E)$, onde
- $V = \{a, b, c, d\}$
- $E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$
- Repare que E é um subconjunto de V_p
- $V_p = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$



Grafo Simples

- Grafo Simples

- Se $|V| = n$, qual é a cardinalidade do conjunto $|V_p|$?

- Lembrando que V_p são os pares não ordenados de V

$$|V_p| = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) - n$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right] - n = \left[\frac{(n^2 + n)}{2} \right] - n = \left[\frac{(n^2 + n - 2n)}{2} \right] = \frac{(n^2 - n)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Por que isso é importante?

- Memória pode ser um fator limitador
- Pode ser crítico em aplicações que utilizam grandes mapas

- Seja $|V| = n$, quantos grafos simples podem ser formados com exatamente n vértices?

Grafo Simples

- Dizemos que ab incide em a e em b
- Dizemos que a e b são pontas da aresta
- Se ab é uma aresta, vamos dizer que a e b são vértices vizinhos ou adjacentes
- **Grafo Complementar**
 - Seja $G = (V, E)$
 - Seu complementar é denotado por $\overline{G} = (V, V_p \setminus E)$
 - **Fazer exemplo**

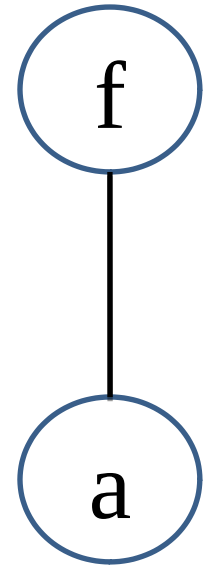
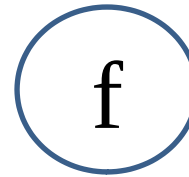
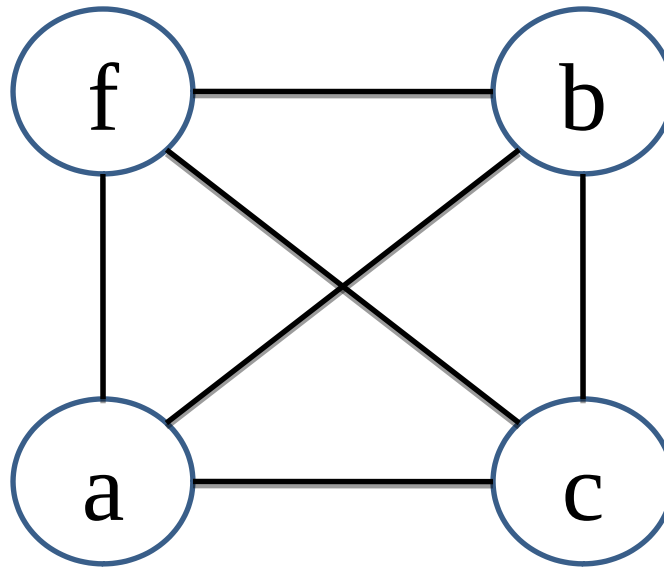
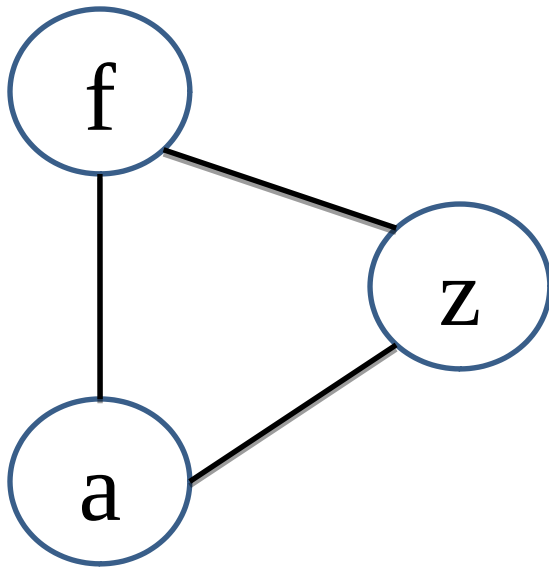
Grafo Simples Completo

- Um grafo

$$G = (V, E)$$

- É completo se e somente se

$$|E| = |V_p|$$



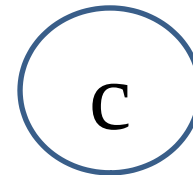
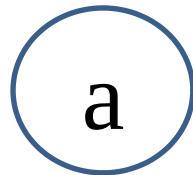
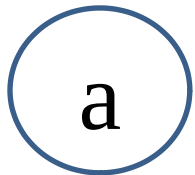
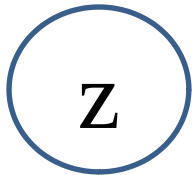
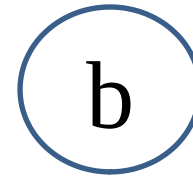
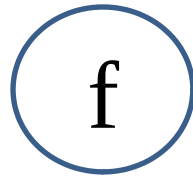
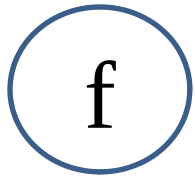
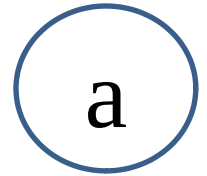
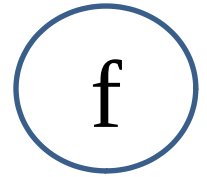
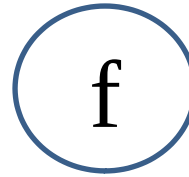
Grafo Simples Vazio

- Um grafo

$$G = (V, E)$$

- É vazio se e somente se

$$|E| = 0, E = \{ \}$$



Grafo Simples

- **A expressão**

$$G = K_n$$

- é uma abreviação para dizer que G é **simples** e **completo** com n vértices

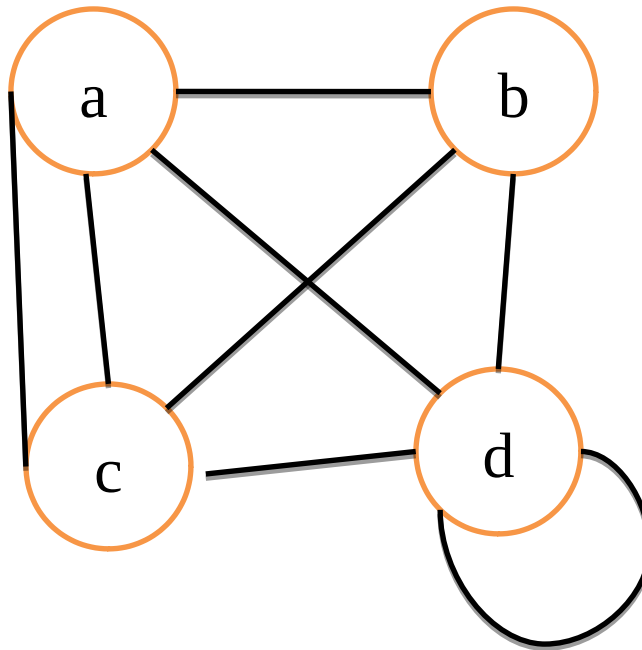
- **Já a expressão**

$$G = \overline{K}_n$$

- é uma abreviação para dizer que G é **vazio** com n vértices

Grafo não orientados

- Grafo com **laços** e arestas **paralelas**



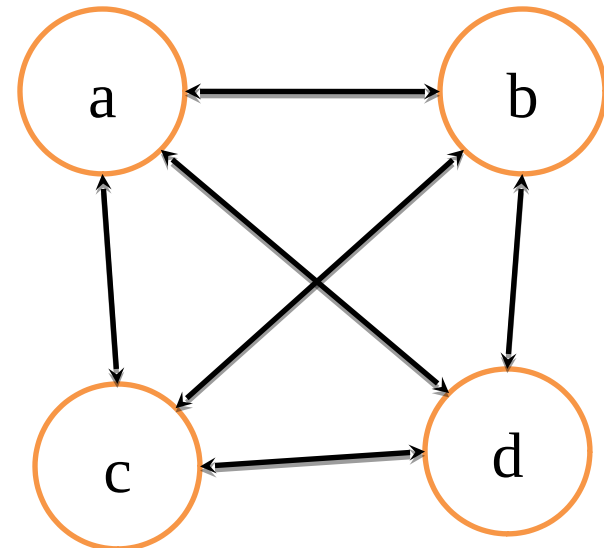
- Aplicações
 - Fluxo em redes
 - Dois canais de envios de informação

Grafo Orientados

- Grafo Orientado

- Para qualquer conjunto V , denotamos por V_p o conjunto de todos os **pares ordenados** de V ;
- $V = \{a,b,c,d\}$
- $V_p = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$

$$E \subseteq V_p$$

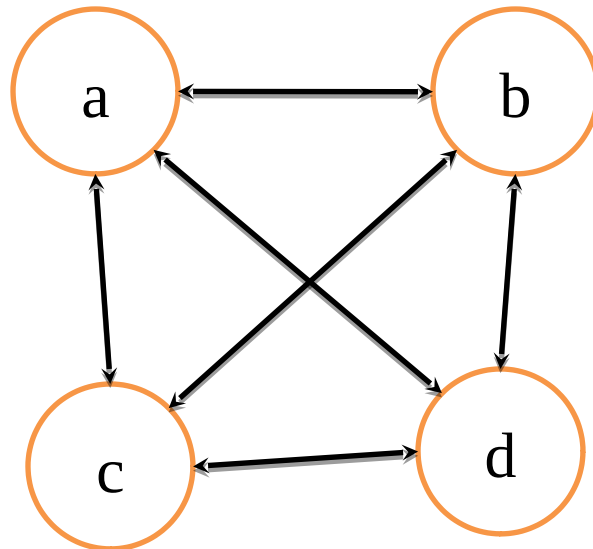


Grafo Orientados

- Grafo Orientado

- Em um grafo orientado, se $|V| = n$, $|V_p| = ?$
 - Lembrando que V_p são os pares ordenados de V

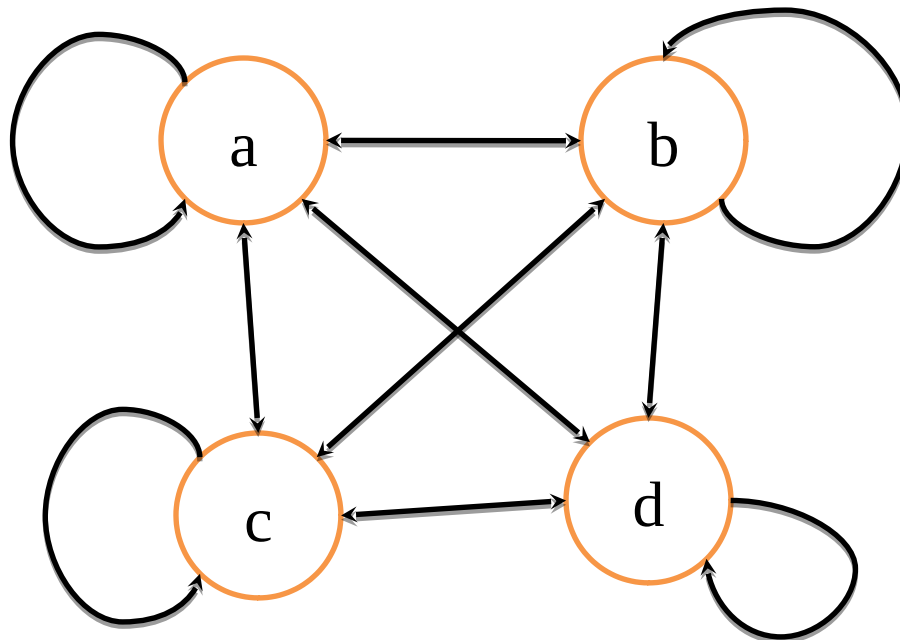
$$|V_p| = \sum_{i=1}^n n - 1 = n(n - 1) = n^2 - n$$



Grafo Orientados

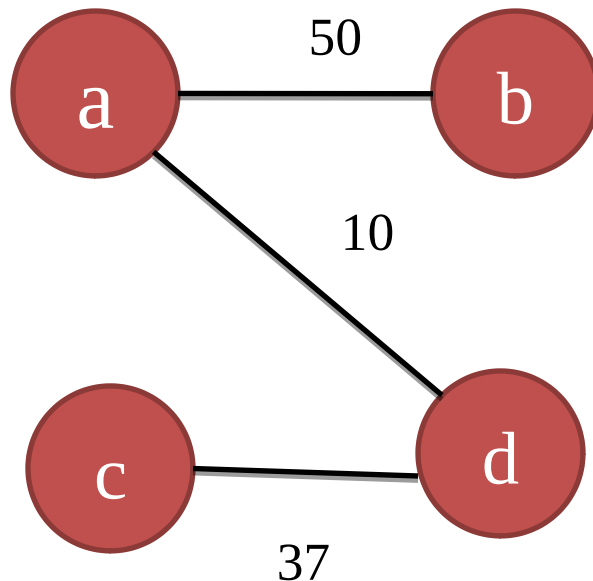
- Grafo Orientado com aresta “laço”

$$|V_p| = \sum_{i=1}^n n = n(n) = n^2$$



Grafo Valorados

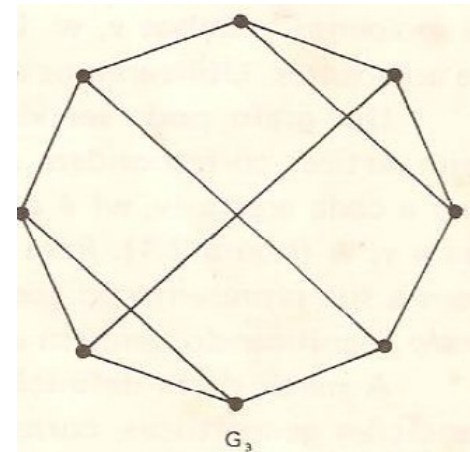
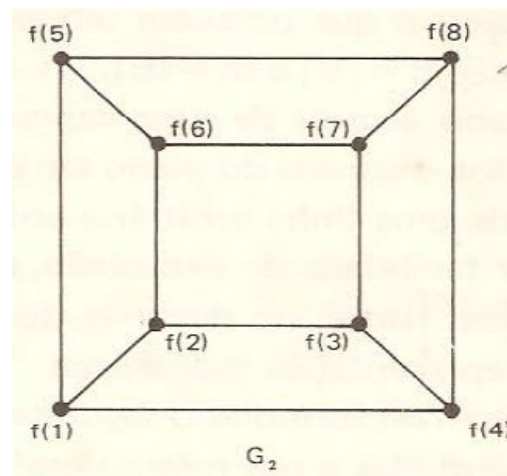
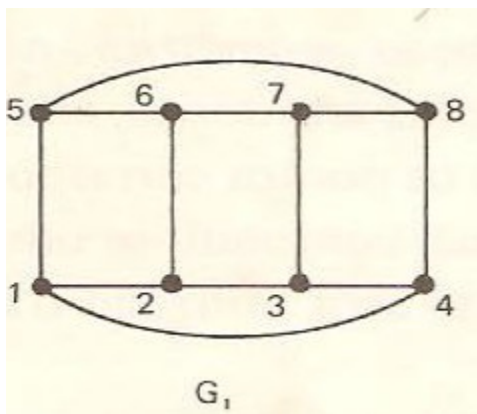
- São utilizados rótulos também nas arestas
 - Representam algum custo
 - Distância entre cidades
 - Tempo necessário
 - Em Redes, tempo de ida e volta (RTT – *round-trip time*)
- Podem ser orientados e não orientados



Isomorfismos de Grafos

- Dadas duas representação geométricas, correspondem elas a um mesmo grafo?
- Dados $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$,
 - $|V_1| = |V_2| = n$
 - Existe $f : V_1 \rightarrow V_2$

$$(i, j) \in E_1 \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in E_2 \forall i, j \in V_1$$



Grau de um Vértice

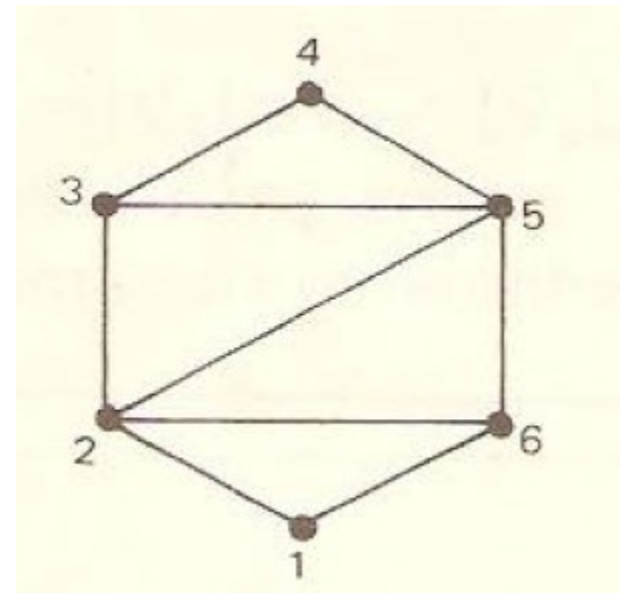
- $G_1 = (V_1, E_1)$, o **conjunto de vizinhos** de um vértice v de G é denotado por $N(v)$
- O **grau** de um vértice $d(v) = |N(v)|$
 - Um vértice de grau zero é isolado

$$\delta(G) := \min \{d(v) \mid v \in V\}$$

$$\Delta(G) := \max \{d(v) \mid v \in V\}$$

Grafo k -regular

- Todos os vértices com grau k
- *Desenhar um grafo 3-Regular....*



Grau de um Vértice

- O número $d(G)$ representa a média do grau de G

$$d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

$$\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}$$

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \times |V|$$

- **Desafio:**

- Construir um grafo com n vértices, tal que, se o grafo possuir vértices de grau ímpar, a quantidade de vértices de grau ímpar tem que ser ímpar.

- **Proposição:**

- O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par

- **Prova**

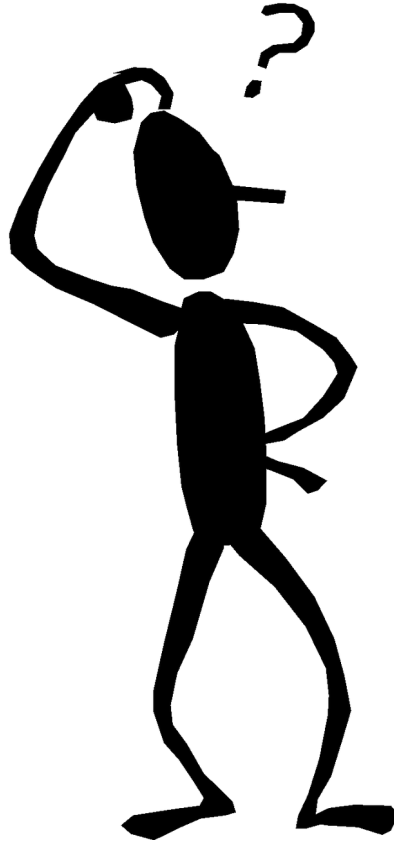
- **É inteiro**

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$$

- **É par**

$$\sum_{v \in V} d(v)$$

Fim/ Dúvidas?





UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 01: Conceitos Básicos

Professor Pablo Soares
2022.1

***“Quem não luta pelo futuro que quer,
tem que aceitar o futuro que vier”***