

Aula 22

Árvore Graduada e Árvore Rubro Negra

Estruturas de Dados Avançadas

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

Sumário

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

- 1 Aulas Passadas
- 2 ABB Graduada
 - Definição
- 3 ABB Rubro Negra (RN)
 - Definição
- 4 Equivalência entre Graduada e RN
- 5 Árvore RN é balanceada

Aulas Passadas

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Aulas Passadas

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Árvore balanceada)

Árvore com n nós cuja altura é $O(\log n)$ e cada subárvore com m nós possui altura $O(\log m)$

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada

Definição

ABB Rubro
Negra (RN)

Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que

❶ *v é nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 0$*

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que

- (i) v é nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 0$*
- (ii) v é pai de nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 1$*

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que

- (i) v é nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 0$*
- (ii) v é pai de nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 1$*
- (iii) v possui pai $w \Rightarrow \text{posto}(v) \leq \text{posto}(w) \leq \text{posto}(v) + 1$*

ABB Graduada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que

- (i) v é nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 0$
- (ii) v é pai de nó externo $\Rightarrow \text{posto}(v) = 1$
- (iii) v possui pai $w \Rightarrow \text{posto}(v) \leq \text{posto}(w) \leq \text{posto}(v) + 1$
- (iv) v possui avô $a \Rightarrow \text{posto}(v) < \text{posto}(a)$

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que

(a) v é nó externo $\Rightarrow v$ é **N**

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que

- (a) *v é nó externo $\Rightarrow v$ é **N***
- (b) *os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros*

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que

- (a) v é nó externo $\Rightarrow v$ é **N**
- (b) *os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros*
- (c) v é **R** e não é raiz \Rightarrow pai de v é **N**

ABB Rubro Negra

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que

- (a) v é nó externo $\Rightarrow v$ é **N**
- (b) *os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros*
- (c) v é **R** e não é raiz \Rightarrow pai de v é **N**
- (d) v raiz $\Rightarrow v$ é **N**

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada

Definição

ABB Rubro
Negra (RN)

Definição

**Equivalência
entre
Graduada e
RN**

Árvore RN é
balanceada

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

- 1 De cima para baixo

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

- 1 De cima para baixo
- 2 **se** $v = \textit{raiz}$ **então**

|

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

-
-
- 1 De cima para baixo
 - 2 **se** $v = \textit{raiz}$ **então**
 - 3 $\textit{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

- 1 De cima para baixo
- 2 **se** $v = \textit{raiz}$ **então**
- 3 | $\textit{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$
- 4 **senão**

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

-
-
- 1 De cima para baixo
 - 2 **se** $v = \textit{raiz}$ **então**
 - 3 $\textit{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$
 - 4 **senão**
 - 5 $w \leftarrow \textit{pai de } v$

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

```
1 De cima para baixo
2 se  $v = \text{raiz}$  então
3   |    $\text{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$ 
4 senão
5   |    $w \leftarrow \text{pai de } v$ 
6   |   se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w)$  então
      |
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

```
1 De cima para baixo
2 se  $v = \text{raiz}$  então
3   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \text{N}$ 
4 senão
5   |  $w \leftarrow \text{pai de } v$ 
6   | se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w)$  então
7     |  $\text{cor}(v) \leftarrow \text{R}$ 
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

```
1 De cima para baixo
2 se  $v = \text{raiz}$  então
3   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \text{N}$ 
4 senão
5   |  $w \leftarrow \text{pai de } v$ 
6   | se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w)$  então
7   |   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \text{R}$ 
8   | senão
   |   |
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (Graduada \Rightarrow RN)

```
1 De cima para baixo
2 se  $v = \text{raiz}$  então
3   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$ 
4 senão
5   |  $w \leftarrow \text{pai de } v$ 
6   | se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w)$  então
7   |   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \mathbf{R}$ 
8   | senão
9   |   |  $\text{cor}(v) \leftarrow \mathbf{N}$ 
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

**Equivalência
entre
Graduada e
RN**

Árvore RN é
balanceada

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

- 1 De baixo para cima

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

- 1 De baixo para cima
- 2 **se** *v* é nó externo **então**

|

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

-
-
- 1 De baixo para cima
 - 2 **se** v *é nó externo* **então**
 - 3 \mid $posto(v) \leftarrow 0$

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

- 1 De baixo para cima
- 2 **se** v *é nó externo* **então**
- 3 $\text{posto}(v) \leftarrow 0$
- 4 **senão**

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

-
-
- 1 De baixo para cima
 - 2 **se** v *é nó externo* **então**
 - 3 $\text{posto}(v) \leftarrow 0$
 - 4 **senão**
 - 5 $f \leftarrow \text{filho de } v$

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

```
1 De baixo para cima
2 se  $v$  é nó externo então
3   |    $posto(v) \leftarrow 0$ 
4 senão
5   |    $f \leftarrow$  filho de  $v$ 
6   |   se  $cor(f) = \mathbf{N}$  então
        |
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

```
1 De baixo para cima
2 se  $v$  é nó externo então
3   |  $posto(v) \leftarrow 0$ 
4 senão
5   |  $f \leftarrow$  filho de  $v$ 
6   | se  $cor(f) = \mathbf{N}$  então
7     |  $posto(v) \leftarrow posto(f) + 1$ 
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

```
1 De baixo para cima
2 se  $v$  é nó externo então
3   |  $posto(v) \leftarrow 0$ 
4 senão
5   |  $f \leftarrow$  filho de  $v$ 
6   | se  $cor(f) = \mathbf{N}$  então
7   |   |  $posto(v) \leftarrow posto(f) + 1$ 
8   | senão
   |   |
```

Equivalência entre Graduada e RN

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Conversão (RN \Rightarrow Graduada)

```
1 De baixo para cima
2 se  $v$  é nó externo então
3   |  $posto(v) \leftarrow 0$ 
4 senão
5   |  $f \leftarrow$  filho de  $v$ 
6   | se  $cor(f) = \mathbf{N}$  então
7     |  $posto(v) \leftarrow posto(f) + 1$ 
8   | senão
9     |  $posto(v) \leftarrow posto(f)$ 
```

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

$bh(r)$, onde r é a raiz da RN.

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

$bh(r)$, onde r é a raiz da RN.

Lema

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

$bh(r)$, onde r é a raiz da RN.

Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo $2^{bh(x)} - 1$ nós internos.

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

$bh(r)$, onde r é a raiz da RN.

Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo $2^{bh(x)} - 1$ nós internos.

Teorema

Árvore RN é balanceada

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada

Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

$bh(x) :=$ número de nós negros, sem contar x , de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

$bh(r)$, onde r é a raiz da RN.

Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo $2^{bh(x)} - 1$ nós internos.

Teorema

Toda RN é balanceada

Bibliografia

EDA - Aula 22

Prof.
Eurinardo

Aulas
Passadas

ABB
Graduada
Definição

ABB Rubro
Negra (RN)
Definição

Equivalência
entre
Graduada e
RN

Árvore RN é
balanceada



SZWARCFITER , Jayme; MARKENZON, Lilian.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.3a edição.
LTC, ano 2010. (ISBN 9788521617501).



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L., CORMEN
T.H.
Algoritmos: teoria e prática, 3ed.
Editora Campus, ano 2012.

Obrigado!