EXERCÍCIOS

484. Prove que cada função abaixo é bijetora e determine sua inversa:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 5$

b) $g: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^5$

485. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$.
Calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

01) A função *f* não é sobrejetiva.
02) A função *f* é injetiva.
04) A função *f* possui uma inversa.
08) $f(x) \leqslant 1$ se, e somente se, $0 \leqslant x \leqslant 2$.
16) *f* é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$.
32) *f* é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(-x)$.
64) *f* é uma função periódica de período 1.

486. Nas funções bijetoras abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência que define a função inversa.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$

c) $h(x) = x^3 + 2$

d) $p(x) = (x - 1)^3 + 2$

e) $q(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

487. O gráfico de uma função *f* é o segmento de reta que une os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função de *f*, determine $f^{-1}(2)$.

488. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bijetora, definida por $f(x) = x^3 + 1$, determine sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

489. A função *f* em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, admite função inversa? Justifique.

490. Julgue os itens abaixo.

a) Sendo $y = f(x)$ uma função real, se $f(x) = x$ para algum *x*, dizemos que *x* é um ponto fixo de *f*.

Com base nessa definição, pode-se concluir que a função $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ possui um único ponto fixo.

b) Os zeros da função $f(x) = 5^{x^2} - 5^{3x}$ são $x = 0$ e $x = 3$.

c) O domínio da função real $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\log x}$ é o conjunto dos números reais com exceção do zero.

d) Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então a composta $g \circ f: A \to C$ também é uma função injetora.

e) Toda função real é inversível.

491. Seja a função *f* de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$. Qual é a função inversa de *f*?

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2$, com $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:

$x = y^2$ com $y \leqslant 0$ e $x \geqslant 0$

II) expressando *y* em função de x:

$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \leqslant 0$ e $x \geqslant 0$, a lei de correspondência da função inversa será $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_-$, definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

492. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$

b) $f: A \to \mathbb{R}_+$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
$f(x) = (x - 1)^2$

c) $f: A \to \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
$f(x) = -(x - 2)^2$

d) $f: A \to \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$
$f(x) = -(x + 1)^2$

e) $f: \mathbb{R}_- \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$
$f(x) = x^2 + 1$

f) $f: \mathbb{R}_+ \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
$f(x) = 4 - x^2$

g) $f: \mathbb{R}_- \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f(x) = x^2 - 1$

493. Considere a função $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = 2 - \frac{2}{\pi}x$.

Esboce o gráfico correspondente e decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas.

a) f é crescente.

b) f é sobrejetora.

c) f possui inversa e $f^{-1}(0) = \pi$.

d) f possui inversa e $f^{-1}(0) = 0$.

e) f não possui inversa.

494. Considerando a função real $f(x) = 3 + 2^{x-1}$ e sendo $g: A \to \mathbb{R}$ a sua inversa, pode-se afirmar:

a) A imagem de f é A.

b) O gráfico de f está acima da reta $y = 4$.

c) $g\left(\frac{11}{2}\right) = \log_2 5$.

d) Se $f(h(x)) = 3 + 2x$, então $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

e) O conjunto solução da inequação $f(2x + 1) < 1 + 3 \cdot 2^x$ é o intervalo $]0, 1[$.

f) O gráfico da função g intercepta o eixo Ox no ponto $(1, 0)$.

495. Seja a função bijetora f, de $\mathbb{R} - \{2\}$ em $\mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$. Qual é a função inversa de f?

Solução

A função dada é $f(x) = y = \frac{x + 1}{x - 2}$, com $x \neq 2$ e $y \neq 1$.

Aplicando a regra prática, temos:

$$x = \frac{y + 1}{y - 2} \Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow xy - y = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x - 1) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Resposta: É a função f^{-1}, de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R} - \{2\}$, definida por

$f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

496. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) f: $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 3}$

b) f: $\mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

c) f: $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{4 - x}{x - 3}$

d) f: $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

$f(x) = \dfrac{5x + 2}{3x - 1}$

e) f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$

$f(x) = \dfrac{4x + 2}{x}$

f) f: $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 3}$

497. Sendo *f* e *g* funções reais definidas pelas sentenças $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = \log_4 (x - 1)$, determine $(f \circ g^{-1})(0)$.

498. A função *f* definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x}$ é inversível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. Calcule *a*.

499. Seja a função *f* de $\mathbb{R} - \{-2\}$ em $\mathbb{R} - \{4\}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 5?

Solução

Queremos determinar $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f^{-1}(a) = 5$; para isso, basta determinar *a* tal que $f(5) = a$:

$$a = f(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7} \Rightarrow a = \frac{17}{7}$$

500. Seja a função *f* de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?

501. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$ e a função *f* de A em B definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obtenha a função inversa de *f*.

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$, com $x \geqslant 1$ e $y \geqslant 2$.
Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:

$x = y^2 - 2y + 3$ com $y \geqslant 1$ e $x \geqslant 2$

II) expressando y em função de x:

$x = y^2 - 2y + 3 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 3 - 1 \Rightarrow x = (y - 1)^2 + 2 \Rightarrow$

$(y - 1)^2 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x - 2}$ ou

$y - 1 = -\sqrt{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x - 2}$ ou $y = 1 - \sqrt{x - 2}$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \geqslant 1$ e $x \geqslant 2$, a sentença que define a função inversa é $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$.

Resposta: $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

502. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 2x$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{4}\right\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 9\}$
$f: A \to B$
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$
$f: A \to B$
$f(x) = -x^2 - 2x + 4$

g) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{4}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{8}\right\}$
$f: A \to B$
$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

503. Seja a função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.
Determine f^{-1}.

Solução

Notemos que:

1º) se $x \geqslant 0$, então $f(x) = y = x^2 - 1$; logo, $y \geqslant -1$.
2º) se $x < 0$, então $f(x) = y = x - 1$; logo, $y < -1$.

A função proposta é:

$y = x^2 - 1$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant -1$, ou $y = x - 1$, com $x < 0$ e $y < -1$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis, temos:
$x = y^2 - 1$, com $y \geqslant 0$ e $x \geqslant -1$, ou $x = y - 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

II) expressando *y* em função de *x*, temos:
$y = \sqrt{x + 1}$, com $y \geqslant 0$ e $x \geqslant -1$, ou $y = x + 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

Logo, a função inversa f^{-1} é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} \text{ se } x \geqslant -1 \\ x + 1 \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

504. Nas seguintes funções em $\mathbb{R}$, determine a função inversa.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ se } x \geqslant 2 \\ 3x + 1 \text{ se } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 - 3x \text{ se } x \geqslant -1 \\ 4 - 4x \text{ se } x < -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ se } x < -1 \\ 4x + 1 \text{ se } x \geqslant -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3} \text{ se } x \geqslant 3 \\ (3 - x)^3 \text{ se } x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 \text{ se } x \geqslant 2 \\ 2x - 1 \text{ se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 \text{ se } x \leqslant -1 \end{cases}$

505. A função *f* em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$, admite função inversa?

506. Seja a função *f* em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$. Determine a função inversa de *f*. Calcule $f^{-1}(42)$.

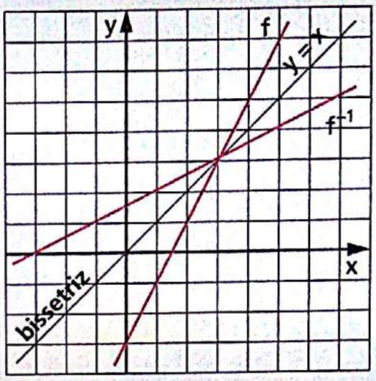
507. Seja a função *f* em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de *f* e f^{-1}.

Solução

$f(x) = 2x - 3$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

x	y
−1	−5
0	−3
1	−1
2	1
3	3
4	5

x	y
−5	−1
−3	0
−1	1
1	2
3	3
5	4



508. Nas funções que seguem, construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de *f* e f^{-1}.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{2x + 4}{3}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 1 - x^3$

d) $f: \mathbb{R}_- \to B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$
$f(x) = 1 - x^2$

e) $f: A \to A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
$f(x) = x^2 + 2x$

f) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$

g) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\}$
$f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

509. Dadas as funções *f* e *g* em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, determine a função inversa de $g \circ f$.

Solução

1º processo

Determinamos inicialmente $g \circ f$ e em seguida $(g \circ f)^{-1}$:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 5 = 2(3x - 2) + 5 = 6x + 1$

Aplicando a regra prática, temos: $x = 6y + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x - 1}{6}$;

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{6}$.

2º processo

Determinamos inicialmente f^{-1} e g^{-1} e em seguida $f^{-1} \circ g^{-1}$, pois $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aplicando a regra prática em $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \quad \text{e} \quad g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x) + 2}{3} = \frac{\frac{x-5}{2} + 2}{3} = \frac{x-1}{6}$$

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{6}$.

Resposta: $(g \circ f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$$

510. Dadas as funções *f* e *g*, determine a função inversa de $g \circ f$:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 4x + 1$ $\quad g(x) = 3x - 5$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$ $\quad g(x) = 2x + 3$

c) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g\colon \mathbb{R}_+ \to C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$
$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 4 - x$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$
$f\colon A \to B$ e $g\colon B \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2 - 3x$ $\quad g(x) = 4x + 9$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
$f\colon A \to \mathbb{R}_+$ e $g\colon \mathbb{R}_+ \to C$
$f(x) = x^2 - 1$ $\quad g(x) = \sqrt{x + 4}$

511. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e as funções *f* de A em B, definida por $f(x) = x^2 + 4x$, e *g* de B em C, definida por $g(x) = x^2 - 1$. Responda: existe $(g \circ f)^{-1}$? Justifique a resposta.

512. Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e as funções: *f* de A em $\mathbb{R}_-$, definida por $f(x) = 2x - 1$, *g* de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = x^2$, e *h* de $\mathbb{R}_+$ em B, definida por $h(x) = 4x - 1$. Determine a função inversa de $h \circ (g \circ f)$.