

Aula 7

Árvore de Recursão e Teorema Mestre

Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

Sumário

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Aulas Passadas

Revisão de Logaritmos

Método da Árvore de Recursão
Exemplos

Teorema Mestre

Aulas Passadas

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

► Correção de Algoritmos Iterativos

Aulas Passadas

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Aulas Passadas

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:
 - Ter um palpite e mostrar por indução

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:
 - Ter um palpite e mostrar por indução
 - ▶ Método da árvore de recursão

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:
 - Ter um palpite e mostrar por indução
 - ▶ Método da árvore de recursão
- ▶ Divisão e Conquista

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:
 - Ter um palpite e mostrar por indução
 - ▶ Método da árvore de recursão
- ▶ Divisão e Conquista
 - ▶ Exemplo: Merge-Sort

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
- ▶ Crescimento de Funções
- ▶ Algoritmos Recursivos
 - ▶ Torre de Hanói
 - ▶ Análise do Tempo
 - ▶ Obter uma recursão
 - ▶ Método de substituição:
 - Ter um palpite e mostrar por indução
 - ▶ Método da árvore de recursão
- ▶ Divisão e Conquista
 - ▶ Exemplo: Merge-Sort
 - ▶ Método da árvore de recursão

Revisão de Logaritmos

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Definição

Revisão de Logaritmos

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Revisão de Logaritmos

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Observações

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Observações

$$(1) \quad n = b^{\log_b n}$$

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Observações

$$(1) \quad n = b^{\log_b n}$$

$$(2) \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Observações

$$(1) \quad n = b^{\log_b n}$$

$$(2) \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$(3) \quad \log_b n = \frac{\log_c n}{\log_c b}$$

Definição

$$a = b^k \iff k = \log_b a$$

Observações

$$(1) \quad n = b^{\log_b n}$$

$$(2) \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$(3) \quad \log_b n = \frac{\log_c n}{\log_c b}$$

$$(4) \quad c^{\log_b n} = n^{\log_b c}$$

Recorrências

PAA - Aula 7

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Pela análise do Merge-Sort

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Aulas Passadas

Revisão de
Logaritmos

Método da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Aulas Passadas

Revisão de
LogaritmosMétodo da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Aulas Passadas

Revisão de
LogaritmosMétodo da Árvore
de Recursão

Exemplos

Teorema Mestre

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Teorema (Mestre)

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Teorema (Mestre)

Para os naturais $a > 0$, $b \geq 2$, $d \geq 0$ e o real $c > 0$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$$

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Teorema (Mestre)

Para os naturais $a > 0$, $b \geq 2$, $d \geq 0$ e o real $c > 0$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$$

► *se $\log_b a > d$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Teorema (Mestre)

Para os naturais $a > 0$, $b \geq 2$, $d \geq 0$ e o real $c > 0$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$$

- ▶ se $\log_b a > d$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ se $\log_b a < d$, então $T(n) = \Theta(n^d)$

Pela análise do Merge-Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2.1T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

$$T(n) = 1.9T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = ??$$

Teorema (Mestre)

Para os naturais $a > 0$, $b \geq 2$, $d \geq 0$ e o real $c > 0$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$$

- ▶ se $\log_b a > d$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ se $\log_b a < d$, então $T(n) = \Theta(n^d)$
- ▶ se $\log_b a = d$, então $T(n) = \Theta(n^d \log n)$



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L.,
CORMEN T.H.

Algoritmos: teoria e prática, 3ed.

Editora Campus, ano 2012.

Obrigado!