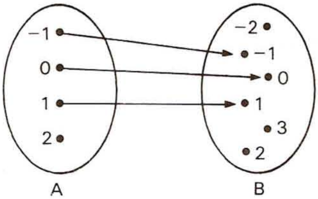
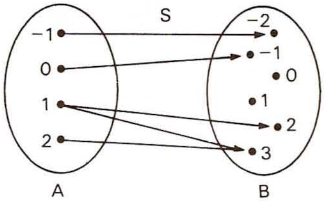
EXERCÍCIOS

142. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.

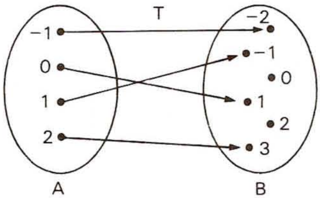
a)



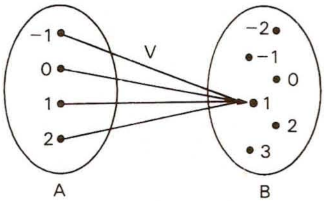
b)



c)

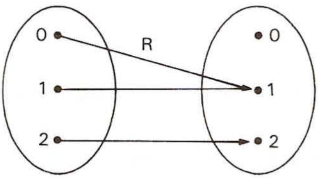


d)

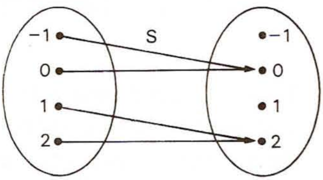


143. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?

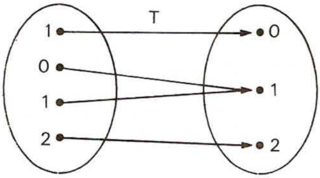
a)



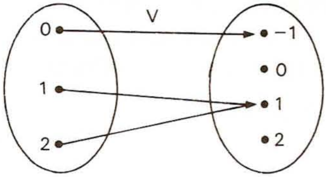
b)



c)

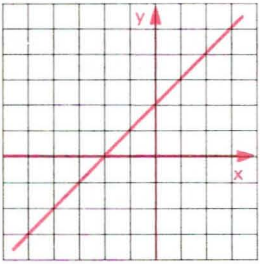


d)

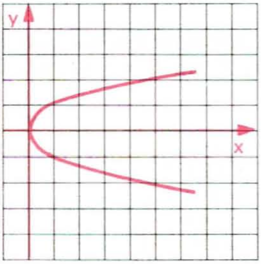


144. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

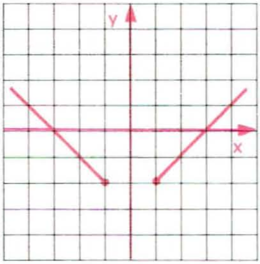
a)



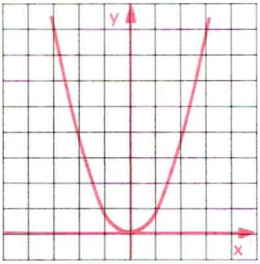
b)



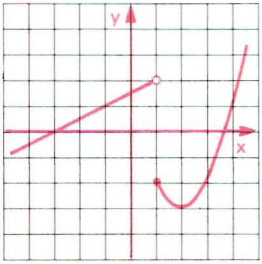
c)



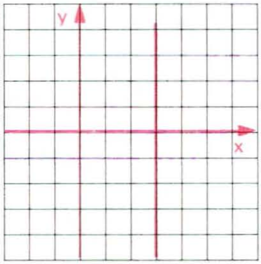
d)



e)



f)



III. Notação das funções

74. Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicarmos uma função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} f\colon A &\to B \quad \text{tal que} \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

145. Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

a) f associa cada número real ao seu oposto.
b) g associa cada número real ao seu cubo.
c) h associa cada número real ao seu quadrado menos 1.
d) k associa cada número real ao número 2.

146. Qual é a notação das seguintes funções?

a) f é função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.
b) g é a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.
c) h é a função de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu inverso.

147. Seja f a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

a) $f(2)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

148. Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

a) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f(\sqrt{3})$

b) $f(-1)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

149. Seja P o único número natural que é primo e par. Sendo $f(x) = (0,25)^{-x} + x - 1$, determine o valor de $f(P)$.

150. Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule:

a) $f(3)$ c) $f(\sqrt{2})$ e) $f(\sqrt{3} - 1)$

b) $f\left(-\frac{3}{7}\right)$ d) $f(\sqrt{4})$ f) $f(0,75)$

151. Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $-\dfrac{3}{4}$ como imagem?

Solução

Queremos determinar o valor de x tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$;

basta, portanto, resolver a equação $\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4}$.

Resolvendo a equação:

$$\frac{2x-3}{5} = -\frac{3}{4} \iff 4(2x-3) = -3 \cdot 5 \iff 8x - 12 = -15 \iff x = -\frac{3}{8}.$$

Resposta: O elemento é $x = -\frac{3}{8}$.

152. Seja a função f de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

153. Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

154. A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = 3f(x)$. Se $f(9) = 45$, calcule $f(1)$.

Solução

Fazendo $3x = 9 \implies x = 3$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 3 \cdot f(3) = 45 = 3 \cdot 15 \implies f(3) = 15$

Fazendo $3x = 3 \implies x = 1$

$f(3) = f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1) = 15 = 3 \cdot 5 \implies f(1) = 5$

Portanto, $f(1) = 5$.

155. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade: $f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$ para $m \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(0)$.

156. É dada uma função real tal que:

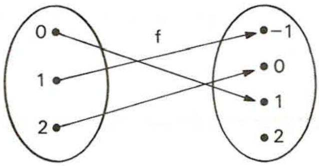
1. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
2. $f(1) = 2$
3. $f(\sqrt{2}) = 4$

Calcule $f(3 + \sqrt{2})$.

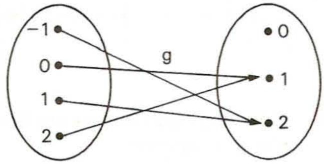
EXERCÍCIOS

158. Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:

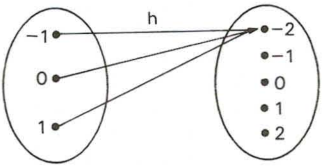
a)



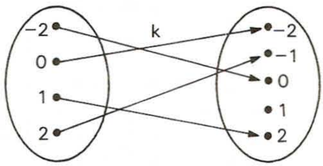
b)



c)

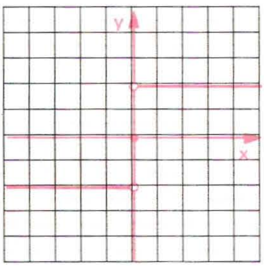


d)

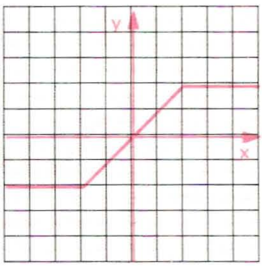


159. Nos gráficos cartesianos das funções abaixo representadas, determine o conjunto imagem.

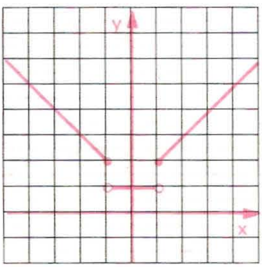
a)



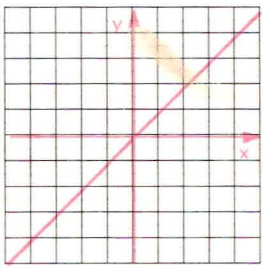
b)



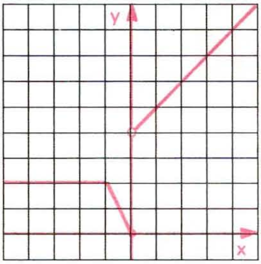
c)



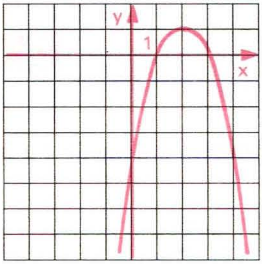
d)



e)

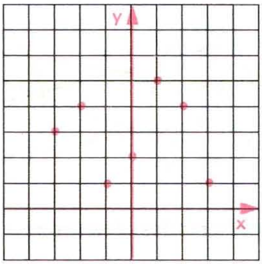


f)

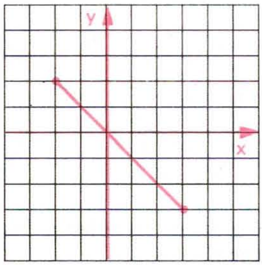


160. Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabeleça o domínio e a imagem.

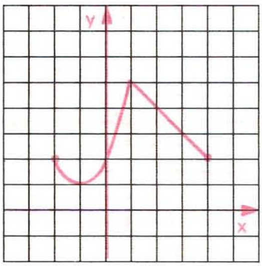
a)



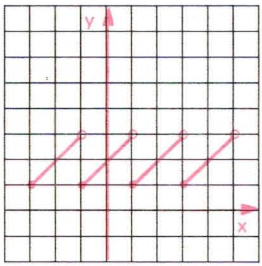
b)



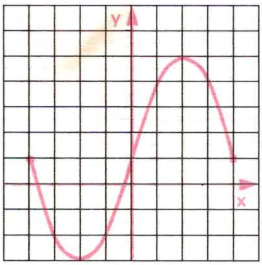
c)



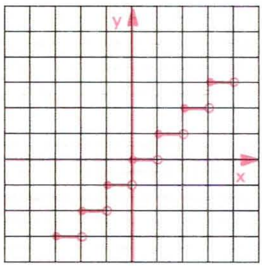
d)



e)



f)



161. Dê o domínio das seguintes funções reais:

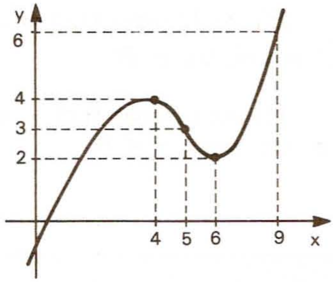
a) $f(x) = 3x + 2$
d) $p(x) = \sqrt{x - 1}$
g) $s(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$
b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
e) $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$
h) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x + 3}}$
c) $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$
f) $r(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$
i) $u(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 2}}{x - 3}$

162. Sendo $x \geqslant 4$, determine o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$.

163. Se $f: A \to B$ é uma função e se $D \subset A$, chamamos de imagem de D pela função f ao conjunto anotado e definido por:

$f < D > \; = \{y \in B \mid \text{existe } x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$.

Se g é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujo gráfico está representado ao lado, determine a imagem $g < [5; 9] >$ do intervalo fechado $[5; 9]$.



V. Funções iguais

79. Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se, e somente se, apresentarem:

a) domínios iguais ($A = C$)
b) contradomínios iguais ($B = D$)
c) $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio.

Isso equivale a dizer que duas funções f e g são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados.

Exemplos

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, então as funções de A em B definidas por:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

são iguais, pois:

$$x = 1 \implies f(1) = 1 - 1 = 0 \quad e \quad g(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$x = 2 \implies f(2) = 2 - 1 = 1 \quad e \quad g(2) = \frac{4-1}{2+1} = 1$$

$$x = 3 \implies f(3) = 3 - 1 = 2 \quad e \quad g(3) = \frac{9-1}{3+1} = 2$$

ou seja, $f = g = \{(1, 0), (2, 1), (2, 3)\}$.

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não são iguais, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.

EXERCÍCIOS

164. Sejam as funções f, g e h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

165. As funções: f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

166. As funções f e g cujas leis de correspondência são

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad e \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$ podem ser iguais? Justifique.

167. As funções f e g de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} \quad e \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$$ são iguais? Justifique.

168. As funções:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x + 1 \quad e \quad g: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$ são iguais? Justifique.