



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS DE RUSSAS

Algoritmos em Grafos

Aula 13: Caminho Mínimo (Bellman-Ford)

Professor Pablo Soares

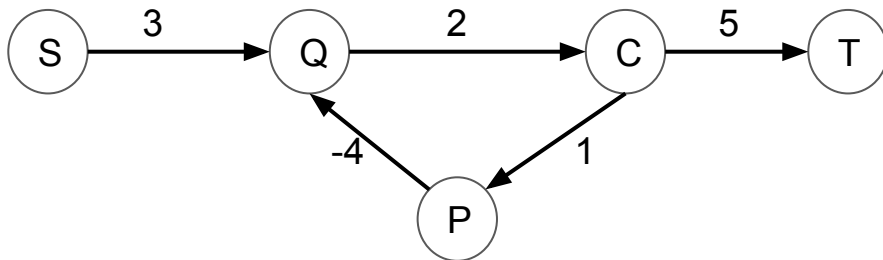
2022.1

Sumário

1. Dijkstra(**últimas aula**);
 - a. Caminho mínimo;
 - i. Grafo Ponderado com pesos positivos;
 - ii. Complexidade de Tempo $(|V|+|E|)\lg|V|$;
 - iii. Estrutura \rightarrow Fila de Prioridade.
2. Ciclo Negativo;
3. Bellman-Ford.
 - a. Introdução;
 - i. Dijkstra e grafos com arestas negativas;
 - ii. Pseudocódigo do Algoritmo;
 - iii. Tempo de Execução.

Ciclo Negativo

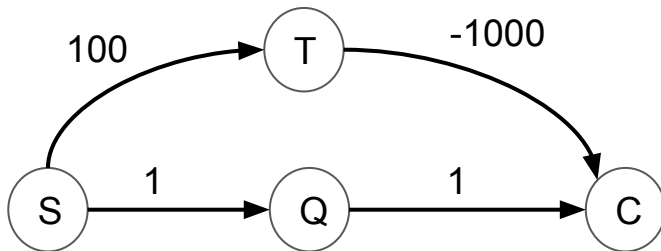
- Dijkstra e Bellman-Ford
 - Não funcionam em grafos que possuem ciclo negativo.



Introdução

- Dijkstra

- Invariante \rightarrow algo que não se altera...
- vetor *dist*
 - valores exatamente corretos ou superestimados (∞)
 - atualizações: $dist[v] \leftarrow \min\{dist[v], dist[u] + w(u, v)\}$
- Não funciona em grafos com arestas com **pesos negativos**;



Introdução

- Dijkstra pode ser definido como uma sequência de **atualizações**
- No máximo quantas arestas pode possuir um caminho?
 - $|V| - 1$



- Se não sabemos todos os caminhos entre “s” e “t”
 - *Como faremos as atualizações das arestas corretas na ordem correta?*
- Atualizar todas as arestas $|V| - 1$ vezes → ***Bellman-Ford***

Algoritmo de Bellman-Ford

- Pseudocódigo
- Complexidade de Tempo
 - $O(|V| * |E|)$

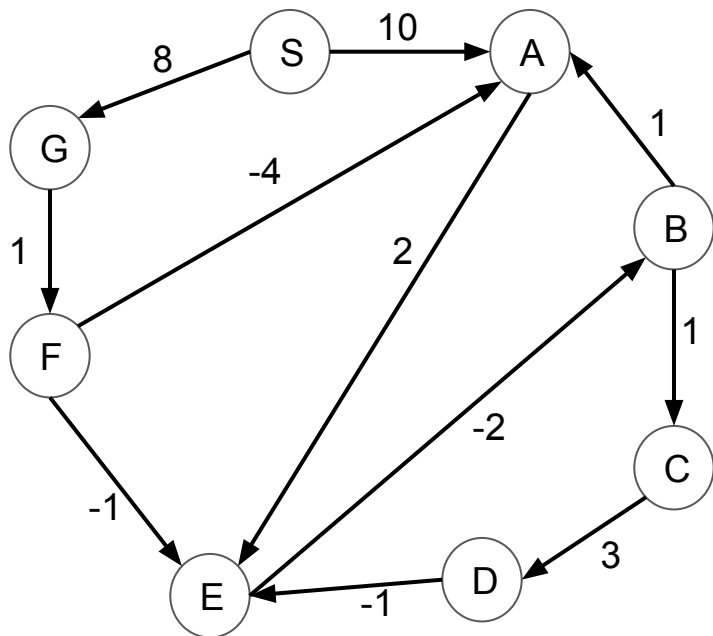
```
BellmanFord( $G, s$ )  
1. para cada vértice  $u \leftarrow V[G]$   
2.    $dist[u] \leftarrow \infty$   
3.    $\pi[u] \leftarrow NULL$   
4. fimpara  
5.  $dist[s] \leftarrow 0$   
6. Repita  $|V| - 1$  vezes  
7.   para cada aresta  $(u, v) \in E$   
8.     se  $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$   
9.        $dist[v] \leftarrow dist[u] + w(u, v)$   
10.       $\pi[v] \leftarrow u$   
11.    fimse  
12.  fimpara  
13. fimrepita  
Fim.
```

```

BellmanFord( $G, s$ )
1. para cada vértice  $u \leftarrow V[G]$ 
2.    $dist[u] \leftarrow \infty$ 
3.    $\pi[u] \leftarrow NULL$ 
4. fimpara
5.  $dist[s] \leftarrow 0$ 
6. Repita  $|V| - 1$  vezes
7.   para cada aresta  $(u, v) \in E$ 
8.     se  $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$ 
9.        $dist[v] \leftarrow dist[u] + w(u, v)$ 
10.       $\pi[v] \leftarrow u$ 
11.     fimse
12.   fimpara
13. fimrepita
Fim.

```

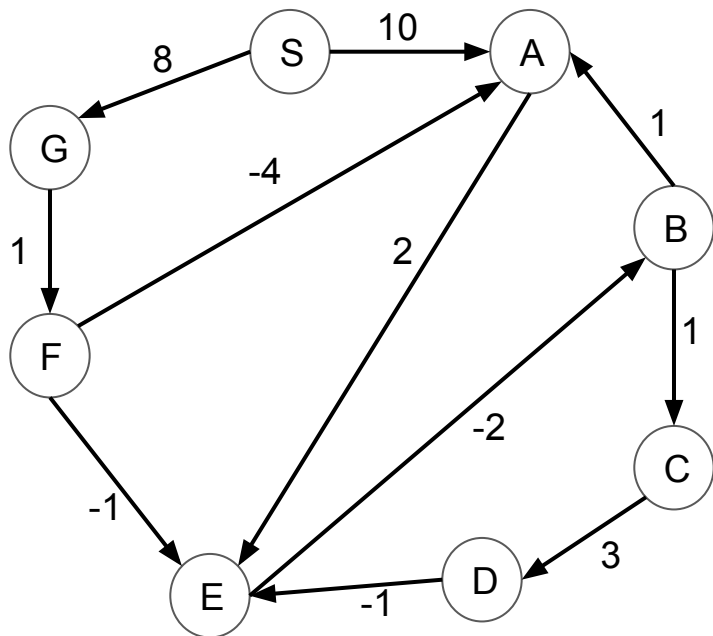
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

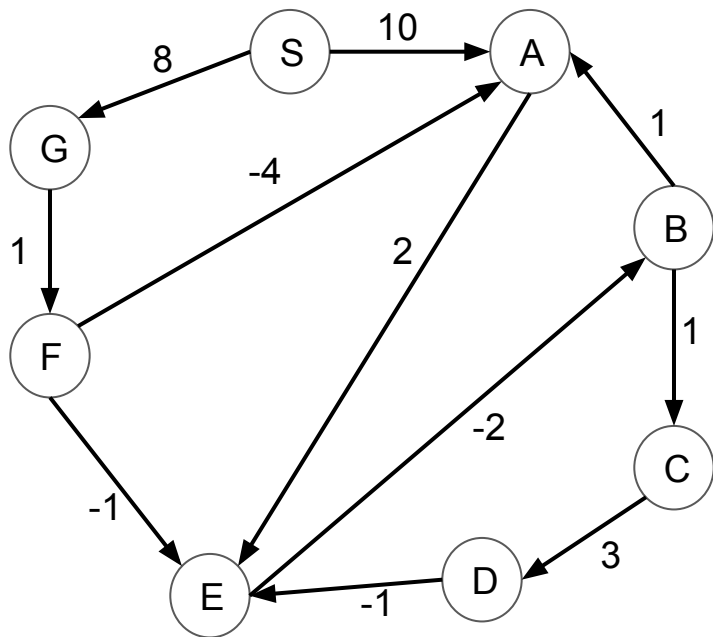
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

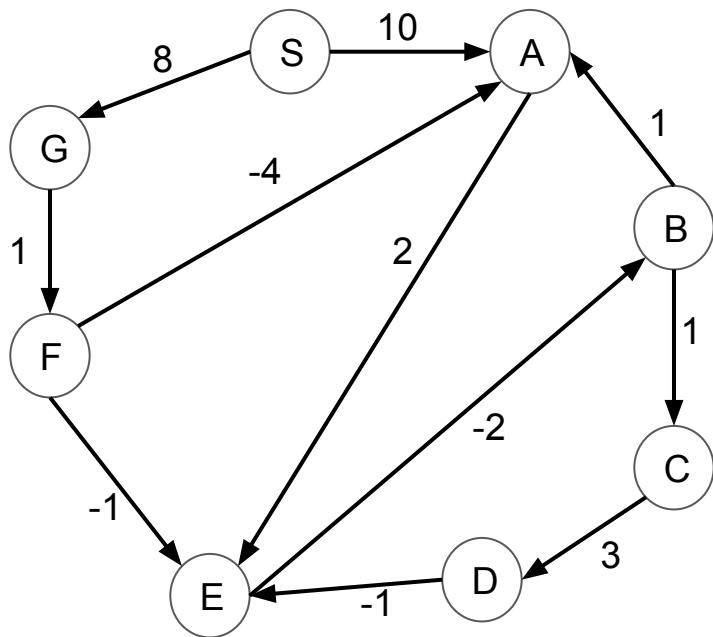
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0							
A	∞							
B	∞							
C	∞							
D	∞							
E	∞							
F	∞							
G	∞							



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

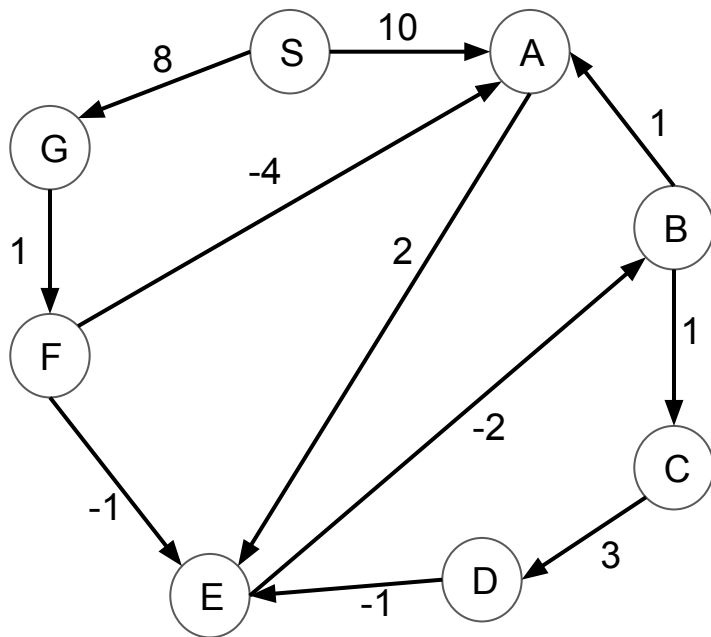
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0						
A	∞	10						
B	∞	∞						
C	∞	∞						
D	∞	∞						
E	∞	∞						
F	∞	∞						
G	∞	8						



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

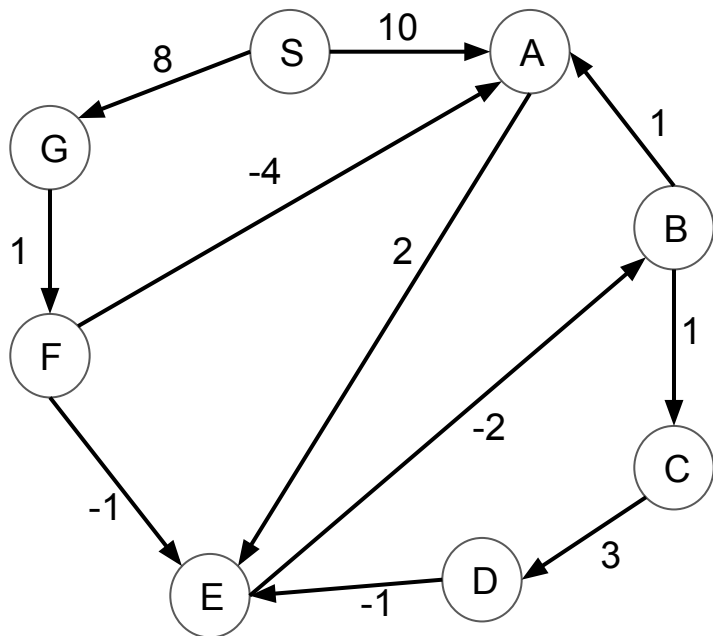
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0					
A	∞	10	10					
B	∞	∞	10					
C	∞	∞	∞					
D	∞	∞	∞					
E	∞	∞	12					
F	∞	∞	9					
G	∞	8	8					



Ordenação das Arestas:

1. SA
2. SG
3. AE
4. BA
5. BC
6. CD
7. DE
8. EB
9. FA
10. FE
11. GF

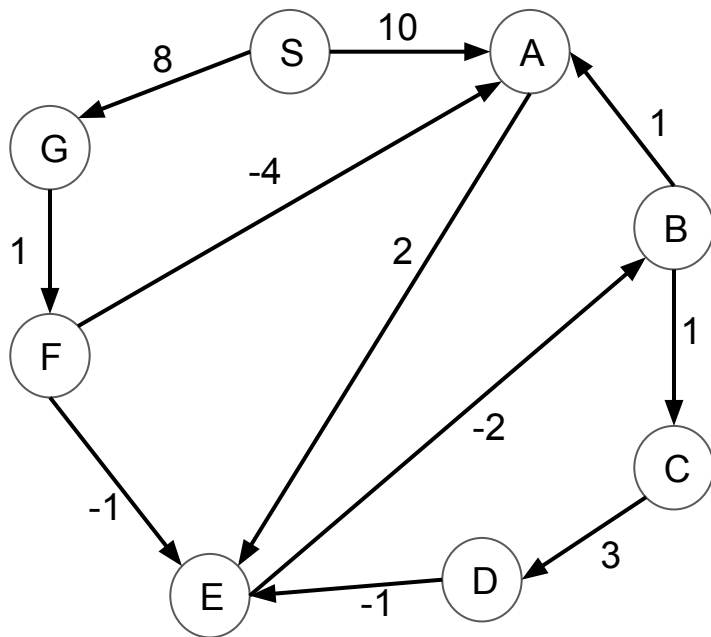
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0	0				
A	∞	10	10	5				
B	∞	∞	∞	10				
C	∞	∞	∞	11				
D	∞	∞	∞	14				
E	∞	∞	12	8				
F	∞	∞	9	9				
G	∞	8	8	8				



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

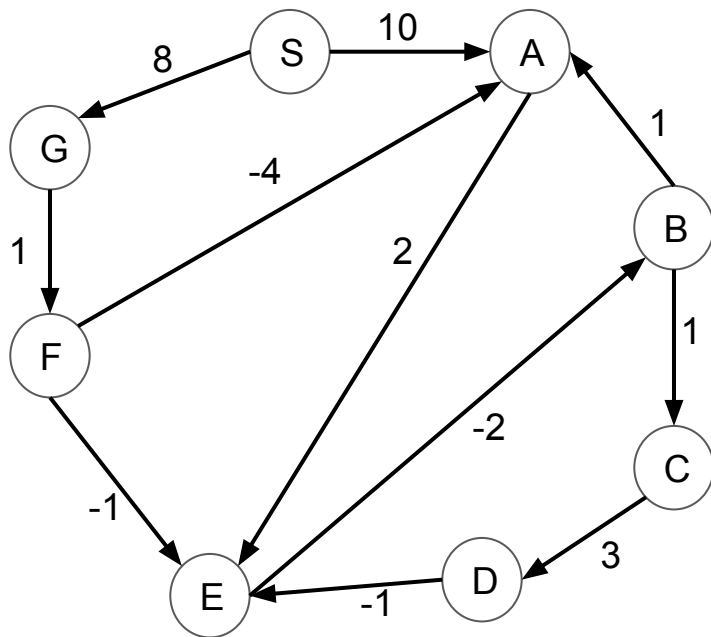
	Iteração							
Vértice/ dist	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0	0	0			
A	∞	10	10	5	5			
B	∞	∞	∞	10	5			
C	∞	∞	∞	11	11			
D	∞	∞	∞	14	14			
E	∞	∞	12	8	7			
F	∞	∞	9	9	9			
G	∞	8	8	8	8			



Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

	Iteração							
Vértice/ dist	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0	0	0	0		
A	∞	10	10	5	5	5		
B	∞	∞	∞	10	5	5		
C	∞	∞	∞	11	11	6		
D	∞	∞	∞	14	14	9		
E	∞	∞	12	8	7	7		
F	∞	∞	9	9	9	9		
G	∞	8	8	8	8	8		



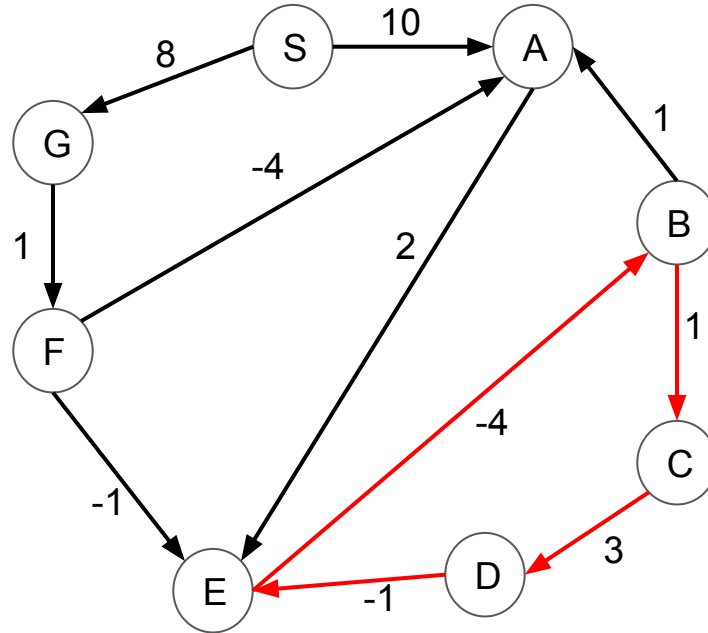
Ordenação das Arestas:

- | | |
|-------|--------|
| 1. SA | 8. EB |
| 2. SG | 9. FA |
| 3. AE | 10. FE |
| 4. BA | 11. GF |
| 5. BC | |
| 6. CD | |
| 7. DE | |

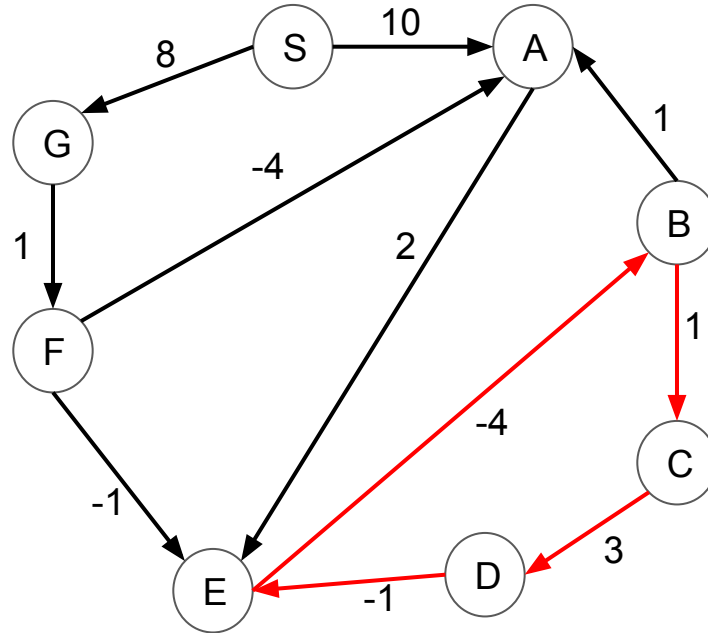
	Iteração							
Vértice/ <i>dist</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0	0	0	0	0	
A	∞	10	10	5	5	5	5	
B	∞	∞	∞	10	5	5	5	
C	∞	∞	∞	11	11	6	6	
D	∞	∞	∞	14	14	9	9	
E	∞	∞	12	8	7	7	7	
F	∞	∞	9	9	9	9	9	
G	∞	8	8	8	8	8	8	

Aqui já poderia finalizar a execução do algoritmo

Exemplo com Ciclo Negativo



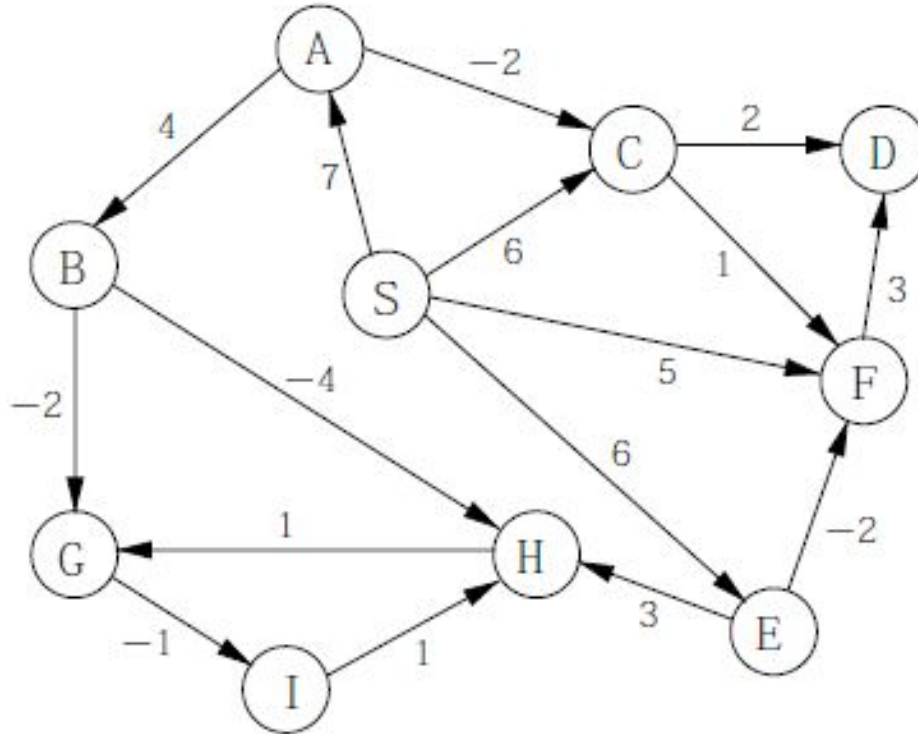
Exemplo com Ciclo Negativo



Efetuar mais uma iteração para verificar a existência de ciclo negativo

Exercício de Fixação

Encontre a menor distância do vértice S para todos os outros vértices do grafo.





UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS DE RUSSAS

Algoritmos em Grafos

Aula 13: Caminho Mínimo (Bellman-Ford)

Professor Pablo Soares

2022.1