

Aula 8

Quick Sort

Análise de pior caso e caso médio

Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Aulas Passadas

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

► Complexidade de Tempo/Espaço

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$
- ▶ Divisão e Conquista

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$
- ▶ Divisão e Conquista
- ▶ Resolução de Recorrências

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$
- ▶ Divisão e Conquista
- ▶ Resolução de Recorrências
 - ▶ Método de substituição

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$
- ▶ Divisão e Conquista
- ▶ Resolução de Recorrências
 - ▶ Método de substituição
 - ▶ Método da árvore de recursão

- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Melhor Caso
 - ▶ Pior Caso
 - ▶ Caso Médio = $\sum p_i t_i$
- ▶ Divisão e Conquista
- ▶ Resolução de Recorrências
 - ▶ Método de substituição
 - ▶ Método da árvore de recursão
 - ▶ Teorema Mestre

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 2: Partione(A, p, r)

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 3: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \cdots r]$: parte do vetor A

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 4: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 5: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

1 pivô $\leftarrow A[r]$

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 6: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

- 1 pivô $\leftarrow A[r]$
- 2 $i \leftarrow p - 1$

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 7: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

- 1 pivô $\leftarrow A[r]$
- 2 $i \leftarrow p - 1$
- 3 **para** $j \leftarrow p$ **até** $r - 1$ **faça**

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 8: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

```
1 pivô  $\leftarrow A[r]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3 para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$  faça
4   |   se  $A[j] \leq \text{pivô}$  então
   |   |
```

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 9: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

```
1 pivô  $\leftarrow A[r]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3 para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$  faça
4   |   se  $A[j] \leq \text{pivô}$  então
5   |   |    $i \leftarrow i + 1$ 
```

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 10: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

```
1 pivô  $\leftarrow A[r]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3 para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$  faça
4   |   se  $A[j] \leq \text{pivô}$  então
5   |   |    $i \leftarrow i + 1$ 
6   |   |   trocar  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
```

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 11: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

```
1 pivô  $\leftarrow A[r]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3 para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$  faça
4   se  $A[j] \leq \text{pivô}$  então
5      $i \leftarrow i + 1$ 
6     trocar  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7 trocar  $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
```


Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 12: Partione(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ rearranjado de modo que o pivô $A[r]$ esteja **depois** dos elementos **menores** que ele e **antes** dos elementos **maiores** que ele

```
1 pivô  $\leftarrow A[r]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3 para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$  faça
4   se  $A[j] \leq \text{pivô}$  então
5      $i \leftarrow i + 1$ 
6     trocar  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7 trocar  $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8 retorna  $i + 1$ 
```

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 14: Quick-Sort(A, p, r)

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 15: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \cdots r]$: parte do vetor A

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 16: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \cdots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \cdots r]$ ordenado

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Algoritmo 17: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \cdots r]$: parte do vetor A **Saída:** $A[p \cdots r]$ ordenado

1 **se** $p < r$ **então**

|

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 18: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \cdots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \cdots r]$ ordenado

```
1 se  $p < r$  então  
2    $q \leftarrow \text{Partione}(A, p, r)$ 
```

Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 19: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ ordenado

```
1 se  $p < r$  então  
2    $q \leftarrow \text{Partione}(A, p, r)$   
3   Quick-Sort( $A, p, q - 1$ )
```


Quick-Sort: Ideia e Algoritmo

Algoritmo 20: Quick-Sort(A, p, r)

Entrada: $A[p \dots r]$: parte do vetor A

Saída: $A[p \dots r]$ ordenado

```
1 se  $p < r$  então  
2    $q \leftarrow \text{Partione}(A, p, r)$   
3   Quick-Sort( $A, p, q - 1$ )  
4   Quick-Sort( $A, q + 1, r$ )
```

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Particionamento balanceado

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Particionamento balanceado

Vamos ser pessimistas e supor que o pivô sempre divide na proporção 9:1

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Particionamento balanceado

Vamos ser pessimistas e supor que o pivô sempre divide na proporção 9:1

$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + T\left(\frac{n}{10}\right) + \Theta(n)$$

Quick-Sort: Análise do Tempo

PAA - Aula 8

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Quick-Sort

Ideia

Algoritmo

Análise de Melhor Caso

Análise de Pior Caso

Análise de Caso Médio

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Particionamento balanceado

Vamos ser pessimistas e supor que o pivô sempre divide na proporção 9:1

$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + T\left(\frac{n}{10}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Quick-Sort: Análise do Tempo

Análise de Melhor Caso

Pivô divide sempre o vetor ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Análise de Pior Caso

Pivô sempre é ou o menor ou o maior elemento

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Análise de Caso Médio

Ideia:

Particionamento balanceado

Vamos ser pessimistas e supor que o pivô sempre divide na proporção 9:1

$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + T\left(\frac{n}{10}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

A Complexidade se mantém mesmo em 99:1, 999:1, ...



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L.,
CORMEN T.H.

Algoritmos: teoria e prática, 3ed.

Editora Campus, ano 2012.

Obrigado!