$$[f(x)]^n \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0 & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar} \\ \forall\, x \in D(f) & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \leqslant 0 & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \end{cases}$$

Exemplos

1º) $(3x - 2)^3 > 0 \implies 3x - 2 > 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{2}{3}\right\}$

2º) $(4x - 3)^6 > 0 \implies 4x - 3 \neq 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{3}{4}\right\}$

3º) $(2x + 1)^5 < 0 \implies 2x + 1 < 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{1}{2}\right\}$

4º) $(x - 2)^4 < 0 \implies S = \varnothing$

5º) $(3 - 5x)^7 \geqslant 0 \implies 3 - 5x \geqslant 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{3}{5}\right\}$

6º) $(4x - 5)^2 \geqslant 0 \implies S = \mathbb{R}$

7º) $(8 - 2x)^4 \leqslant 0 \implies 8 - 2x = 0 \implies S = \{4\}$

EXERCÍCIOS

215. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$
b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$
d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
e) $(6x - 1)(2x + 7) \geqslant 0$
f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leqslant 0$
g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$
h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leqslant 0$

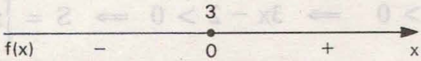
216. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(x - 3)^4 > 0$
b) $(3x + 8)^3 < 0$
c) $(4 - 5x)^6 < 0$
d) $(1 - 7x)^5 > 0$
e) $(3x + 5)^2 \geqslant 0$
f) $(5x + 1)^3 \leqslant 0$
g) $(4 + 3x)^4 \leqslant 0$
h) $(3x - 8)^5 \geqslant 0$

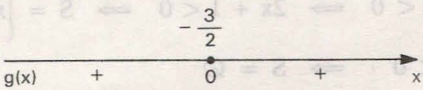
217. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então o *sinal* de $(x - 3)^5$ é igual ao *sinal* de $x - 3$, isto é:



A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é *positivo* se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é *nulo* se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:



Fazendo o quadro-produto, temos:

		$-\frac{3}{2}$		3		x
f(x)	−		−	0	+	
g(x)	+	0	+		+	
f(x) · g(x)	−	0	−	0	+	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \quad \text{e} \quad x \neq -\frac{3}{2}\right\}.$$

218. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geqslant 0$
b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$
c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leqslant 0$
d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geqslant 0$

219. Determine, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $(3x - 2)^3 (x - 5)^2 (2 - x)x > 0$.

b) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2 \implies 3x + 4 \geqslant 2(1 - x) \implies x \geqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{5}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}.$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

220. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{2x + 1}{x + 2} > 0$

b) $\dfrac{3x - 2}{3 - 2x} < 0$

c) $\dfrac{3 - 4x}{5x + 1} \geqslant 0$

d) $\dfrac{-3 - 2x}{3x + 1} \leqslant 0$

221. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{5x - 3}{3x - 4} > -1$

b) $\dfrac{x - 1}{x + 1} \geqslant 3$

c) $\dfrac{6x}{x + 3} < 5$

d) $\dfrac{5x - 2}{3x + 4} < 2$

e) $\dfrac{3x - 5}{2x - 4} \leqslant 1$

f) $\dfrac{x + 1}{x - 2} \geqslant 4$

222. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{(1 - 2x)(3 + 4x)}{(4 - x)} > 0$

b) $\dfrac{(3x + 1)}{(2x + 5)(5x + 3)} < 0$

c) $\dfrac{(5x + 4)(4x + 1)}{(5 - 4x)} \geqslant 0$

d) $\dfrac{(1 - 2x)}{(5 - x)(3 - x)} \leqslant 0$

223. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{1}{x - 4} < \dfrac{2}{x + 3}$

b) $\dfrac{1}{x - 1} < \dfrac{2}{x - 2}$

c) $\dfrac{x + 1}{x + 2} > \dfrac{x + 3}{x + 4}$

d) $\dfrac{x + 5}{3x + 2} \leqslant \dfrac{x - 2}{3x + 5}$

e) $\dfrac{5x + 2}{4x - 1} > \dfrac{5x - 1}{4x + 5}$

f) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{3}{x - 3} < 0$

g) $\dfrac{2}{3x - 1} \geqslant \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}$

224. Ache os valores reais de x para os quais vale a desigualdade:

$-\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant -\dfrac{1}{x}$.