#### EDA - Aula 22 Prof.

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e BN

Árvore RN é balanceada

# Aula 22 Árvore Graduada e Árvore Rubro Negra

#### Estruturas de Dados Avançadas

Professor Eurinardo Rodrigues Costa Universidade Federal do Ceará Campus Russas

2021.1



### Sumário

EDA - Aula 22

Eurinard

Aulas Passada

ABB Graduad <sup>Definição</sup>

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN (

- Aulas Passadas
- ABB Graduada
  - Definição
- 3 ABB Rubro Negra (RN)
  - Definição
- 4 Equivalência entre Graduada e RN
- 5 Árvore RN é balanceada

#### **Aulas Passadas**

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

Definicăc

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é

#### **Aulas Passadas**

EDA - Aula 22

Eurinar

Aulas Passadas

> Graduada Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

### Definição (Árvore balanceada)

Árvore com n nós cuja altura é  $O(\log n)$  e cada subárvore com m nós possui altura  $O(\log m)$ 

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

Definição

ABB Rubro

Negra (RN)

Definição

entre Graduada e

Árvore RN é balanceada

# Definição (ABB Graduada)

EDA - Aula 22

Prof. Eurinard

Aulas Passada

ABB Graduada

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalênci entre Graduada e

Árvore RN é balanceada

### Definição (ABB Graduada)

Prof.

Definição

### Definição (ABB Graduada)

ABB em que cada nó v temos que



0  $v \in no externo \Rightarrow posto(v) = 0$ 

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduad

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Definição Equivalência entre

entre Graduada e RN

Árvore RN é

### Definição (ABB Graduada)

- 0  $v \in no externo \Rightarrow posto(v) = 0$
- $v \in pai de nó externo \Rightarrow posto(v) = 1$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

Graduad

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é palanceada

### Definição (ABB Graduada)

- 0  $v \in no externo \Rightarrow posto(v) = 0$ 
  - lacktriangle v é pai de nó externo  $\Rightarrow$  posto(v) = 1
  - lacksquare v possui pai  $w\Rightarrow posto(v)\leq posto(w)\leq posto(v)+1$

EDA - Aula 22

#### Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduad

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é palanceada

### Definição (ABB Graduada)

- 0  $v \in no \ externo \Rightarrow posto(v) = 0$
- $v \in pai de nó externo \Rightarrow posto(v) = 1$
- $\bigcirc$  v possui pai  $w \Rightarrow posto(v) \leq posto(w) \leq posto(v) + 1$
- $\bigcirc$  v possui avô  $a \Rightarrow posto(v) < posto(a)$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rub

ABB Rubro Negra (RN Definição

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

FDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

Definição

ABB Rubr Negra (RN Definição

Equivalenc entre Graduada e RN

Árvore RN e

Definição (ABB Rubro Negra)

FDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro

ABB RUDIO Negra (RN) Definição

Equivalenci entre Graduada e RN

Árvore RN e

### Definição (ABB Rubro Negra)

Definição

### Definição (ABB Rubro Negra)

ABB em que cada nó v temos que



 $v \in no$  externo  $\Rightarrow v \in N$ 

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

> ABB Graduad Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Definição

=quivalencia entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

#### Definição (ABB Rubro Negra)

- **a**  $v \in no$  externo  $\Rightarrow v \in \mathbf{N}$
- os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

> ABB Graduad Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Negra (RIN Definição

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN e palanceada

### Definição (ABB Rubro Negra)

- **a**  $v \in no$  externo  $\Rightarrow v \in \mathbf{N}$
- os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros
- $\bigcirc$  v é  $\mathbb{R}$  e não é raiz  $\Rightarrow$  pai de v é  $\mathbb{N}$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

> ABB Graduad Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Definição

=quivalencia entre Graduada e RN

Árvore RN e balanceada

### Definição (ABB Rubro Negra)

- **a**  $v \in no$  externo  $\Rightarrow v \in \mathbf{N}$
- os caminhos de v para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros
- $\bigcirc$  v é  $\mathbb{R}$  e não é raiz  $\Rightarrow$  pai de v é  $\mathbb{N}$
- $\bigcirc$  v raiz  $\Rightarrow$  v  $\not\in$  **N**

EDA - Aula 22 Prof.

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é

RN

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

> ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

Conversão (Graduada  $\Rightarrow$  RN)

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é

#### Conversão (Graduada ⇒ RN)

De cima para baixo

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre

Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

- De cima para baixo
- 2 se v = raiz então

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é

- 1 De cima para baixo
- 2 se v = raiz então
- $s \mid cor(v) \leftarrow \mathbf{N}$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro

Negra (RN) Definição

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

- De cima para baixo
- 2 se v = raiz então
- $cor(v) \leftarrow \mathbf{N}$
- 4 senão

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre

entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

- De cima para baixo
- 2 se v = raiz então
- $cor(v) \leftarrow \mathbf{N}$
- 4 senão
- $w \leftarrow \text{pai de } v$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre

Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

```
    De cima para baixo
    se v = raiz então
    | cor(v) ← N
    senão
    | w ← pai de v
    se posto(v) = posto(w) então
```

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é balanceada

```
    De cima para baixo
    se v = raiz então
    | cor(v) ← N
    senão
    | w ← pai de v
    se posto(v) = posto(w) então
    | cor(v) ← R
```

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

```
1 De cima para baixo

2 se v = raiz então

3 | cor(v) \leftarrow N

4 senão

5 | w \leftarrow pai de v

6 | se posto(v) = posto(w) então

7 | cor(v) \leftarrow R

8 | senão
```

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

```
1 De cima para baixo

2 se v = raiz então

3 | cor(v) \leftarrow \mathbb{N}

4 senão

5 | w \leftarrow pai de v

6 | se posto(v) = posto(w) então

7 | cor(v) \leftarrow \mathbb{R}

8 | senão

9 | cor(v) \leftarrow \mathbb{N}
```

EDA - Aula 22 Prof.

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é

Conversão (RN  $\Rightarrow$  Graduada)

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

RN

Árvore RN é

#### Conversão (RN ⇒ Graduada)

De baixo para cima

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Definição Equivalência

entre Graduada e RN

Árvore RN é palanceada

- 1 De baixo para cima
- 2 se v é nó externo então

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada:

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

- De baixo para cima
- 2 se v é nó externo então
- $\mathbf{3} \qquad posto(v) \leftarrow 0$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Definição Equivalência

entre Graduada e RN

Árvore RN é

- De baixo para cima
- 2 se v é nó externo então
- $posto(v) \leftarrow 0$
- 4 senão

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é

RN

- De baixo para cima
- 2 se v é nó externo então
- $s \mid posto(v) \leftarrow 0$
- 4 senão
- $f \leftarrow \text{filho de } v$

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passada

ABB Graduada Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Negra (RN)

Definição

Equivalência

entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

#### Conversão (RN ⇒ Graduada)

```
1 De baixo para cima
2 se v é nó externo então
3 | posto(v) ← 0
```

```
4 senão
```

```
5 f \leftarrow \text{filho de } v
6 \sec cor(f) = \mathbf{N} \text{ então}
```

Equivalência Graduada e RN

#### Conversão (RN ⇒ Graduada)

```
    De baixo para cima
```

se v é nó externo então

```
posto(v) \leftarrow 0
```

4 senão

```
f \leftarrow \text{filho de } v
6
```

se 
$$cor(f) = N$$
 então

$$posto(v) \leftarrow posto(f) + 1$$

EDA - Aula 22

Aulas Passada

ABB Graduada Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

#### Conversão (RN ⇒ Graduada)

```
1 De baixo para cima

2 se v é nó externo então

3 | posto(v) \leftarrow 0

4 senão

5 | f \leftarrow \text{filho de } v

6 | se cor(f) = N então

7 | posto(v) \leftarrow posto(f) + 1

8 | senão
```

EDA - Aula 22

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

#### Conversão (RN ⇒ Graduada)

```
1 De baixo para cima

2 se v \in no externo então

3 | posto(v) \leftarrow 0

4 senão

5 | f \leftarrow \text{filho de } v

6 | se cor(f) = \mathbf{N} então

7 | posto(v) \leftarrow posto(f) + 1

8 | senão

9 | posto(v) \leftarrow posto(f)
```

FDA - Aula 22

Prof. Eurinarde

Aulas Passadas

ABB Graduada

Definição

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e BN

Árvore RN é balanceada

FDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalênci entre Graduada e

Árvore RN é balanceada

#### Definição (Altura negra de um nó *x* numa RN)

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalênci: entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

> ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e

Árvore RN é balanceada

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

Definição (Altura negra de uma RN)

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e BN

Árvore RN é

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

#### Definição (Altura negra de uma RN)

bh(r), onde r é a raiz da RN.

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

#### Definição (Altura negra de uma RN)

bh(r), onde r é a raiz da RN.

#### Lema

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada <sub>Definição</sub>

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

#### Definição (Altura negra de uma RN)

bh(r), onde r é a raiz da RN.

#### Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo  $2^{bh(x)} - 1$  nós internos.

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

> ABB Graduada <sub>Definição</sub>

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é balanceada

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

#### Definição (Altura negra de uma RN)

bh(r), onde r é a raiz da RN.

#### Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo  $2^{bh(x)} - 1$  nós internos.

#### Teorema

EDA - Aula 22

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

> ABB Graduada <sub>Definição</sub>

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

#### Definição (Altura negra de um nó x numa RN)

bh(x) := número de nós negros, sem contar x, de x até um nó externo.

#### Definição (Altura negra de uma RN)

bh(r), onde r é a raiz da RN.

#### Lema

Qualquer RN com raiz x contém no mínimo  $2^{bh(x)} - 1$  nós internos.

#### **Teorema**

Toda RN é balanceada

## Bibliografia

EDA - Aula 22 Prof.

Aulas Passada

> Graduada Definição ABB Rubro

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalência entre Graduada e RN

Árvore RN é

SZWARCFITER, Jayme; MARKENZON, Lilian. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.3a edição. LTC, ano 2010. (ISBN 9788521617501).

LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L., CORMEN T.H.

Algoritmos: teoria e prática, 3ed.

Editora Campus, ano 2012.

EDA - Aula 2

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

ABB Graduada

ARR Dubre

ABB Rubro Negra (RN)

Equivalenci entre Graduada e

Árvore RN é balanceada

# Obrigado!