Aula 28
Teoria da Complexidade
Problema Soma-Subc é NP-completo

Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

Sumário

Aulas Passadas

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$
$$w \rightarrow f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$

$$w \to f(w)$$

$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

- Teorema

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$
$$w \to f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

- Teorema
  - $\left.\begin{cases} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{cases}\right\} \Rightarrow C \in NPC$

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$
$$w \rightarrow f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

- Teorema
  - $\left\{\begin{matrix} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in NPC$
- (Cook-Levin) SAT $\in$ NPC

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$
$$w \to f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

- Teorema
  - $\left\{ \begin{matrix} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \in NPC$
- (Cook-Levin) SAT $\in$ NPC
- 3SAT $\in$ NPC

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial

$$A \leq_p B$$
$$w \rightarrow f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$

- Teorema
  - $\left\{\begin{matrix} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in NPC$
- (Cook-Levin) SAT $\in$ NPC
- 3SAT $\in$ NPC
- CLIQUE $\in$ NPC

Aulas Passadas

- Problemas “Fáceis” e “Razoáveis”
- Classe P, NP e NPC
- Redução Polinomial
$$A \leq_p B$$
$$w \rightarrow f(w)$$
$$\text{sim} \leftrightarrow \text{sim}$$
- Teorema
  - $\left\{ \begin{array}{l} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{array} \right\} \Rightarrow C \in NPC$
- (Cook-Levin) SAT $\in$ NPC
- 3SAT $\in$ NPC
- CLIQUE $\in$ NPC
- COBVERT $\in$ NPC

Teoria da Complexidade

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Teoria da Complexidade

Problema Soma-Subc

Instância:

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta:

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

$S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

$S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

$t = 50$

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

$$\left.\begin{array}{l} S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \\ t = 50 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Teoria da Complexidade

Problema Soma-Subc

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

$$\left.\begin{array}{l} S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \\ t = 50 \end{array}\right\} \rightarrow \text{sim}$$

Teoria da Complexidade

PROBLEMA SOMA-SUBC

Instância: um conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ de inteiros e um inteiro t

Pergunta: existe um subconjunto de S cuja a soma de elementos seja t?

Exemplo

$$\left.\begin{array}{l} S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \\ t = 50 \end{array}\right\} \rightarrow \text{sim } 2 + 16 + 32 = 50$$

Teoria da Complexidade

Teoria da Complexidade

Teorema

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left\{ \begin{array}{l} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{array} \right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left\{\begin{matrix} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Em que $B = $ 3SAT

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left.\begin{cases} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{cases}\right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Em que $B = 3\text{SAT}$ e $C = \text{SOMA-SUBC}$

Teoria da Complexidade

Teorema

Problema Soma-Subc *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left\{\begin{matrix} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Em que $B = 3SAT$ e $C =$ Soma-Subc. Deste modo,

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left\{ \begin{array}{l} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{array} \right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Em que $B = $ 3SAT e $C = $ SOMA-SUBC. Deste modo, basta mostrar que 3SAT $\leq_p$ SOMA-SUBC

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

Usaremos o teorema

$$\left.\begin{cases} B \in NPC \\ B \leq_p C \\ C \in NP \end{cases}\right\} \Rightarrow C \in NPC$$

Em que $B = 3SAT$ e $C =$ SOMA-SUBC. Deste modo, basta mostrar que 3SAT $\leq_p$ SOMA-SUBC e que SOMA-SUBC $\in$ NP.

Teoria da Complexidade

Teorema

Problema Soma-Subc *é NP-completo.*

Demonstração.

Soma-Subc $\in$ NP

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado:

Teoria da Complexidade

Teorema

Problema Soma-Subc *é NP-completo.*

Demonstração.

Soma-Subc $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Teoria da Complexidade

Teorema

Problema Soma-Subc *é NP-completo.*

Demonstração.

Soma-Subc $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$?

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$? $O(n^2)$

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$? $O(n^2)$, basta verficar se para cada $x' \in S'$ temos que $x' \in S$.

Teoria da Complexidade

Teorema

Problema Soma-Subc *é NP-completo.*

Demonstração.

Soma-Subc $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$? $O(n^2)$, basta verficar se para cada $x' \in S'$ temos que $x' \in S$.
- a soma dos elementos de S' é igual a t?

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$? $O(n^2)$, basta verficar se para cada $x' \in S'$ temos que $x' \in S$.
- a soma dos elementos de S' é igual a t? $O(n)$

Teoria da Complexidade

Teorema

PROBLEMA SOMA-SUBC *é NP-completo.*

Demonstração.

SOMA-SUBC $\in$ NP

Certificado: conjunto S' de inteiros

Verificação:

- $S' \subseteq S$? $O(n^2)$, basta verficar se para cada $x' \in S'$ temos que $x' \in S$.
- a soma dos elementos de S' é igual a t? $O(n)$, basta percorrer os elementos de S' computando a soma.

Bibliografia

SIPSER, M.
Introdução a teoria da computação. 2 ed.
Thompson Learning, ano 2007.

Obrigado!