

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Aula 17

Programação Dinâmica

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

(1) *Verificar propriedade de **subestrutura ótima***

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

(1) *Verificar propriedade de **subestrutura ótima***

- ▶ *“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?”*

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

- (1) *Verificar propriedade de **subestrutura ótima***
 - ▶ *“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?”*
- (2) *Obter uma recursão para o **valor ótimo** do problema*

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

- (1) *Verificar propriedade de **subestrutura ótima***
 - ▶ *“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?”*
- (2) *Obter uma recursão para o **valor ótimo** do problema*
- (3) *Obter um algoritmo Bottom-UP para calcular o **valor ótimo***

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Definição (Programação Dinâmica)

Seguir os passos:

- (1) *Verificar propriedade de **subestrutura ótima***
 - ▶ “Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?”
- (2) *Obter uma recursão para o **valor ótimo** do problema*
- (3) *Obter um algoritmo Bottom-UP para calcular o **valor ótimo***
- (4) *Obter uma **solução ótima** do problema.*

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50} \\ \rightarrow 10 \times 100 \times 5$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50} \\ & \rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 \end{aligned}$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

$$\rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

$$\rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$$

$$(II) A_{10 \times 100} \times (B \times C)_{100 \times 50}$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

$$\rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$$

$$(II) A_{10 \times 100} \times (B \times C)_{100 \times 50}$$

$$\rightarrow 100 \times 5 \times 50$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

$$\rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$$

$$(II) A_{10 \times 100} \times (B \times C)_{100 \times 50}$$

$$\rightarrow 100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50$$

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Exemplo

$$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

Temos as opções:

$$(I) (A \times B)_{10 \times 5} \times C_{5 \times 50}$$

$$\rightarrow 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$$

$$(II) A_{10 \times 100} \times (B \times C)_{100 \times 50}$$

$$\rightarrow 100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 75000$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

A_1 possui dimensão $p_0 \times p_1$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

A_1 possui dimensão $p_0 \times p_1$

A_2 possui dimensão $p_1 \times p_2$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

A_1 possui dimensão $p_0 \times p_1$

A_2 possui dimensão $p_1 \times p_2$

A_3 possui dimensão $p_2 \times p_3$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

A_1 possui dimensão $p_0 \times p_1$
 A_2 possui dimensão $p_1 \times p_2$
 A_3 possui dimensão $p_2 \times p_3$
 \vdots
 A_n possui dimensão $p_{n-1} \times p_n$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

A_1 possui dimensão $p_0 \times p_1$
 A_2 possui dimensão $p_1 \times p_2$
 A_3 possui dimensão $p_2 \times p_3$
 \vdots
 A_n possui dimensão $p_{n-1} \times p_n$

Objetivo

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Problema

Entrada

- ▶ Matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
- ▶ Inteiros p_0, p_1, \dots, p_n

tais que

$$\begin{array}{lll} A_1 & \text{possui dimensão} & p_0 \times p_1 \\ A_2 & \text{possui dimensão} & p_1 \times p_2 \\ A_3 & \text{possui dimensão} & p_2 \times p_3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_n & \text{possui dimensão} & p_{n-1} \times p_n \end{array}$$

Objetivo

Colocar parênteses em $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ de modo que resultará no menor número de multiplicações escalares possível.

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?”

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?” Sim.

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?” Sim.

Seja $S = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ uma **solução ótima** onde a última multiplicação realizada está entre A_k e A_{k+1} .

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?” Sim.

Seja $S = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ uma **solução ótima** onde a última multiplicação realizada está entre A_k e A_{k+1} . Os parênteses em S colocados em $(A_1 \times \cdots \times A_k)$ formam uma **solução ótima** para o “pedaço” $A_1 \times \cdots \times A_k$

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?” Sim.

Seja $S = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ uma **solução ótima** onde a última multiplicação realizada está entre A_k e A_{k+1} . Os parênteses em S colocados em $(A_1 \times \cdots \times A_k)$ formam uma **solução ótima** para o “pedaço” $A_1 \times \cdots \times A_k$, pois, em caso contrário, existe solução ótima s' melhor de modo que podemos ter $S' = s' \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ melhor que S .

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima

“Um pedaço da **solução ótima** é **solução ótima** de um pedaço do problema?” Sim.

Seja $S = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ uma **solução ótima** onde a última multiplicação realizada está entre A_k e A_{k+1} . Os parênteses em S colocados em $(A_1 \times \cdots \times A_k)$ formam uma **solução ótima** para o “pedaço” $A_1 \times \cdots \times A_k$, pois, em caso contrário, existe solução ótima s' melhor de modo que podemos ter $S' = s' \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ melhor que S . Absurdo! Pois S é **solução ótima**.

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima
- 2. Obter recursão**
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

2. Obter recursão

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

2. Obter recursão

$M[i, j]$ = menor número de multiplicações escalares na multiplicação das matrizes $A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j$

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

2. Obter recursão

$M[i, j]$ = menor número de multiplicações escalares na multiplicação das matrizes $A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j$

Objetivo \rightarrow calcular $M[1, n]$

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

2. Obter recursão

$M[i, j]$ = menor número de multiplicações escalares na multiplicação das matrizes $A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j$

Objetivo \rightarrow calcular $M[1, n]$

$$M[i, j] = \begin{cases} \min\{M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j\} & , \text{ se } i < j \\ 0 & , \text{ se } i = j \end{cases}$$

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 3: Mult-Matrizes(P)

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

4. Obter uma solução ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 4: Mult-Matrizes(P)

1 $n \leftarrow (\text{comprimento de } P) - 1$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 5: Mult-Matrizes(P)

- 1 $n \leftarrow$ (comprimento de P) - 1
- 2 **criar matriz** $M_{n \times n}$

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 6: Mult-Matrizes(P)

- 1 $n \leftarrow$ (comprimento de P) - 1
- 2 **criar matriz** $M_{n \times n}$
- 3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima
2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo

4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 7: Mult-Matrizes(P)

- 1 $n \leftarrow$ (comprimento de P) - 1
- 2 **criar matriz** $M_{n \times n}$
- 3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $M[i, i] \leftarrow 0$;

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima
2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo

4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 8: Mult-Matrizes(P)

- 1 $n \leftarrow$ (comprimento de P) - 1
- 2 **criar matriz** $M_{n \times n}$
- 3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $M[i, i] \leftarrow 0$;
- 4 **para** $i \leftarrow n - 1$ **até** 1 **faça**

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima
2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo

4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 9: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5   para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 10: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo

4. Obter uma solução ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 11: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo

4. Obter uma solução ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 12: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
8              $q \leftarrow M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$ 
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 13: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
8              $q \leftarrow M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$ 
9             se  $q < M[i, j]$  então
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 14: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
8              $q \leftarrow M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$ 
9             se  $q < M[i, j]$  então
10                  $M[i, j] \leftarrow q$ 
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 15: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ 
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
8              $q \leftarrow M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$ 
9             se  $q < M[i, j]$  então
10                  $M[i, j] \leftarrow q$ 
11 retorne  $M[1, n]$ 
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de
subestrutura ótima

2. Obter recursão

3. Algoritmo Bottom-UP
para valor ótimo4. Obter uma solução
ótima do problema

3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo

Algoritmo 16: Mult-Matrizes(P)

```
1  $n \leftarrow$  (comprimento de  $P$ ) - 1
2 criar matriz  $M_{n \times n}$ ,  $S_{n \times n}$ ;
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $M[i, i] \leftarrow 0$ ;
4 para  $i \leftarrow n - 1$  até  $1$  faça
5     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
6          $M[i, j] \leftarrow \infty$ 
7         para  $k \leftarrow i$  até  $j - 1$  faça
8              $q \leftarrow M[i, k] + M[k + 1, j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$ 
9             se  $q < M[i, j]$  então
10                  $M[i, j] \leftarrow q$ ;  $S[i, j] \leftarrow k$ ;
11 retorne  $M[1, n]$ ,  $S$ 
```

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
MatrizesMultiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Multiplicação de Sequência de Matrizes

PAA - Aula 17

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Multiplicação de
Sequência de
Matrizes

Multiplicações escalares de
duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 19: Imprimir(S, i, j)

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 20: Imprimir(S, i, j)

1 **se** $i = j$ **então**

|

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 21: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   | escreva " $A_i$ "
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 22: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   | escreva " $A_i$ "
3 senão
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 23: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   | escreva " $A_i$ "
3 senão
4   | escreva "("
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 24: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   | escreva " $A_i$ "
3 senão
4   | escreva "("
5   | Imprimir( $S, i, S[i, j]$ )
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 25: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   escreva " $A_i$ "
3 senão
4   escreva "("
5   Imprimir( $S, i, S[i, j]$ )
6   escreva ") × ("
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 26: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   escreva " $A_i$ "
3 senão
4   escreva "("
5   Imprimir( $S, i, S[i, j]$ )
6   escreva ") × ("
7   Imprimir( $S, S[i, j] + 1, j$ )
```


1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

4. Obter uma solução ótima do problema

Algoritmo 27: Imprimir(S, i, j)

```
1 se  $i = j$  então
2   escreva " $A_i$ "
3 senão
4   escreva "("
5   Imprimir( $S, i, S[i, j]$ )
6   escreva ") × ("
7   Imprimir( $S, S[i, j] + 1, j$ )
8   escreva ")"
```

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L.,
CORMEN T.H.

Algoritmos: teoria e prática, 3ed.

Editora Campus, ano 2012.

Aulas Passadas

Multiplicação de Sequência de Matrizes

Multiplicações escalares de duas matrizes

Exemplo

Problema

Programação Dinâmica

1. Propriedade de subestrutura ótima
2. Obter recursão
3. Algoritmo Bottom-UP para valor ótimo
4. Obter uma solução ótima do problema

Obrigado!