



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
Campus Russas

# RUS0300-Algoritmos em Grafos

## Aula 06: Grafos Planares

***Professor Pablo Soares***  
**2022.1**

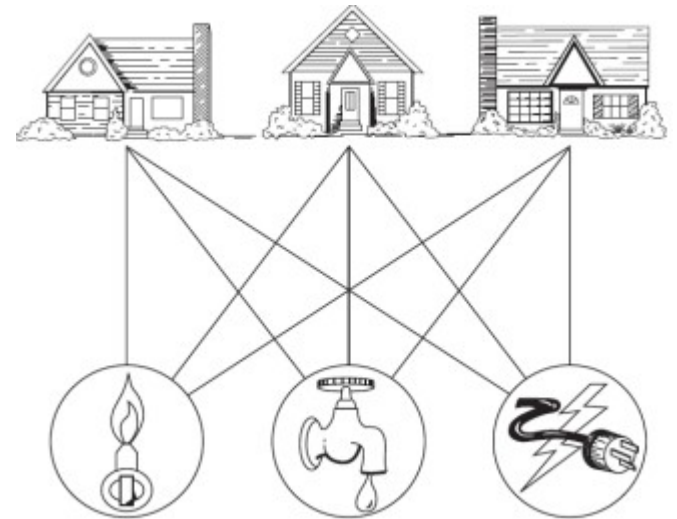
*“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”*

# Sumário

- Um primeiro exemplo
- Grafo Planar
  - Definição
  - Exemplos
- Fórmula de Euler
  - Teorema (Equação)
  - Corolário (Inequação)
- Aplicações

# Um primeiro exemplo

- Considere o problema de conectar três casas a cada uma de três infraestruturas (gás, água, energia) como mostrado na figura abaixo. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem?



$K_{3,3}$

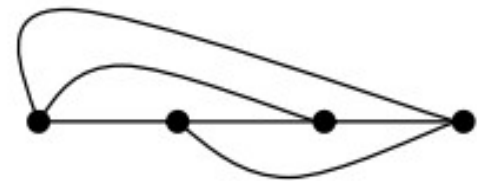
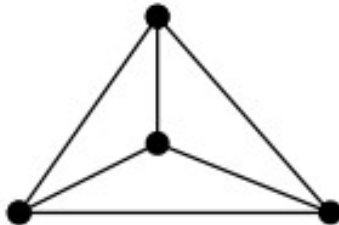
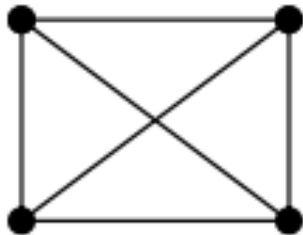
# Um primeiro exemplo

Dado um grafo  $G$ , é possível encontrar uma representação gráfica para o grafo tal que não haja cruzamento de arestas?



# Grafo Planar

- Exemplo  $K_4$

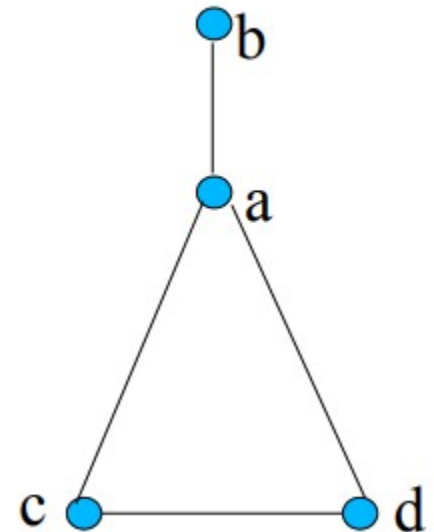
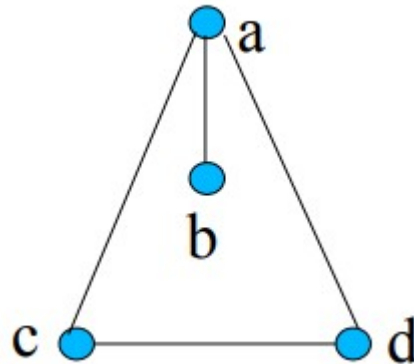
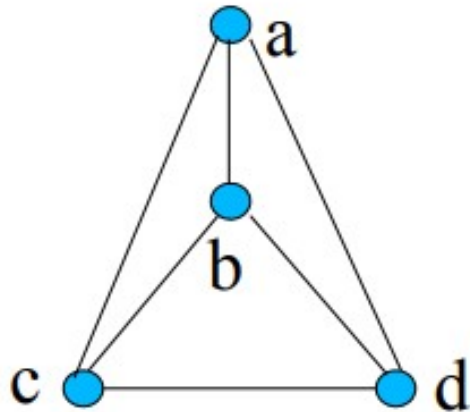


- Definição Grafo Planar

- Se puder ser representado graficamente no **plano** de tal forma que não haja **cruzamento** de suas arestas.
  - Caso contrário o grafo é dito **não-planar**.
- Grafo plano  $\rightarrow$  representação planar de um grafo planar
- Grafo Planar: Divide o plano em várias regiões
  - Uma delas é a região externa

# Grafo Planar

- Exemplo  $K_4$



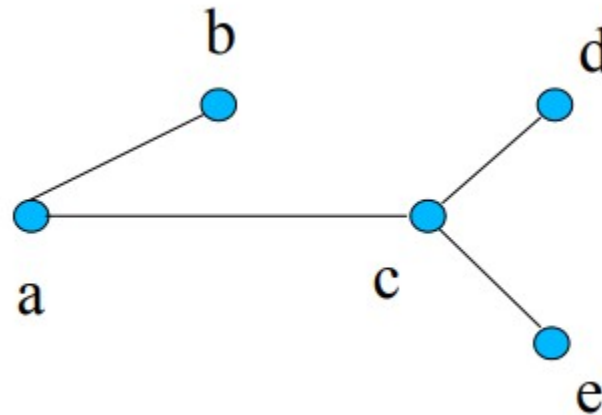
4 regiões:

R1: ac,cb,ba

R2: ab, bd,da

R3: bc, cd, db

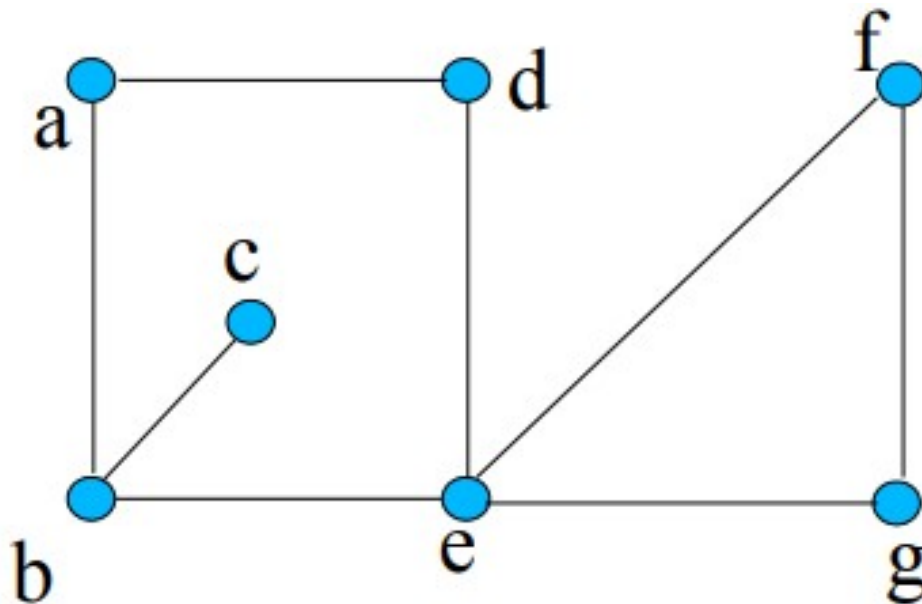
R4: ac, cd,da (externa)



# Fórmula de Euler

**Teorema:** Seja  $G$  um grafo planar simples com  $e$  arestas e  $v$  vértices. Seja  $r$  o número de regiões na representação planar de  $G$ .

$$r = e - v + 2$$



# Fórmula de Euler

**Exemplo:** Seja um grafo simples conexo e planar com 20 vértices, cada um com grau 3. Em quantas regiões o plano é dividido em uma representação planar desse grafo?

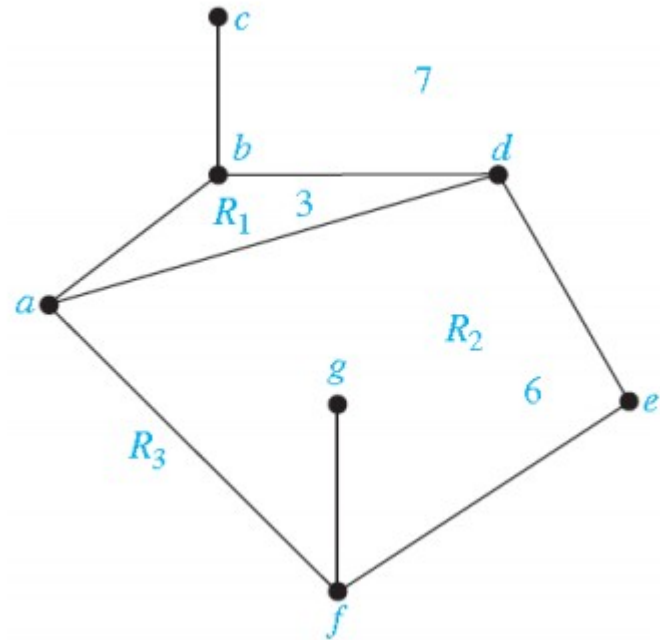
$$r = 12$$



# Inequação a partir da Fórmula de Euler

Grau de uma região ( $\deg(R)$ ): número de arestas no limite de uma região.

**OBS:** Toda aresta que tem um vértice de grau 1 contribui com dois para o grau da região.

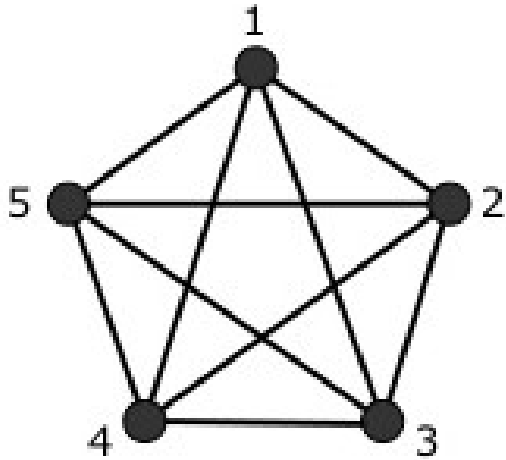


**Corolário:** Se  $G$  é um grafo simples conexo e planar com  $e$  arestas e  $v$  vértices, sendo  $v \geq 3 \rightarrow e \leq 3v - 6$ .

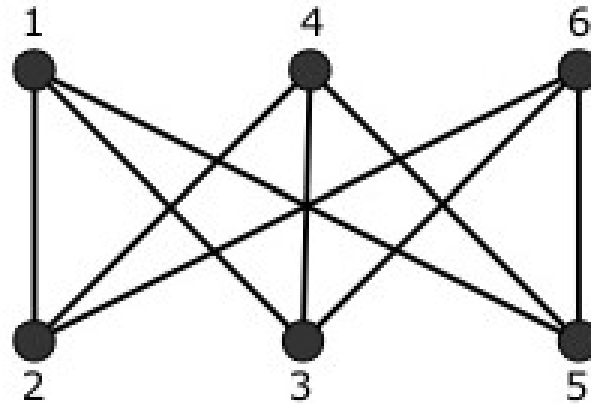
$$2e = \sum_R \deg(R) \geq 3r \Rightarrow r \leq \frac{2e}{3}$$

# Grafo Planar

- Grafos particulares em planaridade



$K_5$  não é planar



$K_{3,3}$  não é planar

- Teorema de Kuratowski

- Qualquer grafo não pode ser planar

- se contém um destes grafos como subgrafo
- se obtido através destes pela simples adição de vértices às arestas

# Aplicações





UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
Campus Russas

# RUS0300-Algoritmos em Grafos

## Aula 06: Grafos Planares

***Professor Pablo Soares***  
**2022.1**

*“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”*