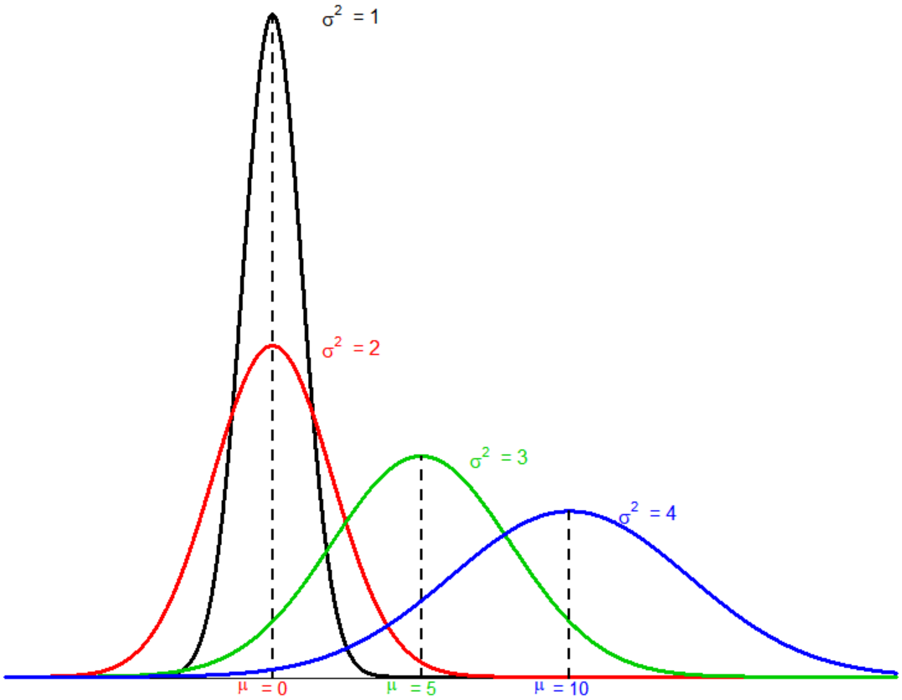
Universidade Federal do Ceará
Campus de Russas

Introdução à Estatística



Prof^a.: Rosineide F. da Paz

Russas - Ce
Agosto–2022

Sumário

Capítulo 1

Ciência Estatística

1.1 Introdução

A estatística consiste numa metodologia científica para obtenção, organização, redução, apresentação, análise e interpretação de dados oriundos das mais variadas áreas das ciências experimentais, cujo objetivo principal é auxiliar a tomada de decisão em situações de incerteza (Morettin & BUSSAB, 2017; Barbetta *et al.*, 2004). Informalmente, podemos definir a ciência estatística como um conjunto de técnicas utilizadas para estudar a condição de uma população usando informações obtidas a partir de dados observados.

De onde vêm os dados?

Dados são resultados de observações de algum fenômeno, podendo ser obtidos, para análise, a partir de observações espontâneas ou por meio de realização de experimentos planejados.

- Dados oriundos de observações de fenômenos quaisquer:
  - observar o desempenho natural de um novo equipamento.
    Nesse caso, o desempenho natural do equipamento é a característica que se deseja estudar.
- Dados oriundos de experimentos planejados:
  - observar o desempenho de um novo equipamento, alterando de modo proposital alguma característica.
    Nesse caso, o interesse é estudar o desempenho do equipamento levando em consideração a variação da característica alterada.

A estatística, muitas vezes, é de grande utilidade quando o método científico é utilizado para testar teoria ou hipóteses em muitas áreas do conhecimento. Esse método pode ser resumido nos seguintes passos.

1. Um problema é formulado em que, muitas vezes, uma hipótese precisa ser testada.
2. Para solucionar o problema, deve-se coletar informações que sejam relevantes, para isso pode-se formular um experimento. Em muitas áreas do conhecimento o planejamento do experimento não é simples, ou até mesmo não é possível, e uma estratégia pode ser a observação de algum fenômeno de interesse.
3. Os resultados do experimento podem ser utilizados para se obter conclusões, definitivas ou não.

4. Os passo 2 e 3 podem ser repetidos quantas vezes forem necessárias.

Exemplo 1.1.1. *Ao observar um equipamento que deveria estar operando, nota-se que este está parado.*

1. *Hipótese: falta de energia elétrica.*
2. *Faz-se a observação para verificar a hipótese.*
3. *Se não é falta de energia, outras observações e testes serão requeridos.*
4. *Os passos serão executados até que se tenha uma conclusão, que pode ser definitiva ou não.*

Muitas vezes, na aplicação do método científico a estatística é uma ferramenta indispensável, podendo ser requerida em todas as etapas.

Exemplo 1.1.2. *Ao observar um equipamento em operação, desconfia-se que este não está operando como deveria.*

1. *Hipótese: o equipamento está desregulado, neste caso pode-se optar por realizar um processo de amostragem de produtos fabricados pela máquina, então faz-se necessário o planejamento de um experimento para coleta das amostras (área da estatística).*
2. *Após o planejamento, o experimento é realizado e ferramentas da estatística podem ser aplicadas para obter alguma conclusão.*
3. *Caso os resultados sejam inconclusivos, novos experimentos poderão ser realizados.*
4. *Os passos podem ser executados até que se tenha uma conclusão.*

1.2 Etapas da Análise Estatística

A estatística pode ser aplicada usando várias etapas, dependendo do problema que se queira resolver. Os possíveis passos serão resumidos a seguir

Planejamento do Estudo

Aqui, deve ser definida a **população** de interesse, ou seja deve ser feita a **Formulação do Problema**.

Definição 1.2.1. *Em uma análise estatística, a* **população** *pode ser pensada como o conjunto que contém todos os indivíduos, fenômenos ou resultados que se pretende investigar,sendo bem delimitado por pelo menos uma característica compartilhada por todos os seus elementos.*

Após defini-la, ainda deve ser decidido se é possível ou viável obter os dados a partir de toda a população de interesse ou de parte dela. Muitas vezes a análise é feita a partir de **amostras** desta população.

Definição 1.2.2. **Amostra** *é qualquer subconjunto da população que se deseja investigar.*

Embora qualquer subconjunto da população caracterize uma amostra, nem todas são apropriadas para serem utilizadas para se tirar conclusões gerais sobre a população de interesse. A amostra utilizada deve, sobre tudo, ser representativa da população. Uma discussão sobre a representatividade de amostras é apresentada na Seção 6.

Exemplo 1.2.1. *Considere a situação em que se tem interesse em investigar a produção de lajotas durantes seis dias, devido a ocorrência de algum fenômeno durante esses dias. Para isso colhe-se uma amostra de tamanho 20 em cada dia de acompanhamento.*

- *População: todas as lajotas fabricadas durante os seis dias.*
- *Amostra: o subconjunto de* $6 \times 20 = 120$ *peças, selecionadas para estudo;*

Mesmo que a análise seja feita a partir de elementos de uma amostra, o interesse está sempre em decidir sobre características populacionais, ou seja, sobre características que descrevem o comportamento de todos os elementos na população. Assim, neste caso, trata-se de um problema de **Inferência Estatística**, tema a ser tratado na Seção 6.

Após selecionada a amostra, os elementos que a compõe são chamados de **Unidades Amostrais**, são essas unidades que darão origem aos dados observados.

Definição 1.2.3. Unidade amostral *é uma entidade (ou elemento) da população sobre a qual a característica de interesse é observada, essa característica é denominada* **variável**.

Uma unidade amostral pode ser um elemento da população ou pode ser formada por grupos de elementos, compondo o que é chamado de **conglomerado**.

Exemplo 1.2.2. *Seguem alguns exemplos.*

(i) *Pesquisa de opinião pública:*

- *a população é o total de indivíduos cuja opinião deve ser levada em conta;*
- *a amostra é uma parte dessa população;*
- *a variável de interesse é a opinião dos indivíduos investigados.*

(ii) *Sucessivos lançamentos de uma moeda:*

- *a população é formada por todos os resultados possíveis, cara ou coroa em cada lançamento, aqui a população é infinita;*
- *a amostra é formada pelos resultados obtidos em uma sequência finita de lançamentos;*
- *a variável pode ser, por exemplo, o número de caras obtido em uma sequência de lançamentos.*

(iii) *Investigar a porcentagem de lajotas defeituosas fabricadas em uma indústria, durante 6 dias, examinando 20 peças por dia.*

- *População: todos as lajotas fabricadas durante 6 dias.*
- *Amostra: o subconjunto de* $6 \times 20 = 120$ *peças, selecionadas para estudo;*
- *a variável é a proporção de lajotas defeituosas na amostra selecionada.*

Exemplo 1.2.3. *No no item (iii) do exemplo acima, a unidade amostral é o conjunto de lajotas selecionadas e em (ii) as sequências finitas de lançamentos da moeda. Conglomerados podem ser formados por:*

$\Rightarrow$ *quarteirões;*

$\Rightarrow$ *ruas (face dos quarteirões);*

$\Rightarrow$ *departamentos;*

⇒ *prateleiras;*

⇒ *caixas;*

⇒ *lotes de produtos etc.*

A etapa de planejamento é de suma importância, pois, caso sejam utilizadas amostras, se estas não são representativas da população de interesse, a análise pode conduzir a resultados equivocados, errôneos. Além disso, caso o experimento não seja realizado de forma adequada, os resultados podem ser afetados por fatores que não são levados em conta na análise, como correlação, influencias de variáveis que não foram levadas em conta, entre outros.

Crítica e Armazenamento dos Dados

Uma vez que foram observados os valores da variável de interesse (característica de interesse dos elementos da população) deve-se realizar uma crítica dos valores obtidos. Pois, muitas vezes, os dados contêm valores não realísticos, fruto de erros de digitação ou de observação. Esses valores devem ser retificados ou excluídos da análise, pois poderão comprometer a confiabilidade dos resultados. Além disso, os dados devem ser estruturados de forma a facilitar a análise pretendida. Geralmente os dados são organizados em planilhas, mas dependendo do quão grande seja o conjunto, ou banco de dados, uma estruturação mais robusta pode ser requerida.

Exploração dos Dados

Essa é uma das etapas mais importantes da análise estatística. Uma vez já feita a crítica dos valores, técnicas de uma divisão da estatística chamada **Estatística Descritiva** podem ser usadas para resumir, visualizar, analisar e interpretar os dados. Caso os dados sejam provenientes de amostras, é nesta fase que se busca compreender os dados, tirando informações que podem ser úteis na escolha das ferramentas estatísticas a serem utilizadas na fase posterior, na Inferência Estatística.

Inferência Estatística

Nesta etapa, busca-se descrever o comportamento de uma população por meio de amostras, usando para isto modelos probabilísticos. Por esta razão, faz-se necessário o entendimento da teoria das probabilidades, que é um ramo da matemática que busca quantificar a incerteza envolvida em fenômenos que envolvem aleatoriedade.

Resultados e Conclusões

Após a definição do problema, em que a população e a variável de interesse são definidas, em uma análise estatística, pode-se pensar nas etapas descritas na Figura 1.1, que mostra de forma esquemática e resumida as possíveis etapas de uma análise estatística, quando já está definida qual é a população de interesse. Note que existem casos em que apenas uma análise descritiva (exploratória) dos dados é suficiente para tirar conclusões a respeito da população de interesse. No entanto, se a população é maior do que o conjunto de unidades amostrais utilizadas para a obtenção dos dados, sob determinadas condições, podemos fazer uso das teorias de probabilidades para fazer inferência sobre as características desejadas da população (os parâmetros de interesse).

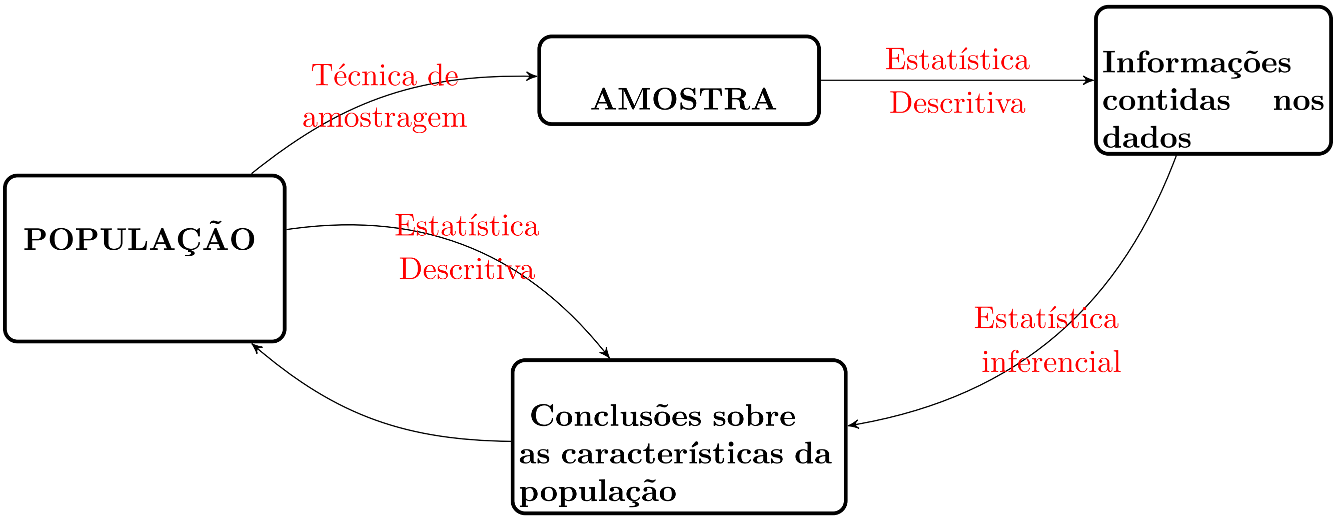


Figura 1.1: Análise estatística a partir da amostra ou da população.

Em uma análise estatística, independentemente de que seja utilizada uma amostra ou a população inteira para obter o conjunto de observações, uma análise exploratória dos dados fazendo uso de ferramentas da **estatística descritiva** é sempre requerida. Embora essa análise inicial ocorra de forma semelhante para população ou amostra, aqui são utilizadas notações diferentes para indicar se as ferramentas estão sendo aplicadas a dados oriundos de amostras ou de populações.

De um modo geral, todas as etapas requeridas para uma análise completa devem ser trabalhadas com muito cuidado a fim de que sejam utilizadas as ferramentas adequadas para solução do problema que se deseja resolver, pois a adequação das ferramentas estatísticas apo problema irá conduzir a resultados mais confiáveis, que podem ser usados com mais confiança na solução do problema que se deseja resolver.

Capítulo 2

Estatística Descritiva

Em qualquer análise estatística, deve-se, inicialmente, realizar uma análise exploratória dos dados, isso pode ser feito usando ferramentas da **Estatística Descritiva**. Nessa etapa da análise procura-se obter a maior quantidade possível de informações a partir dos dados observados. Se a análise é realizada tendo como base uma amostra da população de interesse, é nessa fase que são obtidas as informações que podem dar ideia sobre qual modelo probabilístico pode descrever melhor o fenômeno investigado, assim pode-se ter uma ideia do modelo a ser utilizado na fase posterior da análise.

2.1 Variável

Os dados são observações de variáveis ou fenômeno de interesse. Uma variável é uma quantidade ou atributo cujo valor pode variar de uma unidade de investigação para outra. Por exemplo, as unidades podem ser pessoas portadoras de dor de cabeça e a variável o tempo entre tomar um remédio e cessar a dor. Uma observação, ou resposta, é o valor assumido por uma variável em uma das unidades investigadas. A observação da variável em várias unidades dá origem aos dados observados.

Exemplo 2.1.1. *Um algoritmo pode ser executado para realizar a multiplicação de duas matrizes. Suponha que se deseja analisar a quantidade de tempo extra necessária para aumentar a matriz em uma dimensão, começando por duas matrizes* 1×1*, dois escalares iguais, em seguida para duas matrizes* 2×2*, duas matrizes de dimensão 2, iguais e composta pelo mesmo escalar adotado no inicio, e assim sucessivamente.*

- *População: todas as possíveis execuções do algoritmo para estas matrizes.*
- *Variável: tempo de execução do algoritmo nestas situações.*
- *Unidades amostrais: condições do algoritmo que serão observadas e que fornecerão os dados observados.*

Existem vários tipos de variáveis, sendo que inicialmente podemos dividi-las em qualitativas e quantitativas. As variáveis são **qualitativas** quando seus valores forem expressos por atributos que exprimem alguma qualidade. Este grupo pode ser subdividido em: qualitativa nominal e ordinal. A variável é nominal se os atributos que ela representa não têm uma ordenação, por exemplo, cor de cabelo, sexo de indivíduos etc, enquanto que as ordinais exprimem alguma ordenação, como por exemplo, opinião sobre a qualidade de um produto (péssimo, regular, ótimo). As variáveis **quantitativas:** exprimem quantidades ou mensurações. Essas variáveis também podem ser classificadas em dois grupos: contínua e discreta. As variáveis são discretas se assumem valores em um conjunto enumerável (contável), como por exemplo, número de carros que passam por um posto de pedágio em um intervalo de tempo. As variáveis contínuas assumem valores em um conjunto não-enumerável, ou seja, em um intervalo da reta, como por exemplo, alturas de pessoas de um determinado povoado. Veja um resumo das variáveis no esquema a seguir.

$$\text{Variável} \longmapsto \begin{cases} \text{Qualitativa} & \longmapsto \begin{cases} \text{nominal (Ex. Região de procedencia)} \\ \text{ordinal (Ex. Grau de instrução)} \end{cases} \\ \text{Quantitativa} & \longmapsto \begin{cases} \text{discreta (Ex. número de filhos)} \\ \text{contínua (Ex. Altura)} \end{cases} \end{cases}$$

Em geral, as medições dão origem às variáveis contínuas e as contagens ou enumerações às variáveis discretas.

2.2 Exercícios para a Seção 2.1

Exercício 2.2.1. *Classifique as seguintes variáveis em qualitativas (nominal/ordinal) ou quantitativa (discreta/contínua).*

a) *Classe social.*

b) *Número de clientes em um estabelecimento.*

c) *Salário mensal.*

d) *Cidade de nascimento.*

e) *Departamento que trabalha.*

f) *Número de filho.*

g) *Nível de escolaridade.*

h) *Número de processos analisados.*

i) *Opinião sobre a reforma agrária.*

j) *Opinião sobre atendimento de um estabelecimento.*

k) *Número de telefonemas recebidos.*

l) *Estado Civil.*

m) *Idade (anos).*

n) *Distância de sua casa à faculdade (marcado no velocímetro).*

o) *Número de idas ao cinema por semana.*

Exercício 2.2.2. *Declare se cada uma das seguintes variáveis é do tipo discreta ou contínua:*

1. *O número anual de suicídios no Brasil;*
2. *A concentração de chumbo em uma amostra de água;*
3. *A duração de tempo que um paciente sobrevive depois do diagnóstico de uma doença fatal;*
4. *O número de abortos prévios que uma mãe grávida teve.*

2.3 Estrutura dos Dados e Notação

Os dados, em geral, são dispostos em tabelas, ou planilhas, de modo que em cada coluna podem ser observados os valores observados de uma única variável. Assim, nas linhas da tabela estão os valores observados para cada variável. Essa estrutura simples permite que os dados possam ser analisados por meio de diversos softwares, tais como library calc, Rstudio, entre outros.

Exemplo 2.3.1. *Suponha, por exemplo, que um questionário foi aplicado aos alunos de um curso da UFC, fornecendo as seguintes informações: Idade em anos; Altura em metros; Peso em quilogramas; Estado Civil: Solteiro, casado, divorciado e viúvo. Os dados podem ser vistos na Tabela 2.1.*

O conjunto de informações disponíveis, após a tabulação do questionário ou pesquisa de campo, é denominado tabela de dados brutos e contém os dados da maneira que foram coletados inicialmente, após a crítica dos valores. Em nosso caso temos quatro variáveis envolvidas sendo uma qualitativa (estado civil) e as restantes quantitativas (idade, peso, altura).

2.3.1 Notação

Uma variável qualquer será denotada por uma letra maiúscula, como por exemplo X e uma sequência de valores observados dessa variável será denotada por letras minúsculas, de modo que:

- $x_1, \cdots, x_n$ representa uma sequência de valores observados da variável X em uma amostra e
- $x_1, \cdots, x_N$ representa uma sequência de valores observados da variável X em uma população inteira,

em que n denota o tamanho da amostra e N denota o tamanho da população.

2.4 Tabelas de Frequência

O objetivo da Estatística Descritiva é resumir as principais características dos dados observados fazendo uso de tabelas, gráficos e resumos numéricos, para se ter uma ideia do comportamento da variável estudada. Pois, quando se estuda uma variável, o maior interesse é conhecer o seu comportamento, sua frequência, ou sua **distribuição de frequência**.

Para se ter uma ideia dessa distribuição, podemos construir uma tabela de frequência para o conjunto de observações dessa variável.

Tabela 2.1: Dados de Estudantes.

Estado civil	Idade	Peso	Altura
solteiro	20	74	1,68
solteiro	18	46	1,6
solteiro	19	62	1,6
solteiro	19	64	1,7
solteiro	25	98	1,9
solteiro	24	68	1,72
solteiro	20	60	1,7
solteiro	35	71	1,68
solteiro	19	67	1,62
solteiro	20	79	1,87
solteiro	19	80	1,75
solteiro	20	65	1,74
solteiro	20	74	1,6
solteiro	20	65	1,7
solteiro	19	53	1,63
solteiro	19	60	1,67
solteiro	23	45	1,6
divorciado	26	70	1,7
solteiro	20	75	1,7
solteiro	21	75	1,7
solteiro	19	73	1,76
casado	46	70	1,7
solteiro	19	70	1,78
solteiro	28	58	1,75
solteiro	21	68	1,6
solteiro	23	62	1,7
solteiro	19	66	1,74
solteiro	20	74	1,8
solteiro	22	90	1,86
casado	58	98	1,8
solteiro	24	74	1,73
solteiro	20	70	1,7
casado	26	95	1,6
solteiro	20	46	1,54
solteiro	21	69	1,57
solteiro	19	57	1,57
solteiro	19	59	1,61
solteiro	17	58	1,49
solteiro	20	62	1,7
solteiro	20	60	1,65
solteiro	22	49	1,6

Exemplo 2.4.1. *Suponha que observamos as notas finais (por conceito) de 30 alunos de um determinado curso e obtivemos os seguintes valores:*

C B B B B A C B B A D D B C B B C B C B C C C B B C B B A C

A variável de interesse é o conceito (A, B, C ou D, em que D significa a reprova do aluno). Será que, de um modo geral, a turma teve um bom desempenho?
Para responder essa questão, devemos observar a frequência da variável "conceito". Essa frequência fica evidente se os dados forem dispostos em uma tabela apropriada. Em particular, para esse conjunto de dados, podemos utilizar uma tabela de frequência simples. A Tabela 2.3 apresenta a frequência absoluta (n_i) e a frequência relativa (f_i) da variável conceito. A frequência relativa indica a proporção de vezes que um determinado valor da variável aparece, por exemplo, note que o conceito B corresponde a 50% dos valores observados da variável. Em outras palavras, 50% dos estudantes obtiveram conceito B neste curso.

Tabela 2.3: Distribuição de frequência para a variável conceito.

Conceito	Frequência absoluta (n_i)	Frequência relativa (f_i)
A	3	$(3/30) = 0,1$
B	15	$(15/30) = 0,5$
C	10	$(10/30) \cong 0,33$
D	2	$(2/30) \cong 0,07$
Total (n)	30	1

Existem duas possibilidades para a construção de tabelas de frequência:

(i) tabelas de frequências simples;

(ii) e tabelas de frequências em intervalos de classes.

A tabela de frequência simples é usada para variáveis qualitativas e quantitativas discretas com poucos valores possíveis. A tabela em intervalos de classe é apropriada para variáveis quantitativas contínuas (ou discretas com muitos valores possíveis).

2.4.1 Tabela de Frequência Simples

Essa tabela é apropriada para variáveis qualitativas ou quantitativas discretas com poucos valores possíveis. O formato geral para esse tipo de tabela pode ser visto na Tabela 2.4, em que:

- $x_1, \cdots, x_k$ representam os valores distintos e ordenados que podem ser encontrados no conjunto de dados.
- $n_1, \cdots, n_k$ representam a contagem das repetições de cada valor distinto, e são denominadas frequências absolutas, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
- $f_1, \cdots, f_k$ são as frequências relativas (ou proporções).
- f_{ac} representa a frequência relativa acumulada, também podemos incluir uma coluna contendo os valores de frequências absolutas acumuladas (n_{ac}).
- n: número de observações (ou tamanho da amostra, caso sejam dados de uma população usamos N).
- k: número de classes na tabela de frequência.

Tabela 2.4: Formato geral para uma tabela de frequência simples.

Variável	n_i	f_i	f_{ac}
x_1	n_1	$f_1 = n_1/n$	n_1/n
x_2	n_2	$f_2 = n_2/n$	$(n_1 + n_2)/n$
...	...	...	...
x_k	n_k	$f_k = n_k/n$	$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)/n.$
Total	n	1	

Exemplo 2.4.2. *: Considerando os dados da variável Estado Civil do Exemplo 2.3.1, temos uma tabela de frequência simples com $k = 4$ classes, como pode ser visto na Tabela 2.5. Nesta tabela, acrescentamos a coluna de frequência relativa, definida por $f_i = n_i/n$, com isso podemos ver rapidamente que 90% dos estudantes entrevistados são solteiros.*

Tabela 2.5: Tabela de frequência para a variável Estado Civil.

Estado Civil	n_i	f_i
Solteiro	37	0,90
Casado	03	0,07
Divorciado	01	0,02
Viúvo	00	0,00

Considerando, novamente, os dados de estudantes apresentados na Tabela 2.3.1, vamos averiguar em torno de que valor tendem a se concentrar as estaturas obtidas, qual a menor ou qual a maior estatura, ou ainda, quantos alunos se acham abaixo ou acima de uma dada estatura. Observe que ao olhar diretamente para a tabela de dados brutos é difícil se ter uma ideia do comportamento da variável altura considerando o grupo inteiro de estudantes. Novamente podemos interpretar mais facilmente esse conjunto de dados fazendo uso de uma tabela de frequência. Considerando a Tabela de Frequência Simples 2.6, percebemos que esta se mostra muito longa e difere pouco da tabela de dados brutos. Assim, é conveniente montar outra estratégia para resumir esses dados em uma tabela de frequência.

Tabela 2.6: Tabela de frequência simples para a variável Altura.

Variável Altura	**Frequência absoluta** (n_i)
1,49	1
1,54	1
1,57	2
1,60	7
1,61	1
1,62	1
1,63	1
1,65	2
1,67	1
1,68	2
1,70	10
1,72	1
1,73	1
1,74	2
1,75	1
1,76	1
1,78	1
1,80	2
1,86	1
1,87	1
1,90	1

Observe que o processo empregado para variável Altura na Tabela 2.6 é inconveniente, pois exige muito espaço, mesmo quando o número de valores da variável (n) não é muito grande, e não nos esclarece muita coisa. Desta forma, o melhor seria formar agrupamentos. Assim, em vez de trabalharmos com os valores observados da variável, podemos formar intervalos que possam conter esses valores.

2.4.2 Tabela de Frequência em Intervalos de Classes

Agora vamos construir uma tabela de frequência apropriada para a variável altura dos estudantes. Neste caso temos uma variável que não tem uma natureza discreta, então, é natural não haver muitas repetições no conjunto de dados. Assim, devemos construir uma tabela em intervalos de classes da seguinte forma:

- Determina-se o número de classes, k, fazendo $k \approx \sqrt{n}$, se n é grande, podemos utilizar a regra de Sturges em que
$$k \approx 1 + 3,3 \times \log n,$$
ou ainda determinar esse valor conforme seja mais apropriado;
- definimos L_{inf} um valor menor ou igual ao valor mínimo ($L_{inf} \leq$ **valor mínimo**);
- definimos L_{sup} um valor maior ou igual ao valor máximo ($L_{sup} \geq$ **valor máximo**);
- Obtemos a amplitude das classes $AT = L_{sup} - L_{inf}$;
- finalmente, obtemos $\Delta = AT/k$, amplitude de cada classe.

Para os dados da variável Altura, vamos fixar $L_{sup} = 1,98$ e $L_{inf} = 1,48$ para determinar

$$AT = L_{sup} - L_{inf} = 1,98 - 1,48 = 0,50$$

Embora $n = 41$ e $\sqrt{41} \approx 6,4$, aqui vamos assumir (por conveniência) que $k = 5$ que fornece $\Delta = 0,50/5 = 0,1$. Logo, obtemos os seguintes **limites das classes**:

- $1,48 + 0,1 = 1,58 \quad \Rightarrow$ **classe**$_1$: $1,48 \dashv 1,58 = (1,48; 1,58]$

- $1,58 + 0,1 = 1,68 \quad \Rightarrow$ **classe**$_2$: $1,58 \dashv 1,68 = (1,58; 1,68]$

- $1,68 + 0,1 = 1,78 \quad \Rightarrow$ **classe**$_3$: $1,68 \dashv 1,78 = (1,68; 1,78]$

- $1,78 + 0,1 = 1,88 \quad \Rightarrow$ **classe**$_4$: $1,78 \dashv 1,88 = (1,78; 1,88]$

- $1,88 + 0,1 = 1,98 \quad \Rightarrow$ **classe**$_5$: $1,88 \dashv 1,98 = (1,88; 1,98]$

Observe que usamos duas notações para intervalos, sendo $1,48 \dashv 1,58$ um intervalo que vai desde 1,48 até 1,58 aberto em 1,48 e fechado em 1,58, assim como $(1,48; 1,58]$. Aqui vamos usar a notação com $\dashv$.

Para construir a coluna das frequências absolutas, a partir do hol (dados ordenados), contamos quantos elementos pertencem a cada intervalo de classe obtido. A distribuição de frequência para a variável Altura pode ser vista na Tabela 2.7 e os dados ordenados são:
(1,49; 1,54; 1,57; 1,57; 1,60; 1,60; 1,60; 1,60; 1,60; 1,60; 1,60; 1,61; 1,62; 1,63; 1,65; 1,67; 1,68; 1,68; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,70; 1,72; 1,73; 1,74; 1,74; 1,75; 1,75; 1,76; 1,78; 1,80; 1,80; 1,86; 1,87; 1,90).

Tabela 2.7: Frequência dos alunos segundo sua altura.

X	n_i	f_i	f_{ac}
$1,48 \dashv 1,58$	4	$4/41 \approx 0,10$	$4/41 \approx 0,10$
$1,58 \dashv 1,68$	14	$14/41 \approx 0,34$	$18/41 \approx 0,44$
$1,68 \dashv 1,78$	18	$18/41 \approx 0,44$	$36/41 \approx 0,88$
$1,78 \dashv 1,88$	4	$4/41 \approx 0,10$	$40/41 \approx 0,98$
$1,88 \dashv 1,98$	1	$1/41 \approx 0,02$	$1/41 = 1$
Total	41	1	

Note que, na Tabela 2.7, foi incluída uma coluna extra para uma sequência denominada **frequência relativa acumulada** (f_{ac}), essas frequências são importantes para qualquer tipo de variável que contém uma certa ordenação, pois a partir dessas frequências podemos tirar conclusões sobre quantos por cento dos valores estão acima ou abaixo de um determinado valor observado da variável. Como exemplo, podemos notar nesta tabela que aproximadamente 88% dos estudantes tem altura até 1,78 m, isso quer dizer que apenas 12% tem mais de 1,78 m.

Exceto pelas classes, a tabela de frequência em intervalos de classes é construída da mesma maneira que a tabela de frequência simples. Sua interpretação também é similar, apenas devemos levar em consideração que os valores possíveis não são precisos.

Exemplo 2.4.3. *A Tabela 2.8 categoriza visitas ao consultório de doenças cardiovasculares por duração de cada visita (em minutos). Uma duração de 0 (zero) minuto implica que o paciente não teve contato direto com o especialista.*

Tabela 2.8: Tempo (minutos) de duração de visita ao cardiologista de um grupo de 10614 pessoas.

Duração (minutos)	Número de visitas (n_i)	f_i	f_{ac}
0	390	0,036	0,036
$1 \vdash 6$	227	0,02	0,056
$6 \vdash 11$	1023	0,09	0,146
$11 \vdash 16$	3390	0,31	0,456
$16 \vdash 21$	4431	0,41	0,866
$21 \vdash 26$	968	0,09	0,956
$26 \vdash 31$	390	0,03	0,986
Duração≥ 31	185	0,015	1
Total	10614		

Observe que essa é uma situação em que o limite superior da última classe não é determinado na tabela. Observando a Tabela 2.8 podemos procurar responder as seguintes questões:

1. *Qual o tamanho da amostra?*
2. *Pode-se fazer a afirmação de que as visitas a consultórios de especialistas de doenças cardiovasculares têm duração mais frequente entre 16 e 21 minutos?*
3. *É razoável que a secretária agende uma nova consulta a cada 10 minutos?*
4. *Se não for satisfatório agendar uma nova consulta a cada 10 minutos, qual seria o tempo entre o agendamento de duas consultas que você julga satisfatório?*

Como uma tabela deve aparecer em um texto?

1. Uma tabela deve sempre ser apresentada com suas laterais abertas, se as laterais são fechadas trata-se de um quadro.
2. O título da tabela deve sempre aparecer no topo, não em baixo.
3. Na parte de baixo, pode-se apresentar a fonte e outras informações.
4. Tabelas são elementos flutuantes em um texto, ela pode ser apresentada em qualquer lugar com sua devida numeração.
5. Ao se fazer referência a uma tabela em um texto, deve-se usar sua numeração (ex. na Tabela 1 pode ser visto...).

2.4.3 Exercícios para a Seção 2.4

Exercício 2.4.1. *A massa (em quilogramas) de 17 trabalhadores de uma empresa com 100 funcionários está registrada a seguir:*

52	73	80	65	50	70	80	65	70	77	82	91	52	68	86	70	80

Com base nos dados obtidos, responda:

(a) *Qual é a variável nessa pesquisa? Ela é discreta ou contínua?*

(b) *Que frequências absolutas têm os valores 65 kg, 75 kg, 80 kg e 90 kg?*

Exercício 2.4.2. *A cantina de uma escola selecionou 50 alunos ao acaso e verificou o número de vezes por semana que eles compravam lanche, obtendo os seguintes resultados:*
0; 2; 2; 4; 3; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 1; 0; 1; 1 ; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 2; 2; 2; 0; 2; 2; 1; 1; 0; 2; 0; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 1; 2; 5; 4.

(a) *Construa uma tabela de distribuição de frequências absolutas, relativas e frequências relativas acumuladas com esses dados.*

(b) *Qual é a proporção de alunos que compravam pelo menos 2 lanches por semana?*

Exercício 2.4.3. *Um hospital tem o interesse em determinar a altura média dos pacientes de uma determinada área e relacioná-la com a incidência de determinada anomalia ortopédica. Foram selecionados 80 pacientes e as alturas (em m) podem ser encontradas abaixo, já em ordem crescente.*

1,56	1,61	1,63	1,64	1,66	1,67	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75	1,75	1,77	1,79	1,80	1,83
1,57	1,61	1,63	1,65	1,66	1,68	1,69	1,71	1,72	1,74	1,75	1,75	1,77	1,79	1,80	1,83
1,58	1,62	1,64	1,65	1,67	1,68	1,70	1,71	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77	1,79	1,81	1,86
1,58	1,62	1,64	1,66	1,67	1,68	1,70	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,78	1,79	1,82	1,87
1,60	1,63	1,64	1,66	1,67	1,68	1,70	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,79	1,80	1,82	1,89

Construa a tabela de distribuição de frequências por intervalos de classes, apresentando também a coluna da distribuição de frequências acumulada. Forneça pelo menos uma interpretação.

2.5 Gráficos de Frequência

Vimos que a distribuição de frequências pode ser representada em tabelas de frequências. Outra opção para representar essas frequências é o uso de gráficos. Os principais gráficos para representação de distribuição de frequências são:

1. Gráficos em barras (apropriado para variáveis qualitativas);

2. Gráficos em setores (apropriado para variáveis qualitativas);

3. Histograma (apropriado para variáveis quantitativas) e

4. Polígono de frequências absolutas.

Muitos outros tipos de gráficos são encontrados, no entanto, vários são versões diferentes dos tipos citados acima. Aqui, vamos nos limitar a discutir cada um desses.

2.5.1 Gráficos em barras

Os gráficos em barras são comumente usados para exibir distribuição de frequências para as variáveis qualitativas, como por exemplo a variável Estado Civil do Exemplo 2.3.1, como mostra a Figura 2.1. Podemos também representar a tabela de frequência simples apresentada na Figura 2.1 pelo Gráfico em Setores, como mostra a Figura 2.2 e 2.3. O gráfico em setores é comumente utilizado para representar parte de um todo. Geralmente apresenta-se em porcentagens, sendo também apropriado para variáveis qualitativas.

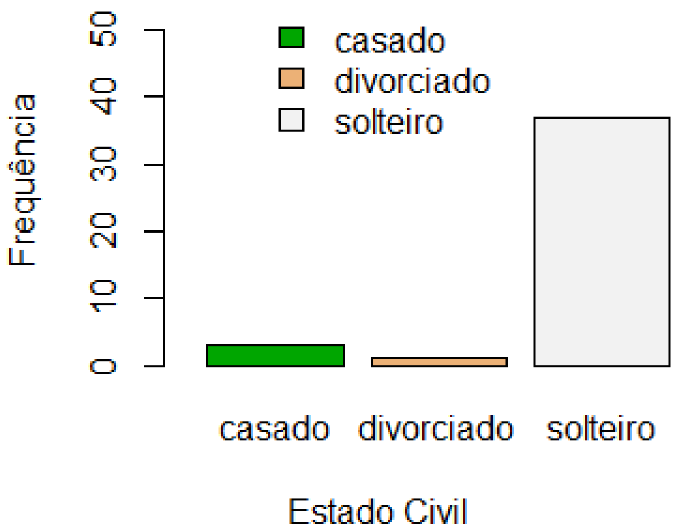


Tabela de frequência simples.

Estado Civil	n_i
Casado	3
Divorciado	1
Solteiro	37
Total	41

Figura 2.1: Gráfico (e tabela) de frequência de estudantes por estado civil.

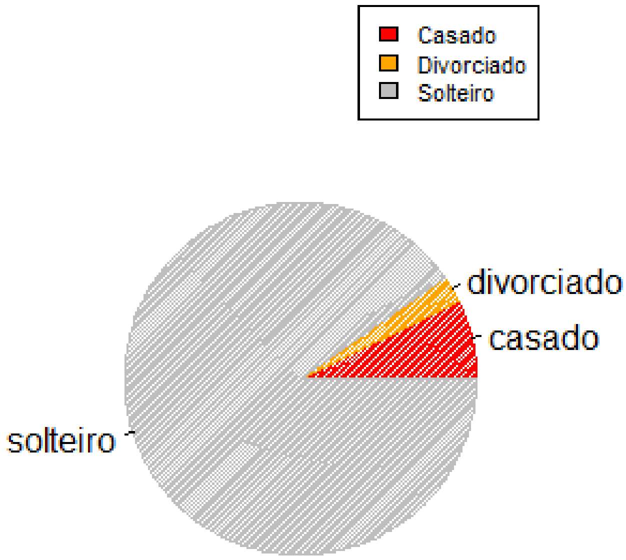


Figura 2.2: Frequência de estudantes por estado civil.

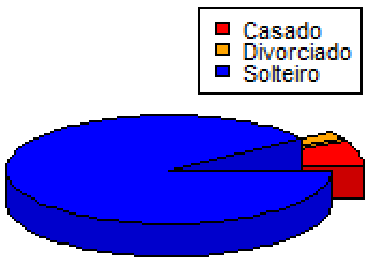


Figura 2.3: Frequência de estudantes por estado civil.

2.5.2 Histograma e o Polígono de Frequência

O histograma é um gráfico de barras contíguas apropriado para representar distribuições de frequências de variáveis quantitativas (contínuas ou discretas com muitos valores possíveis) e é um dos mais importantes gráficos no estudo de frequência de variáveis quantitativas. Sua construção é similar ao procedimento empregado para construir uma tabela de frequências em intervalos de classes.

As barras contíguas do histograma têm bases de mesma amplitude. Caso a tabela de frequência em intervalos de classes já tenha sido construída, as barras do histograma podem ser construídas de modo a serem proporcionais aos intervalos das classes dessa tabela. É importante que as áreas das barras sejam proporcionais as suas correspondentes frequências absolutas (n_i) ou relativas (f_i), sendo mais usual utilizar as frequências relativas (ou as porcentagens, $P_i = 100 \times f_i$).

Para construir o histograma de modo que as áreas das barras sejam dadas pelas frequências relativas, devemos obter a altura (h_i) de cada retângulo (ou barra) de modo que $h_i = f_i/\Delta$ (ou $h_i = n_i/\Delta$ caso seja utilizada a frequência absoluta), em que Δ é a amplitude das bases das barras, para $i = 1, \cdots, k$ com k sendo o número de barras (ou classes na tabela). Deste modo, quanto mais dados contiver a i-ésima classe, mais alto será o i-ésimo retângulo.

Como exemplo, vamos construir um histograma a partir da tabela de frequência para variável altura de um estudante, Tabela 2.8. Para isso, seguiremos os seguintes passos.

- vamos considerar k=5 classes com $L_{inf} = 1,48$ e $L_{sup} = 1,98$;
- obtemos $AT = 1,98 - 1,48 = 0,5$ é a amplitude total considerada;
- em seguida obtemos a largura das barras, ou amplitude, $\Delta = \frac{AT}{k} = \frac{0,5}{5} = 0,1$;
- com essa amplitude obtemos os limites das bases de cada barra de modo semelhante ao que foi feito na tabela de frequência;
- para cada amplitude, obtemos a altura da base de modo que $h_i = f_i/\Delta$.

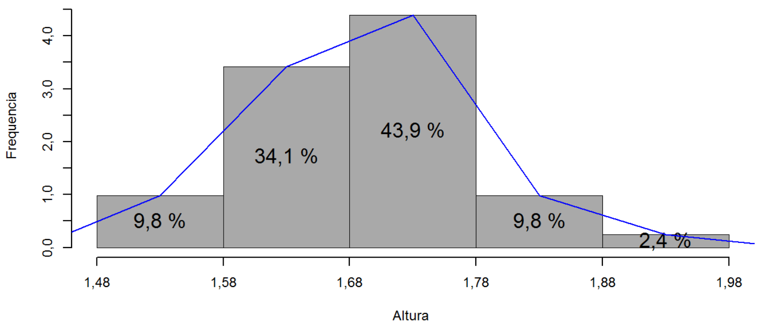


Figura 2.4: Frequência dos estudantes segundo altura.

Frequência dos alunos segundo altura.

X	n_i	f_i
$1,48 \dashv 1,58$	4	$4/41 \approx 0,10$
$1,58 \dashv 1,68$	14	$14/41 \approx 0,34$
$1,68 \dashv 1,78$	18	$18/41 \approx 0,44$
$1,78 \dashv 1,88$	4	$4/41 \approx 0,10$
$1,88 \dashv 1,98$	1	$1/41 \approx 0,02$
Total	41	1

A partir do histograma mostrado na Figura 2.4, podemos perceber que a grande maioria dos estudantes tem entre 1,60 e 1,80 metros de altura, correspondendo à 78% dos indivíduos desse grupo. Isso quer dizer que se sorteássemos ao acaso (aleatoriamente) um indivíduo desse grupo, teríamos 78% de chance de escolhermos alguém com a altura neste intervalo. Note que, pelo ponto médio do topo de cada barra, foi traçado uma linha (curva). Essa curva é denominada **polígono de frequência** e é uma ferramenta bastante útil para para dar uma ideia do comportamento da frequência de ocorrência da variável em questão. O histograma, assim como o polígono de frequência, é denominado densidade empírica da variável.

2.5.3 Exercícios para a Seção 2.5

Exercício 2.5.1. *Um hospital tem o interesse em determinar a altura média dos pacientes de uma determinada área e relacioná-la com a incidência de determinada anomalia ortopédica. Foram selecionados 80 pacientes e a distribuição das alturas (em m) é apresentada na Tabela 2.9. Construa o gráfico apropriado para essa distribuição.*

Tabela 2.9: Altura dos pacientes.

Altura	n_i	f_i	f_{ac}
1,56 ⊢ 1,61	5	0,06	0,06
1,61 ⊢ 1,66	13	0,16	0,22
1,66 ⊢ 1,71	18	0,22	0,45
1,71 ⊢ 1,76	21	0,26	0,71
1,76 ⊢ 1,81	15	0,19	0,90
1,81 ⊢ 1,86	5	0,06	0,96
1,86 ⊢ 1,91	3	0,04	1
Total	80	1	

Exercício 2.5.2. *Uma distribuição de frequências para os níveis séricos (em microgramas por decilitro) de zinco de 462 homens entre as idades de 15 a 17 anos é exibida na Tabela 2.10.*

Tabela 2.10: Nível sérico de zinco (mg/dl).

Nível	Número de homens
50 ⊢ 60	6
60 ⊢ 70	35
70 ⊢ 80	110
80 ⊢ 90	116
90 ⊢ 100	91
100 ⊢ 110	63
110 ⊢ 120	30
120 ⊢ 130	5
130 ⊢ 140	2
140 ⊢ 150	2
150 ⊢ 160	2
Total	462

1. *Complete a tabela de frequências. O que você pode concluir sobre essa distribuição de níveis séricos de zinco?*

2. *Elabore um histograma dos dados. Trace o polígono de frequência, observando a sua forma.*

Exercício 2.5.3. *A distribuição de frequência na Tabela 2.11 exibe os números de casos pediátricos de Aids registrados nos EUA entre 1983 e 1989.*

Tabela 2.11: Casos pediátricos de Aids registrados nos EUA.

Ano	Número de casos
1983	122
1984	250
1985	455
1986	848
1987	1412
1988	2811
1989	3098

Construa um gráfico de barras que mostre o número de casos por ano. O que o gráfico lhe conta sobre a Aids pediátrica nesse período?

Exercício 2.5.4. *Contou-se o número de erros de impressão da primeira página de um jornal durante 50 dias, obtendo-se os resultados: 8, 11, 8, 12, 14, 13, 11, 14, 14, 5, 6, 10, 14, 19, 6, 12, 7, 5, 8, 8, 10, 16, 10, 12, 12, 8, 11, 6, 7, 12, 7, 10, 14, 5, 12, 7, 9, 12, 11, 9, 14, 8, 14, 8, 12, 10, 12, 12, 7, 15.*

Represente os dados graficamente.

2.6 Medidas de Resumo

Muitas vezes é útil descrever numericamente as características dos dados observados a partir de variáveis quantitativas (resumos numéricos), uma vez que sua natureza permite o cálculo de algumas medidas que podem ser úteis para dar uma ideia do comportamento dessas variáveis.

- Dentre as medidas de resumo existentes, destacam-se:
  - as **medidas de posição,**
    - média,
    - moda e
    - separatrizes;
  - as **medidas de dispersão,**
    - variância e/ou desvio-padrão,
    - distância interquartílica e
    - coeficiente de variação.

As medidas de posição localizam a distribuição de frequência da variável no eixo das abscissas, enquanto as medidas de dispersão fornecem informações sobre o "espalhamento" dessa distribuição.

Vamos iniciar nossos estudos sobre os resumos numéricos começando pelas medidas de posição, as quais podem apresentar-se de várias formas, sendo que as mais importantes são:

- **medidas de tendência central**, são assim denominadas devido a tendência dos dados observados se agruparem em torno desses valores (média, moda e mediana);

- **separatrizes**, são assim chamadas porque separam, dividem um conjunto de dados ordenado em partes percentuais iguais (quartil, decil e percentil, genericamente quantís).

2.6.1 Medidas de Tendência Central

A Figura 2.5 mostra o histograma para a variável altura dos estudantes construído a partir dos dados brutos, apresentado no Exemplo 2.3.1. Neste gráfico podemos observar geometricamente a média desse conjunto de dados, que se localiza próxima ao centro da distribuição de frequência representada pelo histograma.

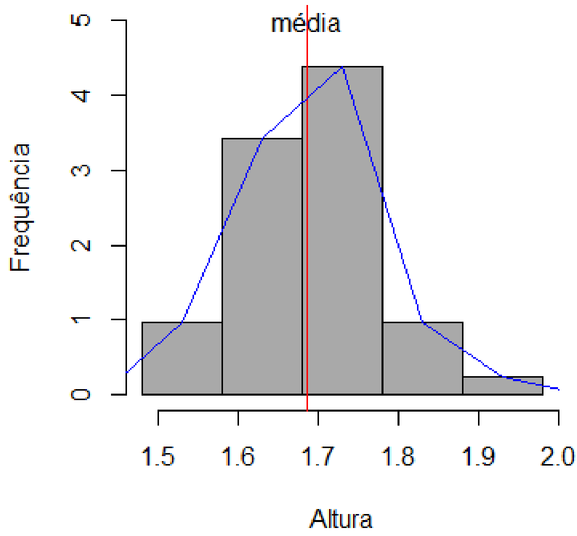


Figura 2.5: Frequência dos estudantes segundo a altura.

2.6.2 Média a partir da série de dados

Vamos considerar uma série de dados $(x_1, \ldots, x_n)$, ou $(x_1, \ldots, x_N)$, a partir desse conjunto podemos obter a média como:

- $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, para uma amostra
- $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$, para uma população inteira, sendo:
  - $\overline{x}$ a notação para média amostral,
  - μ a notação para média populacional,
  - n a quantidade de elementos na amostra e
  - N a quantidade de elementos na população.

2.6.3 Média a partir da tabela de frequência simples

Para exemplificar a obtenção da média a partir de uma tabela de frequência simples, consideremos a distribuição de frequência de uma amostra de 34 famílias de quatro filhos quanto ao número de filhos do sexo masculino apresentada na Tabela 2.12.

Tabela 2.12: Frequência das famílias por número de filhos

Número de meninos (x_i)	n_i	f_i
0	2	2/34
1	6	6/34
2	10	10/34
3	12	12/34
4	4	4/34
Total	34	1

O número médio de meninos por família é:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = 0.\frac{2}{34} + 1.\frac{6}{34} + 2.\frac{10}{34} + 3.\frac{12}{34} + 4\frac{4}{34} \approx 2,3.$$

Outra forma de resolução:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{(0 \times 2) + (1 \times 6) + (2 \times 10) + (3 \times 12) + (4 \times 4)}{34} = \frac{78}{34} \cong 2,3.$$

Genericamente, temos:

- $\overline{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} x_j n_j}{n}$ ou $\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} x_j f_j,$ para dados oriundos de amostras;
- $\mu = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} n_j x_j}{N}$ ou $\mu = \sum_{j=1}^{k} x_j f_j,$ para dados oriundos de populações;

  em que

  - x_j é o j-ésimo valor possível da variável (valores sem as repetições e ordenados),
  - n_j é a j-ésima frequência absoluta e
  - k é o número de classes na tabela de frequência.

2.6.4 Média a partir da tabela de frequência em intervalos de classe

A Tabela 2.13 representa a idade dos estudantes do curso de medicina veterinária da UFBA, ano/1993. A partir dessa tabela, vamos calcular a idade média desses alunos, para isso consideremos duas colunas extras na tabela: a coluna dos pontos médios das classes e a coluna dos pontos médios multiplicados pelas frequências absolutas ($x_j.n_j$).

Tabela 2.13: Frequência dos estudantes por altura.

Classe de Idade	n_j	Ponto médio das classes (x_j)	$x_j.n_j$
21 ⊢ 24	7	$\frac{21+24}{2}$=22,5	157,5
24 ⊢ 27	8	$\frac{24+27}{2}$ = 25,5	204
27 ⊢ 30	1	$\frac{27+30}{2}$=28,5	28,5
30 ⊢ 33	5	$\frac{30+33}{2}$ =31,5	157,5
33 ⊢ 36	7	$\frac{33+36}{2}$=34,5	241,5
Total	28	142,5	789

Neste caso, podemos aproximar a média da seguinte forma:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j.n_j}{n} = \frac{789}{28} \cong 28,18$$

Logo a idade média dos alunos é de aproximadamente 28,2 anos.

Então, pra o cálculo da média, convencionamos que todos os valores incluídos em um determinado intervalo da classe coincidem com seu ponto médio, assim determinamos a média aritmética ponderada aproximada por

- $\overline{x} = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j n_j}{n}$ ou $\overline{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j f_j,$ para dados oriundos de amostras;
- $\mu = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} n_j x_j}{N}$ ou $\mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j f_j,$ para dados oriundos de populações;

  em que:

  - x_j representa o ponto médio da j-ésima classe,
  - n_j é a j-ésima frequência absoluta e
  - k é o número de classes da tabela de frequência.

2.6.5 Moda de uma série de dados

A moda é o valor que ocorre com maior frequência em uma série de dados.

Exemplo 2.6.1. *Vamos obter a moda nos seguintes casos:*

- *considerando a série: (7 , 8 , 9 , 10 , 10 , 10 , 11 , 12),*
  neste caso a moda é igual a 10;
- *considerando a série: (3 , 5 , 8 , 10 , 12), neste caso a série é* ***amodal;***
- *considerando a série: (2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 7 , 7 , 7 , 8 , 9),*
  neste caso apresentam-se duas modas: 4 *e* 7*, a série é* ***bimodal.***

Em situações em que a série apresenta mais de duas modas, dizemos que a série é **multimodal**.

2.6.6 Moda a partir de uma tabela de frequência simples

Uma vez que os dados encontram-se agrupados em uma tabela de frequência simples, é possível obter imediatamente a moda: basta observar o valor da variável de maior frequência.

Exemplo 2.6.2. *Consideremos a distribuição relativa a 34 famílias de quatro filhos tomando para a variável o número de filhos do sexo masculino apresentada na Tabela 2.12 e repetida abaixo:*

Número de meninos	n_j
0	2
1	6
2	10
3	**12**
4	4
Total	34

*Observe que a moda da variável número de meninos é $M_o = 3$, conforme destacado acima. A classe destacada é denominada **classe modal**.*

2.6.7 Moda a partir de uma tabela de frequência em intervalos de classe

Se os dados estão agrupados em uma tabela de frequência em intervalos de classe, devemos aproximar a moda dentro da classe modal. Aqui faremos essa aproximação de modo similar ao que foi feito no caso da média, ou seja, obter o ponto médio da classe.

Exemplo 2.6.3. *Veja a seguir os dados de idade dos alunos do curso de medicina veterinária da UFBA, ano/1993.*

Classe de Idade	n_i	x_i
$21 \vdash 24$	7	–
$\mathbf{24 \vdash 27}$	**8**	**25,5**
$27 \vdash 30$	1	–
$30 \vdash 33$	5	–
$33 \vdash 36$	7	–

Para esse exemplo, a moda é $M_o = 25,5$, ou seja, há uma maior quantidade de alunos com idade de 25,5 anos, aproximadamente.

2.6.8 Mediana de uma série de dados

A média, embora seja uma medida de tendência central muito utilizada, muitas vezes não descreve de maneira adequada um conjunto de dados, pois essa é uma medida que pode ser afetada por algumas características que os dados podem conter, como por exemplo a presença de assimetria acentuada na distribuição dos dados, ou presença de pontos que destoam dos demais, seja para cima ou para baixo. Nessas situações é importante que sejam obtidas outras medidas que não sejam afetadas por essas características. Uma medida que pode ser empregada nessas situações é a mediana, pois esta não é afetada por assimetria ou por pontos atípicos.

A mediana de um conjunto de valores ordenados $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$, é o valor situado de tal forma no conjunto, que o separa em dois subconjuntos, de mesmo número de elementos. Aqui, $x_{(1)}$ corresponde ao **valor mínimo** da série e $x_{(n)}$ corresponde ao **valor máximo** da série de dados.

A mediana é considerada uma separatriz, por dividir a distribuição ou o conjunto de dados em duas partes iguais.

Para a obtenção da mediana de um conjunto de dados observados de uma variável X, devemos considerar:

$$Med(X) = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{se n é ímpar;} \\ \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{se n par.} \end{cases}$$

Exemplo 2.6.4. *Vamos considerar os exemplos a seguir.*

Para a série $X = (5, 2, 6, 13, 9, 15, 10)$, *temos a seguinte ordenação:*

$$(\underbrace{2, 5, 6,}_{3\ elementos} \boxed{9,} \underbrace{10, 13, 15}_{3\ elementos}) \Rightarrow Med(X) = 9$$

Para a série $Y = (1, 3, 0, 0, 2, 4, 1, 3, 5, 6)$, *temos a ordenação:*

$$(\underbrace{0, 0, 1, 1,}_{4\ elementos} \boxed{2,3,} \underbrace{3, 4, 5, 6}_{4\ elementos}) \Rightarrow Med(Y) = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

2.6.9 Mediana a partir da tabela de frequência simples

Para obtenção da mediana a partir de uma tabela de frequência, vamos olhar, inicialmente para a coluna das frequências relativas acumuladas, pois a mediana é um valor que contém abaixo dele 50% dos dados, com isso podemos encontrar facilmente a classe mediana diretamente da tabela.

Exemplo 2.6.5. *Consideremos a distribuição relativa a 34 famílias de quatro filhos tomando para a variável o número de filhos do sexo masculino:*

Número de meninos	n_i	f_i	f_{ac}
0	*2*	*2/34*	*2/34 ≈ 0,06*
1	*6*	*6/34*	*8/34≈0,24*
2	**10**	**10/34**	**18/34≈0,53**
3	*12*	*12/34*	*30/34≈0,88*
4	*4*	*4/34*	*34/34=1*
Total	*34*	*1*	

- *Para se obter a mediana, observe que a até a terceira classe acumulam-se mais de 50% dos dados (53% dos dados), sendo assim, esta é a classe que contém a mediana com sobra, deste modo não importa se o total de elementos na série é par ou ímpar, a mediana é o valor que está nessa classe.*

- *Assim, a mediana é dada por* $Med = 2$ *meninos.*

Se n é par e existe uma classe que concentra até ela exatamente 50% dos dados, devemos obter a média aritmética simples entre o valor da classe mediana e o valor imediatamente posterior.

Exemplo 2.6.6. *Como exemplo, veja a distribuição de frequência abaixo:*

x_i	n_i	f_{ac}
12	1	1/8
14	2	3/8
15	1	**4/8=0,5**
16	**2**	**6/8=0,75**
17	1	7/8
20	1	8/8
Total	8	1

Na tabela acima, tem-se $f_{ac_3} = 0,5$ com n par, assim sabemos que existem dois valores diferentes ocupando a posição central dos dados ordenados, logo:

$$Med = \frac{15 + 16}{2} = 15,5.$$

2.6.10 Mediana a partir da tabela de frequência em intervalos de classe

A obtenção da mediana a partir de dados agrupados em uma tabela de frequência em intervalos de classes é feita, primeiramente, localizando a classe que contém a mediana, assim como no caso de uma tabela de frequência simples. No entanto, o valor da mediana não pode ser obtido exatamente, exigindo, assim, uma aproximação dentro do intervalo que contém esse valor. Essa aproximação será feita aqui de modo a levar em consideração a distribuição de frequência por meio da relação:

$$Med = L_i + \left[\frac{\left(0,5 - f_{ac(ant)}\right)}{f_i}\right] \times \Delta$$

em que,

- L_i: limite inferior da classe mediana,
- $f_{ac(ant)}$: frequência relativa acumulada da classe anterior à classe mediana,
- Δ: amplitude da classe e
- f_i é a frequência relativa da classe mediana.

Exemplo 2.6.7. *A tabela a seguir representa a idade dos alunos do curso de medicina veterinária da UFBA, ano/1993.*

Classe de Idade	n_i	f_{ac}
$21 \vdash 24$	7	7/28
24 ⊢ 27	***8***	***15/28 ≈ 0,54***
$27 \vdash 30$	1	16/28
$30 \vdash 33$	5	21/28
$33 \vdash 36$	7	28/28
Total	28	1

Aqui, a classe que contém a mediana é a segunda, pois mais de 50% dos valores estão acumulados até essa classe. Para este exemplo, temos:

- $L_i = 24$,
- $f_{ac(ant)} = \frac{7}{28} = 0,25$,
- $\Delta = 27 - 24 = 3$,
- $n_i = 8$ *e*
- $n = 28$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
Med &= L_i + \left[\frac{\big(0,5 - f_{ac(ant)}\big)}{f_i}\right] \times \Delta \\
&= 24 + \frac{(0,5 - 0,25)}{8/28} \times 3 \\
&= 24 + \frac{21}{8} = \boldsymbol{26{,}63}.
\end{aligned}
$$

2.6.11 Separatrizes

Separatrizes (ou **quantis**) são os valores que dividem a série de dados ordenados $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ em partes iguais. Vimos que a mediana divide a série dados ordenados em duas partes iguais, então a mediana é uma separatriz. No entanto, essa não é a única medida relevante que divide uma série de valores. Temos outras separatrizes também importantes. Como os **quartis**, os **decis** e os **percentis**.

- Os **quartis** são os valores da variável que dividem uma série de dados ordenados em quatro partes iguais, portanto são três medidas que são denotadas por Q_1 (primeiro quartil), Q_2(segundo quartil) e Q_3(terceiro quartil).
  - o primeiro quartil, Q_1, é o valor que divide aproximadamente, a quarta parte (25%) das observações abaixo dele, e os 75% restantes, acima dele.
  - O segundo quartil é exatamente a mediana ($Q_2 = Med$).
  - O terceiro quartil, Q_3, tem aproximadamente os três quartos (75%) das observações abaixo dele e os demais 25% acima.

A estratégia para a obtenção dos quartis é semelhante aquela empregada para se obter a mediana, ou seja, primeiramente temos que encontrar a classe que contém o quartil desejado. Para isso, basta observar as frequências relativas acumuladas. Com isso, podemos usar as equações:

$$
p_j = \frac{j}{4}, \text{ para } j = 1, 2, 3 \tag{2.6.1}
$$

$$
Q_j = L_i + \left[\frac{\big(p_j - f_{ac(ant)}\big)}{f_i}\right] \times \Delta \tag{2.6.2}
$$

com:

- L_i é o limite inferior da classe definida por p_j;
- $f_{ac(ant)}$ é a frequência relativa acumulada da classe anterior à que contém o j-ésimo quartil;
- Δ é a amplitude da classe e
- f_i é a frequência da classe definida por p_j.

2.6.12 Obtenção de medidas descritiva a partir do histograma

O histograma é um importante gráfico utilizado para representar a distribuição de frequência de variáveis contínuas ou discretas com muitos valores possíveis. Esse gráfico permite que se tenha um boa ideia sobre as medidas descritivas descritas na seção anterior, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.6.8. *Com base no histograma que traz os comprimentos (em cm) de 36 componentes eletrônicos, pode-se obter uma aproximação para:*

(a) *a média, a moda, o desvio-padrão, o coeficiente de variação e*

(b) *os quartis;*

(c) *A partir das informações obtidas, será que a média é uma boa medida de tendência central?*

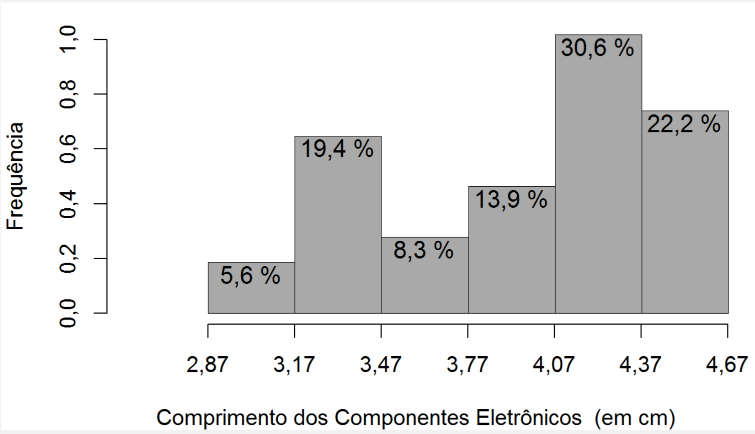


Figura 2.6: Frequência **da variável Comprimento dos Componentes Eletrônicos**, em 36 observações.

Resolução

(a) Amplitude de classes: $\Delta = 3,17 - 2,87 = 0,3$. Agora devem ser obtidos os pontos médios das $k = 6$ classes, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, com o segue: $x_1 = \frac{2,87+3,17}{2} = 3,02$ $x_2 = \frac{3,17+3,47}{2} = 3,32$; $x_3 = \frac{3,47+3,77}{2} = 3,62$; $x_4 = \frac{3,77+4,07}{2} = 3,92$; $x_5 = \frac{4,07+4,37}{2} = 4,22$; $x_6 = \frac{4,37+4,67}{2} = 4,52$.

Assumindo que os dados vem de uma população, tem-se que $fi = \frac{n_i}{n}$, então:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{N} = \sum_{i=1}^{6} x_i \left(\frac{n_i}{N}\right) = \sum_{i=1}^{6} x_i f_i.$$

Média: $\mu = (3,02)(0,056) + (3,32)(0,194) + (3,62)(0,083) + (3,92)(0,139) + (4,22)(0,306) + (4,52)(0,222) = 3,9533$.

Os valores requeridos podem ser organizando em uma tabela para facilitar os cálculos.

x_i	f_i	$x_i \times f_i$
3,02	0,056	0,16912
3,32	0,194	0,64408
3,62	0,083	0,30046
3,92	0,139	0,54488
4,22	0,306	1,29132
4,52	0,222	1,00344
Total		3,9533

Desse modo, tem-se aproximações para as medidas de resumo: $\mu = 3,9533$ e $M_o = 4,22$.

(b) Os quartis, os limites para identificação de outliers e o boxplot, Existem outliers nesse conjunto de dados?

- $Q_1 = 3,47 + \frac{0,25-0,25}{f_i} \times 0,3 = 3,47$
- $Q_2 = Med = 4,07 + \frac{0,50-0,472}{0,306} \times 0,3 = 4,1$
- $Q_3 = 4,07 + \frac{0,75-0,472}{0,306} \times 0,3 = 4,3$

(c) Sim, existem pelo menos uma evidência de que a média é uma boa medida de tendência central, pois a distância entre média e mediana é $4,1 - 3,95 = 0,15$, que, nesse caso, pode ser considerada pequena.

2.6.13 Decis e Percentis

- Se dividimos o conjunto em dez partes iguais temos os **decis**.
- Quando dividimos em cem partes, temos os **percentis**,

Para a obtenção dos decis(D_j) e percentis (P_j) podemos utilizar as seguintes expressões:

$$p_j = \frac{j}{10}, \text{ para } j = 1,2,3,..,9 \text{ (para os decis)}$$
$$p_j = \frac{j}{100}, \text{ para } j = 1,2,3,..,99 \text{ (para os percentis)}$$
$$D_j = P_j = L_i + \left[\frac{\left(p_j - f_{ac(ant)}\right)}{f_i}\right] \times \Delta$$

Observe que existem relações entre quartis, decis e percentis. $Q_1 = P_{25}$, $Q_2 = D_5 = P_{50}$, $Q_3 = P_{75}$, por exemplo.

2.6.14 Desenho Esquemático ou Boxplot

O desenho esquemático, também conhecido como Boxplot, é um gráfico bastante útil na análise do comportamento de uma variável a partir de um conjunto de valores observados. Dentre as vantagens do boxplot, podemos destacar:

- a detecção rápida de uma possível assimetria na distribuição de frequência dos dados;
- a capacidade de fornecer uma ideia sobre a existência de possíveis pontos atípicos (muito além ou muito aquém dos demais pontos);
- a exibição dos quartis.

Para sua construção, vamos obter mais duas medidas para decidir quais são os pontos atípicos da série de dados. Vamos chamar essas medidas de **limite superior** (l_{sup}) e **limite inferior** (l_{inf}).

Para obtê-los, fazemos:

$$l_{inf} = Q_1 - \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1) \text{ e}$$
$$l_{sup} = Q_3 + \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1).$$

Com essas medidas, podemos obter os valores que estão muito aquém de Q_1 ou muito além de Q_3. Tais pontos são chamados de **pontos discrepantes (ou aberrantes, ou ainda outliers)**.

Após a obtenção dos limites (l_{inf} e l_{sup}), podemos construir o boxplot seguindo os seguintes passos:

1. No eixo cartesiano, constrói-se um retângulo na vertical de modo que:
   - A base no retângulo corresponde ao primeiro quartil (Q_1) e
   - o topo (lado superior) corresponde ao terceiro quartil (Q_3);
2. divide-se o retângulo em duas partes por meio de um segmento de reta orientado pela mediana;
3. Acima do retângulo traça-se um segmento orientado por l_{sup}
4. Abaixo do retângulo também é apresentado um traço orientado por l_{inf}
5. acima de l_{sup} e abaixo de l_{inf}, marca-se, geralmente com os pontos discrepantes.

Para ilustrar a construção do desenho esquemático, considere os dados de alturas de estudantes visto na Tabela 2.1. A partir da variável Altura, desse conjunto de dados, construiu-se o boxplot mostrado na Figura 2.7. Em azul, veja a indicação da obtenção da escala desse gráfico a partir dos quartis e dos limites para identificação de pontos discrepantes. Note que, nesse gráfico, fica bastante evidente a assimetria dos dados, ou seja, existem um espalhamento maior de medidas de altura abaixo da mediana e acima do primeiro quartil. Com base nas medidas obtidas, é possível notar que não existem pontos atípicos, ou seja, todos os estudantes tem estatura próxima da mediana.

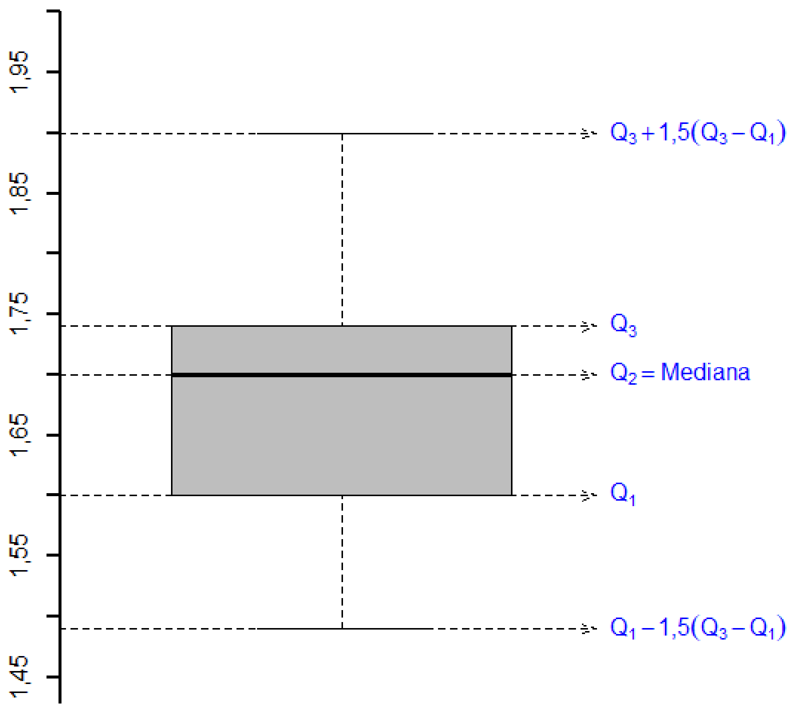


Figura 2.7: Gráfico para a frequência de ocorrência da variável Altura dos dados de estudantes apresentados na Tabela 2.1.

A Figura 2.8, mostra o desenho esquemático para os dados de médias de notas da prova Brasil para os anos finais do ensino fundamental do ano de 2015 dos municípios do estado do Ceará. Neste gráfico podemos perceber que não existe assimetria nos dados, pois a mediana se encontra no centro do retângulo. Além disso, observamos que existem pontos acima e abaixo dos limites traçados para identificar outliers, indicando presença de pontos atípicos, ou seja, existem municípios cujas médias estão muito acima, ou muito abaixo da nota mediana.

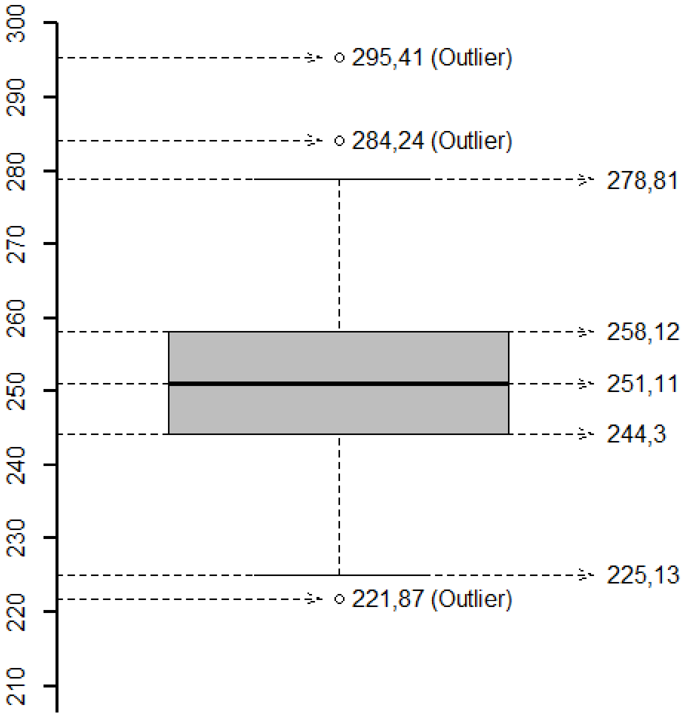


Figura 2.8: Boxplot para os dados de desempenho na prova de português dos estudantes do estado do Ceará na prova Brasil de 2015.

O Boxplot é um gráfico muito útil quando o objetivo é comparar as frequências de ocorrências de duas variáveis em um conjunto de dados. Veja na Figura 2.9 os desenhos esquemáticos para as variáveis Nota da Prova de Português e Nota da Prova de Matemática. Nessa figura é possível observar que na matemática existem mais pontos atípicos acima da mediana do que em português, ou seja, é possível observar uma quantidade maior de estudantes se destacando em matemática do que em português.

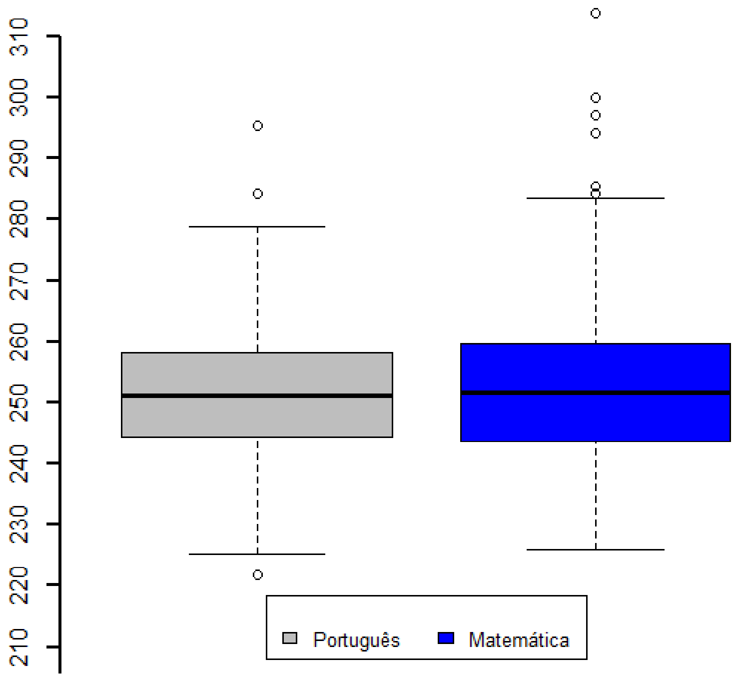


Figura 2.9: Gráficos para a frequência das variáveis Notas da prova de Português e de Matemática dos estudantes dos anos finais do ensino fundamental do estado do Ceará na prova Brasil de 2015.

2.6.15 Exercícios para a Seção 2.6

Exercício 2.6.1. *Observe a Figura 2.10, em que é mostrada uma série de dados agrupados em intervalos de classe. Vamos determinar geometricamente as medidas de resumo (média, moda, mediana e os demais quartis) utilizando essa figura.*

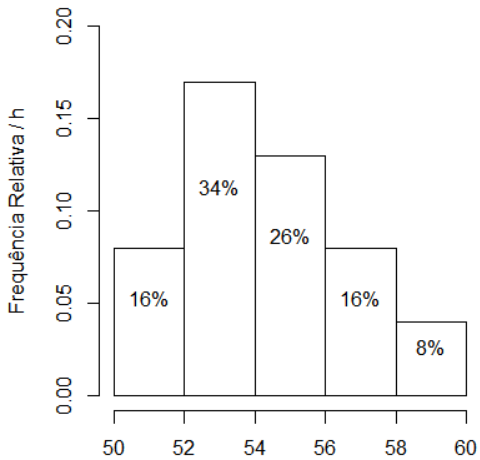


Figura 2.10: Intervalos de tempo (em minutos) de montagem de 50 equipamentos.

Usando o histograma da Figura 2.10, pode ser obtida uma aproximação para o primeiro quartil dada por:

$$Q_1 \approx 52,5.$$

Usando o histograma, obtenha uma aproximação para os demais quartis, para média e moda. Construa o boxplot e interprete-o.

Exercício 2.6.2. *Considere novamente a distribuição de frequências para os níveis séricos (em microgramas por decilitro) de zinco de 462 homens entre as idades de 15 a 17 anos que é exibida na Tabela 2.14.*

Tabela 2.14: Nível sérico de zinco (mg/dl).

Nível	Número de homens
$50 \vdash 60$	6
$60 \vdash 70$	35
$70 \vdash 80$	110
$80 \vdash 90$	116
$90 \vdash 100$	91
$100 \vdash 110$	63
$110 \vdash 120$	30
$120 \vdash 130$	5
$130 \vdash 140$	2
$140 \vdash 150$	2
$150 \vdash 160$	2
Total	462

1. *Obtenha aproximações para as medidas de tendência central e os quartis.*

2. *Construa o boxplot e diga se existem pontos discrepantes.*

Exercício 2.6.3. *O gráfico apresentado na Figura 2.11 representa a variável nível de potássio no plasma em miliequivalentes (mEq), foram examinadas 20 pessoas.*

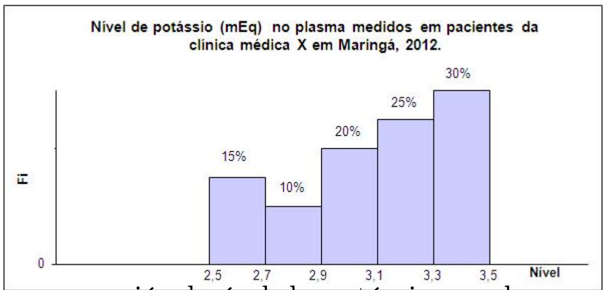


Figura 2.11: Histograma para a variável nível de potássio no plasma em miliequivalentes (mEq).

a) Calcule os quartis (Q_1, Q_2 e Q_3). Interprete-os.

b) Qual a porcentagem exata de nível de potássio acima de 3,15 mEq?

c) Faça o boxplot para esse conjunto de dados e interprete-o.

Exercício 2.6.4. *Num determinado país a população feminina representa 53% da população total. Sabendo-se que a idade média (média aritmética das idades) da população feminina é de 38 anos e a da masculina é de 35 anos. Qual a idade média da população?*

Exercício 2.6.5. *Obtenha o segundo e o terceiro quartil dos dados de montagem de equipamentos representados pelo histograma apresentado na Figura 2.10.*

Exercício 2.6.6. *Os dados do quadro a seguir mostram os diâmetros abdominais em centímetros de 36 indivíduos adultos.*

a) Construa a tabela de distribuição de frequência em intervalos de classes, apresentando as frequências absolutas, as frequências relativas, as frequências acumuladas e o ponto médio de cada classe.

59	60	60	60	62	63	63	63	63	64	66	66
66	68	69	69	69	70	71	74	75	75	77	78
81	85	86	86	87	88	88	91	95	101	107	120

Fonte: Academia Aquarius

b) Obtenha a média a partir da tabela de frequência.

c) A média é uma boa medida de tendência central para este conjunto de dados? Justifique.

Exercício 2.6.7. *Os dados a seguir representam a fração de colesterol em miligramas por decilitro (mg/dl) fornecida pelo laboratório Vida e Saúde, de 9 indivíduos do sexo feminino.*

27,0	22,0	24,0	30,2	14,5	30,0	43,0	29,0	53,0

a) Qual o nível médio de colesterol deste grupo de indivíduos?

b) Qual o nível mediano e qual a moda?

Exercício 2.6.8. *Um hospital tem o interesse em determinar a altura média dos pacientes de uma determinada área e relacioná-la com a incidência de determinada anomalia ortopédica. Foram selecionados 80 pacientes e as alturas (em m) podem ser encontradas na tabela abaixo.*

Altura dos pacientes

1,72 1,78 1,87 1,86 1,79 1,79 1,83 1,74 1,64 1,62 1,75 1,65 1,75 1,58 1,63 1,77 1,64 1,68 1,66 1,82
1,68 1,80 1,74 1,76 1,74 1,72 1,75 1,89 1,73 1,76 1,72 1,71 1,63 1,81 1,65 1,58 1,63 1,70 1,73 1,57
1,75 1,64 1,73 1,70 1,75 1,56 1,70 1,68 1,68 1,79 1,75 1,71 1,62 1,83 1,72 1,76 1,67 1,82 1,67 1,60
1,67 1,61 1,61 1,67 1,75 1,80 1,70 1,77 1,73 1,77 1,64 1,66 1,74 1,66 1,66 1,79 1,68 1,79 1,69 1,80

Use o computador para resolver os itens abaixo.
a) (Feito na lista 1) Construa uma tabela de frequência agrupando os dados em intervalos de classe.
b) Construa o histograma.
c) Calcule o primeiro, segundo e o terceiro quartil e interprete-os.
c) Construa o boxplot.

2.7 Medidas de Dispersão

O resumo de um conjunto de dados por uma única medida de tendência central esconde toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações. Por essa razão, precisamos empregar outro tipo de medida que informe sobre quão dispersos os dados estão.

Por exemplo, suponhamos que se deseja comparar a performance de dois empregados, com base na seguinte produção diária de determinada peça:

Funcionário	Variáveis	Total
A	70; 71; 69; 70; 70	350
B	60; 80; 70; 59; 81	350

Observe que $\overline{x}_A = 70$ e $\overline{x}_B = 70$, de acordo com as médias diríamos que a performance de B é igual a de A, no entanto se observarmos a variabilidade nos dados, observamos que a performance de A é bem mais uniforme.

Dependendo da medida de tendência central empregada, devemos adotar uma medida de dispersão apropriada. Aqui abordaremos as seguintes medidas de dispersão:

- variância e desvio-padrão,
- distância interquartil e
- coeficiente de variação.

2.7.1 Variância

A medida de tendência central mais comumente utilizada é a média. Uma vez que essa medida é adotada para descrever a posição da distribuição dos dados, faz-se necessário a escolha de uma medida da variabilidade em torno dessa média. Neste caso, a variância e o desvio padrão podem ser adotados.

Variância a partir de uma série de dados

A variância é a medida que fornece o grau de dispersão, ou variabilidade dos valores do conjunto de observações em torno da média. É calculada tomando-se a média dos quadrados dos desvios em relação à média. Ou seja,

para uma população:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$$

Em que,

- μ é a média da população.
- N é a quantidade de elementos na população;

no caso de uma amostra temos a variância amostral:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Em que

- n é a quantidade de elementos na amostra.
- $\bar{x}$ é a **média da amostra** ou **média amostral**.

Variância a partir de uma tabela de frequência

Se os dados estão apresentados em uma tabela de frequência, a variância é obtida tomando-se a **média ponderada** dos quadrados dos desvios dos valores possíveis da variável (ou dos pontos médios das classes).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{K}(x_j - \mu)^2.n_j}{N} \qquad \text{ou} \qquad S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{K}(x_j - \bar{x})^2.n_j}{n-1}$$

Em que

- n_j é a frequência da j-ésima classe;
- K é o número de classes na tabela;
- x_j é o j-ésimo valor possível da variável (ou ponto médio da classe).
- $\bar{x}$ é a **média amostral**.

2.7.2 Desvio-padrão

Como a variância é uma medida de dimensão igual ao quadrado da dimensão dos dados, pode-se causar problemas de interpretação. Então costuma-se usar o desvio padrão, que é definido como a raiz quadrada da variância, como segue:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \text{ (para uma população) ou } S = \sqrt{S^2} \text{ (para uma amostra).}$$

Propriedades do desvio padrão e da variância:

1. Somando (ou subtraindo) um valor constante e arbitrário, C a cada elemento de um conjunto de números, o desvio padrão desse conjunto não se altera, essa propriedade também vale para variância.

2. Multiplicando (ou dividindo) por um valor constante C, cada elemento de um conjunto de números, o desvio padrão fica multiplicado (ou dividido) pela constante C,

3. no caso da variância ela fica multiplicada pela constante elevada ao quadrado.

2.7.3 Distância interquartil

Se a mediana é usada como medida de tendência central, a distância entre o primeiro e o terceiro quartil pode ser usada como uma medida da variabilidade dos dados em torno da mediana. Essa medida é chamada de distância "interquartil" e é dada por:

$$D = Q_3 - Q_1$$

Também é muito utilizado a "amplitude ou desvio semi-quartil", que seria o interquartil dividido por 2. Neste caso, essa é uma boa medida de dispersão, pois em um intervalo igual ao interquartil em torno da mediana estão 50% dos dados. Neste caso, o boxplot pode ser utilizado para visualizar o comportamento da variável que gerou os dos dados.

2.7.4 Amplitude total

Também podem ser usadas outras medidas para se ter uma ideia da dispersão dos dados. Um exemplo é a Amplitude Total (AT) que é a diferença entre o maior e o menor valor observado.

$$AT = x_{(\text{máx})} - x_{(\text{ mín})}$$

Dados agrupados em classes: Neste caso a AT é dada pela diferença entre o limite superior da última classe e o limite inferior da primeira classe.

$$AT = L_s - L_i$$

Obs: essa não é muito utilizada devido ser altamente afetada por pontos discrepantes, além de ser pouco informativa.

2.7.5 Coeficiente de Variação

O coeficiente de variação é uma medida de variabilidade relativa, que é definida como a razão entre o desvio padrão e a média. Assim, essa é uma medida expressa em percentual e é dada por:

$$CV\% = \tfrac{\sigma}{\mu} \times 100.$$

Note que o coeficiente de variação não tem unidade, pois o desvio-padrão e a média estão na mesma unidade, fazendo com que estas se cancelem.

Com o coeficiente de variação, podemos avaliar se a média é ou não uma boa medida de tendência central.

Alguns critérios para interpretação.

Quanto menor for o coeficiente de variação, mais representativa dos dados será a média. Coeficiente de variação acima de 50%, a média não é representativa e outra medida de tendência central deve ser utilizada, como a mediana por exemplo.

Uma interpretação para o coeficiente de variação

- Se $0\% \leq CV\% < 30\%$, conclui-se pela baixa variabilidade dos dados que existem fortes evidências de que a média é uma boa medida para descrever a posição dados, não descartando a análise de outros fatores;

- Se $30\% \leq CV\% < 50\%$, conclui-se pela média variabilidade dos dados que ainda existem evidências de que a média é uma boa medida para descrever a posição dos dados, não descartando a análise de outros fatores;

- Se $CV\% \geq 50\%$, conclui-se pela alta variabilidade dos dados que a média pode estar sujeita a fatores que podem comprometer seu desempenho na descrição dos dados, logo existe uma grande necessidade de analisar outros fatores, como presença de pontos discrepantes, assimetria e distância entre média e mediana.

Por ser adimensional, o coeficiente de variação é uma boa opção para se comparar o grau de concentração dos dados em torno da média de séries de dados distintas, mesmo que tenham unidades diferentes.

Interpretação em Controle Estatístico de Processo

- Vários autores indicam diferentes métodos para se classificar o coeficiente de variação.

- Além disso, essa medida é intrínseca a cada processo, sendo muito utilizado na área agrícola, mais especificamente na experimentação agronômica.

- Em controle estatístico de processo, também pode-se utilizar a interpretação mostrada no quadro abaixo:

Faixa	CV %	Dispersão
menor ou igual a 15%	baixo	baixa dispersão dos dados
entre 15% e 30%	médio	média dispersão dos dados
maior que 30%	alto	alta dispersão dos dados

Exemplo 2.7.1. *Voltando ao exemplo da performance dos dois empregados, vamos calcular a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos dois conjuntos de valores de produção diaria dos empregados A e B:*

Empregado	*Variáveis*	Σ
A	*70; 71; 69; 70; 70*	*350*
B	*60; 80; 70; 59; 81*	*350*

Vimos que: $\bar{X}_A = 70$ *e* $\bar{X}_B = 70$*. Vamos agora obter medidas de dispersão para esse conjunto de valores.*

- *Variância de A.*

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(70-70)^2+(70-71)^2+(70-69)^2+(70-70)^2+(70-70)^2}{5-1} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

- *Variância de B.*

$$S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(70-60)^2+(70-80)^2+(70-70)^2+(70-59)^2+(70-81)^2}{5-1}$$
$$= \frac{100+100+121+121}{4} = \frac{442}{4} = 110,5$$

- *Desvio padrão e coeficiente de variação de A.*

$$S_A = \sqrt{0,5} = 0,7 \qquad e \qquad CV_A\% = \tfrac{0,7}{70}.100 = 1\%$$

- *Desvio padrão e coeficiente de variação de B.*

$$S_B = \sqrt{110,5} = 10,51 \qquad e \qquad CV_B\% = \tfrac{10,51}{70}.100 = 15,01\%$$

Conclusão: *as duas médias representam muito bem os dados, no entanto é fácil verificar que a dispersão dos valores de B é muito maior que a de A.*

Exemplo 2.7.2. *Considere a seguinte distribuição de frequências correspondente aos diferentes preços de um determinado produto em vinte lojas pesquisadas.*

Preços (R$)	*Nº de lojas*
50	*2*
51	*5*
52	*6*
53	*6*
54	*1*
Total	*20*

Vamos determinar a média, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos preços. Adicionando as colunas complementares, a tabela completa fica:

Preços (R$)	*Nº de lojas*	$x_i.n_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2.n_i$
50	*2*	*100*	*-1,95*	*3,8025*	*7,605*
51	*5*	*255*	*-0,95*	*0,9025*	*4,5125*
52	*6*	*312*	*0,05*	*0,0025*	*0,015*
53	*6*	*318*	*1,05*	*1,1025*	*6,615*
54	*1*	*54*	*2,05*	*4,2025*	*4,2025*
Total	*20*	*1039*			*22,95*

A partir dessa tabela, obtemos os valores desejados como segue:

- $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{K} x_i.n_i}{n} = \frac{1039}{20} = 51,95(R\$)$

- $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{K} (x_i - \bar{x})^2.n_i}{n-1} = \frac{22,95}{19} = 1,21(R\$)^2$

- $S = \sqrt{1,21} = 1,1(R\$)$ *e* $CV\% = \frac{1,1}{51,95}.100 = 2,12\%$

A média, nesse caso, é uma ótima medida para representar os dados, pois existe uma baixa variabilidade em torno desse valor.

Exemplo 2.7.3. *Um comerciante atacadista vende determinado produto em sacas que deveriam conter 16,50 kg. A pesagem de 40 sacas revelou os resultados representado na tabela:*

Classes de peso	n_i
14,55 ⊢ 15,05	1
15,05 ⊢ 15,55	3
15,55 ⊢ 16,05	8
16,05 ⊢ 16,55	9
16,55 ⊢ 17,05	10
17,05 ⊢ 17,55	6
17,55 ⊢ 18,05	3
Total	40

Determinar a média, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos pesos.

Tabela completada.

Classe de peso	n_i	x_i	$x_i n_i$	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^2.n_i$
14,55 ⊢ 15,05	1	14,8	14,8	-1,68	2,8224	2,8224
15,05 ⊢ 15,55	3	15,3	45,9	-1,18	1,3924	4,1772
15,55 ⊢ 16,05	8	15,8	126,4	-0,68	0,4624	3,6992
16,05 ⊢ 16,55	9	16,3	146,7	-0,18	0,0324	0,2916
16,55 ⊢ 17,05	10	16,8	168	0,32	0,1024	1,024
17,05 ⊢ 17,55	6	17,3	103,8	0,82	0,6724	4,0344
17,55 ⊢ 18,05	3	17,8	53,4	1,32	1,7424	5,2272
Total	40		659			21,276

A partir da última tabela, obtemos os valores desejados como segue:

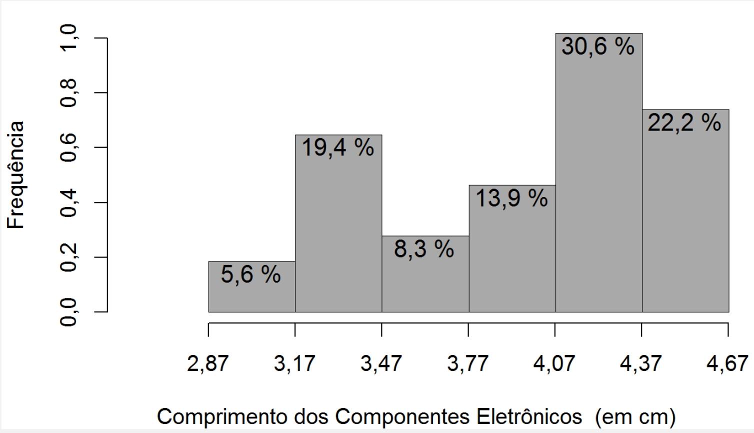
- $\bar{x} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} x_i.n_i}{n} = \frac{659}{40} = 16,475kg$

- $S^2 = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{K}(x_i - \bar{x})^2.n_i}{n-1} = \frac{21,276}{39} = 0,55kg^2$

- $S = \sqrt{0,55} = 0,74Kg \qquad e \qquad CV\% = \frac{0,74}{16,475}.100 = 4,48\%$

O coeficiente de variação mostra a baixa variabilidade dos dados em torno da média, o que faz com que essa medida seja uma ótima medida para representar os dados.

Exemplo 2.7.4. *Veja novamente o histograma que traz os comprimentos (em cm) de 36 componentes eletrônicos. Aqui, também pode-se obter uma aproximação para as medidas de dispersão.*



Resolução Relembre que os pontos médios das classes são dados por:
$x_1 = \frac{2{,}87+3{,}17}{2} = 3,02$
$x_2 = \frac{3{,}17+3{,}47}{2} = 3,32;$
$x_3 = \frac{3{,}47+3{,}77}{2} = 3,62;$
$x_4 = \frac{3{,}77+4{,}07}{2} = 3,92;$
$x_5 = \frac{4{,}07+4{,}37}{2} = 4,22;$
$x_6 = \frac{4{,}37+4{,}67}{2} = 4,52.$

Com isso, tem-se a variância dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 n_i}{N} = \sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 \left(\frac{n_i}{N}\right) = \sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 f_i \approx 0,229$$

Logo o desvio padrão é: $\sigma \approx \sqrt{0,229} \approx 0,479$.
Os valores requeridos para os cálculos podem ser organizando em uma tabela como segue.

x_i	f_i	$x_i \times f_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 f_i$
3,02	0,056	0,16912	-0,9333	0,87104889	0,04877873784
3,32	0,194	0,64408	-0,6333	0,40106889	0,07780736466
3,62	0,083	0,30046	-0,3333	0,11108889	0,00922037787
3,92	0,139	0,54488	-0,0333	0,00110889	0,00015413571
4,22	0,306	1,29132	0,2667	0,07112889	0,02176544034
4,52	0,222	1,00344	0,5667	0,321149	0,0713
Total		3,9533			0,22902111

2.7.6 Exercícios para a Seção 2.7

Exercício 2.7.1. *Observe novamente as frequências para os níveis séricos (em microgramas por decilitro) de zinco de 462 homens entre as idades de 15 a 17 anos, a qual é exibida na Tabela 2.15.*

Tabela 2.15: Nível sérico de zinco (mg/dl).

Nível	Número de homens
$50 \vdash 60$	6
$60 \vdash 70$	35
$70 \vdash 80$	110
$80 \vdash 90$	116
$90 \vdash 100$	91
$100 \vdash 110$	63
$110 \vdash 120$	30
$120 \vdash 130$	5
$130 \vdash 140$	2
$140 \vdash 150$	2
$150 \vdash 160$	2
Total	462

Obtenha o desvio padrão e o coeficiente de variação. O que você pode concluir a partir dessas medidas?

Exercício 2.7.2. *A seguir temos a distribuição de frequência dos pesos de uma amostra de 45 alunos:*

Pesos(Kg)	$40 \vdash 45$	$45 \vdash 50$	$50 \vdash 55$	$55 \vdash 60$	$60 \vdash 65$	$65 \vdash 70$
Número de alunos	04	10	15	08	05	03

a) Determinar a média, a moda e a mediana.
R: 53,5
b) Determinar o desvio padrão e o coeficiente de variação. O que você pode concluir? R: var= 45; d.p.= 6,708; C.V.=0,125

Exercício 2.7.3. *Entre os formados de 2012 de uma certa universidade no Paraná, 382 formados em ciências humanas receberam ofertas de emprego com salários anuais médios de 24 373 reais, 450 formados em ciências sociais receberam ofertas de emprego com salários anuais médios de 22 684 reais e 113 formados em ciência da computação receberam ofertas de emprego com salários anuais médios de de 31 329 reais. Qual foi a média de salário anual oferecida a esses 945 formados?*

Exercício 2.7.4. *Os dados a seguir referem-se aos rendimentos médios, em kg/ha, de 32 híbridos de milho recomendados para a Região Oeste catarinense*

Tabela 2.16: Rendimento médios, em kg/ha, de 32 híbridos de milho, Região Oeste, 1987/88.

3.973	4.550	4.770	4.980	5.117	5.403	6.166
4.500	4.680	4.778	4.993	5.166	5.513	6.388
4.550	4.685	4.849	5.056	5.172	5.823	
4.552	4.760	4.960	5.063	5.202	5.889	
4.614	4.769	4.975	5.110	5.230	6.047	

Fonte: Andrade e Ogliari

Use o computador para resolver os itens abaixo.
a) Construa uma tabela de frequência agrupando os dados em intervalos de classe.
b) Construa o histograma.
c) Calcule o primeiro, segundo e o terceiro quartil e interprete-os.
c) Construa o boxplot.

Capítulo 3

Análise Combinatória

A aplicação de ferramentas estatísticas muitas vezes faz uso das teorias de probabilidade. Isso se deve ao fato de nem sempre se ter acesso a toda população que se deseja estudar. Quando isso ocorre, devemos aplicar técnicas da **Inferência Estatística**, em que o comportamento da variável de interesse é modelada por meio de modelos probabilísticos. Por essa razão, para o bom entendimento das teorias estatísticas, devemos estudar um pouco das teorias de probabilidades. A definição mais intuitiva de probabilidade (chamada probabilidade clássica, que será abordada na seção posterior) envolve a contagem de possibilidades de fenômenos (eventos), com isso, muitas vezes, faz-se necessário a aplicação de outra ferramenta da matemática, a teoria matemática da contagem que é formalmente conhecida como **Análise Combinatória**. Para entender um pouco a relação entre contagem e probabilidade, vejamos um exemplo.

Exemplo 3.0.1. *Um sistema de comunicação formado por n antenas aparentemente idênticas devem ser alinhadas em sequência. O sistema resultante será capaz de receber qualquer sinal e será chamado de funcional desde que duas antenas consecutivas não apresentem defeito.*

> *Se exatamente m das n antenas apresentarem defeito, de quantas maneiras é possível um sistema ser funcional?*

Vamos denotar por 1 se a antena funciona e 0 se ela está com defeito, então para o caso especial em que $n = 4$ e $m = 2$, há seis configurações possíveis para o sistema. Ou seja,

1^a	2^a	3^a	4^a	5^a	6^a
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1

Neste caso, o sistema funciona para três sequências. Quais são elas?

> *Qual será a probabilidade de que o sistema resultante seja funcional?*

Como o sistema funciona para as três primeiras sequências e não funciona nas outras três, parece razoável tomar $3/6 = 1/2$ como a probabilidade desejada. No caso de n e m quaisquer, a probabilidade poderia ser calculada de forma similar. Isto é, poderíamos contar o número de configurações que resultam no funcionamento do sistema e dividir esse número pelo número total de configurações possíveis.

> Existe um método que seja eficaz para contar o número de maneiras pelas quais as coisas podem ocorrer?

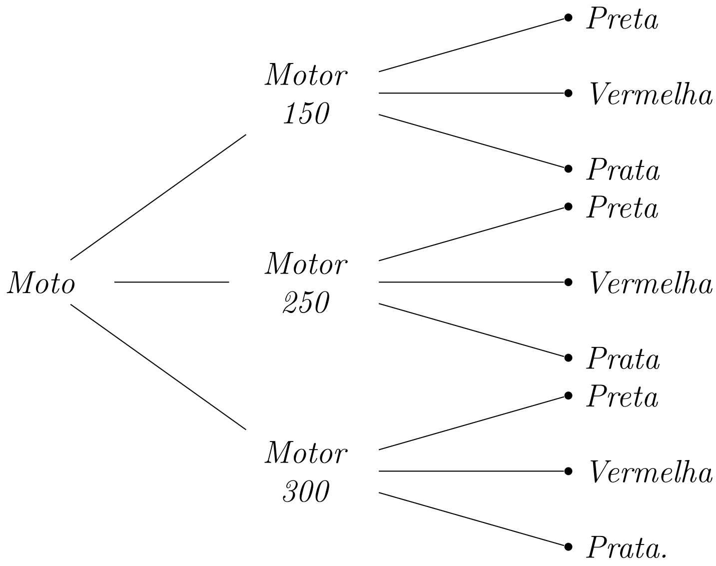
Assim, muitos problemas na teoria das probabilidades podem ser resolvidos simplesmente contando-se o número de diferentes maneiras pelas quais certo evento pode ocorrer. Para facilitar essa contagem, podemos utilizar a análise combinatória.

3.1 O princípio básico da contagem

O princípio básico da contagem diz que se um experimento E_1 pode levar a qualquer um de m possíveis resultados e se outro experimento E_2 pode resultar em qualquer um de n possíveis resultados e E_1 for independente de E_2, então os dois experimentos em conjunto possuem $m \times n$ resultados possíveis.

Exemplo 3.1.1. *Vamos supor que uma fábrica produza motos com motores de 125, 250 ou 300 cilindradas de potência. O cliente ainda pode escolher as seguintes cores: preta, vermelha e prata. Quais são as possibilidades de venda que a empresa pode oferecer?*

Supondo a escolha do motor como o resultado do primeiro experimento, e a subsequente escolha de uma cor dentre as disponíveis como o resultado do segundo experimento, vemos a partir do princípio básico que há $3 \times 3 = 9$ *escolhas possíveis, como mostra o diagrama a seguir:*



> Quando há mais que dois experimentos a serem realizados, o princípio básico pode ser generalizado?

O princípio fundamental da contagem pode ser generalizado para r experimentos, em que o primeiro pode levar a qualquer um de n_1 resultados possíveis, o segundo pode levar para cada um desses n_1 resultados a n_2 resultados possíveis, e assim por diante até o r-ésimo experimento, em que para cada um dos resultados do experimento anterior ocorre um dos n_r resultados possíveis. Ou seja, nesse caso, haverá um total de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Exemplo 3.1.2. *O grêmio de uma faculdade é formado por 3 calouros, 4 estudantes do segundo ano, 5 estudantes do terceiro ano e 2 formandos. Um subcomitê de 4 pessoas, formado por uma pessoa de cada ano, deve ser escolhido. Quantos subcomitês diferentes são possíveis?*

Podemos fazer a escolha de um subcomitê como o resultado combinado dos quatro experimentos separados de escolha de um único representante de cada uma das classes. Assim, a partir da versão generalizada do princípio básico, temos que há $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$ *subcomitês possíveis.*

3.2 Casos Especiais

O uso do princípio básico da contagem permite a resolução de muitos problemas envolvendo contagem. Aqui serão relembradas algumas regras especiais envolvendo esse princípio.

3.2.1 Permutações

Temos o conjunto $A = \{3, 4, 6\}$, usando cada elemento de A apenas uma vez, quantos números com 3 algarismos podemos formar?

Deve-se usar todos os elementos de A e formar agrupamentos que serão distinguidos apenas pela ordem em que aparecem. Estes agrupamentos são chamados permutações dos elementos de A. Assim, é possível perceber que um conjunto de 3 objetos permite 6 permutações possíveis. Esse resultado poderia ser obtido a partir do princípio básico, já que o primeiro objeto da permutação pode ser qualquer um dos três, o segundo objeto da permutação pode então ser escolhido a partir dos dois restantes e o terceiro objeto da permutação é o objeto restante. Assim, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutações possíveis.

Considere um conjunto A com n elementos. Usando um raciocínio similar àquele que acabamos de utilizar leva a conclusão de que há

$$P(n) = n \times (n-1) \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

permutação diferentes dos n elementos de A.

Temos o conjunto $B = \{2, 9, 6, 2, 2, 4, 6, 4\}$, usando cada elemento de A apenas uma vez, quantos números com 8 algarismos podemos formar?

Note que, se considerarmos os elementos 2 de B como distintos ($2_1, 2_2$ e 2_3), então permutando os 2's entre si teríamos 3! permutações diferentes, da mesma forma, para os números 4, 6 e 9 temos 2!, 2! e 1! permutações diferentes, respectivamente. Além disso, os números 2, 9, 6, 2, 2, 4, 6 e 4 permitem 8! permutações. Como permutando os números 2, 4 e 6 entre si os arranjos resultantes são os mesmos, então existem $\frac{8!}{3!2!2!1!}$ números formados pelos elementos de B.

Em geral, esse mesmo raciocínio pode ser usado para mostrar que há

$$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

permutações diferentes de n objetos dos quais n_1 são da mesma espécie, n_2 são da mesma espécie, $...n_r$ são da mesma espécie.

Observação: Em permutações, a ordem dos elementos é importante e o número de posições é igual ao número de elementos que se deseja permutar.

3.2.2 Arranjo

Dado o conjunto A={2, 3, 4, 5, 6}, quantos números com algarismos diferentes se podem formar sabendo que tem 4 algarismos?

Para obter a quantidade de números, podemos usar o princípio básico da contagem. Para isso, raciocinamos da seguinte maneira:

- com os 5 elementos do conjunto A, queremos preencher 4 lugares

Lugar 1 $\qquad$ Lugar 2 $\qquad$ Lugar 3 $\qquad$ Lugar 4

- o primeiro lugar pode ser preenchido de 5 maneiras distintas, o segundo de $5-1=4$ maneiras, o terceiro de $5-2=3$ maneiras e o quarto de $5-3=2$ maneiras, que pelo princípio fundamental da contagem, resulta

$$\underline{\quad 5 \quad} \times \underline{\quad 4 \quad} \times \underline{\quad 3 \quad} \times \underline{\quad 2 \quad} = 120$$

Problemas em que se tem que escolher p entre n objetos, com $p < n$, e a ordem em que fazemos a escolha determina sequências diferentes, recebem o nome de arranjo simples de p elementos em n. Neste caso geral, temos que o primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras distintas, o segundo de $n-1$ maneiras, o terceiro de $n-2$ maneiras e assim sucessivamente até o p-ésimo lugar, que pode ser preenchido de $n-(p+1)$ modos diferentes, que pelo princípio fundamental da contagem fornece

$$A(n,p) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observações:

1. toda permutação é um arranjo (caso em que p = n);
2. para que a fórmula acima faça sentido, definimos $0! = 1$.

3.2.3 Combinação

Um comitê de três pessoas deve ser formado a partir de um grupo de 20 pessoas. Quantos comitês diferentes são possíveis?

Para resolver o problema acima, pense da seguinte forma: como há 20 maneiras diferentes de selecionar a primeira pessoa, 19 maneiras de selecionar a pessoa seguinte e 18 maneiras de selecionar a última pessoa, há portanto $20\times 19\times 18$ maneiras de selecionar o grupo de 3 se considerarmos a ordem de seleção das pessoas como relevante. Entretanto, como cada grupo de 3 é contado considerando a ordem como relevante, por exemplo, vamos denotar por P_1, P_2 e P_3 três pessoas quaisquer do grupo, assim o grupo formado pelas pessoas P_1, P_2 e P_3 será contado 6 vezes (isto é, todas as permutações $P_1P_2P_3$, $P_3P_2P_1$, $P_1P_3P_2$, $P_2P_1P_3$, $P_3P_1P_2$ e $P_2P_3P_1$ serão contadas quando a ordem da seleção for relevante). Então, como a ordem das pessoas para a formação dos comitês não é importante, o número total de grupos que podem ser formados é igual a

$$\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1} = \frac{20\times 19\times 18}{6} = 1140$$

que corresponde a combinação de 20 pessoas tomadas 3 a 3.

Em geral, como $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ representa o número de diferentes maneiras pelas quais um grupo de r itens pode ser selecionado a partir de n itens quando a ordem da seleção é relevante, e como cada grupo de r itens será contado $r!$ vezes, tem-se que o número de grupos diferentes de r itens que podem ser formados a partir de um conjunto de n itens é

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\cdots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

para $r \leq n$.

A combinação de n elementos tomados r a r é denotada por

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Exemplo 3.2.1. *Considere um conjunto de n antenas das quais m apresentam defeito e $n-m$ funcionam, com $m \leq n-m+1$, e suponha que não seja possível distinguir as antenas defeituosas daquelas que funcionam. Quantos alinhamentos podem ser feitos sem que duas antenas com defeito sejam colocadas lado a lado?*

Se não for permitido que duas antenas com defeito sejam colocadas lado a lado, então os espaços entre as antenas que funcionam devem conter no máximo uma antena defeituosa. Ou seja, nas $n-m+1$ posições possíveis entre as $n-m$ antenas que funcionam, devemos selecionar m espaços onde colocar as antenas defeituosas. Portanto, há $\binom{n-m+1}{m}$ ordenações possíveis nas quais há pelo menos uma antena que funciona entre duas defeituosas.

Como é definido $0! = 1$, temos que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Além disso, $\binom{n}{i} = 0$ para $i < 0$ ou $i > n$. Para $0 \leq i \leq n$, essa grandeza representa o número de diferentes subgrupos de tamanho i que podem ser formados em um conjunto de tamanho n. Ela é frequentemente chamada de coeficiente binomial por causa de seu destaque num teorema chamado teorema binomial o qual é enunciado mais adiante.

Para inteiros não negativos $n_1, ..., n_r$, cuja soma é n,

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!}$$

corresponde ao número de divisões de n itens em r subgrupos não superpostos de tamanhos $n_1, n_2, ..., n_r$ conhecidos como coeficientes multinomiais. Esse coeficiente aparece na generalização do teorema binomial, denominado teorema multinomial, que é enunciado a seguir.

Resultados Relacionados

1. Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

2. Teorema Multinomial

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1,\ldots,n_r : x_1+\cdots+x_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}.$$

3. **Número de soluções inteiras positivas:** existem $\binom{n-1}{r-1}$ vetores distintos com valores inteiros positivos satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, x_i > 0 \text{ para todo i}= 1, \cdots, r.$$

4. **Número de soluções inteiras não negativas:** existem $\binom{n+r-1}{r-1}$ vetores distintos com valores inteiros não negativos satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, x_i \geq 0 \text{ para todo i}= 1, \cdots, r.$$

5. Identidade

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, 1 \leq r \leq n.$$

A demonstração dos resultados apresentados nessa seção é omitida aqui, mas podem ser vistas, por exemplo, em Ross (2009).

Exemplo 3.2.2. *Quantas soluções com valores inteiros não negativos de $x_1 + x_2 = 3$ são possíveis?*

Existem $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$ *soluções:* $(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)$.

3.3 Exercícios

1. (Hazzan, 2013, pag. 10 ex. 5) Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar nesse edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

2. (Ross, 2009) Vinte trabalhadores serão alocados em vinte tarefas diferentes, um em cada tarefa. Quantas alocações diferentes são possíveis?

3. (Ross, 2009) João, Júlio, Jonas e Jacques formaram uma banda com quatro instrumentos. Se cada um dos garotos é capaz de tocar todos os instrumentos, quantas diferentes combinações são possíveis? E se João e Júlio souberem tocar todos os quatro instrumentos, mas Jonas e Jacques souberem tocar cada um deles apenas o piano e a bateria?

4. **(a)** De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila?

   (b) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila se os garotos e as garotas sentarem- se juntos?

   (c) E se apenas os garotos sentarem-se juntos?

   (d) E se duas pessoas do mesmo sexo não puderem se sentar juntas?

Capítulo 4

Introdução a Teoria das Probabilidades

Introdução

Desde os primórdios das civilizações, as pessoas sempre tiveram que lidar com a incerteza, seja sobre o tempo, seja sobre suplementos alimentícios necessários para sobrevivência, entre outras coisas. Com isso, surgiu a necessidade de reduzir tais incertezas, assim como os seus efeitos. Uma grande motivação para a intensificação do estudo da incerteza foram os jogos de azar, que já existiam a muitos anos A.C. (3500 – 2000 A.C.). Acredita-se que os jogos de azar levaram a estudos mais aprofundados das medidas de chance, chegando ao início do desenvolvimento da teoria matemática de probabilidade na França pelos matemáticos Blaid Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). No entanto, as probabilidades obtidas de várias combinações de dados já haviam sido calculadas bem antes disso por Girolamo Cardano (1501-1576) e Galileo Galilei (1564-1642).

No nosso cotidiano estamos sempre nos referindo a acontecimentos que sugerem essa teoria. Frequentemente ouvimos ou usamos expressões como: "é provável que vai chover hoje"; "existe uma grande chance do voo atrasar"; "é muito provável que será possível comparecer ao jantar de confraternização ". Cada uma dessas expressões são baseadas no conceito de probabilidade ou na possibilidade de que um evento específico irá ocorrer. Ou seja, a intenção é tentar quantificar a chance de um evento ocorrer.

A teoria das probabilidades tem sido desenvolvida desde muito tempo atrás e, também, tem sido amplamente aplicada em diversos campos de estudos. Na atualidade, esta é uma importante ferramenta na maioria das áreas das engenharias, ciências naturais e em gestão de um modo geral. Muitos pesquisadores trabalham para estabelecer novas aplicações desta teoria em campos como medicina, meteorologia, marketing, comportamento humano, projeto de sistemas para computadores, entre outros.

O conceito formal de probabilidade está associado aos experimentos, e pode ser apresentado de três formas: clássica, frequentista e axiomática. Neste capítulo, discutiremos esses conceitos e outros associados a essas definições, além de apresentar algumas propriedades importantes da probabilidade.

4.1 Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Eventos

Para entender o conceito de probabilidade é necessário definir outros conceitos, como o de experimento aleatório, espaço amostral e eventos. Para ilustrar essa necessidade, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.1. *Suponha que uma batelada (carga recarregável) contenha seis itens ($\{a, b, c, d, e, f\}$) e que dois itens sejam selecionados ao acaso, sem reposição. Suponha que o item f seja defeituoso, porém que os outros sejam bons. Qual é a probabilidade de que o item f apareça na amostra?*

- *Para responder essa questão, deve-se antes entender o experimento e responder outras questões.*

  1. *Que experimento foi realizado?*
  2. *Qual é o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento (que será chamado de espaço amostral)?*
  3. *Qual é o resultado que se deseja atribuir uma média de chance (o evento de interesse)?*
  4. *Qual a quantidade de eventos elementares no espaço amostral (número de resultados possíveis)?*
  5. *Qual a quantidade de eventos elementares no evento de interesse (número de resultados que são favoráveis a ocorrência do evento de interesse)?*

4.1.1 Experimento Aleatório e Espaço Amostral

O cálculo das probabilidades está associado aos experimentos, os quais podem ser classificados em dois tipos:

- **Experimento determinístico**: é aquele que repetido sob condições quase idênticas conduz a um mesmo resultado.

- **Experimento aleatório**: é aquele que repetido sob condições quase idênticas produz resultados em geral diferentes.

Aqui, o interesse recai sobre os experimentos aleatórios, os quais não sabemos ao certo qual será o resultado antes de sua realização. No entanto, ao realizar o experimento, podemos conhecer quais resultados são possíveis de acontecer. Ao conjunto de todos os possíveis resultados, damos o nome de **Espaço Amostral**, que é definido a seguir.

Definição 4.1.1. *O espaço amostral de um experimento aleatório (doravante referido apenas como experimento) é formado pelo conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, e é representado aqui pela letra grega ômega, Ω.*

Exemplo 4.1.2. *Os experimentos a seguir são exemplos de experimentos aleatórios. Qual é o espaço amostral de cada um deles?*

a) ε_1 : *Lançamento de um dado.*

b) ε_2 : *Selecionar um morador da cidade de Russas e verificar se ele já teve uma determinada doença.*

c) ε_3 : *Observar o tempo de vida de um equipamento eletrônico.*

d) ε_4 : *Observar a produção de um produto e contar quantos saem com defeito.*

O espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento, no entanto pode ser definido de formas diferentes, dependendo do problema. Muitas vezes o espaço amostral considerado é muito maior do que o conjunto que contém somente os resultados possíveis do experimento.

Exemplo 4.1.3. *Considere os experimentos a seguir e reflita sobre como poderia ser definido o espaço amostral de cada um deles.*

1. *Contam-se os veículos que passam por um posto de pedágio das 24 as 8 horas, então o espaço amostral pode ser definido como* $\Omega = \mathbb{N}$*, que obviamente é maior do que aquele que contém exatamente os valores possíveis.*

2. *Lançam-se duas moedas, então o espaço amostral é formado pelos quatro pontos a seguir:*

$$\Omega = \{CK, KC, CC, KK\},$$

em que C *denota a face cara e* K *denota a face coroa das moedas. Neste caso, o espaço amostral contém exatamente os valores possíveis.*

3. *Seleciona-se um morador da cidade de Russas e mede-se a sua altura. O espaço amostral desse experimento pode ser definido em metros de várias formas, como:* $\Omega = (0, 3)$, $\Omega = (0, 5)$, $\Omega = (0, 10)$ *ou simplesmente* $\Omega = (0, \infty) = \mathbb{R}^{*+}$.

4.1.2 Eventos Aleatórios

Um evento aleatório é constituído por um ou mais resultados possíveis de um experimento, como o espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento considerado, um evento pode ser definido da seguinte forma.

Definição 4.1.2. *Qualquer subconjunto* A *do espaço amostral é denominado* **evento aleatório** *(doravante referido simplesmente como evento), ou seja, se* A *está contido em* Ω*, então* A *é um evento.*

Exemplo 4.1.4. *Duas moedas são lançadas, denotemos por* C *a face cara e por* K *a face coroa. Vimos que o espaço amostral é dado por:* $\Omega = \{CK, KC, CC, KK\}$*. Seja o evento* $A = \{(K, K), (K, C)\}$*, então* A *é o evento em que a primeira moeda lançada dá coroa. Quando esse evento ocorre?*

Observação os eventos são, em geral, denotados por letras maiúsculas (A, B , C etc).

Evento Elementar

Um único ponto do espaço amostral, é dito ser um **evento elementar** e é denotado aqui pela letra grega minúscula ω. Então, um evento elementar (ou unitário) constitui um único resultado possível do experimento, e não pode ser decomposto em eventos "menores". Um evento qualquer de um experimento ocorre, se ocorre qualquer um de seus eventos elementares. Portanto, quando um evento A ocorre é sinal de que ocorreu um de seus eventos elementares, neste caso dizemos que o evento elementar ocorrido é favorável ao evento A.

Exemplo 4.1.5. *Considere o experimento: lançar duas moedas e verificar a face superior. Quais são os eventos elementares desse experimento? Quais são favoráveis ao evento A="cara na primeira moeda".*

Como eventos são conjuntos, aqui serão utilizadas notações e operações da teoria de conjuntos. Assim seguem as seguintes observações.

1. Um ponto amostral (evento elementar) ω que está "dentro" de um evento A é dito **pertencer** à A e denotamos $\omega \in A$.

2. Se o evento elementar ω **não pertence** ao evento A, denotamos $\omega \notin A$

3. Se um evento B contém outro evento A, denotamos $A \subset B$.

4. O **evento impossível** do experimento é o conjunto vazio, e é denotado por $\emptyset$.

5. O conjunto vazio está contido em todo evento não vazio, ou seja, $\emptyset \subset A$ para todo $A \subset \Omega$.

6. Ω é o evento certo do experimento e contém todos os outros eventos.

4.1.3 Tipos de Espaço Amostral

Um espaço amostral pode ser finito ou infinito, no caso de ser infinito, ainda pode ser não enumerável. Assim, se o espaço amostral Ω for um conjunto finito ou infinito enumerável (contável), esse espaço amostral é dito ser discreto, mas se Ω é não enumerável (um intervalo da reta), tem-se um espaço amostral contínuo.

Exemplo 4.1.6. *Seja o experimento:*

- *"contar o número de peças com defeito num lote": o espaço amostral é discreto (enumerável), ou seja $\Omega = \mathbb{N}$;*

- *"medir o tempo de execução de um algoritmo": o espaço amostral é contínuo (não enumerável, um intervalo da reta), ou seja $\Omega = \mathbb{R}^{*+}$.*

Note que muitas vezes podemos limitar um espaço amostral não categórico, pois sabemos quais são os valores impossíveis de ocorrer, como é o caso do tempo de execução de um algoritmo, que não pode ser um número negativo, por exemplo.

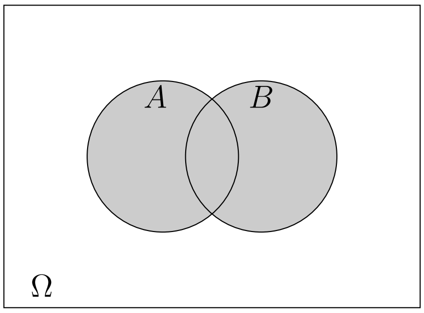
4.1.4 Operações com Eventos

As operações com eventos são realizadas seguindo as regras da teoria de conjuntos, ramo da matemática. Então, aqui, faremos uma revisão dessa teoria com foco nos possíveis resultados de experimentos.

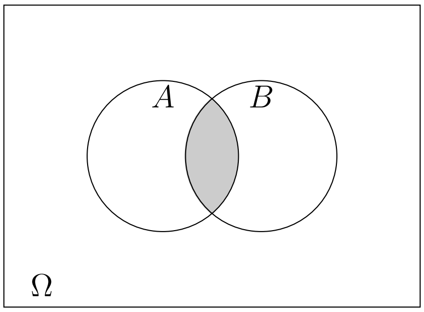
Definições básicas

Considere um espaço amostral Ω associado a um experimento e o conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ que contém todos os subconjuntos de Ω, denominado conjunto das partes de Ω. Agora, sejam A e B dois eventos, tais que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, isto é, $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Com isso, temos as seguintes definições.

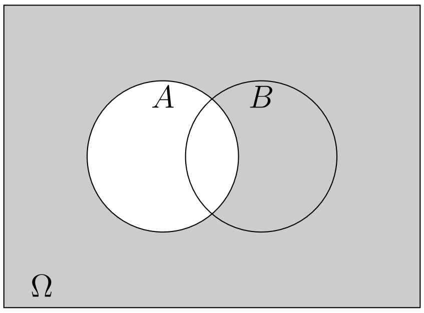
i) A **união** dos eventos A e B é dada por $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{\omega \in \Omega : \omega \in \mathrm{A} \text{ ou } \omega \in \mathrm{B}\}$, como mostra o diagrama de Venn:



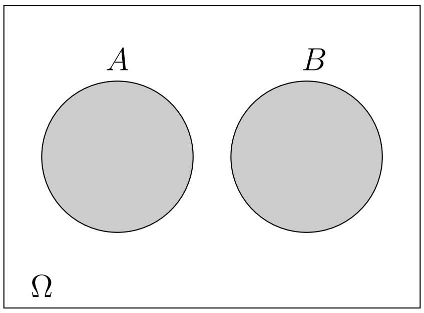
ii) A **interseção** dos eventos A e B é dada por: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\omega \in \Omega : \omega \in \mathrm{A} \text{ e } \omega \in \mathrm{B}\}$, como mostra o diagrama:



iii) O **complementar** de A é dado por: $\mathrm{A}^{\mathrm{C}} = \Omega - \mathrm{A} = \{\omega \in \Omega; \omega \notin \mathrm{A}\}$. Para essa situação temos o seguinte diagrama de Venn:



vi) Se $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, então dizemos que A e B são eventos **disjuntos ou mutuamente excludentes**.



Generalização das definições

As definições e propriedades apresentadas anteriormente podem ser generalizadas para qualquer quantidade de eventos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, n \geq 2$. Para união e interseção, temos:

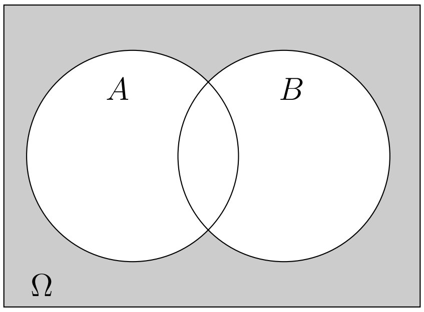
i) União: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \{\omega \in A_i \text{ para algum } i\}$.

ii) Interseção: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = \{\omega \in A_i \text{ para todo } i\}$.

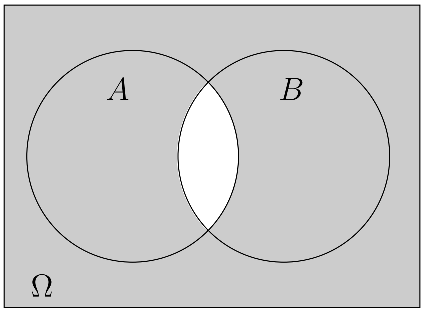
Propriedades

Leis de De Morgan.

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \Omega - A \cup B$



ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = \Omega - A \cap B$



4.1.5 Partição do espaço amostral

Diremos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de Ω, se são disjuntos dois a dois e sua união é Ω, ou seja, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, como ilustra a Figura 4.2, considerando $n = 6$.

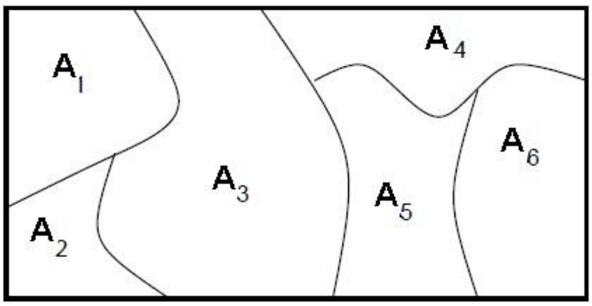


Figura 4.1: Partição do espaço amostral (n=6).

4.1.6 Exercícios para Seção 4.1

Exercício 4.1.1. *Mostre que:*

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Exercício 4.1.2. *Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos:*

(a) *faces iguais;*

(b) *cara na 1ª moeda;*

(c) *coroa na 2ª e 3ª moedas.*

Exercício 4.1.3. *Considere a experiência que consiste em pesquisar famílias com três crianças, em relação ao sexo delas, segundo a ordem do nascimento. Enumerar os eventos:*

(a) *ocorrência de dois filhos do sexo masculino;*

(b) *ocorrência de pelo menos um filho do sexo masculino;*

(c) *ocorrência de no máximo duas crianças do sexo feminino.*

Exercício 4.1.4. *Sejam A, B e C três eventos de um espaço amostral. Exprimir os eventos abaixo usando as operações reunião, intersecção e complementação:*

(a) *somente A ocorre;*

(b) *A e C ocorrem, mas B não;*

(c) *A, B e C ocorrem;*

(d) *pelo menos um ocorre;*

(e) *exatamente um ocorre;*

(f) *nenhum ocorre;*

(g) *no máximo dois ocorrem;*

(h) *pelo menos dois ocorrem.*

Exercício 4.1.5. *Considere o conjunto universo (espaço amostral) dos inteiros de 1 a 10 ou* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Sejam* $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ *e* $C = \{5, 6, 7\}$. *Liste os elementos dos seguintes conjuntos:*
a) $A^C \cap B$;
b) $A^C \cup B$;
c) $(A^C \cap B^C)^C$;
d) $[A \cap (B \cap C)]^c$;
e) $[A \cap (B \cup C)]^c$.

Sugestão: *Use o diagrama de Venn para visualizar o evento de interesse.*

4.2 Definições de probabilidade

Existem pelo menos três maneiras de se definir probabilidade, sendo que duas são casos particulares de uma mais geral. A partir dessa definição geral foi possível desenvolver, ao longo do tempo, toda a teoria envolvendo probabilidade existente na atualidade. Aqui, iniciaremos nossos estudos dando uma definição em termos da frequência relativa dos eventos associados a um experimento (acontecimento) aleatório, em seguida veremos a definição clássica de probabilidade (estudadas por Fermat e Pascal, metade do século XVII) e, finalmente, veremos a definição geral denominada definição axiomática de probabilidade proposta por um matemático alemão chamado Andrei Kolmogorov.

Definição 4.2.1. (Definição Frequentista de Probabilidade) *Considere que um experimento aleatório seja realizado n vezes e seja n_A o número de vezes que o evento A acorre. Definimos a frequência relativa de A por*

$$f_n = \frac{n_A}{n} = \frac{\textit{frequência do evento } A}{\textit{Total de realizações}}, \quad 0 \leq f_n \leq 1.$$

Dessa forma, pode ser mostrado que a probabilidade do evento A ocorrer é dada por:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Ou seja, se n for grande, f_n se aproxima da probabilidade de A ocorrer.

Exemplo 4.2.1. *Considere o problema em decidir se uma moeda é honesta. Para resolver esse problema, considere que a moeda seja lançada 100 vezes, caso a moeda seja honesta, qual o número aproximado de caras que esperamos obter?*

Observe que o exemplo anterior trata de um espaço amostral discreto e infinito, assim o que temos é uma aproximação para a probabilidade desejada. Agora vejamos uma definição de probabilidade um pouco mais restrita, em que consideramos espaços amostrais finitos, mas que fornece a probabilidade precisa de um certo evento acontecer.

Definição 4.2.2. (Definição Clássica de Probabilidade) *Vamos considerar um espaço amostral Ω finito em que todos os seus eventos elementares são igualmente prováveis. Assim, a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é calculada como a razão entre o número de casos favoráveis ao evento A (eventos elementares de A) e o número de casos possíveis (número de eventos elementares de Ω). Ou seja:*

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}} \textit{ de casos favoráveis a } A}{n^{\underline{o}} \textit{ de casos possíveis}} = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}$$

Exemplo 4.2.2. *Lança-se um dado honesto, qual a probabilidade de ocorrer a face 3?*
Sendo: $A=$ ocorrer a face 3, então $P(A) = \frac{1}{6}$

A definição clássica de probabilidade é bastante intuitiva e resolve muitos problemas práticos, no entanto não é suficiente para resolver todos os problemas possíveis. Assim, faz-se necessária uma definição mais geral que é dada a seguir.

Definição 4.2.3. (Definição Axiomática de Probabilidade) *Seja ϵ um experimento e Ω o espaço amostral associado ao mesmo. A cada evento A desse espaço amostral associamos uma medida $P(A)$, denominada probabilidade de A, que satisfaz:*

i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) se $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset \Omega$ *forem disjuntos 2 a 2 (ou seja* $(A_i \cap A_j) = 0$*, para todo* $i \neq j$*), então* $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

4.2.1 Propriedades

A partir dos três axiomas apresentados, podemos provar diversas propriedades da probabilidade. Vejamos algumas delas.

1) Se $\emptyset$ é o evento impossível, então $P(\emptyset) = 0$;

2) Se A e B são dois eventos quaisquer então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

3) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$;

4) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Exercício: Prove as propriedades acima.

Exemplo 4.2.3. *Considere um experimento e os eventos A e B associados, tais que* $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ *e* $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. *Encontre:*

a) $P(A^c)$ *e* $P(B^c)$;

b) $P(A \cup B)$;

c) $P(A^c \cap B^c)$;

d) $P(A^c \cup B^c)$;

e) $P(A^c \cap B)$.

Exemplo 4.2.4. *Suponha que um lote com 20 peças existam cinco defeituosas.*

- *Experimento: Escolher ao acaso quatro peças desse lote (uma amostra de 4 elementos) de modo que a ordem de retirada seja irrelevante.*
- *De quantas maneiras poderíamos obter essa amostra?*
- *Qual a probabilidade de ter duas peças defeituosas na amostra?*

4.2.2 Probabilidade Condicional

A **probabilidade condicional** é um dos conceitos mais importantes da teoria de probabilidade. Pois, frequentemente tem-se interesse em calcular probabilidades quando se tem alguma informação parcial a respeito do resultado de um experimento. Mesmo quando não se tem nenhuma informação parcial, as probabilidades condicionais podem ser frequentemente utilizadas para computar mais facilmente as probabilidades desejadas.

Exemplo 4.2.5. *Na Tabela abaixo temos dados referentes a alunos matriculados em quatro cursos de uma universidade em dado ano (Bussab, 2013, adaptado):*

Tabela 4.1: Distribuição de Alunos segundo o sexo e escolha de curso.

Sexo / Curso	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Matemática (M)	70	40	110
Engenharia de Software (S)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Seja o experimento: escolher um aluno ao acaso desses quatro cursos.

a) *Qual a probabilidade desse aluno ser do curso E (estatística)?*

b) *Qual a probabilidade desse aluno ser do curso de E e ser homem (H)?*

c) *Dado que o estudante esteja matriculado no curso E, qual a probabilidade de ser M?*

Resolução: a) 3/20; b) 1/20; c) 2/3.
Quando existe uma informação prévia de que um evento já ocorreu, como ocorre no item c), podemos levar em conta essa informação e usar a definição clássica de probabilidade para responder a questão.

Probabilidade Condicional e Teorema do Produto

Agora, vejamos como podemos obter formalmente a probabilidade condicional de um evento A dado que outro evento B ocorreu. Para isso, considere um espaço amostral Ω associado a um dado experimento. Sejam $A, B \subset \Omega$, então a probabilidade condicional do evento A dado que B ocorreu é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{com} \quad P(B) > 0, \text{ ou ainda}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{com} \quad P(A) > 0;$$

Isso implica que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

A relação acima é conhecida como **Teorema do Produto**.

> Use as relações acima para responder a questão c) do Exercício 4.2.5.

Exemplo 4.2.6. *Uma urna contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Se duas bolas são retiradas ao acaso sem reposição, qual a probabilidade de que:*
a) ambas sejam verdes;
b) ambas sejam da mesma cor.
Resumo da resolução (construir o diagrama em árvore): a) $P(V \cap V) = P(V|V)P(V)$*; b) basta fazer o mesmo procedimento para os demais e somar.*

Generalização do teorema do produto

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Exemplo 4.2.7. *Uma urna contém 7 bolas brancas e 5 pretas. Retiramos três bolas da urna sem reposição. Assumindo que cada bola da urna é igualmente provável de ser retirada, qual a probabilidade de todas serem brancas?(construir o diagrama em árvore)*
Resumo da resolução: $P(B \cap B \cap B) = P(B|B \cap B)P(B|B)P(B)$

E se as retiradas forem feitas com reposição?

4.2.3 Eventos Independentes

Dois eventos são independentes quando a realização de um dos eventos não afeta a probabilidade de realização do outro e vice versa.

Definição 4.2.4. *A e B são eventos independentes se* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemplo 4.2.8. *Lançam-se três moedas. Verificar se são independentes os eventos:*
***A**: saída de cara na primeira moeda.*
***B**: Saída de coroa na segunda e cara na terceira moeda.*

Resolução: calcular $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$; $P(A) \times P(B)$; verificar se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemplo 4.2.9. *Em uma caixa temos 10 objetos dos quais 4 são defeituosos. São retirados dois objetos ao acaso, um após o outro com reposição. Calcular a probabilidade de ambos serem bons.*
Resumo da resolução: $(6/10) \times (6/10) \approx 0,36$.

Exemplo 4.2.10. *Sejam A e B eventos tais que P(A)=0,2; P(B)= q e $P(A \cup B) = 0,6$. Calcular q considerando:*
a) mutuamente exclusivos;
b) independentes.

4.2.4 Exercícios para Seção 4.2

Exercício 4.2.1. *Prove as propriedades da probabilidade apresentadas anteriormente.*

Exercício 4.2.2. *O espaço amostral de um experimento aleatório é $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, em que cada evento elementar tem probabilidade 0,1; 0,1; 0,2; 0,4; e 0,2, respectivamente. Sejam os eventos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, d, e\}$. Determine:*
a) $P(A)$
b) $P(A^c)$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A \cup B)$
e) $P(B)$

Exercício 4.2.3. *Em uma bateria NiCd, uma célula completamente carregada é composta de hidróxido de níquel III. Níquel é um elemento que tem múltiplos estados de oxidação, sendo geralmente encontrado nos seguintes estados:*

Carga de Níquel	Proporção encontrada
0	0,17
+2	0,35
+3	0,33
+4	0,15

a) Qual a probabilidade de uma célula ter no mínimo uma das opções de níquel carregado positivamente? (R. 0,83)

b) Qual é a probabilidade de uma célula não ser composta de uma carga positiva de níquel maior que + 3? (R. 0,85)

Exercício 4.2.4. *Um lote de 100 chips semicondutores coném 20 itens defeituosos. Dois deles são selecionados ao acaso sem reposição.*

(a) *Qual a probabilidade de o primeiro chip selecionado seja defeituoso? (R: 20/100)*

(b) *Qual é a probabilidade de que o segundo chip seja defeituoso, dado que o primeiro já foi defeituoso? (R: 19/99)*

(c) *Qual é a probabilidade de que ambos sejam defeituosos? (R: 0,038)*

(d) *Como a resposta do item (b) mudaria se os chips selecionados fossem repostos antes da segunda seleção? (R: 0,2)*

Exercício 4.2.5. *A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é $\frac{2}{5}$; a de sua mulher é de $\frac{2}{3}$. Determinar a probabilidade de que daqui 30 anos:*

a) ambos estejam vivos; R:4/15

b) somente o homem esteja vivo; R:2/15

c) somente a mulher esteja viva; R:2/5

d) pelo menos um esteja vivo. R:4/5

Exercício 4.2.6. *Suponha que A e B sejam eventos mutuamente excludente (disjuntos). Construa um diagrama de Venn que contenha os três eventos A, B e C, de modo que:*
$P(A|C) = 1$ *e*
$P(B|C) = 0$.

Exercício 4.2.7. *Peças produzidas por uma máquina são classificadas como defeituosas (D), recuperáveis (R) e perfeitas (P) com probabilidades $0,1$, $0,2$ e $0,7$, respectivamente. De um grande lote foram sorteadas duas peças com reposição. Calcule:*
a)P(duas serem defeituosas).(R:0,01)
b)P(pelo menos uma ser perfeita). (R: 0,91)
c)P(uma ser perfeita e uma recuperável).(R:0,28)

Exercício 4.2.8. *Um time de futebol ganha com probabilidade $0,7$ se chove e com $0,8$ se não chove. Em setembro, a probabilidade de chuva é de $0,3$. O time de futebol ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dias? (R: $0,27$)*

4.3 Lei da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é o **Teorema de Bayes**. Numa variedade de situações é útil ser capaz de derivar um conjunto de probabilidades condicionais a partir de um outro conjunto. O **Teorema de Bayes** relaciona probabilidades condicionais da forma $P(A|B)$ com probabilidades condicionais da forma $P(B|A)$, em que a ordem da condicionalidade é reversa.

Antes de apresentar o teorema de Bayes, convém lembrar a definição de probabilidade condicional, para registrar a diferença entre probabilidade condicional e o teorema de Bayes.

Vimos que a probabilidade de um evento A, dado que outro evento B ocorreu, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

com $P(B) > 0$.

A partir da relação dada acima, obtemos a Regra ou Teorema do Produto:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Além disso, se A e B forem **independentes**, tem-se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Obs: essas relações podem ser generalizadas para um número finito de eventos.

Agora, considere uma sequência de eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tal que

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

para todo $i \neq j$. Ou seja, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são dois a dois disjuntos.

Vimos que se

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,$$

então $A_1, A_2, \cdots, A_n$ formam uma **Partição** do espaço amostral Ω, como mostra a Figura 4.2.

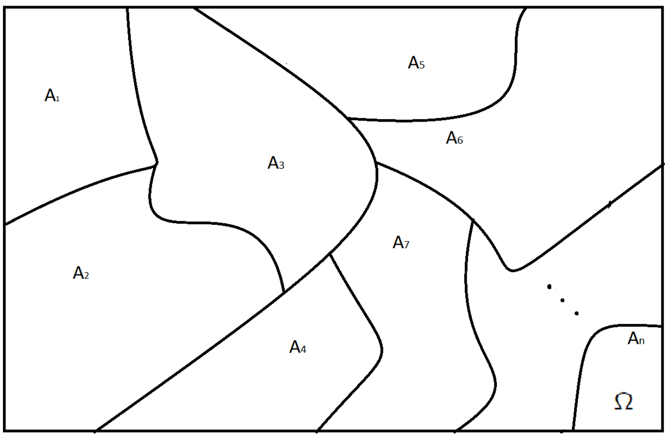


Figura 4.2: Representação geométrica de uma partição.

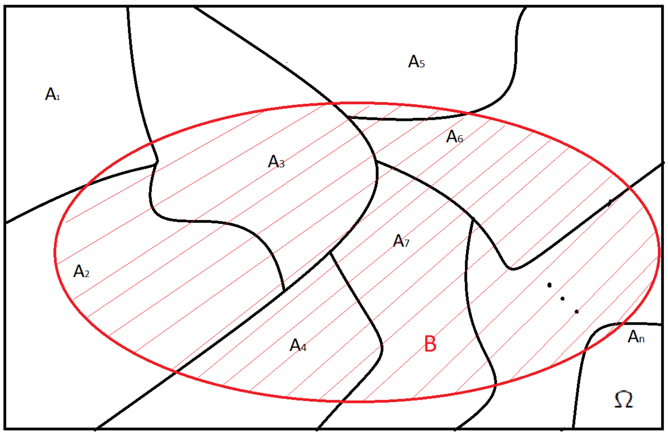


Figura 4.3: Representação geométrica de um evento em uma partição.

Vamos considerar um evento B qualquer tal que $B \subset \Omega$, então B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n) \text{ (veja Figura 4.3.)}$$

Deste modo, a probabilidade total de B pode ser obtida pelo axioma III da probabilidade, como segue.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.1. *Suponha que você utilize peças de três fornecedores, que tem diferentes desempenhos quanto a sua qualidade. As peças são classificadas como conformes ou não conformes e você conhece a proporção de peças não conformes de cada fornecedor assim como a proporção recebida de cada fornecedor. Você recebe 20% de todas as peças que utiliza de F_1, 30% de outro fornecedor F_2 e 50% de F_3. Sendo que 20% das peças produzidas por F_1 são não conformes, enquanto F_2 e F_3, essa proporção é de 5% e 2%, respectivamente. Os lotes de peças são formados com peças dos três fornecedores. Se você selecionar, ao acaso, uma das peças do lote, qual é a probabilidade de ela ser não conforme?*

Resumo da resolução: *Se denotarmos B o evento "peças não conformes ", temos que $P(B|F_1) = 0,2$; $P(B|F_2) = 0,05$; $P(B|F_3) = 0,02$. Além disso, F_1, F_2 e F_3 formam uma partição do espaço amostral pois um lote de peças vem, necessariamente, de um dos três fornecedores. Desta forma, o evento A pode ser escrito em termos de interseções de A com os eventos F_1, F_2 e F_3, então:*

$$B = (B \cap F_1) \cup (B \cap F_2) \cup (B \cap F_3).$$

em que os eventos $(B \cap F_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ são mutuamente exclusivos entre si. Logo:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap F_1) + (B \cap F_2) + (B \cap F_3) \\ &= P(B|F_1)P(F_1) + (B|F_2)P(F_2) + (B|F_3)P(F_3). \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.2. *Do exemplo anterior, dado que a peça é não conforme, qual a probabilidade de vir do fornecedor 1 (F_1)?*

$$\begin{aligned} P(F_1|B) &= \frac{P(F_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|F_1)P(F_1)}{P(B|F_1)P(F_1) + P(B|F_2)P(F_2) + P(B|F_3)P(F_3)}, \end{aligned}$$

e, então

$$P(F_1|B) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,02} = 0,615$$

Portanto, a probabilidade de que a peça em questão tenha sido distribuída pelo F_1 é de 0,615, além disso temos as probabilidades de 0,231 e 0,154 para os fornecedores F_2 e F_3, respectivamente.

O resultado usado para resolver o Exemplo 4.3.2 é conhecido como **Teorema de Bayes**.

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento B, se conheçam as probabilidades $P(B|A_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Então para qualquer j,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo 4.3.3. *Um teste de laboratório detecta uma doença quando ela está presente em 95% dos casos. No entanto, o teste também fornece um resultado "falso positivo"para 1% das pessoas saudáveis testadas. (Isto é, se uma pessoa saudável faz o teste, então, com probabilidade 0,01, o resultado do teste dirá que ela possui a doença.) Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado do teste é positivo?*

Resumo a resolução: *sejam os eventos: D="doença presente", D^c="doença ausente" e T="teste positivo". Então, o interesse é obter: $P(D|T)$. Como:*

$$P(D|T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)},$$

em que $P(T)$ é a probabilidade total de T dada por:

$$P(T) = P(D \cap T) + P(D^c \cap T) = P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c).$$

Agora, basta obter: a probabilidade de o exame dar positivo dado que a pessoa está doente $P(D \cap T)$; a probabilidade de uma pessoa ter a doença antes de fazer o exame $P(D)$; a probabilidade do exame dar positivo dado que a pessoa não tem a doença $P(T|D^c)$ e a probabilidade da pessoa não ter a doença $P(D^c)$.

4.3.1 Exercícios para a Seção 4.3

Exercício 4.3.1. *Um fabricante de impressoras obteve as seguintes probabilidades provenienes de um banco de dados de resultados de testes. Falhas nas impressoras estão associadas com três tipos de problemas: máquina (hardware), programa (software) e outros (tais como conectores), com probabilidades 0,1; 0,6 e 0,3, respectivamente. A probabilidade de uma falha na impressora devido a um problema de máquina é 0,9, devido a um problema de programa é 0,2 e devido a qualquer outro tipo de problema é 0,5. Se um consumidor entrar no site do fabricante para o diagnóstico da falha da impressora, qual será a causa mais provável do problema?*

(R.: a causa mais provável é "outros tipos".)

Exercício 4.3.2. *Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (A, B, C, D e E). Registros anteriores indicam que dos pedidos de determinado tipo de processamento, realizados através de uma consulta, cerca de 10% vêm do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 1,5% do C, 20% do cliente D e 8% do cliente E.*

1. *Qual a probabilidade de o sistema apresentar erro?*
2. *Qual é a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E, sabendo-se que apresentou erro?*

Exercício 4.3.3. *Em uma cidade em que os carros são testados para emissão de poluentes, 25% deles emitem quantidade considerada excessiva. O teste falha para 99% dos carros que emitem excesso de poluentes, mas resulta positivo para 17% dos carros que não emitem quantidade excessiva. Qual é a probabilidade de um carro que falha no teste realmente emitir quantidade excessiva de poluentes?*

Exercício 4.3.4. *Uma companhia de seguros acredita que as pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propícias a sofrerem acidentes e as que não são. Suas estatísticas mostram que uma pessoa propícia a acidentes terá um acidente em algum momento dentro do período de um ano com probabilidade* $0,4$, *enquanto esta probabilidade diminui para* $0,2$ *para pessoas não propícias a acidentes. Supondo que* 30% *da população é propícia a sofrer acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente durante um ano em que comprou uma apólice?*

Capítulo 5

Variáveis Aleatórias

No Capitulo anterior consideramos um tipo de experimento que fornece um resultado que não pode ser previsto com certeza antes de sua realização, mas sabemos qual é o conjunto que contém todos os seus possíveis resultados. A esse tipo de experimento damos o nome de experimento aleatório e ao conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório damos o nome de espaço amostral do experimento, denotado aqui pela letra grega Ω. Qualquer subconjunto do espaço amostral, damos o nome de evento, aos quais associamos uma medida de probabilidade. Como o conjunto das partes do espaço amostral, $\mathcal{P}(\Omega)$, contém todos os eventos, ou seja todos os subconjuntos de Ω, essa medida de chance chamada de probabilidade é uma função definida em $\mathcal{P}(\Omega)$ e assume valores de 0 a 1. Formalmente, temos:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1].$$

Nosso interesse ainda recai sobre atribuir medidas de chance aos eventos, no entanto, muitas vezes, para descrever um experimento aleatório, é conveniente associar valores numéricos aos seus resultados, ou seja, aos eventos.

Para ilustrar uma situação como esta, considere que são inspecionadas 50 peças em uma linha de produção para verificar se cada uma delas tem ou não tem defeito. Se atribuirmos "D" se a peça inspecionada tem defeito e "ND" se a peça não tem defeito, o conjunto de todos os possíveis resultados dessa inspeção (o espaço amostral do experimento) terá 2^{50} elementos, cada um deles sendo uma sequência ordenada de D's e ND's de tamanho 50.

- É possível simplificar este espaço amostral?

Se o interesse for o número de peças que apresentam defeito (ou o número de peças boas) entre as 50, podemos definir:

X="número de D's (ou de ND's) registrados ao inspecionar as 50 peças".

O espaço amostral de X é o conjunto de números reais

$$\Lambda = \{0, 1, 2, ..., 50\},$$

que é muito mais fácil de lidar do que o espaço "amostral original" Ω além de manter a essência do problema.
Ao especificarmos a quantidade X, definimos uma transformação (uma função) a partir do espaço amostral original para um "novo espaço amostral" Λ, que é um conjunto de números reais. Essa função é chamada de **variável aleatória**.

Definição 5.0.1. (Variável aleatória, v.a.) *Uma variável aleatória X é uma função definida num espaço amostral Ω, que assume valores reais.*

- **Observação:** Em geral, variáveis aleatórias são denotadas com letras maiúsculas (X, Y, etc) e os valores assumidos por elas são denotados por letras minúsculas correspondentes (x, y, etc).

Quais valores podem assumir cada uma das seguintes v.a. ?

1. X_1: "número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões".
$$\Lambda = \{0, 1, 2, \cdots, 1000\}.$$

2. X_2: "Linhas em uso em um determinado período de tempo, em um sistema de comunicação por voz com 50 linhas "
$$\Lambda = \{0, 1, 2, \cdots, 50\}.$$

3. X_3: "teor de umidade de um lote de matéria-prima, medido em percentual"
$$\Lambda = [0, 100].$$

4. X_4: "número de falhas na superfície em uma serpentina de aço galvanizado"
$$\Lambda = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+.$$

Embora existam outros tipos de v.a's, aqui veremos as que mais surgem na prática, que são:

1. variáveis Aleatórias Discretas;

2. variáveis Aleatórias Contínuas.

As variáveis aleatórias discretas são aquelas que assumem valores em um conjunto finito ou infinito enumerável. As variáveis aleatórias contínuas são aquelas que assumem valores em um conjunto não enumerável (intervalos da reta). Inciaremos nossos estudos pelas variáveis aleatórias discretas, suas distribuições de probabilidades, variância e esperança. Em seguida, veremos as variáveis aleatórias contínuas com suas distribuições de probabilidades, esperança e variância.

5.1 Variáveis Aleatórias Discretas

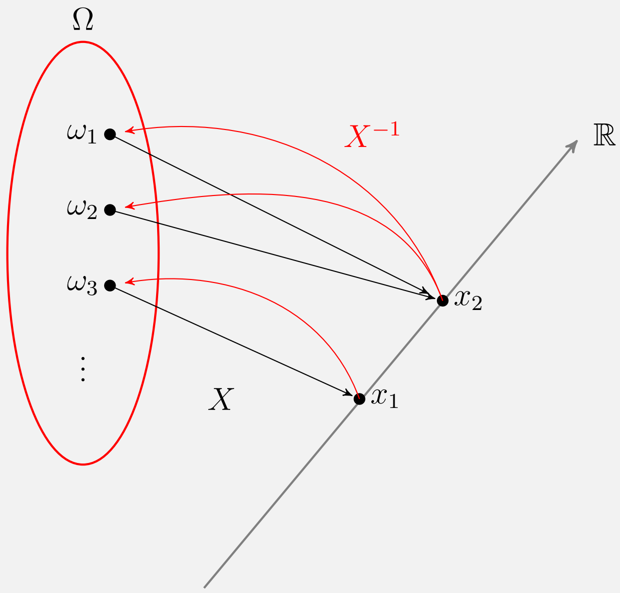
Definição 5.1.1. *(Variável aleatória discreta) Uma* **variável aleatória discreta** *X é uma função definida num espaço amostral Ω, que assume valores reais,*

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R},$$

tal que:

$$[X = x_i] = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$$

é um evento para todo $x_i \in \mathbb{R}$, ou seja para todo $i = 1, 2, 3, \cdots$.



Observe que:

- $\Lambda = \{x_1, x_2, \cdots\}$.
- no diagrama acima temos:

$$[X = x_1] = X^{-1}(x_1) = \{\omega_3\},$$

$$[X = x_2] = X^{-1}(x_2) = \{\omega_2, \omega_3\} \text{ etc ;}$$

- $A = \{\omega_1, \omega_2\} = X^{-1}(x_2) = [X = x_2] \subset \Omega$, então se ω_1 ou ω_2 ocorre, podemos pensar que x_2 ocorre;
- de um modo geral $[X = x_i]$ representa a função inversa X^{-1} no ponto x_i e é um evento, ou seja

$$[X = x_i] = X^{-1}(x_i) = A \subset \Omega;$$

- como os eventos variam a cada realização do experimento, os valores numéricos que lhes são atribuídos também variarão, fazendo sentido pensar em uma probabilidade associada ao valor numérico, a qual é induzida pelo evento ao qual este valor está associado.
- Então, podemos escrever:

$$P\left(X = x_2\right) = P\left(X^{-1}(x_2)\right) = P\left(\{\omega_2, \omega_3\}\right).$$

Exemplo 5.1.1. *Seja o experimento: lançar um dado e verificar a face superior. O espaço amostral é dado por*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

Sejam os eventos: A="a face superior é par"; B="a face superior é ímpar". Então,

$$A = \{2, 4, 6\} \quad e \quad B = \{1, 3, 5\}$$

Vamos definir a variável aleatória X tal que:

$$\begin{cases} X = 0 & \text{se ocorre } A \\ X = 1 & \text{se ocorre } B. \end{cases}$$

Questões:

- *Como fica o diagrama de setas para essa v.a.?*
- *Qual é o espaço das amostras de X? Denote esse novo espaço por Λ.*
- *Quem seria $X^{-1}(100) = [X = 100]$?*
- *Qual a probabilidade do evento $[X = 0]$?*
- *Qual a probabilidade do evento $[X = 1]$?*
- *Qual a probabilidade do evento $[X < 0]$?*

Exemplo 5.1.2. *Se o experimento consiste em retirar uma peça qualquer de uma linha de produção e verificar se ela tem defeito.*

- *Como podemos definir uma v.a. X para este experimento?*
- *Supondo que a probabilidade de sair uma peça com defeito é 0,1, como ficam as probabilidades em relação a X?*

Definição 5.1.2. *O conjunto formado pelos valores numéricos assumidos pela variável aleatória X é chamado de* **espaço das amostras de** X.

Nos dois exemplos anteriores podemos observar que existe uma variabilidade nos valores assumidos pela variável aleatória que resulta da variabilidade dos eventos. Assim, podemos pensar em uma probabilidade induzida pela transformação que associa cada evento a um número na reta. Ou seja, podemos pensar em probabilidades "induzidas" associadas a esse "novo espaço amostral", que consiste no conjunto de todos os resultados possíveis de X. Assim, o que nos interessa nas variáveis aleatórias são suas **distribuições de probabilidade** induzidas pelos eventos.

Distribuição de probabilidade de um v.a. discreta

Definição 5.1.3. *Chamamos de distribuição de probabilidades da v.a. discreta X a coleção de probabilidades:*

$$P(X = x_i), \text{ para todo } x_i \in \mathbb{R}, \tag{5.1.0}$$

tal que $[X = x_i] = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$ é um evento para todo $x_i \in \mathbb{R}$.

Observe que a distribuição de uma variável aleatória X é o conjunto dos valores de probabilidades associados a cada possível valor de X. Se a variável aleatória discreta X tem poucos valores possíveis, ou seja, se o espaço das amostras de X tem poucos elementos, podemos representar sua distribuição de probabilidades em uma tabela, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.1.3. *Considere que uma moeda é lançada duas vezes. Seja X a função definida no espaço amostral que é igual ao número de caras nos dois lançamentos (C - Cara e K - Coroa).*
A distribuição de probabilidade referente a variável aleatória X pode então ser representada como segue:

X	0	1	2	Total
P(X=x)	1/4	1/2	1/4	1

Exemplo 5.1.4. ***Considere o experimento aleatório:*** *lançar um dado honesto e observar a sua face superior.*
Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Defina a variável aleatória: *X:* $\Omega \to \mathbb{R}$,
tal que

$$\begin{cases} X = 1 & \text{se ocorre 1,3 ou 5} \\ X = 2 & \text{se ocorre 2 ou 4} \\ X = 3 & \text{se ocorre 6.} \end{cases}$$

Qual é o espaço das amostras de X?
Qual é a distribuição de probabilidades de X?

5.1.1 Função de Probabilidade

Uma variável aleatória discreta pode ser caracterizada pela sua função massa de probabilidade (ou simplesmente função de probabilidade f.p.).

Definição 5.1.4. *Seja X uma variável aleatória discreta com valores em $\{x_1, x_2, ...\}$. A função massa de probabilidade (ou função de probabilidade f.p.) de X é definida por:*

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \ \forall i. \end{cases}$$

A função de probabilidade de uma v.a. X atribui a cada elemento do espaço das amostras de X uma medida de probabilidade, caracterizando assim a distribuição de probabilidades de X. Em outras palavras, a função de probabilidade de uma v.a. discreta X é a função que atribui a cada valor do espaço das amostras de X, x_i para $i = 1, 2, \cdots$, sua probabilidade de ocorrência. Deste modo, essa função também pode ser referida como **função de frequência** da v.a. X.

Exemplo 5.1.5. *Considere novamente o Exemplo 5.1.4, neste caso podemos obter uma distribuição de probabilidade para X como segue.*
p(1)=P(X=1)=P({1,2,3})=3/6=1/2,
p(2)= P(X=2)=P({4,5})=2/6=1/3,
p(3)=P(X=3)=P({6})=1/6.
A função de probabilidade, ou função de frequência de X é:

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & se \quad x = 1 \\ 1/3 & se \quad x = 2 \\ 1/6 & se \quad x = 3 \\ 0 & se \quad x \neq 1, 2, 3. \end{cases}$$

O gráfico da função de probabilidade pode ser visto na Figura 5.1.

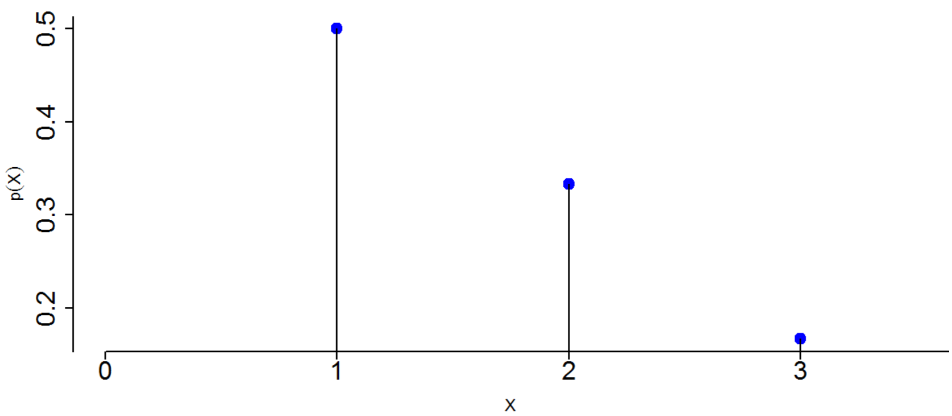


Figura 5.1: Função de probabilidade do Exemplo 5.1.5.

Propriedades da Função de Probabilidade

A função de probabilidade obedece várias propriedades, vejamos algumas delas.

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1$ para todo $i = 1, 2, ...$

2. Se a sequência $x_1, x_2, ...$ inclui todos os possíveis valores de X, então $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

3. Se X tem uma distribuição discreta, então

$$P(X \in I) = \sum_{x_i \in I} p(x_i), \text{ para qualquer intervalo } I \subset \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.1.6. *As vezes bit transmitido por um canal de transmissão digital pode ser recebido com erro.*
Definimos:
X: "número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos"
Os possíveis valores para X são: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
Vamos supor a seguinte distribuição de probabilidade para X:

X	0	1	2	3	4
$p(x) = P(X = x)$	0,65	0,25	0,09	0,009	0,001

Ou seja, X tem função de probabilidade dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 0,65 & se \quad x = 0 \\ 0,25 & se \quad x = 1 \\ 0,09 & se \quad x = 2 \\ 0,009 & se \quad x = 3 \\ 0,001 & se \quad x = 4 \\ 0 & se \quad x \neq 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X pertencer ao intervalo $[0, 2]$*?*
Qual é a probabilidade de X estar no intervalo $(-\infty, x]$ *para cada* $x = 0, 1, 2, 3, 4$*?*

Para os primeiros dois valores de x, temos:

$$\begin{cases} P(X \in (-\infty, 0]) & = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0,65 \\ P(X \in (-\infty, 1]) & = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,65 + 0,25 = 0,9 \end{cases}$$

Encontre todas as probabilidades usando a notação $P(X \leq x)$.

Função de Distribuição Acumulada

Definição 5.1.5. *A Função de distribuição acumulada (f.d.a ou FDA) de uma v.a. discreta X é definida como*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja a função de distribuição acumulada da variável aleatória X: "número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos" do Exemplo 5.1.6, vista a seguir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0,65 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0,9 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,99 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3, \\ 0,999 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{se} \quad 4 \leq x. \end{cases}$$

A Figura 5.2 mostra o gráfico dessa função, onde podemos notar que em cada valor possível da variável a função dá um "salto" que corresponde a probabilidade da variável assumir o valor onde ocorre o salto. Então, temos:

$$\begin{cases} p(0) = P(X = 0) = F(0) = 0,65 \\ p(1) = P(X = 1) = F(1) - F(0) = 0,9 - 0,65 = 0,25 \\ p(2) = P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0,99 - 0,90 = 0,09 \\ p(3) = P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0,999 - 0,990 = 0,009 \\ p(4) = P(X = 4) = F(4) - F(3) = 1 - 0,999 = 0,001 \end{cases}$$

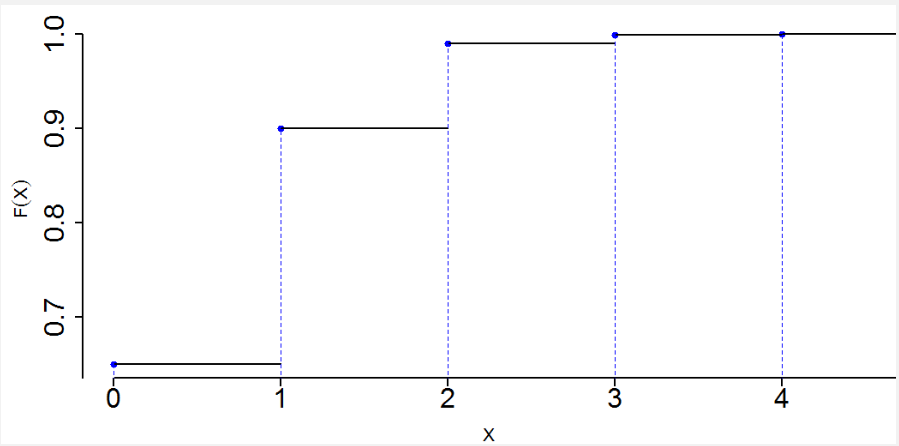


Figura 5.2: Função de distribuição acumulada da variável aleatória X: "número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos" do Exemplo 5.1.6.

Exemplo 5.1.7. *Suponha que uma produção diária de 850 peças fabricadas contenha 50 delas que não obedecem aos requerimentos do consumidor, duas peças são selecionadas ao acaso, sem reposição, da batelada. Seja a variável aleatória X o número de peças não conformes na amostra. Qual é a função de distribuição acumulada de X.*

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta cresce por meio de saltos nos valores possíveis da variável, como ilustrado na Figura 5.2, que mostra o gráfico da função de distribuição acumulada da variável X: "número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos" do Exercício 5.1.6.

Exemplo 5.1.8. *Considere uma variável aleatória X com a seguinte função de distribuição acumulada:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad se \quad x < -2 \\ 0,2 \quad se \quad -2 \leq x < 0 \\ 0,7 \quad se \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 \quad se \quad 2 \leq x \end{cases}$$

- *Construa o gráfico da $F(x)$.*
- *Exiba a distribuição de X numa tabela.*
- *Obtenha a função de probabilidade $p(x)$.*
- *Construa, também, o gráfico da função de probabilidade $p(x)$.*

5.1.2 Esperança, Média ou Valor Esperado de uma v.a. Discreta

Para motivar a definição de esperança de uma v.a., vamos supor uma urna com 2 bolas brancas, 2 vermelhas e 1 azul. Selecionamos ao acaso uma bola em que eu ganho:

$$X = \begin{cases} R\$5,00, & \text{se sair bola branca} \\ R\$0,00, & \text{se sair bola vermelha} \\ R\$10,00, & \text{se sair bola azul,} \end{cases}$$

Quanto devo pagar por partida para que o jogo seja honesto?

A variável aleatória assume valores no espaço de amostras $S = \{0, 5, 10\}$. Então podemos obter a seguinte função de probabilidade:

$$p(x) = \begin{cases} 0,4 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 5 \\ 0,2 & \text{se } x = 10 \end{cases}$$

Para que o jogo seja honesto (justo), o nosso investimento deve ser proporcional ao risco de perder. Ou seja, se existe 50% de chance de perdermos, devemos investir a metade do valor que poderíamos ganhar. No caso acima, devemos investir uma quantidade proporcional ao nosso risco. Como o risco é de 40% de perder tudo, 40% de ganhar $1frm{-}e$ do total e 20% de ganhar o total. Então, para que seja justo, devemos investir $0,4 \times 5 + 0,2 \times 10 = (2/5) \times 5 + (1/5) \times 10 = 4$ reais. Isso motiva a seguinte definição de esperança de uma variável aleatória discreta.

Definição 5.1.6. *A esperança (média ou valor esperado) $E(X)$ de uma v.a. discreta X é a soma dos produtos de todos os possíveis valores da v.a. pelos seus respectivos valores de probabilidades. Ou seja,*

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i),$$

para $i = 1, 2, \cdots$.

Observações sobre esperança:

- Embora $E[X]$ seja denominada esperança da v.a. X, este valor depende da distribuição de X, podendo ser referida como esperança da distribuição da v.a. X.
- Duas variáveis aleatórias com mesma distribuição poderão ter a mesma esperança, mesmo que tenham significados diferentes.

Exemplo 5.1.9. *Uma seguradora paga R$ 30.000,00 em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de R$ 1.000,00. Sabe-se que a probabilidade que um carro sofra acidente é de 3%.*

- *Quais são os valores possíveis para a variável aleatória X="ganho da operadora".*
- *Apresente a distribuição de probabilidade de X em uma tabela.*
- *Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado? Ou seja, E[X]?*

Propriedades da Esperança

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas e a, cconstantes, então:

1. $E[c] = c$;
2. $E[c.X] = cE[X]$;
3. $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$;
4. $E[aX \pm b] = aE[X] \pm b$;
5. $E[X - E[X]] = 0$;
6. $E[h(X)] = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) \cdot P(X = x_i)$, em que $h(X)$ é uma função de X;
7. se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias, então $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum E[X_i]$.

Como exercício, prove essas propriedades.

Exemplo 5.1.10. *De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática:*

$$L = R - C,$$

em que L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto (ganho bruto). A empresa mantém extensos registros das produções dos seus produtos. Para um determinado produto, com os dados coletados, foi construída a seguinte distribuição de probabilidade para a variável aleatória

X=" número de itens produzidos por hora na empresa"

X	0	1	2	3	4	5
p(X)	0,04	0,2	0,35	0,30	0,1	0,01

a) *Calcule a média da produção diária* **(Y: quantidade de itens produzido por dia)** *desse produto, $\mu = \mathbb{E}[Y]$, sabendo que a empresa opera 24 horas por dia.*

b) *Suponha que o custo e a receita (valor de produção de cada item multiplicado pelo número de itens fabricados) do produto é dado pela equação $C(Y) = Y^2 + 2Y$ e que a receita (número de itens produzidos multiplicado pelo valor de venda) é dada pela equação $R(Y) = 6Y + Y^2$. A partir dessas expressões, calcule o valor esperado do custo (C) e da receita (R).*

c) *Quanto a empresa espera receber de lucro (L) com as vendas dos itens produzidos em um único dia?*

O fato de conhecermos a média de uma distribuição de probabilidade já nos ajuda bastante em termos de resumir a distribuição, porém precisamos também de uma medida que nos dê o grau de dispersão de probabilidade em torno dessa média. Uma medida que fornece o grau da dispersão da distribuição da variável em torno da média é a **variância** da v.a.

5.1.3 Variância de um v.a. Discreta

A variância de uma variável aleatória fornece uma medida da dispersão de sua distribuição em torno de sua média. Assumindo que essa média e essa variância existam, definimos, para qualquer variável aleatória, a variância como segue.

Definição 5.1.7. *Definimos a variância de uma v.a. X qualquer como sendo a média dos quadrados dos desvios de X em torno da sua esperança, ou seja:*

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - E[X])^2]$$

Da definição acima, decorre que a variância pode ser calculada por:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Se X é um v.a. discreta com valores em $\{x_1, x_2, \cdots\}$, então, na expressão acima, temos:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i).$$

Propriedades da Variância

1. $Var(c) = 0$;

2. $Var(c \cdot x) = c^2 Var(X)$;

3. $Var(aX \pm b) = a^2Var(X)$;

4. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$, em que $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Exemplo 5.1.11. *Considerando novamente a variável:*
X=" número de itens produzidos por hora na empresa"

X	0	1	2	3	4	5
p(X)	0,04	0,2	0,35	0,30	0,1	0,01

a) *Sabendo que que o lucro é dado por $L = R - C$, em que é C o custo da produção e R a receita do produto dado no Exemplo 5.1.10, qual é a expressão do lucro?*

b) *Qual a variância de Y.*

c) *Obtenha a variância do lucro.*

5.2 Exercícios para a Seção 5.1

Exercício 5.2.1. *Suponha que X represente a diferença entre o número de caras e coroas obtido quando uma moeda é jogada 3 vezes.*

(a) *Quais são os possíveis valores de X?*

(b) *Se a moeda é honesta, quais são as probabilidades associadas aos valores que X pode assumir?*

Exercício 5.2.2. *Três homens e três mulheres são classificados de acordo com suas notas em uma prova. Suponha que não existam notas iguais e que todas as 6! classificações possíveis sejam igualmente prováveis. Faça X representar a melhor classificação obtida por uma mulher (por exemplo, $X = 1$ se a pessoa mais bem classificada for uma mulher, $X = 2$ se a pessoa classificada em segundo lugar for uma mulher etc). Apresente a distribuição de probabilidades de X em uma tabela.*

Exercício 5.2.3. *Seja X uma v.a. com FDA dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < -1 \\ 0,25 & se \quad -1 \leq x < 3 \\ 0,75 & se \quad 3 \leq x < 5 \\ 1 & se \quad x \geq 5 \end{cases}$$

(a) *Construir gráfico de F(x).*

(b) *Determinar a função de probabilidade (p(x)) de X, E(X) e Var(X).*

(c) *Construir o gráfico da função de probabilidade $p(x)$.*

Exercício 5.2.4. *Seja X uma v.a. que assume valores em $S = \{0, 1, 2, 4, x\}$. Se cada valor em S é igualmente provável e $E(X) = 8$, qual é o valor de x?*

Exercício 5.2.5. *Considere que um produto pode estar perfeito (B), com defeito leve (DL) ou com defeito grave (DG). Seja a distribuição do lucro (em R$), por unidade vendida desse produto, dada pela Tabela 5.1.*

Tabela 5.1: Distribuição do lucro (R$).

Produto	X	p(x)
B	6	0,7
DL	0	0,2
DG	-2	0,1

(a) Calcule o valor esperado e a variância do lucro, ou seja E(X) e Var(X).

(b) Com a redução de desperdícios, foi possível aumentar uma unidade no lucro de cada unidade do produto, qual é o novo valor esperado e a nova variância do lucro por unidade?

(c) Se o lucro duplicar, qual é o valor esperado e a variância do novo lucro por unidade?

Exercício 5.2.6. *Você tem R$1000,00, e certa mercadoria é vendida atualmente por R$2,00 o quilo. Suponha que uma semana depois a mercadoria passe a ser vendida por R$1,00 ou R$4,00 o quilo, com essas duas possibilidades sendo igualmente prováveis ao longo da semana.*

(a) *Se o seu objetivo é maximizar a quantidade esperada de dinheiro que você possuirá no final da semana, que estratégia você deve empregar?*

(b) *Se o seu objetivo é maximizar a quantidade esperada de mercadoria que você possuirá no final da semana, que estratégia você deve empregar?*

Dica: analise as esperanças de ganho em dinheiro e mercadorias.

Exercício 5.2.7. *Na produção de uma peça são empregadas duas máquinas. A primeira é utilizada para efetivamente produzir as peças, e o custo de produção é de R$ 50,00 por unidade. Das peças produzidas nessa máquina, 90% são perfeitas. As peças defeituosas (produzidas na primeira máquina) são colocadas na segunda máquina para a tentativa de recuperação (torná-las perfeitas). Nessa segunda máquina o custo por peça é de R$ 25,00, mas apenas 60% das peças são de fato recuperadas. Sabendo que cada peça perfeita é vendida por R$ 90,00, e que cada peça defeituosa é vendida por R$ 20,00, calcule o lucro por peça esperado pelo fabricante.*

5.3 Principais Modelos Probabilísticos Discretos

Os modelos probabilísticos discretos são dados por distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias discretas. Frequentemente nos referimos a essas distribuições como “distribuições discretas de probabilidades”. Existem muitos modelos probabilísticos discretos (ou modelos para variáveis aleatórias discretas). Aqui veremos apenas os mais utilizados na prática.

5.3.1 Modelo Uniforme Discreto

Uma variável aleatória discreta segue um modelo uniforme discreto se todos os seus possíveis valores tem a mesma chance de ocorrer.

Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado honesto, e estamos interessados na v.a.:

X: número da face superior.

Neste caso todos os possíveis resultados ocorrem com a mesma probabilidade e, assim, podemos dizer que a probabilidade se distribui **uniformemente** entre os diversos resultados:

X	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Definição 5.3.1. *Uma v.a. X assumindo valores em um conjunto finito,* $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$*, segue um modelo uniforme discreto se sua f.p. é dada por:*

$$p(x) = \begin{cases} 1/n, & se \;\; x = x_i \;\, para \; algum \; i = 1, 2, \cdots, n \\ 0, & se \;\; x \neq x_i \;\;\, para \; todo \;\;\; i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Notação: $X \sim U^d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

A esperança e a variância da v.a. discreta X seguindo um modelo uniforme são dadas por:

- $E[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$,
- $Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (E[X])^2$.

Na Figura 5.3 mostra um gráfico de uma variável aleatória seguindo um modelo uniforme discreto.

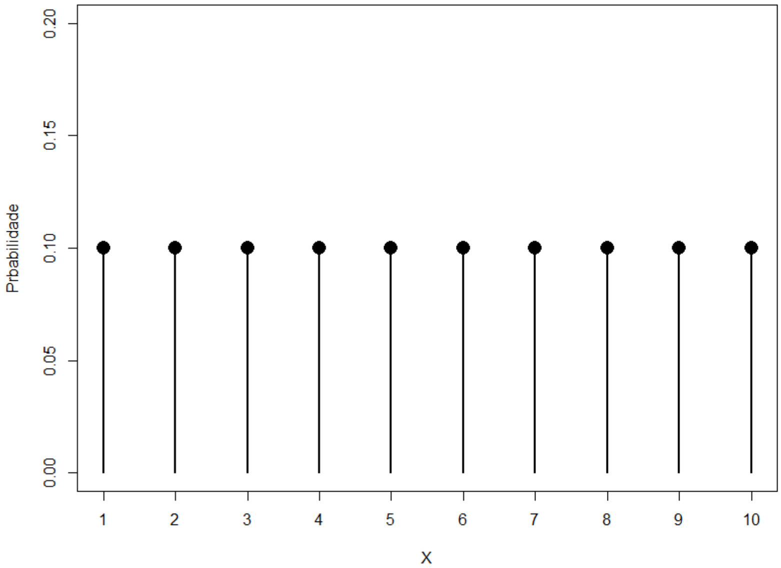


Figura 5.3: Modelo Uniforme Discreto para $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5.3.2 Modelo de Bernoulli

Ensaios ou Experimentos de Bernoulli

Alguns experimentos têm alternativas dicotômicas, ou seja, possuem apenas dois resultados possíveis. Esses resultados podem ser representados por resposta do tipo "sucesso" ou "'fracasso", por exemplo:

- Uma peça é classificada como defeituosa ou não defeituosa;
  - não defeituosa: sucesso;
  - defeituosa: fracasso.
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
  - positivo: sucesso;
  - negativo: fracasso.
- Um entrevistado concorda ou não com uma afirmação feita;
  - concorda: sucesso;
  - não concorda: fracasso.
- A direção que segue um veículo em uma bifurcação (A ou B);
  - direção A: sucesso;
  - direção B: fracasso.

Em homenagem ao matemático suíço James Bernoulli, esse tipo de experimento é denominado ensaios de Bernoulli. A partir desses ensaios, pode ser definida uma variável aleatória X que assume 0 se ocorre fracasso e 1 se ocorre o sucesso, em que o sucesso é o fenômeno que se deseja investigar e, geralmente, tem probabilidade pequena de ocorrer denotada por p. Ou seja,

$$X = \begin{cases} 0, & \text{se corre fracasso,} \\ 1, & \text{se ocorre sucesso.} \end{cases}$$

Uma v.a. discreta definida dessa forma é dita seguir uma **distribuição de Bernoulli**. Formalmente tem-se a definição a seguir.

Definição 5.3.2. *Uma variável aleatória X segue um modelo de Bernoulli com parâmetro p se sua função de probabilidade é dada por:*

$$p(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x}, & se \ \ x = 0,1 \\ 0, & se \ \ x \neq 0,1, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} com\ q = 1-p\ e \\ 0 \leq p \leq 1. \end{array}$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

A esperança e a variância da variável aleatória de Bernoulli são dadas por:

- $E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i p(x_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p,$
- $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p - p^2 = p(1-p).$

5.3.3 Modelo Binomial

Considerando que n ensaios de um experimento de Bernoulli sejam realizados de forma independente, a seguinte variável aleatória pode ser definida:

X: "N^o de sucessos em n ensaios de Bernoulli, independentes."

Neste caso X assume valores em $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$. O espaço amostral desse experimento é composto por sequências de sucessos (S) e fracassos (F). Uma sequência com zero sucesso, pode ser escrita como:

$$FFFF \cdots FF$$

e uma sequência somente com sucessos pode ser escrita como:

$$SSSS \cdots SS.$$

Assim, sendo p, $0 \leq p \leq 1$, a probabilidade de sucesso, para essa sequência pode ser associada a seguinte probabilidade:

$p(0) = P(FFF \cdots F) = (1-p) \times (1-p) \times (1-p) \cdots (1-p) = (1-p)^n$

Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se:

$p(1) = P(\text{"sequências com um sucesso"}) = np \times (1-p) \times (1-p) \cdots (1-p) = np(1-p)^{n-1}$

$p(2) = P(\text{"sequências com dois sucessos"}) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

$p(3) = P(\text{"sequências com três sucessos"}) = \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3}$

$\vdots$

$p(n) = P(SSS \cdots SS) = p \times p \times p \cdots p = p^n.$

Então, a função de probabilidade da v.a. X pode ser escrita como:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

para todo x no espaço das amostras de X. Neste caso X segue uma distribuição binomial. A Figura 5.4, mostra a distribuição de probabilidades para uma variável aleatória seguindo uma distribuição binomial com vetor de parâmetros $(10; 0,3)$ e a caracterização da variável aleatória é dada pela definição a seguir.

Definição 5.3.3. *Uma variável aleatória X assumindo valores em* $\Lambda = (x_1, x_2, \cdots, n)$ *segue um modelo binomial com parâmetros n e p se sua função de probabilidade é dada por:*

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & se \ \ x \in \Lambda, \\ 0 & se \ \ x \notin \Lambda. \end{cases}$$

Notação: $X \sim Binomial(n, p)$.

Note que a variável aleatória com distribuição binomial pode ser escrita como a soma de n variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli, ou seja

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

em que cada Y_i tem distribuição de Bernoulli, isto é, $Y_i \sim Bernoulli(p)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Pois cada Y_i pode assumir o valor 0 ou 1, sendo 1 apenas quando ocorre o sucesso no ensaio de Bernoulli. Usando essas informações e o pressuposto de independência entre os ensaios de Bernoulli, obtemos a esperança e a variância da v.a. com distribuição binomial como segue:

- $E[X] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n] = E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_n] = p + p + \cdots + p = np,$
- $Var(X) = Var(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) = Var(Y_1)+Var(Y_2)+\cdots+Var(Y_n) = p(1-p)+p(1-p)+\cdots+p(1-p) = np(1-p).$

Logo,

$$E[X] = np$$
$$Var(X) = np(1-p).$$

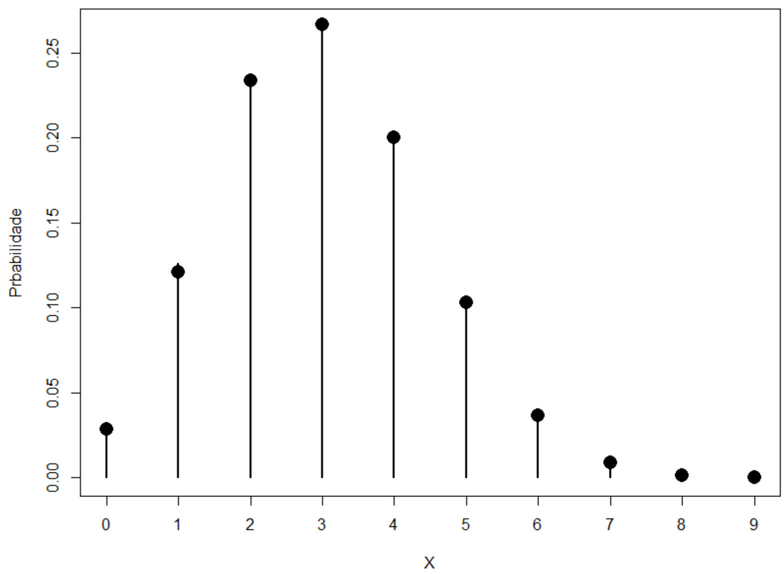


Figura 5.4: Gráfico das probabilidades da Binomial n=10 e p=0,3.

Exemplo 5.3.1. *Sabe-se que os parafusos produzidos por certa empresa têm probabilidade de 0,01 de apresentarem defeitos, independentemente uns dos outros. A empresa vende os parafusos em pacotes com 10 e oferece uma garantia de devolução de dinheiro se mais de 1 parafuso em 10 apresentar defeito. Que proporção de pacotes vendidos a empresa deve trocar?*

5.3.4 Modelo Hipergeométrico

Suponha que em um dia de produção de determinado produto 20 peças são fabricadas em um setor, das quais 5 não satisfazem os requerimentos dos consumidores. Agora, suponha que duas peças são retiradas **sem reposição** dessa produção. Sejam A e B os eventos: a primeira e a segunda peças são não conformes, respectivamente.

Foi visto que,

$$P(B|A) = 4/19 = 0,21 \text{ e}$$
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = 20/380 + 75/380 = 0,25$$

Nesta situação, pode ser notado que o conhecimento de que a primeira peça é não conforme torna menos provável que a segunda seja não conforme. Seja a variável aleatória definida como:

X:"N^o de peças não conforme na amostra".

Obtenha:
$P(X = 0)$
$P(X = 1)$
$P(X = 2)$

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos.

Suponha n objetos extraídos de forma aleatória de uma população de tamanho N, em que r objetos são do tipo 1 e N-r objetos são do tipo 2.

Se as retiradas são feitas **com reposição**, a v.a.

Y:"N^o de objetos do tipo 1 na amostra" $\sim$ Binomial(n,p=r/N)

Se as retiradas são feitas **sem reposição**, Y tem distribuição hipergeométrica com parâmetro (N,n,r), como definido a seguir.

Definição 5.3.4. *Uma v.a. X segue uma distribuição hipergeométrica com parâmetros N,n,r se sua função de probabilidade é dada por:*

$$p(y) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, & se \;\; y = 1, 2, \cdots, M, \\ 0, & se \;\; y \neq 1, 2, \cdots, M. \end{cases} \qquad em\ que\ M = \min\{r, n\},$$

Aqui, tem-se que:

- *N é o total de elementos na população;*
- *n é o tamanho da amostra extraída de forma aleatória sem reposição;*
- *r é o número de elementos na população que são do tipo 1;*
- *Y é a v.a. que conta o número de elementos do tipo 1 na amostra.*

Notação: $Y \sim$ Hipergeométrica(N, n, r).

Se X é uma variável aleatória hipergeométrica sua esperança e variância são dadas por:

- $E(X) = np$ em que $p = \frac{r}{N}$;
- $Var(X) = np(1-p)(\frac{N-n}{N-1})$.

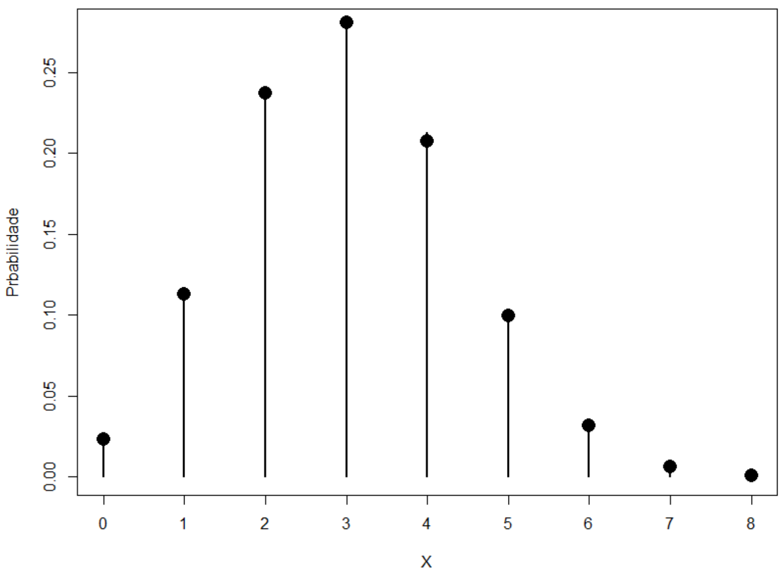


Figura 5.5: Modelo hipergeométrico com N=100, r=30 e n=10.

Exemplo 5.3.2. *Em problemas de controle de qualidade, suponha que num lote de $N = 100$ peças, $r = 10$ sejam defeituosas. Escolhendo $n = 5$ peças sem reposição.*

1. *Qual a probabilidade de não se obter peças defeituosas?*
2. *Qual a probabilidade de se obter no máximo uma com defeito?*
3. *E se as peças forem retiradas com reposição, como ficam essas probabilidades?*

5.3.5 Modelo de Poisson

Considere situações em que se avalia o número de ocorrências de um tipo de evento por unidade de tempo, de comprimento, de área, ou de volume, como por exemplo:

- O número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas de um livro);
- O número de pessoas em uma comunidade que vivem mais de 100 anos;
- O número de telefone discados incorretamente em um dia;
- O número de falhas de um computador em um dia de operação;
- O número de partículas a descarregar por um material radioativo em um período de tempo fixo.

Esses são exemplos de um grupo de variáveis aleatórias discretas que assumem valores em um espaço qualquer. Esse tipo de variável muitas vezes pode ser modelada por uma distribuição de Poisson, que é definida a seguir.

Definição 5.3.5. *Seja X uma v.a. que pode assumir qualquer valor em $0, 1, 2, \cdots$. Então, X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ se sua f.p. é dada por:*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & se \;\; x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & se \;\; x \neq 0, 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Pode ser mostrado que a variância e a esperança da distribuição de Poisson coincidem e são dadas por:

$$E(X) = Var(X) = \lambda.$$

Aqui, λ é uma taxa de ocorrência da variável em um período qualquer.

Portanto, a variável aleatória de Poisson conta o número de "sucesso" em um intervalo qualquer (tempo, espaço etc).

Aproximação da Binomial pela Poisson

A distribuição Binomial pode ser aproximada pela distribuição de Poisson.

Se $X \sim Bin(n, p)$, n é grande e p (probabilidade de Sucesso) é pequena, então podemos obter $E(X) = n \cdot p \approx \lambda$. Neste caso, podemos mostrar que:

$$p(x) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Exemplo 5.3.3. *Considere novamente o exemplo da variável aleatória com distribuição binomial:*

Y:"Nº de parafusos com defeito em uma amostra de 10 parafusos"

em que

$$p = P(sucesso) = P(parafuso\ com\ defeito\ em\ uma\ retirada) = 0,01.$$

Vamos obter a probabilidade de mais de um parafuso com defeito usando a distribuição de Poisson e comparar o resultado obtido com o uso da distribuição binomial.

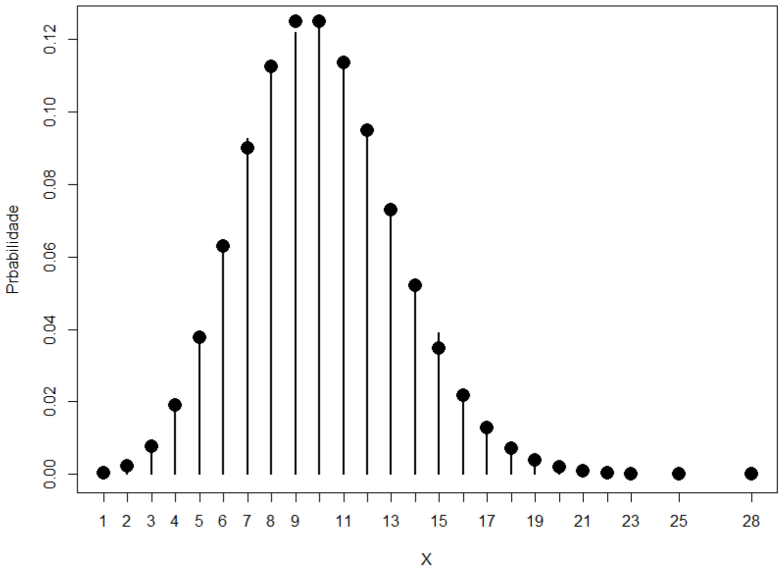


Figura 5.6: Grafico das probabilidades do modelo Poisson com $\lambda = 10$.

Exemplo 5.3.4. *A taxa de infecção por uma determinada doença infecciosa em um certo estado é de 1 por 100.000 habitantes cada mês.*

(a) *Determine a probabilidade de que em uma cidade de 400.000 habitantes, deste estado, ocorram 3 infecções ou mais em um dado mês, por essa doença.*

(b) *Qual é a probabilidade de que em pelo menos 2 meses durante o ano ocorram 3 infecções ou mais?*

5.4 Exercícios para a Seção 5.3

Exercício 5.4.1. *(Barbetta* et al.*, 2004, p. 136): Mensagens chegam ao servidor de acordo com uma distribuição de Poisson, com taxa média de cinco chegadas por minuto.*

a) *Qual é a probabilidade de que duas chegadas ocorram em um minuto?*

b) *Qual é a probabilidade de que uma chegada ocorra em 30 segundos?*

Exercício 5.4.2. *Uma entrevistadora tem consigo uma lista de pessoas que pode entrevistar. Se ela precisa entrevistar 5 pessoas, e se cada pessoa concorda (independentemente) em ser entrevistada com probabilidade $\frac{2}{3}$, qual é a probabilidade de que a sua lista permita que ela consiga obter o número necessário de entrevistas se ela contiver (a) 5 pessoas e (b) 8 pessoas? Na letra (b), qual é a probabilidade de que a entrevistadora fale com exatamente 6 pessoas?*

Exercício 5.4.3. *(Morettin pg. 120 adaptado) Uma remessa de 800 estabilizadores de tensão é recebida pelo controle de qualidade de uma empresa. São inspecionados 20 aparelhos da remessa, que será aceita se ocorrer no máximo um defeituoso. Há 100 defeituosos no lote. Qual a probabilidade de o lote ser aceito?*

Exercício 5.4.4. *(Montgomery pg. 58) Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito integrado seja defeituoso é de 0,01. Os circuitos operam de forma independente. O produto opera somente se não houver circuitos integrados defeituosos. Qual é a probabilidade de que o circuito opere?*

Exercício 5.4.5. *Um processo de produção é paralisado para ajuste toda vez que uma amostra aleatória de cinco itens apresenta dois ou mais defeituosos. Ache a probabilidade de que o processo será paralisado após uma inspeção se ele está produzindo:*

(a) *20 % de defeituosos;*

(b) *10 % de defeituosos;*

(c) *5 % de defeituosos.*

Exercício 5.4.6. *Responda as questões.*

(a) *Se um profissional comanda a execução dos seus projetos, obtendo resultado satisfatório em 80% dos casos (o que significa que 80% dos clientes consideram o trabalho realizado como sendo bom), se a equipe executar 12 projetos no decorrer de um ano, qual a probabilidade de que ocorra no máximo 1 projeto mal avaliado?*

(b) *Se cada projeto a ser executado contém 15 itens, cada um podendo ser bem avaliado com 98,5% de chance, ache a média e o desvio-padrão do número de itens bem avaliados em tais projetos.*

(c) *Supondo que um projeto é considerado mal avaliado se pelo menos um dos seus itens for mal avaliado e considerando as informações dadas em (b), calcule a probabilidade de uma execução de um dado projeto fornecer pelo menos um item mal avaliado. Compare sua resposta com a chance dada em (a).*

Exercício 5.4.7. *(Morettin Pg. 123 adaptado) O CRH de uma firma entrevista 150 candidatos a emprego por hora. Qual a probabilidade de entrevistar:*

a) *no máximo 4 candidatos em 3 minutos?*

b) *exatamente 3 candidatos em 4 minutos?*

Exercício 5.4.8. *(Morettin Pg. 122 adaptado) De acordo com a Divisão de Estatística Vital do Departamento de Saúde dos Estados Unidos, a média anual de afogamentos acidentais neste país é de 3 por 100.000 indivíduos. Determinar a probabilidade de que em uma cidade com 300.000 habitantes se verifiquem:*

a) *Nenhum afogamento.*

b) *No máximo 2 afogamentos.*

c) *Pelo menos um afogamento.*

Exercício 5.4.9. *(Bussab p. 157): Num certo tipo de fabricação de fita magnética ocorrem cortes a uma taxa de 1 por 2000 pés. Qual é a probabilidade de um rolo com 2000 pés de fita magnética tenha:*

a) *nenhum corte;*

b) *no máximo 2 cortes e*

d) *pelo menos 2 cortes?*

Exercício 5.4.10. *(Montgomery P. 65 adaptado) Cartões de circuito integrado são verificados em um teste funcional depois de serem preenchidos com chips semicondutores. Um lote contém 140 cartões, e 20 são selecionados sem reposição para o teste funcional.*

(a) *Se 20 cartões forem defeituosos, qual é a probabilidade de no mínimo um cartão defeituoso estar na amostra?*

(b) *Responda o item (a) usando a distribuição binomial e compare com o resultado obtido em (a) pela hipergeométrica.*

5.5 Variáveis Aleatórias Contínuas

Foi visto anteriormente que uma variável aleatória discreta assume valores em um conjunto contável, $x_1, x_2, \cdots$. No entanto existem outros tipos de espaço de amostras, como por exemplo, os espaços contínuos. Assim, uma variável aleatória (absolutamente) contínua X é uma função definida num espaço amostral Ω, que assume valores em um intervalo da reta (conjunto não enumerável de valores).

São exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

- o tempo de duração de uma chamada telefônica;
- a altura da água em uma represa;
- comprimento de parafusos em uma linha de produção;
- pesos de bebês ao nascer;
- o tempo de vida de uma lâmpada.

Assim como no caso discreto, aqui o interesse recai na distribuição de probabilidades da variável aleatória. No entanto, não é possível atribuir probabilidades aos valores de uma variável aleatória contínua da mesma maneira que fazemos para as variáveis aleatórias discretas. Pois a soma de uma quantidade não enumerável de números positivos não poderia ser igual a 1. Portanto, em vez de atribuir probabilidades aos valores da variável, podemos atribuir probabilidades a intervalos de valores dessa variável. Formalmente, tem-se a seguinte definição de variável aleatória contínua.

Definição 5.5.1. *Dizemos que X tem uma distribuição contínua ou é uma variável aleatória contínua se existe uma função não-negativa $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ que tenha a propriedade de que, para qualquer conjunto I de números reais,*

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx. \tag{5.5.0}$$

A função f é chamada de função densidade de probabilidade (f.d.p.) da variável aleatória X.

Ou seja, a probabilidade de que X esteja em I pode ser obtida integrando a função densidade de probabilidade ao longo do conjunto $I \in \mathbb{R}$.

Observação: a definição acima é válida somente para os conjuntos denominados mensuráveis de $\mathbb{R}$, no entanto, esses conjuntos incluem todos os conjuntos de interesse prático. Portanto, aqui, a preocupação com essas questões técnicas não é necessária.

A região sombreada no gráfico apresentado na Figura 5.7 corresponde a probabilidade de $X \in I$ quando $I = [a, b]$.

Figura 5.7: $P(a \leq X \leq b)$ =área sombreada.

Densidade empírica na análise estatística

Na análise de dados proveniente de variáveis aleatórias contínuas, não é possível saber com certeza qual é a função de densidade que gera os dados, assim como ocorre em alguns casos discretos. Por essa razão, deve-se buscar meios de se ter uma ideia de qual densidade seria mais apropriada para descrever um conjunto de dados particular. Em muitos casos, pode-se construir um histograma e, a partir deste, um **polígono de frequência**. Esses gráficos podem ser pensados como a densidade empírica desse conjunto de dados e podem fornecer uma ideia da forma da função densidade de probabilidade da variável aleatória que gerou esses dados. Isso torna esses gráficos de extrema importância em muitas análises estatísticas.

Relembrando a construção do histograma.

- O histograma é um gráfico de barras contíguas de bases iguais (intervalos de mesmo comprimento) e com áreas proporcionais a proporção de valores dos dados em cada intervalo (f_i).
- No histograma a altura de cada retângulo é proporcional a frequência de ocorrência da variável no intervalo que constituí a base, e, por conveniência, deve ser obtida dividindo a frequência relativa de ocorrência pela amplitude da base (ou f_i/Δ), Δ o comprimento das bases dos retângulos.
- Quanto mais dados contiver o intervalo de uma determinada base, mais alto será o retângulo correspondente.

Como exemplo, vejamos a frequência de um grupo de estudantes segundo a variável altura.

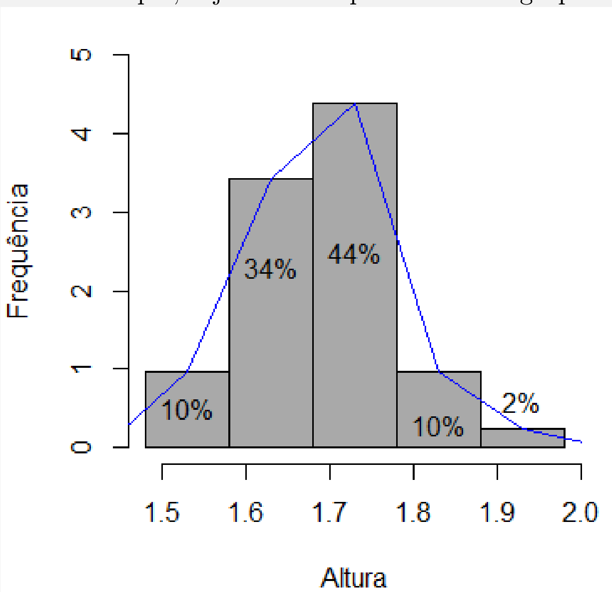


Tabela de frequência em intervalos de classes.

X	n_i	f_i
$1,48 \dashv 1,58$	4	$4/41 \approx 0,10$
$1,58 \dashv 1,68$	14	$14/41 \approx 0,34$
$1,68 \dashv 1,78$	18	$18/41 \approx 0,44$
$1,78 \dashv 1,88$	4	$4/41 \approx 0,10$
$1,88 \dashv 1,98$	1	$1/41 \approx 0,02$
Total	41	1

Em que n_i é a frequência e f_i é a proporção de dados no intervalo.

Se os dados foram coletados de forma aleatória (ao acaso) de um grupo maior, que denominamos população, podemos definir a variável aleatória "altura dos indivíduos da população" e utilizar o polígono de frequência para se ter uma ideia da forma da densidade que melhor descreve esses dados. A partir dessa ideia, pode-se realizar testes estatísticos que vão confirmar ou não essa suposição inicial. Se esses testes não confirmam essa suposição inicial, todos os resultados alcançados a partir disto perdem sua validade e não devem ser levados em consideração na tomada de decisão.

Propriedades da função densidade de probabilidade

Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então para qualquer intervalo I da reta tem-se:

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$

em que $f(x)$ é sua função densidade de probabilidade e tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $P(X \in (-\infty, \infty)) = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

(iii) Se $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, então $P(X \in (a, b)) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

(iv) Se $a = b$, então $P(X \in (a, b)) = P(a < X < a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

Note que, pela propriedade (iv), a probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir um valor qualquer da reta, digamos k, é sempre zero, pois $P(X=k)=\int_k^k f(x)dx=0$. Deste modo, a inclusão ou não dos extremos a e b do intervalo $I=[a,b]$ na obtenção de $P(X\in[a,b])$ é irrelevante, ou seja:

$$P(X\in[a,b])=P(a\leq X\leq b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Fato: Uma função real f que satisfaz (i) e (ii) é função densidade de probabilidade de alguma variável aleatória contínua X. Isso significa que para se ter uma função densidade de probabilidade, basta que se tenha uma função real positiva e obter a constante normalizadora que forneça a área abaixo da curva igual a 1.

Exemplo 5.5.1. *Consideremos a função abaixo:*

$$f(x)=\begin{cases} c(x^2+x), & se\ 0\leq x\leq 1; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Encontre c de modo que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade de alguma variável aleatória X.
Resolução: *Para que a função seja uma densidade é necessário que ela satisfaça as propriedades (i) e (ii), ou seja, a função deve ser maior ou igual a zero e a área total abaixo da curva da função, de $-\infty$ à ∞, deve ser 1.*

(i) Como $f(x)>0$ para $0\leq x\leq 1$ e $c>0$, (i) está satisfeita.

(ii) Para a verificação de (ii), basta integrar a função f(x) em todo o seu domínio e verificar se esta integral tem valor 1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^1 c[x^2+x]dx+\int_1^{\infty} 0dx=c\int_0^1 (x^2+x)\,dx=c\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5c}{6}=1\Rightarrow c=\frac{6}{5}.$$

Neste caso, $c=6/5$ é a constante normalizadora que torna essa função positiva em uma f.d.p..

Exemplo 5.5.2. *Suponha que a quantidade de tempo em que um computador funciona sem estragar é uma variável aleatória X contínua com função densidade de probabilidade*

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}} & se\ x>0; \\ 0 & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) *Obtenha λ de modo que f(x) seja uma f.d.p.*
(λ é a constante normalizadora).

(b) *Usando a f.d.p., obtenha a probabilidade de que o computador funcione entre 50 e 150 horas.*

Resolução: *Como*

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{100}}dx,$$

obtemos

$$1=-\lambda\times 100\times e^{-\frac{x}{100}}|_0^{\infty}=100\times\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{1}{100}.$$

$P(50<X<150)=\int_{50}^{150}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}dx=-e^{-\frac{x}{100}}|_{50}^{150}=e^{-1/2}-e^{-3/2}\cong 0,384.$

Exemplo 5.5.3. *Suponha que X seja uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é apresentada como:*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right) & se\ 0<x<2; \\ 0 & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) *$f(x)$ é de fato uma função densidade de probabilidade? Justifique.*

(b) *Se sim, determine $P(X>1)$.*

Exemplo 5.5.4. *Seja X uma variável aleatória tal que sua função densidade de probabilidade seja $f(x)$ definida abaixo, com c sendo uma constante.*

$$f(x) = \begin{cases} c, & se \; -1 < x < 5; \\ 0, & caso \; contrário. \end{cases}$$

Qual deve ser o valor da constante c para que $f(x)$ cumpra os requisitos para ser uma função densidade de probabilidade?

5.5.1 Função de Distribuição Acumulada

Assim como no caso discreto, o interesse no estudo das variáveis aleatórias contínuas recai sobre sua distribuição de probabilidades. Esse distribuição é definida formalmente a seguir.

Definição 5.5.2. *A distribuição da variável aleatória X é a coleção de probabilidades $P(X \in I)$ para todo $I \subset \mathbb{R}$.*

Vimos que a função densidade de probabilidade fornece a coleção de probabilidades requerida, caracterizando, assim, a distribuição da variável aleatória. De modo análogo ao visto no caso discreto, existem também outras funções que caracterizam essa distribuição, aqui, como antes, apresentamos a Função de Distribuição Acumulada.

Definição 5.5.3. *(Função de Distribuição Acumulada, FDA) Na Definição 5.5.2, suponha $I = (-\infty, x)$, neste caso, supondo que $f(x)$ seja a f.d.p. de X, a função de distribuição acumulada de X é dada por:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que, para obtermos a probabilidade da v.a. X estar em um intervalo [a,b], basta calcularmos sua f.d.a e obter:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Além disso, derivando a função de distribuição de uma v.a. X, obtemos a sua f.d.p..

Exemplo 5.5.5. *Suponha que a quantidade de tempo que um computador funciona sem estragar é uma variável aleatória X contínua com função densidade de probabilidade*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}} & se \; x > 0; \\ 0 & caso \; contrário. \end{cases}$$

(a) *Obtenha a FDA de X.*

(b) *Usando a FDA, obtenha a probabilidade de que o computador funcione entre 50 e 150 horas.*

Resolução item (a): *Para obtenção da Função de Distribuição Acumulada, basta integrar a densidade de X de $-\infty$ até um valor x, se essa integral tiver solução analítica, essa solução irá fornecer a FDA. Pois devemos obter:*

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy = \int_{0}^{x} \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy. \qquad (5.5.1)$$

Fazendo $u = -\frac{y}{100}$ e derivando ambos os lados da igualdade, tem-se que $du = -\frac{1}{100}dy$, isso implica $dy = -100du$. Substituindo y e dy na integral indefinida, pode-se obter:

$$\int \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy = \int_{0}^{x} \frac{1}{100}e^{u}(-100)du = -\int e^{u}du = -e^{u} = -e^{-\frac{y}{100}}$$

Substituindo essa solução em (5.5.1), tem-se:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy = \left[-e^{-\frac{y}{100}}\right]_{0}^{x} = \left[-e^{-\frac{x}{100}}\right] - \left[-e^{-\frac{0}{100}}\right] = 1 - e^{-\frac{x}{100}}. \qquad (5.5.2)$$

Resolução item (b): A FDA, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$, obtida em (a) pode ser usada para obter valores de probabilidade para qualquer intervalo da reta. Logo,

$$P(50 < X < 150) = F(150) - F(50) = \left(1 - e^{-\frac{150}{100}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{50}{100}}\right) = -e^{-\frac{150}{100}} + e^{-\frac{50}{100}} = e^{-\frac{5}{10}} - e^{-\frac{15}{10}} \approx 0,38$$

5.5.2 Esperança e Variância de uma v.a. Contínua

Uma variável aleatória contínua X, com função de probabilidade $f(x)$, tem esperança (média ou valor esperado) dada por:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx;$$

Assim como visto no caso discreto, a variância de uma v.a. X fornece uma medida do grau de dispersão da distribuição de X em torno de sua média. Assumindo a existência da esperança de X e X^2, obtemos a variância de X como segue:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

As interpretações dessas medidas podem ser feitas de forma análoga ao caso discreto. Além disso, todas as propriedades enunciadas para o caso discreto continuam válidas para o caso contínuo.

Exemplo 5.5.6. *Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) *Determine a esperança, $E(X)$, e a variância, $Var(X)$, de X.*

b) *Se $Y = 2X + 10$, qual é a esperança e a variância de Y?*

5.5.3 Principais Modelos Contínuos

Os modelos probabilísticos são expressos pelas distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias. Então, um modelo probabilístico pode ser caracterizado pela sua função densidade de probabilidade. Aqui são apresentados os modelos probabilísticos contínuos mais utilizados na prática e esta apresentação se dá pela descrição de sua função densidade de probabilidade.

Modelo Exponencial

Definição 5.5.4. *Uma v.a. X segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ, com $\lambda > 0$, se sua função densidade é dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } \; x \geq 0 \\ 0, & \text{se } \; x < 0. \end{cases}$$

- Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

- Pode ser mostrado que se $X \sim Exp(\lambda)$, então sua esperança e sua variância são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

A Figura 5.8 mostra algumas formas da densidade da distribuição exponencial, considerando valores de $\lambda \in 0,2; 0,5; 1; 5$.

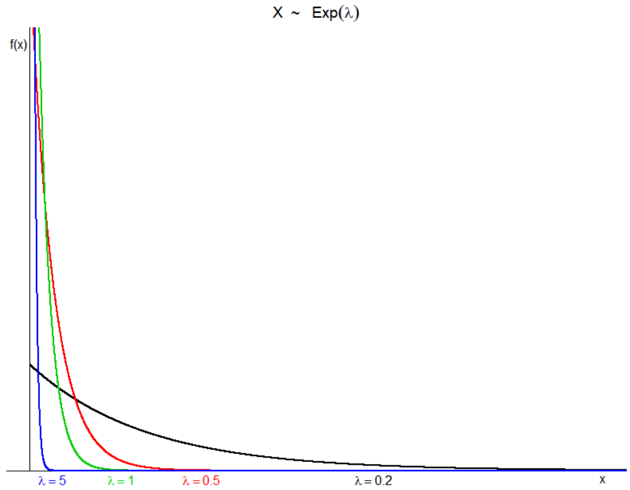


Figura 5.8: Função densidade de probabilidade da distribuição exponencial para alguns valores de λ.

A função de distribuição acumulada de $X \sim Exp(\lambda)$ pode ser obtida a partir de sua f.d.p. e é dada por:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

A distribuição exponencial tem forte ligação com a distribuição discreta Poisson. Enquanto esta pode ser usada para modelar o número de ocorrências em um período (de tempo ou comprimento), a distribuição exponencial pode modelar a variável aleatória contínua que representa o intervalo (de tempo ou comprimento) entre as ocorrências. Exemplos:

a) tempo (em minutos) até a próxima inspeção a uma obra;

b) tempo (em segundos) entre pedidos a um servidor;

c) distância (em metros) entre defeitos de uma fita.

A distribuição exponencial pode ser usada quando as suposições de Poisson (independência entre as ocorrências e taxa média de ocorrência constante no intervalo considerado) estiverem satisfeitas.

Na prática, a distribuição exponencial surge como a distribuição da quantidade de tempo até que ocorra algum evento específico. Por exemplo, a quantidade de tempo (a partir deste momento) até a ocorrência de uma chuva.

Exemplo 5.5.7. *O tempo de vida de um tipo de fusível segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de R$10,00, mas se durar menos de 200 horas há um custo adicional de R$8,00.*

(a) *Qual é a probabilidade de um fusível durar mais de 200 horas?*
Resolução: *usando a FDA de X, tem-se:* $P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F(200) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{100}200}\right) = e^{-2} \approx 0,135$.

(b) *Determinar o custo esperado.*
Resolução: *o objetivo é obter a esperança do custo,*

Custo (C)	10	18
p(C)	$P(X \geq 200) = P(X < 200) \approx 0,135$	$P(X < 200) = 1 - P(X \geq 200) \approx 0,865$

$E(C) = 10(0,135) + 18(0,865) = 16,92$ *reais.*

Modelo Normal

O modelo normal é um dos mais importantes modelos probabilísticos, sendo aplicado em inúmeros fenômenos e constantemente utilizado para desenvolvimento teórico da inferência estatística. O modelo normal é definido pela **Distribuição Normal** dada a seguir.

Definição 5.5.5. *Uma variável aleatória X segue uma distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, se sua função densidade é dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Como pode ser visto nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, a curva da densidade da distribuição normal, $f(x)$, tem forma de sino, de modo que:

- $f(x)$ atinge seu máximo em μ;
- a curva de $f(x)$ é simétrica em relação a μ;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$.

Disto decorre que a esperança e a variância da variável seguindo distribuição normal são dadas, respectivamente, por:

- $E(X) = \mu$;
- $Var(X) = \sigma^2$.

Logo, o desvio-padrão é $DP = \sigma$. Portanto, os parâmetros da distribuição normal são diretamente dados pela média e pelo desvio-padrão da variável aleatória.

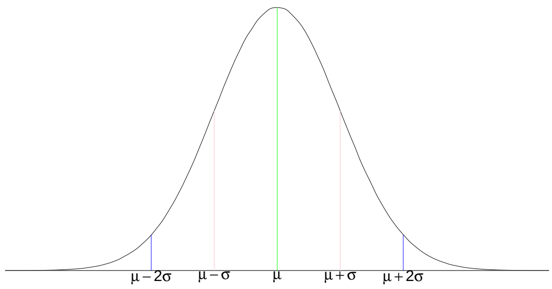


Figura 5.9: Curva de densidade da normal com alguns quantis úteis.

A curva da densidade da distribuição normal é simétrica (com forma de sino) como mostra a Figura 5.9, em que podem ser observados os seguintes intervalos:

- O intervalo $\mu \pm \sigma$ contém 68,27 % dos valores da variável.
- O intervalo $\mu \pm 2 \times \sigma$ contém 95,45 % dos valores da variável.

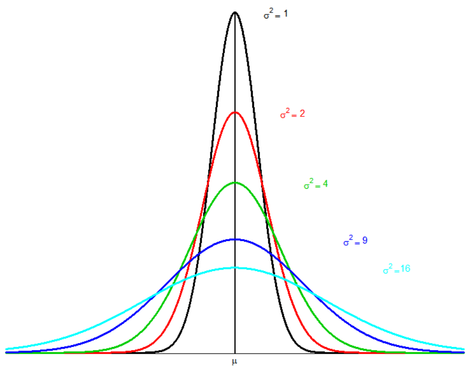


Figura 5.10: Curva da densidade da normal para valores variados da variância e mesma média.

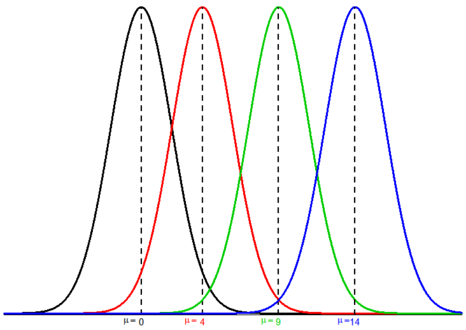


Figura 5.11: Curva de densidade da normal para valores variados da média e mesma variância.

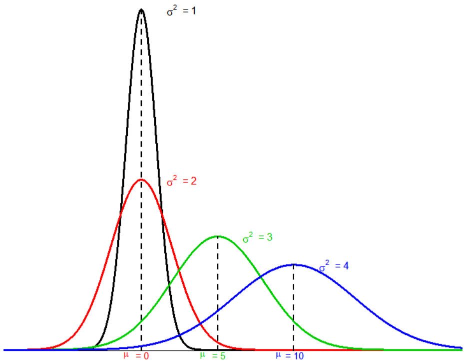


Figura 5.12: Curva de densidade da normal para valores variados de média e variâncias.

Para calcular a probabilidade da variável com distribuição normal assumir valores em um intervalo, é preciso realizar integração da densidade, como vimos anteriormente. No entanto, essa integração não é possível de ser realizada analiticamente para a distribuição normal. Então, faz-se necessário o uso de integração numérica. Para facilitar a obtenção dos valores de probabilidades que são muito utilizados na prática, foi feita a construção de tabelas que contêm esses valores de probabilidades de forma organizada e de fácil utilização. Como construir uma tabela para cada combinação de μ e σ não é viável, nem mesmo possível, a ideia é criar uma padronização, de modo que qualquer distribuição normal seja obtida a partir de uma única distribuição. Assim, pode-se criar uma tabela com os principais valores de probabilidade para essa distribuição, que é conhecida como **"distribuição normal padrão"**.

Distribuição normal padrão

Definição 5.5.6. *A função de distribuição acumulada da normal é dada pela integral*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

No entanto, como já mencionado, essa integral não tem solução analítica. Então, para obter uma distribuição padrão que possa ter os seus principais valores de probabilidades tabelados, define-se a seguinte transformação:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Note que, pelas propriedades da esperança e da variância

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0 \text{ e}$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma^2} = 1$$

Como uma transformação linear de uma variável aleatória com distribuição normal leva a outra distribuição normal, tem-se:

$$Z \sim N(0,1).$$

Neste caso, Z é dita ter distribuição Normal Padrão.

Como já foi dito, os principais valores de probabilidades da distribuição normal padrão podem ser encontrados em tabelas. Usando essas tabelas, podemos obter os valores de probabilidades para qualquer distribuição normal, como segue:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Longrightarrow \quad P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}),$$

essa última igualdade pode ser resolvida por aproximação usando uma tabela de probabilidades normais.

Exemplo 5.5.8. *Seja $X \sim N(100;25)$. Usando uma tabela de probabilidades normais, pode-se obter:*

(a) $P(100 \leq X \leq 106) = P\left(\frac{100-100}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{106-100}{5}\right) = P\left(0 \leq Z \leq 1,2\right) = \Phi(1,2) - \Phi(0) = 0,8849 - 0,5 = 0,3849.$

(b) $P(89 \leq X \leq 107) = P\left(\frac{89-100}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{107-100}{5}\right) = P\left(-2,2 \leq Z \leq 1,4\right) = \Phi(1,4) - \Phi(-2,2) = 0,9192 - 0,0139 = 0,9053.$

(c) $P(X \leq 108) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{108-100}{5}\right) = P\left(Z \leq 1,6\right) = \Phi(1,6) = 0,9452.$

(d) $P(X \geq 108) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{108-100}{5}\right) = P\left(Z > 1,6\right) = 1 - P\left(Z \leq 1,6\right) = 1 - \Phi(1,6) = 1 - 0,9452 = 0,0548.$

(d) *em $P(X \leq q) = 0,8$, o valor de q.*
Como $P(X \leq q) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{q-100}{5}\right) = 0,8$, então $\frac{q-100}{5} = 0,85$ o que implica $q = 5 \times (0,85) + 100$, logo $q = 104,25$.

Exemplo 5.5.9. *Suponha que a medida da corrente em pedaços de fios segue distribuição normal com média 10 miliampéres e variância de 4 (miliampéres)^2.*

(a) *Qual é a probabilidade da medida exceder 13 miliampéres?*
Resolução:$P(X > 13) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{13-10}{2}\right) = P\left(Z > 1,5\right) = 1 - P\left(Z \leq 1,5\right) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668.$

(b) *Qual é a probabilidade da medida estar entre 9 e 11 miliampéres?*

Resolução: $P(9 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{9-10}{2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11-10}{2}\right) = P\left(-0,5 \leq Z \leq 0,5\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) =$

$0,6915 - 0,3085 = 0,383.$

(c) *Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98.*
Resolução: *como $P(X < q) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{q-10}{2}\right) = P\left(Z < \frac{q-10}{2}\right) = 0,98$, então $\frac{q-10}{2} = 2,06$, implicando que $q = 2(2,06) + 10 = 14,12$.*

5.5.4 Exercícios para a Seção 5.5

Exercício 5.5.1. *Suponha que uma variável aleatória contínua X tenha função densidade de probabilidade dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & 0 < x < 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Qual o valor de k para que f seja de fato uma densidade?
b) Determine $P(X \leq 1)$.
c) Determine $P(1 \leq X \leq 2)$.

Exercício 5.5.2. *O tempo adequado de troca de um amortecedor de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado como uma variável contínua X, medida em anos. Suponha que a função densidade é dada pela seguinte expressão:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{12}, & 2 < x \leq 6; \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Verifique que a função acima é, de fato, uma densidade.
b) Qual é a probabilidade de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? e entre 1 a 3 anos?

Exercício 5.5.3. *Suponha que a FDA da variável aleatória X seja:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0; \\ 0,2x, & se\ 0 < x \leq 5; \\ 1, & se\ 5 \leq x \end{cases}$$

Obtenha:
a) $P(X < 1,8)$;
b) $P(X < -2)$;
c)$P(X > -1,5)$.

Exercício 5.5.4. *Seja a v.a. X com FDA. dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < -2; \\ 0,2x + 0,5 & se\ -2 \leq x < 2; \\ 1 & se\ 2 \leq x. \end{cases}$$

Obtenha:

a) $P(-1 < X < 1)$

b) $P(X < -2)$

d) $P(X > -1,5)$

Exercício 5.5.5. *Seja a v.a. X com f.d.p. dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 \leq x < 1; \\ 2 - x & se\ 1 \leq x < 2; \\ 0 & se\ x \notin [0,2). \end{cases}$$

Obtenha a função de distribuição acumulada F(x) de X e calcule:

a) $P(0 < X < 5)$

b) $P(0 < X < 1)$

d) *E(X) e* $Var(X)$.

Exercício 5.5.6. *O tempo adequado de troca de um amortecedor de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado como uma variável contínua X, medida em anos. Suponha que a função densidade é dada pela seguinte expressão:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{12}, & 2 < x \leq 6; \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Verifique que a função acima é, de fato, uma densidade.
b) Obtenha a f.d.a. de X.
c) Qual é a probabilidade de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? e entre 1 a 3 anos?

Exercício 5.5.7. *Uma fábrica de tubos determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial. Qual a probabilidade de que a fábrica tenha de substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?*

Exercício 5.5.8. *Suponha que a espessura média de arruelas produzidas em uma fábrica tenha distribuição normal com média* $11,15mm$ *e desvio padrão* $2,238mm$. *Qual a porcentagem de arruelas que tem espessura entre* $8,70mm$ *e* $14,70mm$*?*

Exercício 5.5.9. *Suponha que o peso médio de* 800 *porcos de uma certa fazenda é de* $64kg$*, e o desvio padrão é de* $15kg$*. Supondo que este peso seja distribuído de forma normal, quantos porcos pesarão entre* $42kg$ *e* $73kg$*.*

Exercício 5.5.10. *Uma enchedora automática de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000* cm^3 *e desvio padrão de 10* cm^3. *Admita que o volume siga uma distribuição normal.*

(a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3*?*

(b) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(c) Se 10 garrafas são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que, no máximo, 4 tenham volume de líquido superior a 1002 cm^3*?*

Exercício 5.5.11. *A velocidade de transferência de um arquivo de um servidor da universidade para um computador pessoal na casa de um estudante, em uma noite de dia de semana, é distribuída normalmente, com média de 60kbits por segundo e um desvio padrão de 4kbits por segundo.*

(a) Qual é a probabilidade de o arquivo ser transferido a uma velocidade de 70kbits por segundo ou mais? (R: $0,0062$*)*

(b) Qual é a probabilidade de o arquivo ser transferido a uma velocidade menor que 58kbits por segundo? (R: $0,3085$*)*

Capítulo 6

Inferência

6.1 Introdução

Muitas vezes, o objetivo da análise estatística é produzir informação sobre alguma população escolhida, com base em um subconjunto dessa população. Nesse caso, não é possível tirar conclusões utilizando apenas uma análise descritiva. No entanto, após uma análise exploratória dos dados, podemos usar a inferência estatística, que é o processo pelo qual tiramos conclusões acerca de um conjunto maior, que é a população de interesse, usando informações obtidas a partir de um subconjunto dessa população (amostra). Nesse processo, as conclusões são obtidas com base em resultados de experimentos, ou investigações, que devem ser cuidadosamente planejados, com o objetivo de estudar uma, ou mais, características dos elementos da população. Nesse contexto, a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória pode ser usada como uma abstração matemática dos possíveis resultados do experimento. Tendo identificado a variável aleatória de interesse, frequentemente nos referimos à sua distribuição como população. Então, vamos considerar uma variável aleatória X que representa a característica dos elementos da população que se deseja estudar e tentar identificar a sua distribuição de probabilidades. Assim, os atributos que descrevem a população de interesse (como por exemplo, média, desvio-padrão, assimetria etc) são obtidos se conhecermos completamente a distribuição de probabilidades da variável aleatória X que representa a característica desejada dessa população. No entanto, na prática nem sempre conhecemos essa distribuição, ou se temos a distribuição desconhecemos os seus parâmetros. Vimos que a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória é caracterizada pela sua função densidade de probabilidade (ou função de probabilidade, no caso discreto) $f(x)$. Assim, a amostra obtida pode ser utilizada para se ter uma ideia da forma de $f(x)$ e também para estimar os seus parâmetros. Pois, se a população é descrita por $f(x)$, o conhecimento de $f(x)$ e dos seus parâmetros gera o conhecimento da população inteira.

Para proceder à uma análise estatística, com o objetivo de inferir sobre características de alguma população, inicialmente, podemos pensar na execução das seguintes etapas.

1. Se a distribuição de X é desconhecida, usamos uma amostra que seja representativa da população para obter algum conhecimento sobre a distribuição de X e empregamos técnicas da estatística descritiva.

2. Uma vez suposta uma distribuição para a v.a. X, precisamos estimar os seus parâmetros, que em geral são desconhecidos.

3. Após obtermos valores para os parâmetros (estimativas), empregando alguma técnica de estimação, realizamos testes para verificar se a distribuição adotada (juntamente com seus parâmetros) é apropriada para descrever a população de interesse.

4. Caso os testes realizados sugiram que a distribuição, considerada inicialmente, não seja adequada, o modelo probabilístico adotado deve ser revisto.

Exemplo 6.1.1. *Um auditor declara que as contas de cartões de crédito de um banco, num determinado mês, são normalmente distribuídas, com uma média de R\$3.950,00 e um desvio padrão de R\$1000,00. A fim de testar essa informação, um analista colhe ao acaso (de forma aleatória) uma amostra de 50 faturas e constrói o histograma que pode ser visto na Figura 6.1. Sobre o histograma, pode ser visto, em cor azul, o polígono de frequência, que mostra o comportamento da frequência da variável "valor da fatura" na amostra observada. Como a amostra foi colhida de forma aleatória, então é plausível pensar que a distribuição de frequência da variável na população é parecida com a da amostra. Isso nos leva ao questionamento.*

- *Qual função de frequência poderia ser utilizada para descrever essa população?*
- *A curva do polígono de frequência seria "parecida" com a curva da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal?*
- *Se a curva é da normal, que valores teriam os seus parâmetros, média e variância?*

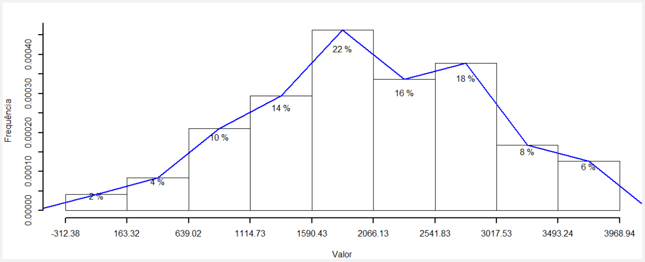


Figura 6.1: Frequência dos valores das faturas de cartões de crédito.

6.2 Dados, Amostras e Variáveis Aleatórias

Os experimentos muitas vezes são realizados com o objetivo de obter informações sobre uma população que é mal compreendida e, neste caso, produzem dados, a partir dos quais são realizados procedimentos estatísticos com o objetivo de fazer inferências sobre a população sob investigação. No processo de inferência estudado aqui, a distribuição de probabilidade da variável aleatória, que representa a característica de interesse na população, é uma abstração de um procedimento experimental para obtenção de valores observados dessa característica (processo de amostragem). Ou seja, quando realizamos o experimento, observamos possíveis valores de uma variável aleatória X. Para distinguir variáveis aleatórias de suas observações, vamos representá-las por letras maiúsculas (X, Y, Z etc) e os seus valores observados pelas respectivas letras minúsculas (x, y, z etc). Vamos designar amostra observada, conjunto de dados ou simplesmente dados, o conjunto de valores observados da variável aleatória que representa a característica de interesse.

Nem toda amostra observada pode ser usada no processo de inferência, pois muitas vezes a distribuição de frequência da variável nos dados não representa a sua distribuição de frequência na população. Neste caso dizemos que essa amostra não é representativa da população de onde foi recolhida. Por essa razão, existe a necessidade de realizar um planejamento para a escolha dos elementos que irão compor a amostra observada a ser utilizada no processo de inferência. Nesse planejamento é decidido como serão escolhidos os elementos de modo que não exista tendências sistemáticas pela escolha de elementos de algum segmento da população ou pela não escolha de outros.

Para evitar tendências indesejadas na amostra observada, o processo de amostragem deve ser realizado de modo que esteja presente o princípio da aleatoriedade. Aqui,especificamente, consideraremos métodos de inferência baseados em amostras aleatórias simples. Na amostragem aleatória simples, todos os elementos que compõem a população, e estão descritos no marco amostral, têm a mesma probabilidade de serem selecionados para fazerem parte da amostra.

- Amostra não aleatória: extraída de forma que alguns elementos da população não tem chance de serem selecionados.
- Amostra aleatória: é aquela que qualquer elemento da população tem alguma chance de ser escolhido para fazer parte da amostra.
- Amostra aleatória simples: a seleção é feita de modo que todos os elementos da população têm a mesma chance de serem selecionados para fazer parte da amostra.

Na obtenção dos dados, os experimentos considerados aqui são aqueles que são replicados um número fixo de vezes, com cada repetição sendo realizada sob condições idênticas e de forma independente. Esse processo dá origem a um vetor aleatório chamado amostra aleatória simples. Cada componente desse vetor aleatório representa uma replicação do experimento. Matematicamente, escrevemos o seguinte.

Definição 6.2.1. *Uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma única variável aleatória X (com uma distribuição F) é um vetor*

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

em que cada componente $X_1 X_2, \cdots, X_n$ tem a mesma distribuição de X.

Exemplo 6.2.1. *Em uma amostra aleatória simples $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ obtida a partir de uma variável aleatória X, temos o seguinte.*

1. *Se $X \sim$ normal(μ, σ^2) , então cada $X_i \sim$ normal(μ, σ^2) para $i = 1, \cdots$, n.*
2. *Se $X \sim$ binominal (n,p) , então cada $X_i \sim$ Binominal(n,p) para $i = 1, \cdots$, n.*
3. *Se $X \sim$ Poisson(λ), λ uma taxa de ocorrência, então cada $X_i \sim$ normal(λ) para $i = 1, \cdots$, n.*
4. *Se $X \sim$ exponencial(λ), λ uma taxa de ocorrência, então cada $X_i \sim$ exponencial(λ) para $i = 1, \cdots$, n.*
5. *De modo geral, se $X \sim F(\theta)$, θ um valor ou vetor de parâmetros e F uma distribuição qualquer, então cada $X_i \sim F(\theta)$ para $i = 1, \cdots$, n.*

Observação: nesse exemplo, os valores $\mu, \sigma^2, \lambda, n, p$ e θ representam parâmetros das distribuições, que geralmente são desconhecidos.

Depois de observada a amostra $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, obtemos o vetor de observações $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que será utilizado para inferir sobre atributos da população. Cada unidade que deu origem a cada x_i é chamada de unidade amostral. As unidades amostrais podem ser, por exemplo, pessoas, fazendas, corpos de prova etc.

Exemplo 6.2.2. *Considere o experimento de lançar um dado honesto 12 vezes. Então X="número da face superior" e cada realização do experimento dá origem a uma observação de X, que pode ser qualquer número de 0 à 6. Neste caso, sabemos que a variável aleatória que dá origem a essas observações segue uma distribuição uniforme discreta como segue:*

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Para gerar $n = 12$ valores dessa distribuição, podemos lançar o dado 12 vezes e observar a face superior ou usar o código R:

```
 V = c(1,2,3,4,5,6)              # espaço das amostras de X.
 sample(x=V,size=12,replace=T)   # gerando 10 valores de X.
[1] 1 3 4 5 6 6 2 2 6 1 4 1
```

6.3 Parâmetros e Estatísticas

Um **parâmetro** é um valor fixo (numérico) que corresponde a algum atributo da população. Na prática, esse valor é em geral desconhecido, e temos interesse em estima-lo.

Exemplo 6.3.1. *São exemplos de parâmetro:*

- *μ, média populacional;*
- *σ^2, variância populacional;*
- *N, tamanho da população;*
- *p, proporção populacional;*
- *λ, taxa de ocorrência da variável na população etc.*

Uma vez obtida uma amostra observada, muitas vezes estamos interessados em usa-la para produzir algum valor numérico que descreva a distribuição de frequência dos dados, como por exemplo, podemos estar interessados em obter a média amostral, que é dada pela fórmula:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

A expressão fornece a média amostral, independentemente de qual amostra observada estamos utilizando. Ou seja, $\bar{X}$ é uma função que associa cada amostra observada a sua média. Ou seja, assumindo que $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma amostra aleatória e representa todas as possíveis amostras de tamanho n obtidas a partir de uma variável aleatória X, $\bar{X}$ é uma função de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Como cada X_i é uma variável aleatória, $\overline{X}$ também é uma variável aleatória. Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 6.3.1. *Qualquer função (fórmula ou expressão) de uma amostra, $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, que não dependa de parâmetros desconhecidos é dita ser uma* **estatística**.

Portanto, enquanto um parâmetro é um atributo da população, uma estatística é uma função da amostra que muitas vezes associa um conjunto de observações a um valor numérico que a resume.

Exemplo 6.3.2. *Exemplos de estatística:*

- $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, *a média amostral;*
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, *a variância amostral;*
- $X_{max} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, *o valor máximo na amostra;*
- $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2$, *a soma dos dois primeiros valores amostrais;*
- $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1$, *o primeiro valor amostral;*
- $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n$, *as estatísticas de ordem etc.*

6.4 Estimador e Estimativa

Uma vez adotado o modelo probabilístico, para estimar os parâmetros da sua distribuição fazemos uso de uma estatística. Ou seja, fazemos uso de uma função da amostra aleatória, $T(\mathbf{X}) = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, que não depende do parâmetro de interesse. A essa função T damos o nome de **estimador**.

Definição 6.4.1. *Um **estimador** é uma estatística utilizada para estimar um parâmetro.*

O valor assumido pelo estimador $T(\mathbf{x}) = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, depois que os valores $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ da amostra $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de X são observados, é chamado de **estimativa**.

Definição 6.4.2. *Uma **estimativa** é um valor particular assumido pelo estimador.*

Notação: Em geral, denotamos os parâmetros desconhecidos por letras gregas, como por exemplo $\theta, \mu, \sigma, \lambda$ etc, e suas estimativas pelas mesmas letras, respectivamente, com o símbolo “ ˆ ”, por exemplo $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}$ etc.

6.4.1 Principais Estimadores

A fim de escolher um bom estimador para um parâmetro, algumas técnicas de obtenção de estimadores podem ser empregadas. Essas técnicas não estão no escopo de nosso estudo e não serão tratadas aqui. Então vamos restringir nossos estudos aos estimadores mais comumente utilizados na prática, sem abordar as técnicas de obtenção dos mesmos. São eles: o estimador da média populacional, o estimador da variância populacional e o estimador da proporção populacional, que são descritos a seguir.

- **Média amostral**: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,
  um estimador para a média populacional μ.

- **Variância amostral**: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}{n-1}$,
  um estimador para variância populacional σ^2.

- **Proporção amostral**: $\hat{p} = \frac{X}{n}$,
  em que

– X é o número de elementos na amostra com a característica investigada e

– n é o tamanho da amostra.

A proporção amostral é um estimador para a proporção populacional p.

6.5 Propriedades dos Estimadores

Assim como exite mais de um método de obtenção de estimadores, também pode existir mais de um estimador para o mesmo parâmetro. Então, é importante que existam estratégias para avaliar qual estimador pode ser considerado o melhor para estimar um determinado parâmetro. Uma maneira de encontrar estratégias para avaliar o desempenho de um estimador é analisar as suas propriedades. Três importantes propriedades que um estimador pode ter são: não vício, consistência e eficiência.

6.5.1 Vício

Definição 6.5.1. *Um estimador $\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é dito ser não viciado (não enviesado) para estimar um parâmetro θ se sua esperança é o próprio θ, ou seja*

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

para todo θ. Caso o estimador θ não possua essa propriedade, a quantidade

$$\mathbb{B}(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

é dita ser o vício do estimador $\hat{\theta}$.

Exemplo 6.5.1. *Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com média μ e variância σ^2. Então, a média amostral e a variância amostral são estimadores não viciados para estimar a média e a variância populacional, ou seja:*

a) $E(\overline{X}) = \mu$,

b) $E(S^2) = \sigma^2$.

Para mostrar que a média amostral é não viciada para estimar a média populacional, seja

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}nE(X_i) = \mu.$$

Agora, note que:

1. $Var(X_i) = E({X_i}^2) - E(X_i)^2 = \sigma^2 \Rightarrow E({X_i}^2) = \sigma^2 + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$;
2. $Var(\overline{X}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 \Rightarrow Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$;
3. $Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - E(\overline{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow E(\overline{X}^2) = \sigma^2 + E(\overline{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \Rightarrow E(\overline{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

Além disso,

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}(nE(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)).$$

Substituindo $E({X_i}^2)$ e $E(\overline{X}^2)$ na equação acima, temos:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] = \sigma^2,$$

o que mostra que a variância amostral é não viciada para estimar a variância populacional.

6.5.2 Consistência

Como um estimador é uma função da amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, podemos pensar que para uma mesma estatística $T = \hat{\theta}$ podemos pensar que existe um estimador para cada valor de n, formando uma sequência de estimadores $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \hat{\theta}_n$ para a mesma estatística.

A sequência de estimadores $\hat{\theta}_n$ de um parâmetro θ é consistente se

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta \text{ e } \lim_{n\to\infty} \text{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) = 0.$$

Ou seja, quado n cresce ($n \longrightarrow \infty$)

- $\hat{\theta}_n$ se aproxima do verdadeiro valor de θ ($\hat{\theta}_n \longrightarrow \theta$)
- e a variância de $\hat{\theta}_n$ se aproxima de zero ($\text{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) \longrightarrow 0.$)

Um estimador que satisfaz a propriedade da consistência fornece estimativas cada vez melhores a medida que o tamanho da amostra cresce.

6.5.3 Eficiência

Suponha que $\hat{\theta}^{(1)}$ e $\hat{\theta}^{(2)}$ sejam dois estimadores não viciados de um mesmo parâmetro θ. Se

$$\text{Var}\left(\hat{\theta}^{(1)}\right) \ < \ \text{Var}\left(\hat{\theta}^{(2)}\right)$$

então dizemos que $\hat{\theta}^{(1)}$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}^{(2)}$.

Finalmente, um estimador não viciado que possui a menor variância dentre todos os estimadores existentes para um parâmetro θ é dito ser um estimador ótimo para estimar θ e é conhecido como Estimador não Viciado de Variância Uniformemente Mínima (ENVVUM). Encontrar esse estimador não é uma tarefa fácil, no entanto existem resultados que facilitam a obtenção desse estimador em muitos casos. Um exemplo de ENVVUM é a média amostral que é o ENVVUM para a média populacional, no caso em que a população pode ser descrita por uma distribuição normal.

6.6 Distribuição Amostral

Suponhamos uma amostra aleatória simples de tamanho n $X_1, X_2, \cdots, X_n$, vimos que esse vetor contém n variáveis aleatórias com a mesma distribuição de uma variável aleatória X que representa a característica associada aos elementos de uma população de interesse. Um problema da inferência estatística é estimar os parâmetros da distribuição de X. Para isso, fazemos uso de um estimador, que, por ser uma função da amostra aleatória, é, também, uma variável aleatória, e portanto possuí uma distribuição de probabilidade.

Então, para estimar os parâmetros da população de interesse, escolhemos um estimador $\hat{\theta}$, colhemos uma amostra e calculamos o valor de $\hat{\theta}$ usando a amostra observada. Por exemplo, se o estimador a ser utilizado é a média amostral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, observada a amostra $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de X, podemos obter o valor observado de $\bar{X}$, que é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Com isso, podemos fazer afirmações sobre a média populacional μ utilizando a estimativa $\bar{x}$. Essa afirmação será melhor avaliada se soubermos o comportamento do estimador utilizado ou seja, se soubermos a sua distribuição de probabilidade, sua média e sua variabilidade. A distribuição de um estimador é chamada de distribuição amostral.

Observação: A distribuição amostral de um estimador depende da distribuição de probabilidade da população da qual a amostra foi selecionada, do tamanho da amostra e do método utilizado para selecionar a amostra.

Exemplo 6.6.1. *Distribuições amostrais.*

- *A distribuição de probabilidade da média amostral $\overline{X}$ é chamada de* **distribuição amostral da média**.
- *A distribuição de probabilidade da proporção amostral p é chamada de* **distribuição amostral da proporção**.
- *A distribuição de probabilidade da variância amostral S^2 é chamada de* **distribuição amostral da variância**.

6.7 Distribuição Amostral da Média

Vamos supor que X seja a variável aleatória que representa a característica dos elementos de uma população que se deseja estudar. Suponhamos, também, que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$ representem a média e a variância de X, respectivamente, em que μ seja desconhecida e σ^2 seja conhecida. Um resultado importante que é muito utilizado em inferência é o **Teorema Central do Limite**, que fornece uma importante conclusão a respeito da média amostral quando se considera uma amostra aleatória, e é enunciado a seguir.

Teorema Central do Limite (TCL): *Em uma amostra aleatória simples $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população com média μ e variância σ^2, a distribuição de $\bar{X}$ é aproximadamente normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja,*

$$\textit{se } n \to \infty \textit{ então } \bar{X} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$$

em que $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ representa a distribuição normal de média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

Então, o TCL diz que se pudermos selecionar todas as possíveis amostras de tamanho n da população de interesse, e para cada amostra pudermos calcular a média amostral, então, ao obter a média das médias amostrais teremos exatamente média populacional. Além disso, o teorema garante que a distribuição da média amostral pode ser aproximada pela distribuição normal se n é suficientemente grande.

A Figura 6.2 mostra os histogramas para as médias de 50 amostras geradas da distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 10$, com o uso do computador. Note que, a medida que o tamanho da amostra aumenta (n aumenta), o histograma tende a mostrar uma curva da distribuição normal sobre as frequências das médias.

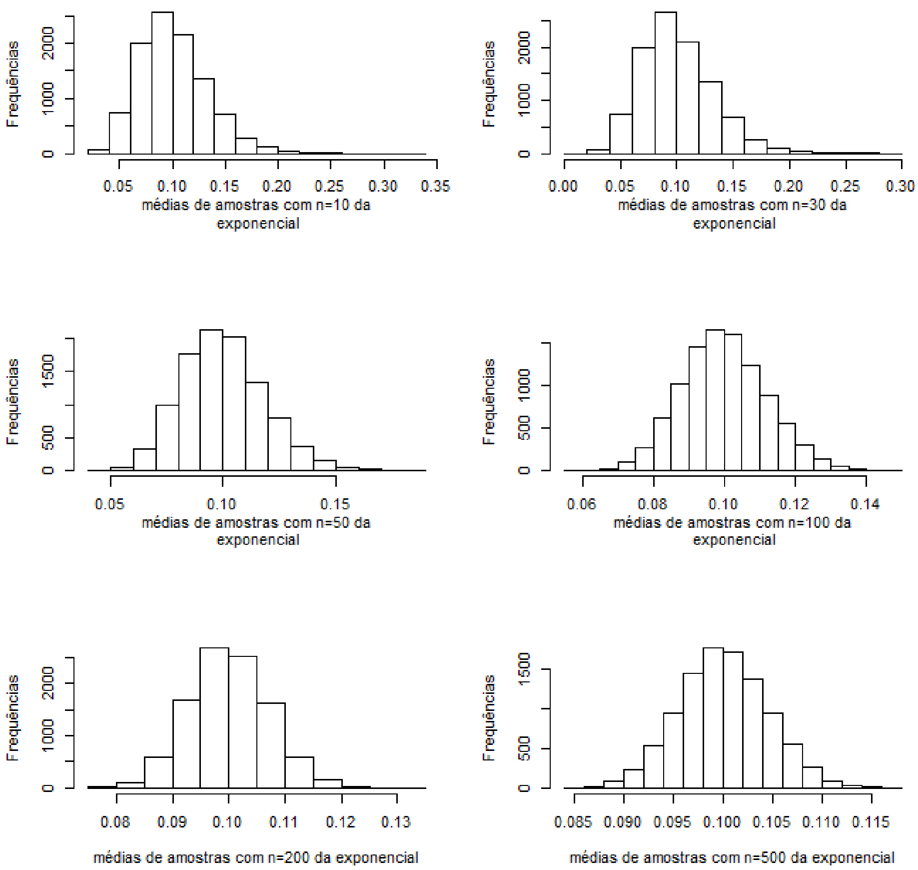


Figura 6.2: Histogramas para as médias de amostras extraídas a partir da distribuição exponencial de média $\lambda = 10$.

Exemplo 6.7.1. *Suponha uma população composta por 4 computadores e seja a variável aleatória*

X:"número de vezes que o computador teve um defeito grave em um dado período de tempo".

Suponhamos que:

- *um computador teve 2 defeitos graves;*
- *o outro 3 defeitos graves;*
- *o outro 4 defeitos graves e*
- *o último 5 defeitos graves.*

Vamos encontrar os parâmetros média e variância para esse caso.
A média de defeitos graves para a população X é igual a:

$$E(X) = \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{2+3+4+5}{4} = 3,5 \Rightarrow \mu = 3,5 \text{ defeitos graves.}$$

A variância populacional é dada por:

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2}{4} = 1,25 \Rightarrow \sigma^2 = 1,25 \text{ (defeitos graves) }^2$$

Considere agora que são extraídas todas as possíveis amostras, com reposição, de tamanho $n = 2$, e que são calculadas as médias dessas amostras. Veja o resultado no quadro:

Identificação da amostra	(X_1, X_2)	$\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$
1	(2,2)	02
2	(2,3)	2,5
3	(2,4)	03
4	(2,5)	3,5
5	(3,2)	2,5
6	(3,3)	03
7	(3,4)	3,5
8	(3,5)	04
9	(4,2)	03
10	(4,3)	3,5
11	(4,4)	04
12	(4,5)	4,5
13	(5,2)	3,5
14	(5,3)	04
15	(5,4)	4,5
16	(5,5)	05

Assim a função de probabilidade da v.a. $\overline{X}$ é:

$\bar{X}$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$P(\bar{X})$	1/16	2/16	3/16	4 /16	3/16	2/16	1 /16

O conjunto das médias de todas as amostras dá origem à distribuição amostral das médias, DAM. Assim a média da DAM é igual a

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot P(\bar{x}_i) = 3,5 \text{ defeitos graves}$$

E a variância da DAM resulta

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

com,

$$E(\bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i{}^2 \cdot P(\bar{x}_i) = 12,875 \quad \text{defeitos graves}$$

Assim

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 12,875 - (3,5)^2 = 0,625$$

Pelos resultados obtidos, é possível observar que $\mu_{\bar{X}} = \mu = 3,5$ *defeitos graves.*
Lembrando que n=2 e que $\sigma^2 = 0,625$ *(defeitos graves)*^{2}

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1,25}{2} \cong 0,625 \quad \textit{(defeitos graves)}^2$$

Observação: Se a amostragem for sem reposição e a população finita ($N \geq n$) utilizamos um fator de correção para a variância, assim:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \text{ e } \sigma^2_{\bar{X}} = \tfrac{\sigma^2}{n} \cdot (\tfrac{N-n}{N-1}).$$

Observe que o fator de correção ($\frac{N-n}{N-1}$) se aproxima da unidade para populações muito grandes (sendo 1 se forem infinitas). Neste caso, a expressão da variância de $\bar{X}$, usando amostragem com reposição, é praticamente igual à da amostragem sem reposição. Assim podemos dizer que se o tamanho da amostra é muito grande e $X \sim F(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, em que F indica uma distribuição qualquer com média μ e variância σ^2.

Resultado: Complementando o TCL, temos que se as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ seguem, cada uma, uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, então a distribuição da média amostral é exatamente normal. Ou seja, nesse caso podemos escrever:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

Note que isso ocorre quando a população é normal, ou seja, quando a variável aleatória que representa a característica de interesse segue uma distribuição normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Exemplo 6.7.2. *Suponha que a aceitação de um lote de 1000 peças ocorra apenas se o comprimento médio de 10 peças, retiradas aleatoriamente do lote estiver entre 5 e 10 cm. Sabe-se que o comprimento das peças é uma v.a. com distribuição normal N(7,5 cm; 20 cm*^{2}*). O que podemos dizer a respeito da aceitação do lote?*
Resolução: *Pelo Teorema Central do Limite, sabemos que*

$$\overline{X} \sim N\left(\mu = 7,5 \ cm; \frac{\sigma^2}{n} = 2 \ cm^2\right)$$

Então, podemos obter

$$P\left(5 \leq \overline{X} \leq 10\right) = P\left(\frac{5-7,5}{\sqrt{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{10-7,5}{\sqrt{2}}\right) = P\left(-1,77 \leq Z \leq 1,77\right).$$

Com $Z \sim N(0,1) \Rightarrow P\left(5 \leq \overline{X} \leq 10\right) = \phi(1,77) - \phi(-1,77) = 0,96 - 0.038 = 0,92$, *em que* $\phi(1,77)$ *é a função de distribuição acumulada da normal padrão e seu valor pode ser obtido de uma tabela da normal, ou podemos calcular por meio de um software. Portanto, se a máquina que produz as peças está regulada, podemos afirmar que o lote tem 92% de chance de ser aceito.*

6.7.1 Exercícios para a Seção 6.7

Exercício 6.7.1. *Em um centro acelerador, um experimento necessita de um cilindro de alumínio, com 1,41 cm de espessura. Suponha que a espessura de um cilindro tenha uma distribuição normal, com média igual a 1,41 cm e um desvio padrão igual a 0,01 cm. Dada uma amostra aleatória de tamanho 30:*

a) Qual é a probabilidade de a espessura média da amostra ser maior do que 1,42 cm?

b) Se as especificações requerem que a espessura média esteja entre 1,39 cm e 1,43 cm, qual a probabilidade da amostra atender as especificações?

6.8 Intervalos de Confiança (IC) para a Média Populacional

Como estamos sempre supondo a existência de uma amostra aleatória, ao observarmos amostras distintas esperamos que essas amostras não forneçam a mesma estimativa para um atributo da população de interesse. Do mesmo modo, a estimativa de uma quantidade populacional raramente é igual ao valor real do parâmetro de interesse. Com isso, no processo de investigação de um parâmetro θ, muitas vezes existe a necessidade de ir além da sua estimativa pontual $\hat{\theta}$. Ou seja, existe a necessidade de buscar uma certa "segurança" sobre quão próximo $\hat{\theta}$ pode estar do verdadeiro valor de θ. Essa confiança depende, além do verdadeiro valor de θ, da variância do estimador utilizado $\hat{\theta}(\mathbf{X})$. Uma maneira de se obter alguma informação sobre a variabilidade existente nas estimativas é por meio da utilização dos **intervalos de confiança**. A presente seção é dedicada à exploração mais aprofundada desse fenômeno.

Suponha que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ seja uma amostra aleatória extraída da população da variável aleatória X com esperança $E(X) = \mu$ e variância $Var(X) = \sigma^2$. Vimos que se $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma amostra observada de X, então temos que:

(i) $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é uma função da amostra empregada para estimar μ, logo $\bar{X}$ é dito ser um estimador de μ, e

(ii) o valor que $\overline{X}$ assume, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, é dito ser uma estimativa de μ.

Como o estimador $\overline{X}$ é não viciado e se aproxima do verdadeiro valor de μ a medida que n cresce, é natural que seja utilizado para estimar μ. No entanto, uma estimativa pontual para a média sem informação sobre a variabilidade decorrente do processo de amostragem não é muito interessante. Então, temos que levar em consideração a variabilidade do estimador escolhido, que nesse caso é a média amostral. Essa variabilidade será levada em conta por meio da construção de intervalos de confiança para a média populacional.

Aqui, vamos discutir a construção de intervalos de confiança para a média considerando:

(a) variância populacional σ^2 conhecida e

(b) variância populacional σ^2 desconhecida.

Exemplo 6.8.1. *Um pesquisador está estudando a resistência de um certo material sob determinadas condições. Ele assume que a variável X="resistência do material" é normalmente distribuída com variância igual a 4, ou seja, a resistência é representada pela variável aleatória*

$$X \sim N(\mu, 4).$$

Neste caso, a população é suposta normal. Considere que uma amostra aleatória de tamanho $n = 10$ foi observada, e que os valores observados são:

7,9; 6,8; 5,4; 7,5; 7,9; 6,4; 8,0; 6,3; 4,4; 5,9.

Assumindo que não se tenha qualquer ideia sobre o valor da média μ, como essa amostra poderia ser utilizada para estima-la?
Denotando por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ a amostra aleatória de X, com n=10, temos que:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

com $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Além disso, pelo Teorema Central do Limite (TCL):

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

com σ^2 sendo a variância de X.
Então, a média da amostra $\bar{x} = 6,65$ parece ser uma estimativa razoável da resistência média do referido material.

- *Mas qual a confiança que podemos ter de que essa estimativa esteja "próxima" do verdadeiro valor de μ?*
- *Uma maneira de obter alguma confiança é analisar a variância de $\overline{X}$. Qual é o desvio-padrão de $\overline{X}$?*
- *Suponha que seja razoável assumir $\bar{x} = 6,65$ como sendo a média da população, quais seriam os valores de m_1 e m_1 para que tenhamos uma probabilidade de 0,95 de uma nova amostra fornecer uma estimativa dentro do intervalo $[m_1, m_1]$?*
- *Represente a curva da densidade de $\overline{X}$ também os valores de de m_1 e m_2 encontrados.*
- *Note que, quanto menor a variância de $\overline{X}$, menores são as chances de serem escolhidas amostras que forneçam estimativas distantes da média, uma vez que $E(\bar{X}) = \mu$.*

6.8.1 IC para a Média Populacional com variância conhecida e População Normal

Como no exemplo anterior, vamos supor população normal e que a variância seja conhecida, $Var(\overline{X}) = \sigma^2$. Então, temos:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Note que:

(i) a quantidade $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é uma função da amostra e do parâmetro de interesse μ;

(ii) a distribuição de $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ não depende de μ, pois trata-se de uma normal com média e variância conhecidas.

Uma quantidade aleatória satisfazendo (i) e (ii) é denominada quantidade pivotal (ou pivô) para o parâmetro de interesse e pode ser utilizada na construção de um **Intervalo de Confiança** para o parâmetro desconhecido que aparece explicitamente em sua equação.

Para obter o intervalo desejado, observe que para cada $\gamma = 1 - \alpha$, com $0 < \alpha < 1$ fixado, pode ser obtido $z_{\alpha/2}$ na distribuição de Z, como ilustrado na Figura 6.3, tal que:

$$
\begin{aligned}
& & P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) &= \gamma \\
&\Longrightarrow & P(-z_{\alpha/2} \leq \tfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}) &= \gamma \\
&\Longrightarrow & P(-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) &= \gamma \\
&\Longrightarrow & P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) &= \gamma
\end{aligned}
$$

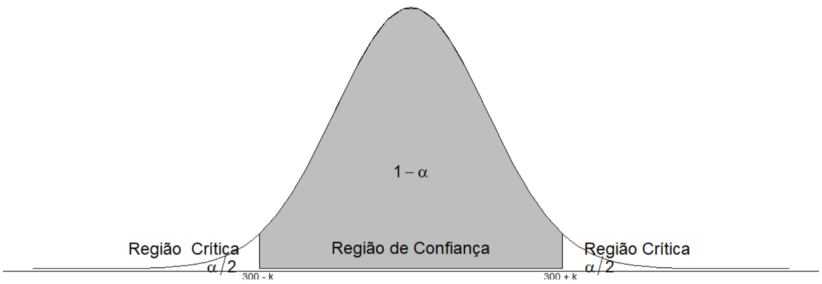


Figura 6.3: Densidade da distribuição normal mostrando a região $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = \gamma$.

Com isso, obtemos o intervalo aleatório que depende de α:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right], \tag{6.8.1}$$

que contém o verdadeiro valor de μ com probabilidade $\gamma = 1 - \alpha$, em que γ é denominado **coeficiente de confiança**. Observe que o procedimento acima fornece um **estimador intervalar** para a média populacional. Esses estimadores intervalares, juntamente com os seus coeficientes de confiança γ, são chamados de intervalos de confiança (IC).

Uma vez observada a amostra, podemos construir um intervalo de confiança, substituindo os valores de $\bar{x}$, σ, n e $z_{\alpha/2}$ na equação (6.8.4). O valor $z_{\alpha/2}$ pode ser obtido da distribuição $N(0,1)$ de modo que $P(Z \leq -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$.

Note que:

- o parâmetro μ é fixo, a aleatoriedade do intervalo em (6.8.4) vem da quantidade aleatória $\bar{X}$;
- a interpretação é de que se várias amostras são selecionadas aleatoriamente, para aproximadamente $100(1-\alpha)\%$ delas o intervalo em (6.8.4) conterá o verdadeiro valor do parâmetro μ;
- uma estimativa intervalar pode ser obtida observando apenas uma amostra $x_1, x_2, ..., x_n$ e substituindo $\bar{X}$ por $\bar{x}$ em (6.8.4) e, com isso, o intervalo resultante contém μ com $100(1-\alpha)\%$ de confiança.

Exemplo 6.8.2. *Considere novamente o Exemplo 6.8.1, em que a foi encontrada a estimativa $\bar{x} = 6,65$ para a média populacional. Uma estimativa intervalar para a resistência média do material em estudo, μ, a um nível de confiança $\gamma = 0,95 = 1 - 0,05$, pode ser obtida usando o estimador intervalar encontrado da seguinte forma. Da tabela de probabilidades da distribuição $N(0,1)$*

$$P(Z < -z_{\alpha/2}) = 0,025 \Longrightarrow -z_{\alpha/2} = -1,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Então, um intervalo que contém μ com 95% de confiança é dado por

$$\left[6,65 - \frac{1,96 \times 2}{\sqrt{10}}; 6,65 + \frac{1,96 \times 2}{\sqrt{10}}\right] \approx [5,41; 7,89].$$

Exemplo 6.8.3. *Uma máquina é regulada para cortar fitas de comprimento médio igual a 1000 cm. Suponha que o comprimento das fitas cortadas segue uma distribuição normal com variância* $\sigma^2 = 0,25$. *Para investigar se a máquina está operando com a média esperada, um engenheiro seleciona 25 fitas, de forma aleatória, de um grande lote com fitas cortadas pela máquina. Para essa amostra, o engenheiro obteve uma média* $\overline{x} = 998$ *cm.*

- *Construa um intervalo que contenha a verdadeira média populacional* μ *com 95% de confiança.*
- *Interprete o intervalo encontrado.*
- *A média esperada está contida no intervalo encontrado?*
- *O que dizer sobre a regulagem da máquina ao nível de 95% de confiança?*

6.8.2 IC para a Média Populacional com População Não Normal

No Exemplo 6.8.1, foi considerada uma população normal com variância conhecida. Se a população de interesse não é normal, é necessário que se tenha uma amostra suficientemente grande (pelo menos $n > 30$) para que se possa aproximar a distribuição da média amostral por uma normal, usando o TCL. Tendo isso, pode ser usado o mesmo procedimento desenvolvido anteriormente para se obter uma estimativa intervalar para a média populacional.

Exemplo 6.8.4. *Um provedor de acesso a Internet está monitorando a duração do tempo das conexões de seus clientes, com o objetivo de dimensionar seus equipamentos.* ***São desconhecidas a média e a distribuição de probabilidade*** *desse tempo, mas o desvio padrão, por analogia a outros serviços, é considerado igual a* $\sqrt{50}$ *minutos. Uma amostra de 500 conexões resultou num valor médio observado de 25 minutos.*

- *Construa um intervalo de confiança usando um coeficiente de confiança de 92%.*
- *O que dizer da verdadeira média, com confiança de 92%?*

6.8.3 IC para a Média Populacional com variância Desconhecida e População Normal

O objetivo agora é obter um estimador intervalar para a média de **populações normais** quando:

- a variância populacional é desconhecida;
- a população é normal e
- a **amostra é pequena**.

Para isso, vamos considerar novamente uma amostra aleatória $X_1, X_2, ..., X_n$ da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, agora supondo σ^2 desconhecido.

Como a variância populacional é desconhecida, consideramos a variância amostral, que é um estimador para a variância populacional e é dada por:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}.$$

Neste caso, não temos mais a quantidade $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, mas sim outra que é função de S, e é dada por:

$$T = \frac{\left(\bar{X} - \mu\right)}{S/\sqrt{n}},$$

essa quantidade ainda é função da média populacional, no entanto não segue a distribuição normal padrão, que é usada para obtenção de intervalos de confiança quando a variância populacional é conhecida. No entanto, pode ser mostrado que a quantidade aleatória T segue a distribuição t de Student, cujo parâmetro é dado pelos graus de liberdade da distribuição que é igual ao número de elementos da amostra menos 1. A função densidade de probabilidade da distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade, com $n = 1, 2, \cdots$, também tem curva simétrica em relação a zero, como mostra a Figura 6.4. Note que a curva diferencia da curva da normal padrão pelo modo como cresce e decresce.

Figura 6.4: Curva da distribuição t de Student com n=10 graus de liberdade.

Portanto, a distribuição da quantidade aleatória T é a t de Student com $n-1$ graus de liberdade e denotamos:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

ou seja, T tem distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade.

Com a quantidade T, descrita acima, podemos obter um estimador intervalar procedendo de forma análoga a vista no caso da normal padrão. Ou seja, dado $\gamma = 1-\alpha$, com $0 < \alpha < 1$ fixado, pode ser obtido $-t_{\alpha/2}$ e $t_{\alpha/2}$ na distribuição t de Student de modo que:

$$\begin{array}{rrcl} & P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) & = & \gamma \\ \Longrightarrow & P(-t_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}-\mu)}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}) & = & \gamma \\ \Longrightarrow & P(\bar{X} - t_{\alpha/2}S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}) & = & \gamma \end{array}$$

Que fornece o intervalo aleatório:

$$IC(1-\alpha) = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}; \bar{X} + t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}\right], \tag{6.8.2}$$

que é um estimador intervalar para a média populacional, μ, que com o coeficiente de confiança γ fornece intervalos de confiança para a média da população. Para obter os intervalos de confiança,

Exemplo 6.8.5. *Usando o software R, foram geradas 10 amostras de tamanho $n = 30$ da variável aleatória*

$$X \sim N(5, 4)$$

e obtidos intervalos com 90% confiança para a média $\mu = 5$, supondo a variância σ^2 desconhecida.

- Neste caso, $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ e $t_{\alpha/2} = 1,699$ obtido da distribuição t_{29}.
- Utilizando o estimador intervalar

$$IC(1-\alpha) = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}; \bar{X} + t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}\right], \tag{6.8.3}$$

  foram encontrados os 10 intervalos de confiança que estão representados na Figura 6.5.
- Observando o gráfico, são encontrados quantos intervalos que não contêm a verdadeira média?
- A proporção dos intervalos que não contém a média está de acordo com a confiança escolhida? Justifique.

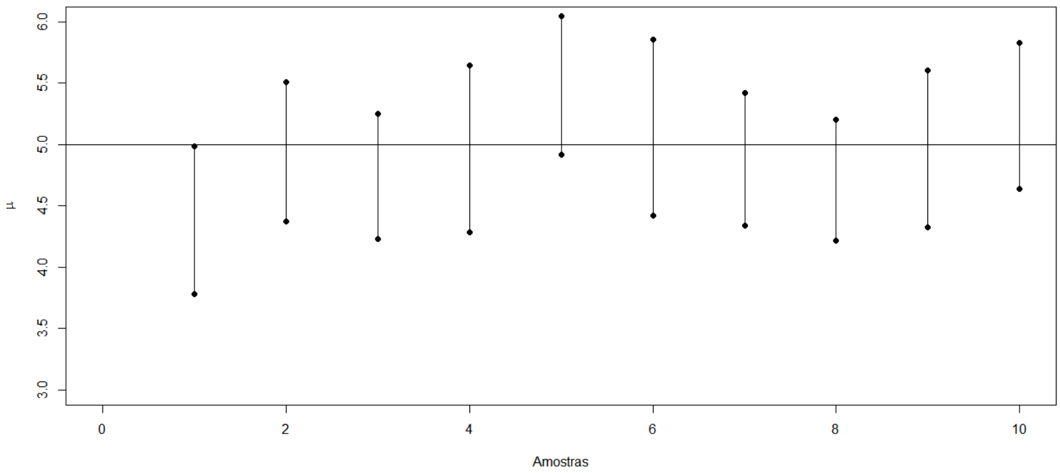


Figura 6.5: Intervalos de confiança para 10 amostras geradas da distribuição normal de média 5 e variância 4.

Exemplo 6.8.6. *Uma agência de proteção ambiental determina que em áreas públicas designadas para crianças o nível de chumbo no solo não pode exceder o limite de 500 partes por milhão (ppm). Um inspetor seleciona de modo aleatório 25 amostras de solo de uma área destinada a construção de um playground. As medidas dos níveis de chumbo resultaram em uma média de* $\overline{x} = 480$ *ppm e um desvio-padrão* $S = 5$ *ppm.*

- *Encontre um intervalo de confiança (IC) de 95% para o nível médio de chumbo.*
- *Interprete o intervalo encontrado. O que dizer sobre a pertinência da construção do playground com 95% de confiança?*

Exemplo 6.8.7. *(Montgomery, Pag: 177, 8-28, adaptado): Um teste de impacto Izod foi feito em 20 corpos de prova de tubos de PVC. A média da amostra é* $\overline{x} = 1{,}25$ *e o desvio-padrão da amostra é* $s = 0{,}25$*.*

- *Encontre um intervalo de confiança (IC) de 99% para a resistência ao impacto Izod.*
- *Interprete o intervalo encontrado.*

6.8.4 IC para a Média Populacional com variância Desconhecida: grandes amostras

Se o tamanho da amostra é grande e a suposição de normalidade não pode ser adotada, podemos aproximar a distribuição T pela normal, ou seja

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1),$$

e obter um intervalo de confiança para a média populacional usando o estimador intervalar:

$$IC(1-\alpha) = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}; \bar{X} + z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}\right], \tag{6.8.4}$$

em que S é o desvio-padrão amostral e $z_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição normal padrão.

6.8.5 Tamanho da amostra com erro especificado

A precisão do intervalo de confiança é dada por

- $2Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$;
- $2t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$ ou
- $2Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$,

dependendo do tamanho da amostra n e do conhecimento ou não do desvio padrão populacional σ.

Então, usando $\overline{x}$ para estimar μ, ao nível de $100(1-\alpha)\%$ de confiança, o erro cometido $E = |\overline{x} - \mu|$ é tal que:

- $E \leq Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ (σ conhecido);
- $E \leq t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$ (amostra pequena);
- $E \leq Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$ (amostra grande).

Fixando o erro em no máximo E_{max} (valor fixado previamente), podemos obter o tamanho da amostra de modo que tenhamos $100(1-\alpha)\%$ de confiança de que o erro na estimação de μ seja menor do que E_{max}. Seja

$$E_{max} = \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{E_{max}}\right)^2$$

Caso a expressão acima não resulte em um número inteiro, o valor deve ser arredondado.

6.8.6 Exercícios para a Seção 6.8

Exercício 6.8.1. *O brilho de um tubo de imagem de televisão pode ser avaliado medindo-se a quantidade de corrente requerida para atingir um determinado nível de brilho. Uma amostra de 10 tubos resultou na quantidade média de corrente* $\overline{x} = 3017,2$ *com s = 15,7 (microampères).*

a) Estabeleça as suposição necessária para a distribuição da população.

b) Encontre um intervalo de confiança para a corrente média requerida.

Exercício 6.8.2. *O projetista de uma indústria tomou uma amostra de 36 funcionários para verificar o tempo médio gasto para montar um determinado brinquedo. Sabendo que foi verificado que a média amostral é* $\overline{x} = 19,9$ *e que o desvio padrão populacional é* $\sigma = 5,73$, *construir um intervalo de confiança de nível* 95% *para* μ.

Exercício 6.8.3. *(Montgomery, Pag: 177, 8-29): Uma máquina de pós-mistura de bebidas é ajustada para liberar certa quantidade de xarope, em uma câmara onde ela é misturada com água carbonata. Uma amostra de 25 bebidas apresentou um conteúdo médio de xarope de* $\overline{x}$ *= 1,10 onça fluida e um desvio-padrão s=0,015 onça fluida. Encontre um IC de 95%para o volume médio de xarope liberado.*

Exercício 6.8.4. *(Montgomery, Pag: 177, 8-33): O Escritório de Meteorologia do Governo Australiano forneceu a quantidade (em milímetros) anual de chuva na Austrália em 1984-2002 conforme apresentado a seguir:*

499,2	555,2	398,8	391,9	453,4
459,8	483,7	417,6	469,2	452,4
452,4	499,3	340,6	522,8	469,9
527,2	565,5	584,1	727,3	558,6

Construa um intervalo de confiança de 95% para a quantidade anual média de chuva.

Exercício 6.8.5. *(Montgomery, Pag: 178, 8-34): A energia solar consumida (em trilhões de BTU) nos Estados Unidos, por ano, de 1989 a 2004, é mostrada no quadro a seguir.*

55,291	66,458	70,237	65,454
59,718	68,548	69,787	64,391
62,688	69,857	68,793	63,62
63,886	70,833	66,388	63,287

Construa um intervalo de confiança de 95% para a energia sola média consumida.

Exercício 6.8.6. *(Montgomery, Pag: 178, 8-37): A resistência do concreto a compressão está sendo testada por um engenheiro civil, que testa 12 corpos e obtêm os seguintes dados:*

2216	2237	2249	2204
2225	2301	2281	2263
2318	2255	2275	2295

a) Assuma que a população é normal e construa um intervalo de confiança de 95% para resistência média.

b) Construa um limite unilateral de confiança de 95% (aqui usa-se $t_{0,05}$) para a resistência média. Compare esse limite inferior com o limite inferior ao intervalo bilateral de confiança e discuta por que eles são diferentes.

Exercício 6.8.7. *(Montgomery, Pag: 178, 8-38): Uma máquina produz bastões metálicos usados em um sistema de suspensão de automóveis. Uma amostra aleatória de 15 bastões é selecionada para ter o diâmetro medido. Os dados (em milímetros) resultantes são mostrados a seguir:*

8,24	8,25	8,20	8,23	8,24
8,21	8,26	8,26	8,20	8,25
8,23	8,23	8,19	8,28	8,24

Assuma que a população é normal e calcule um intervalo de confiança de 95% para o diâmetro médio dos bastões.

Exercício 6.8.8. *(Montgomery, Pag: 178, 8-40): A espessura da parede de 25 garrafas de 2 litros foi medida por um engenheiro do controle de qualidade. A média da amostra foi $\overline{x}$ =4,05 milímetros e o desvio-padrão da amostra foi s = 0,08 milímetros. Encontre um intervalo de confiança de 95% para a espessura media da parede. Interprete o que você obteve.*

Exercício 6.8.9. *(Montgomery, Pag: 174, 8-1): Para uma população Normal com variância σ^2 conhecida, responda: qual o nível de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ para os intervalos:*

(a) $[\overline{x} - 2,14\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 2,14\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

(b) $[\overline{x} - 2,49\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 2,49\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

(c) $[\overline{x} - 1,85\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1,85\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Exercício 6.8.10. *(Montgomery, Pag: 174, 8-5): Uma amostra aleatória foi retirada de uma população normal e os seguintes intervalos de confiança foram construídos usando os mesmos dados:*

$$[37,63; 49,87] \text{ e } [35,59; 51,81]$$

(a) Qual é o valor da média amostral $\overline{x}$?

(b) Um desses intervalos é de 95% e o outro é de 99% de confiança. Qual deles é o de 95% e por quê?

(c) Supondo que o desvio-padrão para essa amostra seja $S = 13,95$. Qual deve ser o tamanho aproximado de uma nova amostra n para que o comprimento do intervalo de 95% seja igual a 10?

6.9 Intervalos de Confiança para a Proporção Populacional

Suponha que queremos determinar a proporção de adultos com idade superior aos 40 anos que sofrem de artrite. Então, podemos definir uma variável aleatória X de maneira que:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ se o indivíduo é portador de artrite} \\ 0, \text{ se o indivíduo não é portador de artrite} \end{cases}$$

Dessa forma, temos que X é uma variável aleatória discreta com distribuição de Bernoulli com algum parâmetro p que em geral é desconhecido. Retirada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamanho n dessa população, vimos que cada X_i tem a mesma distribuição de X, que é Bernoulli com parâmetro p. Ou seja:

$$X_i \sim \text{ Bernoulli}(p)$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Logo, a probabilidade de um particular indivíduo ser ou não portador de artrite é dada pela função de probabilidade:

$$P(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x},$$

com $x = 0, 1$. Adicionalmente, a esperança e a variância de cada X_i são dadas pelas expressões:

$$\mu_{X_i} = E[X_i] = p \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_{X_i} = Var(X_i) = p(1-p).$$

Vimos que a proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{\text{número de elementos com uma característica na amostra}}{\text{número de elementos na amostra}}$$

é um estimador para proporção populacional p. Então, seja Y_n o total de indivíduos portadores de artrite (com a característica investigada) na amostra, assim temos

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Disso decorre que:

$$\hat{p} = \frac{Y_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \overline{X},$$

logo o estimador da proporção populacional é dado pela média amostral. Neste caso, sabemos que a amostra aleatória não vem de uma população normal, pois $X_i \sim$ Bernoulli(p) para $i = 1, 2, \cdots, n$, mas pelo Teorema Central do Limite segue que

$$\hat{p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Ou seja, a medida que o tamanho da amostra cresce, $\overline{X}$ se aproxima da distribuição normal com média e variância:

$$\mu_{\overline{X}} = p \quad \text{e} \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

. Então, para n suficientemente grande, a proporção amostral é aproximadamente normal, ou seja,

$$\hat{p} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Aqui, o desvio-padrão da proporção amostral $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ é chamado de erro padrão do estimador.

> **Exemplo 6.9.1.** *Suponha que 60% da população de uma certa cidade seja a favor da criação de um fundo público para fins de instalação de uma área de lazer. Se 150 pessoas selecionadas aleatoriamente são entrevistadas, qual a probabilidade de que a proporção amostral favorecendo essa questão seja menor que 0,52?*

Assim como no caso da média, um IC para a proporção populacional (p) pode ser obtido usando a quantidade aleatória Z. Ou seja, fixado $\gamma = 1 - \alpha$, exite $Z_{\alpha/2}$ tal que

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = \gamma$$

$$P(-Z_{\alpha/2} < \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < Z_{\alpha/2}) = \gamma$$

$$P(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) = \gamma,$$

em que o quantil $Z_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição $N(0,1)$. Portanto, a probabilidade do intervalo

$$IC(1-\alpha) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

conter o verdadeiro valor de p é γ. Em outras palavras, o intervalo acima contém o verdadeiro valor de p com $100 \times \gamma\%$ de confiança.

6.9.1 Tamanho da amostra com erro especificado

Aqui também podemos obter o tamanho da amostras necessárias para um determinado erro máximo, ou seja, podemos determinar n de modo que com uma determinada confiança tenhamos:

$$|p - \hat{p}| < E_{max}$$

Para isso, fixamos:

$$E_{max} = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \Longrightarrow \quad n = z^2_{\alpha/2}\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{E^2_{max}}.$$

Como $\hat{p}$ depende de uma amostra observada, uma amostra piloto deve ser utilizada para obter uma estimativa de p.

Exemplo 6.9.2. *Em uma pesquisa de mercado foram entrevistadas $n = 400$ pessoas sobre a qualidade de determinado produto. Nessa amostra, 60% das pessoas elogiaram o produto, classificando-o como de boa qualidade.*

- *Temos que $\hat{p} = 0,6$ é uma estimativa para a proporção de pessoas que aprovam o produto no mercado.*
- *Construa um IC para a proporção de pessoas que aprovam o produto no mercado adotando um coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.*
- *Qual estratégia podemos utilizar para diminuir esse erro, mantendo uma confiança de 95%.*
- *Determine o tamanho da amostra para que, com 95% de confiança, tenhamos um IC reduzido pela metade, tendo como base a amostra anterior.*

Exemplo 6.9.3. *Antes da eleição, um determinado partido está interessado em estimar a proporção p de eleitores favoráveis ao seu candidato. Uma amostra piloto de tamanho 100 revelou 60% dos eleitores sendo favoráveis ao candidato.*

- *Utilizando a informação da amostra piloto, determine o tamanho da amostra para que, com 0,8 de confiança, o erro cometido na estimação seja no máximo 0,05.*
- *Se na amostra final, com tamanho obtido em (a), observou-se que 51% dos eleitores eram favoráveis ao candidato, construa um intervalo de confiança para p, com confiança de 95% de que esse intervalo contenha o verdadeiro valor da proporção populacional.*

6.9.2 Exercícios para a Seção 6.9

Exercício 6.9.1. *(Montgomery, Pag: 182, 8-53): Está sendo estudada a fração de circuitos integrados defeituosos produzidos em um processo de fotolitografia. Uma amostra aleatória de 300 circuitos é testada, revelando 16 defeituosos*

a) Calcule um IC de 95% para a fração de circuitos defeituosos produzidos por essa ferramenta particular.

b) Calcule um limite superior de confiança de 95% para a fração de circuitos defeituosos.

Exercício 6.9.2. *(Montgomery, Pag: 182, 8-56): De 1000 casos selecionados aleatoriamente de câncer de pulmão, 823 resultaram em morte dentro de 10 anos.*

a) Calcule um intervalo de de 95% para a taxa de morte de câncer de pulmão.

b) Usando a estimativa pontual de p, obtida a partir de uma amostra preliminar, qual o tamanho necessário para estarmos 95% confiantes de que o erro em estimar o valor verdadeiro de p seja menor do que 0,03?

c) Qual grande tem de ser a amostra se desejarmos estar no mínimo 95% confiantes de que o erro em estimar p seja menor do que 0,03 independentemente do valor verdadeiro de p.

Exercício 6.9.3. *(Montgomery, Pag: 182, 8-56): De 1000 casos selecionados aleatoriamente de câncer de pulmão, 823 resultaram em morte dentro de 10 anos. Calcule um intervalo de confiança de 95% para a taxa de morte de câncer de pulmão.*

Exercício 6.9.4. *(Montgomery, Pag: 182, 8-53): Está sendo estudada a fração de circuitos integrados defeituosos produzidos em um processo de fotolitografia. Uma amostra aleatória de 300 circuitos é testada, revelando 16 defeituosos. Calcule um IC de 95% para a fração de circuitos defeituosos produzidos por essa ferramenta particular.*

Exercício 6.9.5. *(Montgomery, Pag: 182, 8-58): Uma amostra aleatória de 50 capacetes de corredores de motos e automóveis foi submetida a um teste de impacto, sendo observados algum dano em 18 desses capacetes.*

a) Encontre um intervalo de confiança de 95% para a proporção verdadeira de capacetes desse tipo, que mostraria algum dano proveniente desse teste.

b) Usando a estimativa pontual de p, obtida a partir da amostra preliminar de 50 capacetes, quantos capacetes tem de ser testados para estamos 95% confiantes de que o erro na estimação do valor verdadeiro de p seja menor do que 0,02?

Exercício 6.9.6. *: Um engenheiro está analisando a resistência à compressão do concreto. A resistência à compressão é distribuída normalmente com $\sigma^2 = 1000$ (psi^2). Uma amostra aleatória de 12 corpos de prova tem uma resistência media à compressão de $\bar{X} = 3250$ psi.*

a) *Construa um intervalo de 95% de confiança para resistência média a compressão.*

b) *Construa um intervalo de 99% de confiança para a resistência média a compressão e compare com o item a).*

c) *Se o desejo é estimar a compressão com um erro menor de que 15 psi, com 99% de confiança qual é o tamanho requerido da amostra?*

Exercício 6.9.7. *Sabe-se que a vida em horas de um bulbo de uma lâmpada de 75 W é distribuída normalmente com $\sigma = 25$ horas. Uma amostra aleatória de $n = 20$ bulbos forneceu uma vida média de $\overline{x} = 1014$ horas.*

a) Construa um intervalo de 95% de confiança para a vida média populacional μ.

b) Suponha que se queira estar 95% confiante de que o erro na estimação da vida média a partir de um intervalo de confiança seja de 5 horas, que tamanho de amostra deveria ser usado?

c) Suponha que se queira que a largura total do intervalo de 95% de confiança seja de 6 horas, que tamanho de amostra deveria ser utilizado?

d) De quanto o tamanho n da amostra deverá ser aumentado se o comprimento do IC para μ for reduzido à metade?

e) Se o tamanho n da amostra for dobrado do IC para μ será reduzido.

f) Se o tamanho n da amostra for dobrado, de quanto o comprimento do IC para μ será reduzido.

6.10 Teste de Hipóteses para a Média Populacional

Suponha que um engenheiro de uma fábrica de sucos esteja interessado no volume médio de enchimento de latas de suco, que é esperado ser de 300 ml. O interesse do engenheiro é saber se a máquina que faz os enchimentos está regulada corretamente. Mesmo que a máquina esteja regulada, é esperado que os enchimentos não forneçam um volume de exatamente 300 ml, existe uma variabilidade que, neste caso, é atribuída ao acaso. No entanto, os volumes devem sempre estarem em torno da média que deve ser de 300 ml. Então, o engenheiro quer saber se o volume médio real de enchimento das latas (média populacional μ) é de fato 300 ml.

Para esse caso, considere a variável aleatória X que representa todos o possíveis valores de enchimento das latas, que é a característica de interesse dos elementos da população. O objetivo agora é saber se ocorre $E(X) = \mu = 300$ ml. Suponha que a máquina foi regulada para encher as latas segundo uma distribuição normal de média $\mu = 300$ e variância $\sigma^2 = 25$. Ou seja,

$$X \sim N(300, 25)$$

Se a máquina está desregulada, o único parâmetro que se altera na distribuição dos enchimentos é a média μ, a variância se mantém igual a $\sigma^2 = 25$. Para saber se a produção está sob controle, suponha que foi colhida uma amostra de tamanho $n = 25$. Suponha, ainda, que tenha sido observado:

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 298\ ml.$$

O que podemos dizer a respeito da regulagem da máquina?

Aqui temos duas hipóteses estatísticas: $\mu = 300$ ou $\mu \neq 300$. Formalmente, dizemos que queremos testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 300 \\ H_1 : \mu \neq 300. \end{cases}$$

A hipótese H_0 é chamada de hipótese nula e H_1 é chamada de hipótese alternativa.

Mesmo que a máquina esteja regulada, ao observarmos uma amostra e obter sua média, dificilmente teremos $\bar{x} = 300$. Então, se a diferença $|\bar{x} - 300|$ não for "muito grande", aceitamos a suposição de que a máquina está regulada corretamente. Agora temos outro problema: o que seria esse valor absoluto muito grande?

Para se ter uma ideia do que seria um valor muito grande, podemos tentar verificar se o valor observado de $\overline{X}$ é ou não um **evento raro** na distribuição suposta para a variável enchimento das latas. Sabemos que $\bar{X}$ é uma variável aleatória com distribuição normal com média igual a da população e variância igual a variância da população dividida pelo tamanho da amostra, n. Conhecendo o comportamento de $\bar{X}$, a sua distribuição, podemos dizer se um particular valor observado $\bar{x}$ de $\bar{X}$ é ou não um **evento raro de acontecer**. Caso o seja, é melhor suspeitar da máquina do que atribuir a diferença ao acaso.

Um evento raro é aquele que tem uma probabilidade pequena de ocorrer, então podemos obter

$$p = P(\overline{X} < 298).$$

Se p for pequeno, será mais provável que $\overline{x} = 298$ venha de uma distribuição diferente da distribuição suposta, levando a conclusão de que a máquina está desregulada. Então, vamos obter

$$p = P(\overline{X} < 298)$$

e verificar o quão pequeno é o valor de p na distribuição de $\overline{X}$.

Então, aqui, para decidir se aceitamos ou não a hipótese H_0, vamos realizar os passos:

- obter $p = P(\overline{X} < 298)$;
- verificar se o valor encontrado é maior ou menor que um valor pré-estabelecido α, aqui vamos fixar em 0,05;
- Concluir por aceitar ou rejeitar a hipótese $\mu = 300$ conforme p é maior ou menor que α;
- caso rejeite, aceitar a alternativa $\mu \neq 300$, levando a conclusão de que a máquina está desregulada.

Como a população é normal e a variância é conhecida,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Usando essa distribuição, podemos obter

$$p = P(\overline{X} < 298) = P(Z < \frac{298 - 300}{5/\sqrt{25}}) = P(Z < -2) \approx 0,023.$$

Se quisermos estar apenas 95% confiantes de que não vamos rejeitar a hipótese $\mu = 300$, caso essa seja verdadeira, podemos assumir uma região crítica determinada por $\alpha = 0,05$, como mostra a Figura 6.6. Estabelecido o valor de α, sabemos que existem valores críticos $\overline{x}_{c1}$ e $\overline{x}_{c2}$ de modo que se o valor observado $\overline{x}_{obs}$ estiver abaixo de $\overline{x}_{c1}$ ou acima de $\overline{x}_{c2}$, ou seja

$$\overline{x}_{obs} < \overline{x}_{c1} \text{ ou } \overline{x}_{obs} > \overline{x}_{c2},$$

rejeitamos a hipótese $\mu = 300$. Nesse caso, $p < \frac{\alpha}{2} = 0,05$, fazendo com que o valor observado 298 esteja na região crítica, então concluímos que as chances de $\overline{x} = 298$ vir da distribuição $N(300; 25)$ é muito pequena, sendo preferível acreditar que a máquina está desregulada.

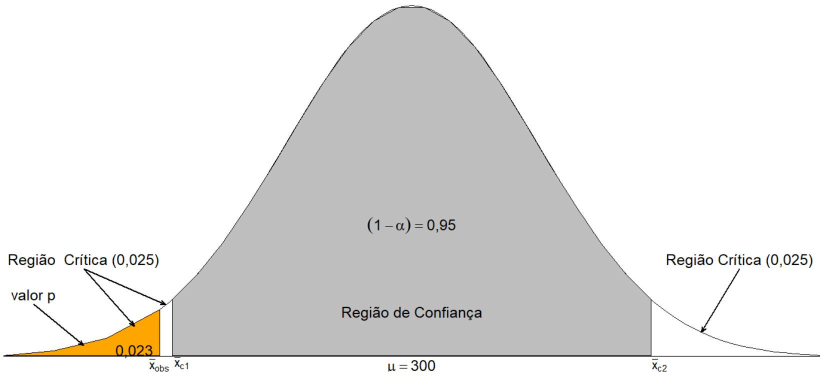


Figura 6.6: Região crítica determinada por $\alpha = 0,05$.

Observe que se o valor observado de $\overline{X}$ é maior que a média proclamada μ, teríamos:

$$p = P(\overline{X} > \overline{x}_{obs}).$$

Esse valor é chamado de nível descritivo do teste de hipóteses, e representa a probabilidade de se obter valores mais extremos do que o valor observado. Aqui, a média amostral é usada para testar as hipóteses sendo, então, a estatística do teste.

6.10.1 Região Crítica

Suponha que existe interesse em testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

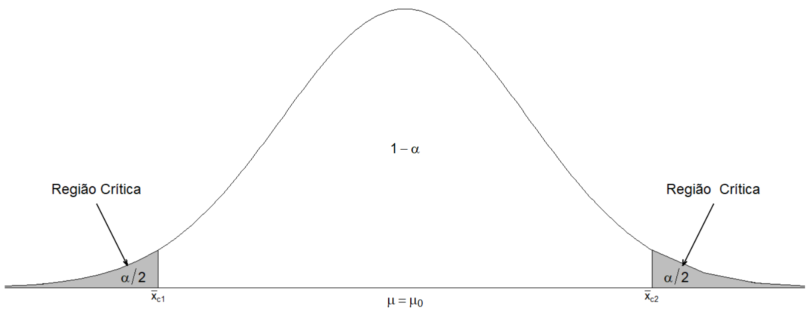


Figura 6.7: Região crítica determinada por um valor α.

Essa região é dada pela união dos intervalos:

$$\boxed{\overline{X} < \overline{x}_{c1} \text{ e } \overline{X} > \overline{x}_{c2}.}$$

Região Crítica para grandes amostras ou populações normais com variância conhecida

A região crítica do teste pode ser obtida fixado α um valor tão pequeno quanto desejado, sendo $0 < \alpha < 1$ e encontrando $\overline{x}_{c2}$ e $\overline{x}_{c1}$. Esses valores podem ser obtidos, respectivamente, do seguinte modo.

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > \overline{x}_{c2}) &= P(Z > \tfrac{\overline{x}_{c2}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \\ &= 1 - P(Z < \tfrac{\overline{x}_{c2}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \\ &= \alpha/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & P(Z < \tfrac{\overline{x}_{c2}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1 - \alpha/2 \\ \Longrightarrow \quad & Z_{\alpha/2} = \tfrac{\overline{x}_{c2}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\overline{x}_{c2} = \mu_0 + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},$$

em que $Z_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição normal padrão.

Usando a simetria da distribuição normal, podemos obter $\overline{x}_{c1}$:

$$\begin{aligned} P(\overline{X} < \overline{x}_{c1}) &= P(Z < \tfrac{\overline{x}_{c1}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) &= \alpha/2 \\ \Longrightarrow & \qquad -Z_{\alpha/2} &= \tfrac{\overline{x}_{c1}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\ \Longrightarrow & \qquad \overline{x}_{c1} &= \mu_0 - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Então,

$$\overline{x}_{c1} = \mu_0 - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

em que $Z_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição normal padrão.

Exemplo 6.10.1. *Considere novamente o problema inicial de testar as hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 300 \\ H_1 : \mu \neq 300. \end{cases}$$

Para realizar esse teste foi selecionada uma amostra de tamanho $n = 25$ da variável aleatória $X \sim N(\mu, 25)$. Essa amostra forneceu $\overline{x} = 298$ ml. Vamos verificar se esse valor pertence a região crítica do teste com $\alpha = 0,05$.

$$P(\overline{X} > \overline{x}_{c2}) = P(Z > \frac{\overline{x}_{c2} - 300}{5/\sqrt{25}}) = 0,05 \Longrightarrow P(Z < \overline{x}_{c2} - 300) = 0,975 \Longrightarrow 1,96 = \overline{x}_{c2} - 300 \Longrightarrow \overline{x}_{c2} = 301,96.$$

$$P(\overline{X} < \overline{x}_{c1}) = P(Z < \frac{\overline{x}_{c1} - 300}{5/\sqrt{25}}) = 0,025 \Longrightarrow -1,96 = \overline{x}_{c1} - 300 \Longrightarrow \overline{x}_{c1} = 298,04.$$

Então, como mostra a Figura 6.8, a região crítica é a união dos intervalos:

$$\overline{X} < 298,04 \text{ e } \overline{X} > 301,96.$$

Note que 298 pertence a região crítica, logo rejeitamos a hipótese H_0, ou seja, ao nível $\alpha = 0,05$, concluímos que a máquina está desregulada.

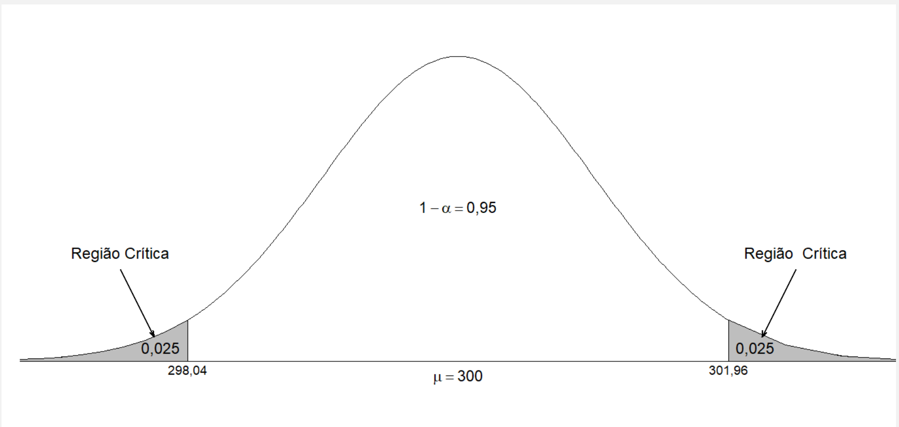


Figura 6.8: Região crítica determinada por $\alpha = 0,05$.

Variância desconhecida amostras pequenas

Nesse caso, usamos a variância amostral para estimar a variância populacional. Se a amostra é pequena, devemos ter a suposição de normalidade para a população para obter:

$$\overline{x}_{c1} = \mu_0 - T_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$$
$$\overline{x}_{c2} = \mu_0 + T_{\alpha/2} S/\sqrt{n},$$

em que $T_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição t de Student.

Variância desconhecida grandes amostras

Aqui também utilizamos a variância amostral para estimar a variância populacional, sem a necessidade da suposição de normalidade para a população. Então, a região crítica pode ser obtida encontrando:

$$\overline{x}_{c1} = \mu_0 - Z_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$$
$$\overline{x}_{c2} = \mu_0 + Z_{\alpha/2} S/\sqrt{n},$$
em que $Z_{\alpha/2}$ é obtido da distribuição normal padrão.

6.10.2 Erros de Decisão

Se uma decisão é tomada com base em um teste de hipóteses, existem dois tipos de erros que podem ser cometidos. Se a hipótese nula é verdadeira, corremos risco de rejeita-la erroneamente. Do mesmo modo, se H_0 é falsa, também podemos cometer um erro, que é o de aceita-la erroneamente. Então, temos os seguintes tipos de erros:

1. Erro tipo I: rejeitar H_0 quando essa é verdadeira.
2. Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando essa é falsa.

A Tabela 6.1 mostra a relação existem entre esses erros. Note que, ao tentar minimizar o erro tipo I, aumentamos as chances de cometer o erro tipo II e vise versa.

Tabela 6.1: Relação entre os erros.

Decisão	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Aceitar H_0	Decisão correta	Erro do Tipo II
Rejeitar H_0	Erro do Tipo I	Decisão correta

A região crítica é o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é pequena sob a veracidade da hipóteses nula. A definição de probabilidade pequena se faz por meio da escolha de α, que é o nível de significância do teste que é dado pela probabilidade do erro tipo I, ou seja,

$$\alpha = P\text{ (erro tipo I)} = P\text{ (rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira)}.$$

Geralmente, o valor de α é fixado em um pequeno valor, sendo os mais comuns: $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,10$. Definindo α podemos estabelecer a região crítica do teste usando a distribuição amostral da estatística de teste, que nesse caso é a média amostral.

A probabilidade do Erro do tipo II é dada por:

$$\beta = P(\text{Erro do tipo II}) = P(\text{não rejeitar } \ H_0 | H_0 \text{ é falsa })$$

A partir da probabilidade do erro tipo II obtemos o poder do teste, que é dado pela função de μ:

$$\pi(\mu) = 1 - \beta = P(\text{rejeitar } H_0 | \mu \neq \mu_0) = P(\overline{X} < \overline{x}_{c1} | H_0 \text{ é falsa }) + P(\overline{x}_{c2} > \overline{X} | H_0 \text{ é falsa }).$$

Exemplo 6.10.2. *(Montgomery, Pag: 205, 9-47): Pesquisadores médicos desenvolveram um novo coração artificial, construído principalmente de titânio e plástico. O coração durará e operará quase indefinidamente, uma vez implantado no corpo do paciente; porém seu conjunto de baterias necessita ser carregado a cada quatro horas, aproximadamente. Uma amostra aleatória de 50 conjuntos de baterias é selecionada e submetida a um teste de vida, tendo vida média de 4,05 horas. Considere que a vida das baterias seja normalmente distribuída, com o desvio-padrão de* $\sigma = 0,2$ *hora.*

a) *Ao nível de* $\alpha = 0,05$*, há evidencia para suportar a alegação de que a vida média da bateria difere de 4 horas?*

b) *Determine o valor p e a região crítica do teste.*

c) *Explique como a questão em a) poderia ser respondida, construído um intervalo de confiança para a vida média.*

d) *Calcule o poder do teste se a vida média verdadeira da bateria for de 4,1 horas.*

e) *Determine o tamanho da amostra necessária para detectar uma vida média verdadeira de 4,1 horas, se quiséssemos que o poder do teste fosse no mínimo 0,95.*

- Formalmente tem-se as hipóteses estatísticas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 4 & \text{(hipótese nula);} \\ H_1 : \mu \neq 4 & \text{(hipótese alternativa).} \end{cases}$$

$P(\overline{X} > \overline{x}_{c2}) = P(Z > \frac{\overline{x}_{c2}-4}{0,2/\sqrt{50}}) = 0,05 \Longrightarrow P(Z < \frac{\overline{x}_{c2}-4}{0,028}) = 0,95 \Longrightarrow 1,64 = \frac{\overline{x}_{c2}-4}{0,028} \Longrightarrow \overline{x}_{c2} \approx 4,05.$

$P(\overline{X} < \overline{x}_{c1}) = P(Z < \frac{\overline{x}_{c1}-4}{0,2/\sqrt{50}}) = 0,05 \Longrightarrow -1,64 = \overline{x}_{c1} - 4 \Longrightarrow \overline{x}_{c1} = 3,95.$

- A região crítica é dada pelo par de intervalos:

$$\overline{X} < 3,95 \qquad \text{e} \qquad \overline{X} > 4,05.$$

- O valor p é: $p = P(\overline{X} > 4,05) = 1 - (\overline{X} < 4,05) = 1 - (Z < \frac{4,05-4}{0,028}) = 1 - (Z < 1,79) \approx 0,037 > \alpha/2.$
Tanto o valor p como a região crítica conduz a conclusão de não rejeitar a hipótese nula que afirma que a vida média da bateria é 4 horas, ao nível $\alpha = 0,05$.

- Usando $\overline{x} = 4,05$, temos o IC:
$IC(0,9) = [4,05 - 1,64 \times 0,028 \; ; \; 4,05 + 1,64 \times 0,028] = [4 \; ; \; 4,1].$

  O intervalo acima contém o valor 4, não rejeitando a hipótese nula ao nível $\alpha = 0,1$.
- Erro Tipo II, se $\mu = 4,1$:

$$\beta = P(3,95 < \overline{X} < 4,05|\mu = 4,1) = P(\overline{X} < 4,05|\mu = 4,1) - P(\overline{X} < 3,95|\mu = 4,1)$$

$$= P(Z < \frac{4,05 - 4,1}{0,028}) - P(Z < \frac{3,95 - 4,1}{0,028}) = P(Z < -1,8) - P(Z < -5,3) \approx 0,04.$$

- Poder do teste, se $\mu = 4,1$: $\Longrightarrow \pi(4,1) = 1 - \beta \approx 0,96.$

6.11 Exercícios para a Seção 6.10

Exercício 6.11.1. *(Montgomery, Pag: 199, 9-20): Um fabricante está interessado na voltagem de saída de um fornecimento de energia usado em um computador pessoal. A voltagem de saída é considerada normalmente distribuída, com um desvio padrão igual a 0,25 Volt. O fabricante deseja testar* $H_0 : \mu = 5$ *Volts contra* $H_1 : \mu \neq 5$ *Volts. Usando* $n = 8$ *unidades, a região de aceitação é* $4,85 \leq \overline{x} \leq 5,15$*.*

a) *Encontre o valor de* α*.*

b) *Encontre o limite da região critica, se a probabilidade do erro tipo I for:*

i) $\alpha = 0,01$ *e* $n = 8$*;*

i) $\alpha = 0,05$ *e* $n = 8$*;*

i) $\alpha = 0,01$ *e* $n = 16$.

Exercício 6.11.2. *(Montgomery, Pag: 205, 9-41): Um produtor fabrica eixos para o motor de um automóvel. O desgaste (0,0001 polegadas) dos eixos depois de 100000 milhas é de interesse, visto ter um impacto nas reivindicações de garantia. Uma amostra aleatória de* $n = 15$ *eixos é testada e* $\overline{x} = 2,78$. *Sabe-se que* $\sigma = 0,9$ *e que o desgaste é normalmente distribuído.*

a) Teste $H_0 : \mu = 3$ *versus* $H_1 : \mu \neq 3$, *usando* $\alpha = 0,05$.

b) Qual é o tamanho da amostra que seria requerido para detectar uma média verdadeira de $3,75$ *com erro máximo de 0,9 considerando o nível de 5%?*

c) Use o valor P (nível descritivo) para decidir se a hipótese descrita em a) é verdadeira ao nível de $\alpha = 0,02$.

Exercício 6.11.3. *(Montgomery, Pag: 205, 9-43): Sabe-se que, a vida em horas, de uma bactéria é distribuída normalmente, com desvio-padrão* $\sigma = 1,25$ *horas. Uma amostra aleatória de 10 bactérias tem uma vida* $\overline{x} = 40,5$ *horas.*

a) A evidência que suporte a alegação de que a vida da bactéria excede 40 horas? (use $\alpha = 0,05$*)*

b) Qual o valor P para o teste do item a)?

c) Utilizando o valor P, podemos aceitar a hipótese do item a) ao nível $\alpha = 0,01$*?*

Exercício 6.11.4. *(Montgomery, Pag: 205, 9-44): Um engenheiro, que esta estudando a resistência à tensão de uma liga de aço para uso de eixos de taco de golfe, sabe que a resistência à tensão é aproximadamente normalmente distribuída, com* $\sigma = 60$ *psi. Uma amostra aleatória de 12 espécimes tem uma resistência média a tensão de* $\overline{x} = 3450$ *psi.*

a) Teste a hipótese de que a resistência média é de 3500 psi. Use $\alpha = 0,01$.

b) Qual é o menor nível de insignificância em que você estaria disposto a rejeitar a hipótese nula?

c) Qual seria o erro β *para o teste do item a) se a média verdadeira for 3470?*

d) Suponha que quiséssemos rejeitar a hipótese nula com uma probabilidade de no mínimo 0,8, para uma resistência média de $\mu = 3470$. *Que tamanho de amostra deveria ser usado?*

e) Explique como poderia responder a questão no ítem a) usando um intervalo de confiança para a resistência média a tensão.

Exercício 6.11.5. *(Montgomery,Pag: 210, 9-60): Semear nuvens tem sido estudado durante décadas como um procedimento de mudança do tempo. A precipitação pluviométrica, proveniente de 20 nuvens selecionadas aleatoriamente e semeadas com nitrato de prata, é dada a seguir:*

18,0	30,7	19,8	27,1	22,3
31,8	23,4	21,2	27,9	31,9
25,0	24,7	26,9	21,8	29,2
27,1	18,8	34,8	26,7	31,6

a) Você pode sustentar a afirmação de que a precipitação média das nuvens semeadas excede 25 acres-pés? Use α *= 0,01. Encontre o valor de P.*

b) Qual suposição é exigida para a construção do teste em a)?

c) Explique como a questão do ítem(a) poderia ser respondida, construindo um limite unilateral para a precipitação média.

Exercício 6.11.6. *(Montgomery,Pag: 210, 9-61): Determinou-se o teor de sódio de 20 caixas de 300 gramas de flocos de milho orgânico. Os dados (em miligramas) são:*

131,15	130,69	130,91	129,54	129,64
128,77	130,72	128,33	128,29	129,65
130,14	129,29	128,71	129,00	129,39
130,42	129,53	130,12	129,78	130,92

a) *Você pode sustentar a afirmação de que o teor médio de sódio dessa marca de flocos de milho difere de 130 miligramas? Use $\alpha = 0,0$. Encontre o valor de P.*

b *Verifique se o teor de sódio é normalmente distribuído.*

c) *Calcule a potenciação do teste, se o teor médio verdadeiro de sódio de o valor médio for de 130,5 miligramas.*

d) *Que tamanho da amostra seria requerido para detectar um teor médio verdadeiro de sódio de 130,1 miligramas, se quisemos que a potência que a potência do teste fosse no mínimo 0,75.*

e) *Explique como a questão do ítem a) poderia ser respondida, construindo um intervalo de confiança.*

Exercício 6.11.7. *: A tensão de ruptura de cabos fabricados por uma empresa apresenta distribuição Normal, com média de 1800 kg e desvio padrão de 100 kg. Mediante uma nova técnica de produção, proclamou-se que a tensão de ruptura teria aumentado. Para testar essa declaração, ensaiou-se uma amostra de 50 cabos, obtendo-se como tensão média de ruptura 1850 kg. Pode-se aceitar a proclamação ao nível de 5%? (use um teste unilateral)*

Exercício 6.11.8. *O salário dos empregados das indústrias siderúrgicas tem distribuição Normal com média de 4,5 salários mínimos, com desvio padrão de 0,5 salários mínimos. Uma indústria emprega 49 empregados, com um salário médio de 4,3 s.m. Ao nível de 5% podemos afirmar que essa indústria paga salário inferior à média? R : $z_{\alpha/2} = -2,81$, rejeita-se H_0*

Exercício 6.11.9. *Acredita-se que a temperatura normal do corpo humano por via oral seja 98,6 F^o, mas há evidência de que ela realmente deveria ser 98,2 F^o. De uma amostra de 52 adultos saldáveis, a temperatura média foi 98,285 com um desvio padrão de 0,625.*

a) *Quais são as hipóteses nula e alternativa?*

b) *Teste a hipótese nula com $\alpha = 0,05$, usando o valor p e a região crítica.*

c) *Como intervalo de de confiança de 95% responda a mesma questão*

Exercício 6.11.10. *Um mancal usado em uma aplicação auto-motiva deve ter um diâmetro nominal interno de 1,5 polegada. Uma amostra aleatória de 25 é selecionada e o diâmetro interno médio desses mancais é de 1,4975 polegada. Sabe-se que o diâmetro do mancal é normalmente distribuído, com o desvio padrão $\sigma = 0,01$ polegada*

a) *Teste as hipóteses $H_O : \mu = 1,5$ e versus $H_1 : \mu \neq 1,5$, usando $\alpha = 0,01$.*

b) *Qual é o valor P para o teste do ítem a).*

c) *Calcule a potência do teste se o diâmetro médio verdadeiro for de 1,495 polegada*

d) *Que tamanho da amostra seria requerido para detectar um diâmetro médio verdadeiro tão baixo quanto 1,495 polegada, se quiséssemos que a potência do teste fosse, no mínimo, 0,9.*

e) *Explique como a questão no item a poderia ser respondida construindo um intervalo de confiança para o diâmetro médio.*

Exercício 6.11.11. *Um produtor fabrica eixos para o motor de automóvel. O desgaste (0,0001 polegada) dos eixos depois de 100000 milhas é de interesse, visto que é provável ter um impacto de reivindicação de garantia. Uma amostra aleatória de n=15 eixos é testada e $\overline{x} = 2,78$. Sabe-se que $\sigma = 0,9$ e que o desgaste é normalmente distribuído.*

- *Teste $H_0 : \mu = 3$ versus $H_1 : \mu \neq 3$, usando $\alpha = 0,05$.*

b) *Qual é o poder desse teste se $\mu = 3,25$?*

c) *Que tamanho de amostra seria requerida para detectar uma média verdadeira de 3,75, se quiséssemos que a potência fosse, no mínimo, 0,9?*

Exercício 6.11.12. *A temperatura média da água da saída de um tubo de descarga de uma torre de resfriamento de uma planta de energia não deve ser superior a 100 F^o. Experiência passada indica que o desvio-padrão é 2 F^o. A temperatura da água é medida durante 9 dias aleatoriamente sendo a temperatura média encontrada a 98 F^o.*

a) *Há evidencia de que a temperatura da água seja aceitável, considerando-se $\alpha = 0,05$?*

b) *Qual é o valor p para o teste?*

c) *Qual é a probabilidade de aceitação da hipóteses nula com $\alpha = 0,05$, se a água tem uma temperatura média verdadeira de 104 F^o?*

Referências

Barbetta, P. A., Reis, M. M. & Bornia, A. C. (2004). *Estatística: para cursos de engenharia e informática*, volume 3. Atlas São Paulo.

Hazzan, S. (2013). *Fundamentos de matemática elementar, 5, Combinatória, Probabilidade*. Atual, São Paulo - SP.

Morettin, L. (2010). *Estatistica basica: probabilidade e inferência : volume único*. MAKRON.

Morettin, P. A. & BUSSAB, W. O. (2017). *Estatística básica*. Editora Saraiva.

Ross, S. (2009). *Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações*. Bookman.

WILLIAM, J. S. (1981). Estatística aplicada à administração.