



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 05: Coloração de Vértices & Arestas

Professor Pablo Soares
2022.1

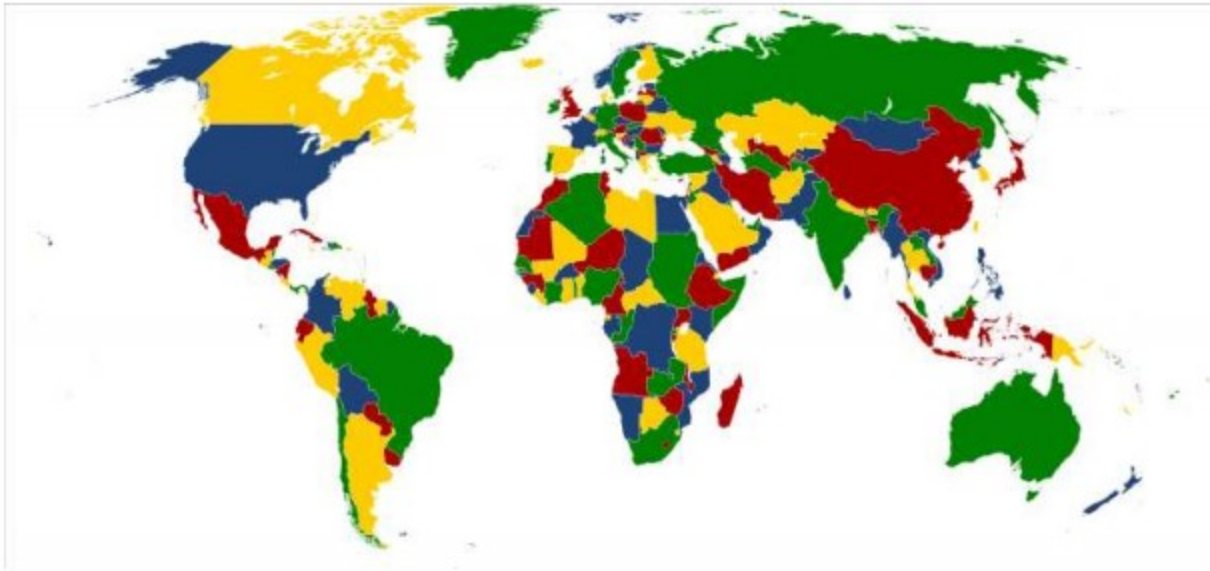
***“Quem não luta pelo futuro que quer,
tem que aceitar o futuro que vier”***

Sumário

- Origem da Coloração de Grafos
- Coloração
 - Vértices
 - Número Cromático
 - Arestas
 - Índice Cromático

Origem da coloração de grafos

- Francis Guthrie (1852): Qualquer **mapa político** pode ser colorido com no máximo quatro cores?



Francis Guthrie

Origem da coloração de grafos



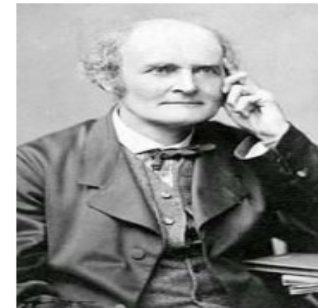
Frederick Guthrie
aluno de De Morgan
(1852)



Augustus de Morgan
Universidade de Londres
(1852)



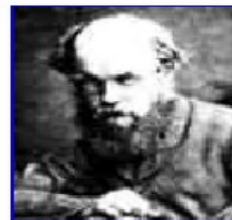
sir W. R. Hamilton
matemático irlandês
(1852)



Arthur Cayley
Cambridge University
(1878)



Alfred Kempe
(1879)



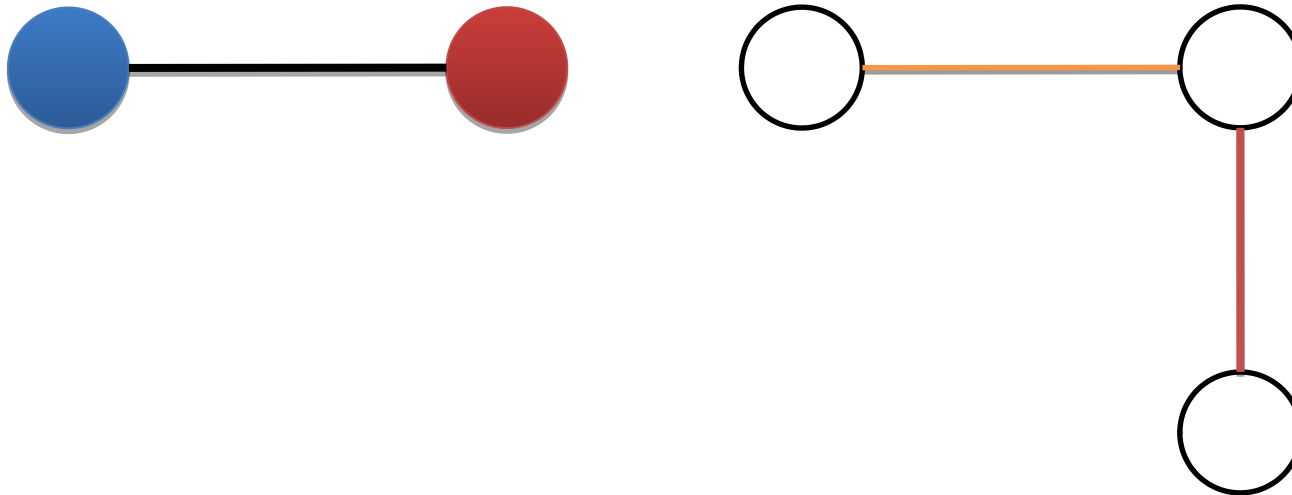
P G Tait
(1880)



P J Heawood
(1890)

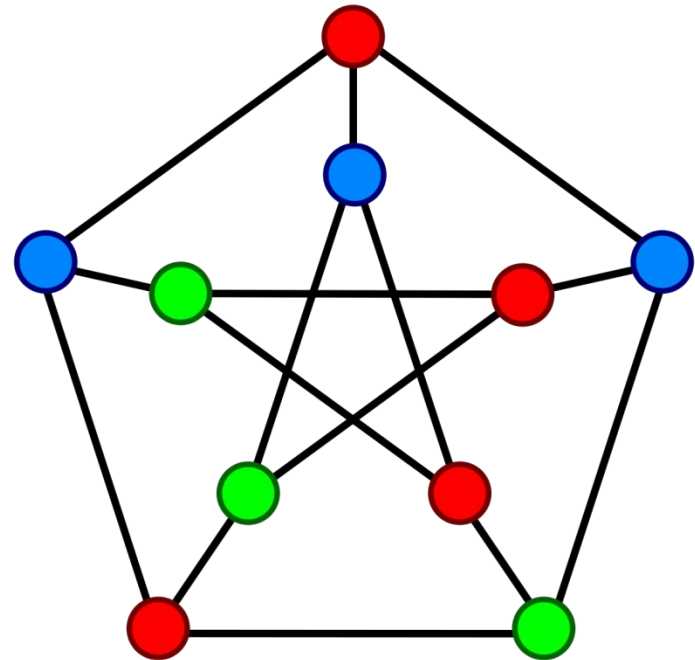
Coloração

- Atribuir rótulos(cores) a elementos de um grafo
 - Vértices
 - Adjacentes recebem cores diferentes
 - Arestas
 - Adjacentes recebem cores diferentes



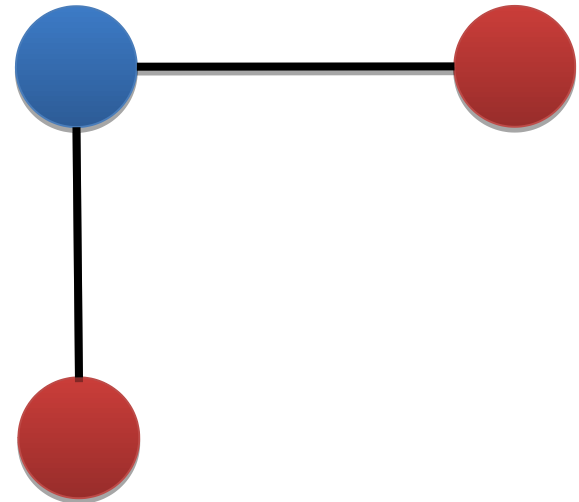
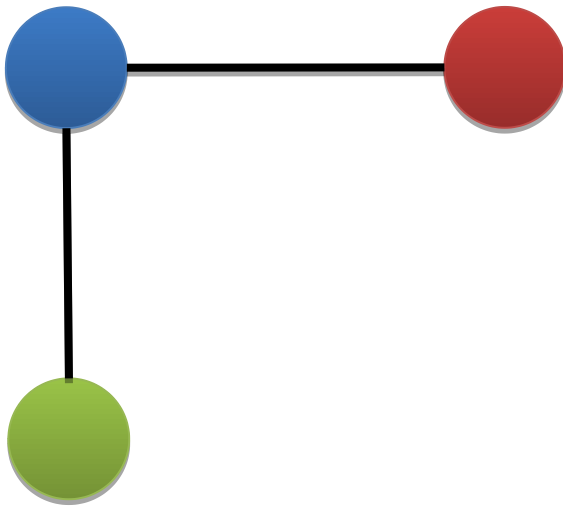
Coloração de Vértices

- **Caso mais elementar:**
 - Atribuir uma cor para cada vértice
- Obter uma coloração com poucas cores
 - Não é tão simples
- Problemas de coloração
 - Grafos simples



Coloração de Vértices

- **Número Cromático: $\chi(G)$**
 - **Menor** número de cores necessárias para colorir todos os vértices do grafo, tal que, vértices adjacentes devem possuir cores diferentes
 - Coloração **ótima**



Coloração de Vértices

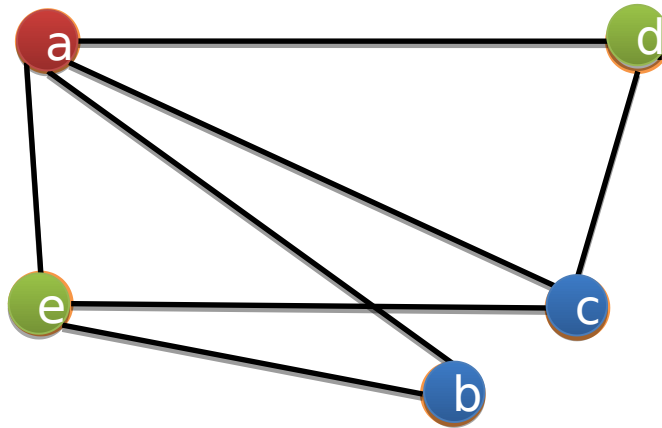
- Como determinar $\chi(G)$?
 - Natureza Combinatória
- Problema **NP - Difícil**
 - Algoritmos Exatos (*Branch-and-bound*; Prog. Dinâmica)
 - Garante a solução exata
 - Tempo exponencial
 - Incapaz de resolver instâncias grandes
 - Técnicas Heurísticas (ou algoritmos aproximativos)
 - Algoritmo de sentido geral para procurar uma boa solução
 - com um custo computacional aceitável
 - sem garantia de encontrar a solução ótima

Coloração de Vértices

- Heurística
 - Algoritmos Construtivos
 - Busca Local
- Algoritmos Construtivos
 - Construção incremental da solução de um problema
 - A cada passo, um componente é escolhido e inserido na solução até completar uma solução.
 - O componente escolhido em cada passo é, em geral, o melhor candidato de acordo com algum critério.

Coloração de Vértices

Teorema: Dado qualquer grafo G , há uma ordenação dos seus vértices tal que o método de coloração sequencial de vértices, aplicado a essa ordenação, produz uma coloração ótima.



Coloração de Vértices

- A explosão Combinatória

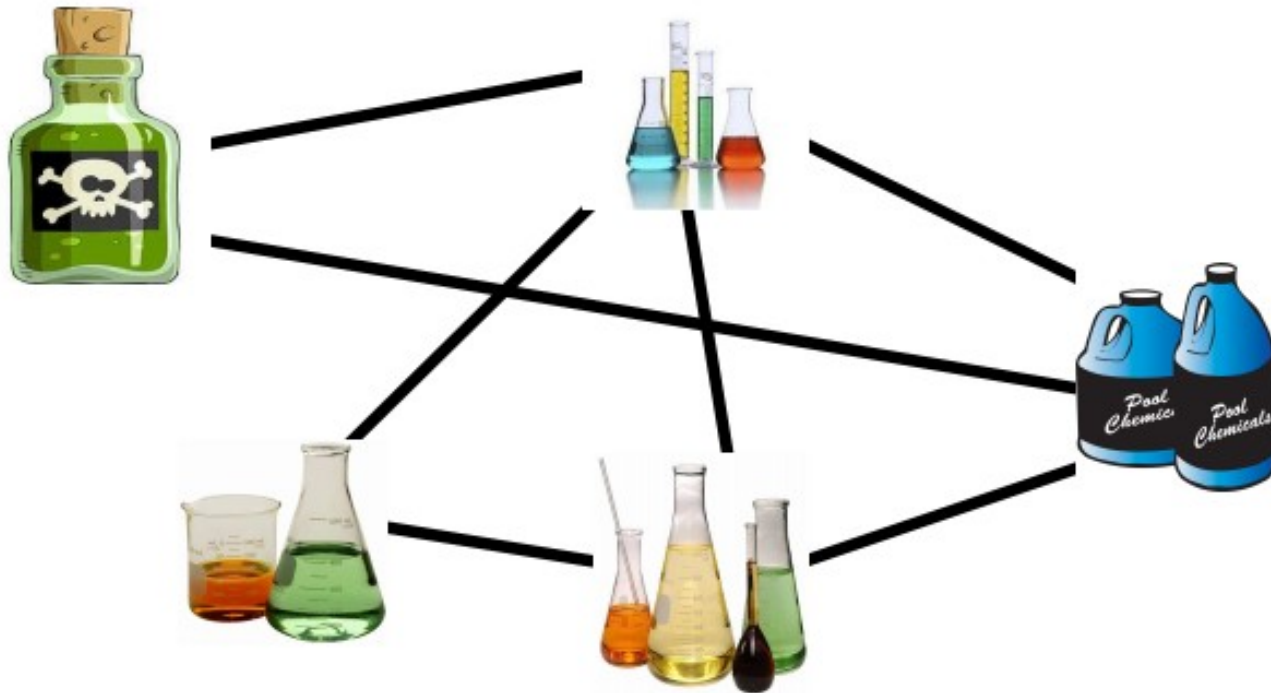
	10	20	30	40	50
N	0,00001s	0,00002s	0,00003s	0,00004s	0,00005s
N ²	0,0001s	0,0004s	0,0009s	0,0016s	0,0036s
N ³	0,001s	0,008s	0,027s	0,064s	0,125s
2 ^N	0,001s	1,0s	17,19min	12,7 dias	35,7 anos
3 ^N	0,059s	58min	6,5anos	3,855 séculos	200.000.000 séculos
2 ^N ≤ N!	-	-	-	-	-

- 10 → 3628800
- 20 → 2432902008176640000
- 25 → 15511210043330985984000000

Obs: usando um computador capaz de realizar 1 milhão de operações aritméticas básicas por segundo.

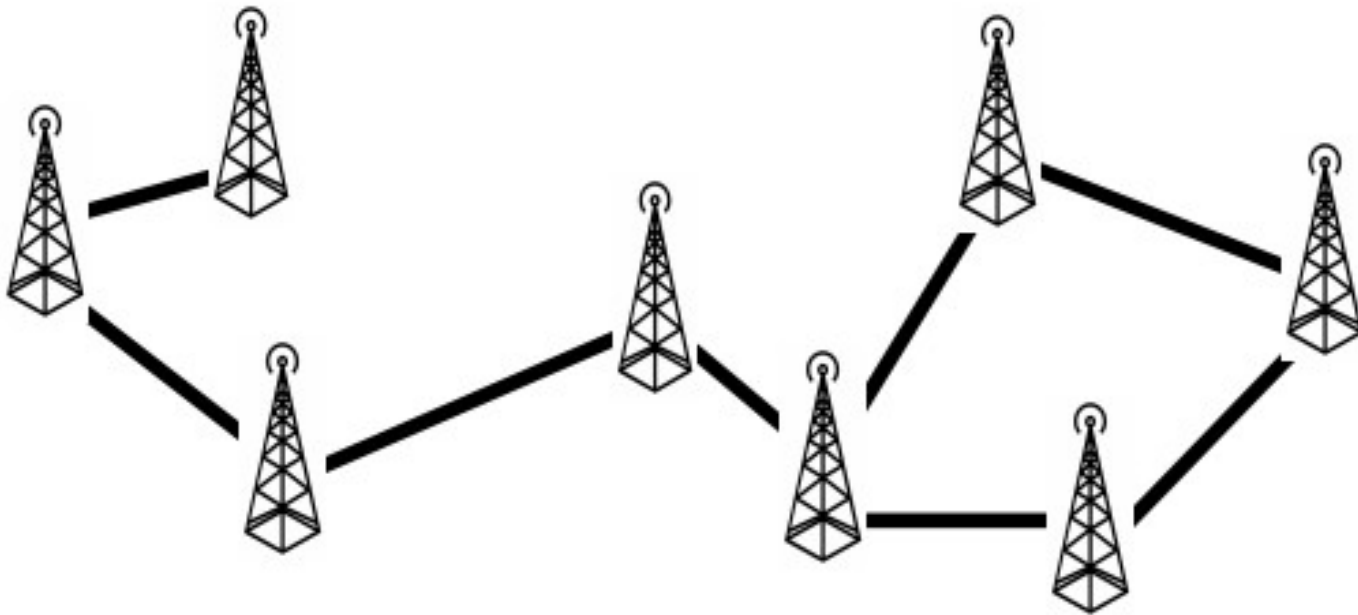
Aplicações da Coloração de Vértices

- Separação de Produtos explosivos



Aplicações da Coloração de Vértices

- **Atribuição de Frequência de Rádio**



Aplicações da Coloração de Vértices

- Sudoku

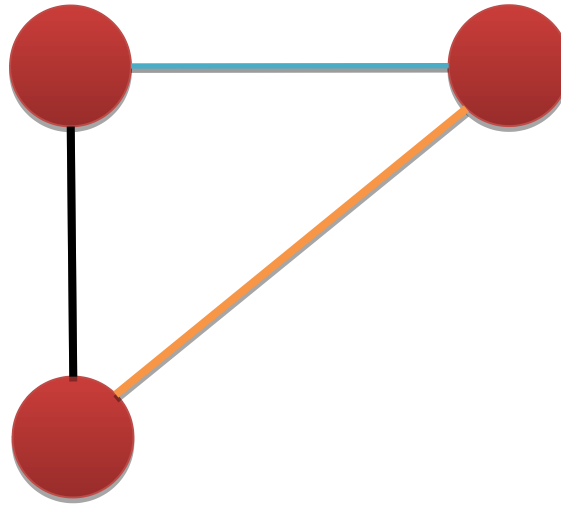
	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	



9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

Coloração de Arestas

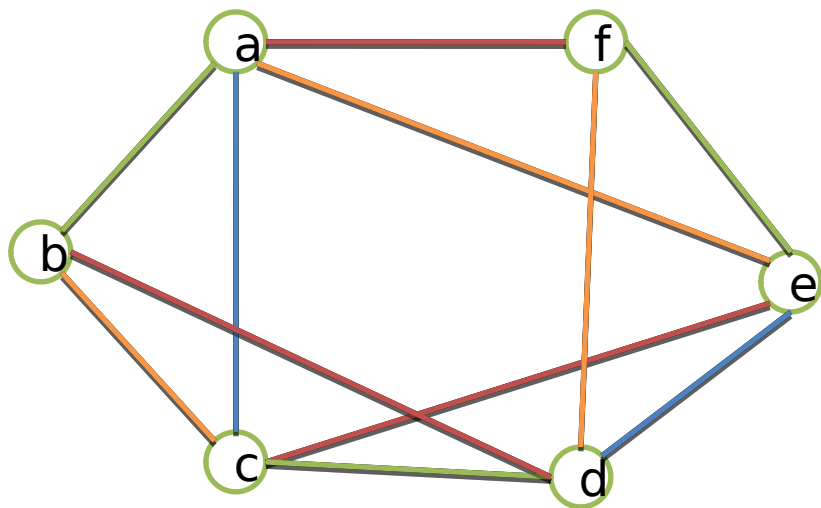
- **Índice Cromático: $\chi'(G)$**
 - **Menor** número de cores necessárias para colorir todas as arestas do grafo, tal que, arestas adjacentes devem possuir cores diferentes



- **Teorema(Vizing 1964):**
Para qualquer grafo G , $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Coloração de Arestas

- Suponhamos a seguinte situação:
- “Um grupo de estudantes de mestrado deve dividir-se em duplas para realizar atividades de pesquisa. O mesmo estudante deve cumprir atividades com mais de uma dupla. Se cada atividade de pesquisa necessita de um mês até sua conclusão, qual o número mínimo de meses para que todas sejam realizadas de modo que nenhuma delas ocorra simultaneamente?”





UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 05: Coloração de Vértices & Arestas

Professor Pablo Soares
2022.1

***“Quem não luta pelo futuro que quer,
tem que aceitar o futuro que vier”***