Mas $y = log_2\, x$, então:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}.$$

2º) Resolver a equação $\dfrac{2 + log_3\, x}{log_3\, x} + \dfrac{log_3\, x}{1 + log_3\, x} = 2.$

Solução

Fazendo $log_3\, x = y$, temos:

$$\frac{2 + y}{y} + \frac{y}{1 + y} = 2 \Rightarrow (2 + y)(1 + y) + y^2 = 2y(1 + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 3y + 2 = 2y^2 + 2y \Rightarrow y = -2.$$

Mas $y = log_3\, x$, então: $log_3\, x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

$$S = \left\{\frac{1}{9}\right\}.$$

EXERCÍCIOS

238. Resolva as equações:

a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5)$
b) $\log_3 (5x - 6) = \log_3 (3x - 5)$
c) $\log_2 (5x^2 - 14x + 1) = \log_2 (4x^2 - 4x - 20)$
d) $\log_{\frac{1}{3}} (3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 5x + 3)$
e) $\log_4 (4x^2 + 13x + 2) = \log_4 (2x + 5)$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (5x^2 - 3x - 11) = \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 2x - 8)$

239. Resolva as equações:

a) $\log_5 (4x - 3) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = 0$

c) $\log_{\sqrt{2}} (3x^2 + 7x + 3) = 0$

d) $\log_4 (2x^2 + 5x + 4) = 2$

e) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2$

f) $\log_3 (x - 1)^2 = 2$

g) $\log_4 (x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}$

240. Aumentando um número x em *16* unidades, seu logaritmo na base *3* aumenta em 2 unidades. Determine x.

241. Determine o valor de x para que $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = \frac{5}{3}$.

242. Resolva as equações:

a) $\log_3 (\log_2 x) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \{\log_3 [\log_2 (3x - 1)]\} = 0$

d) $\log_2 [1 + \log_3 (1 + \log_4 x)] = 0$

e) $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2$

f) $\log_3 [1 + 2 \cdot \log_2 (3 - \log_4 x^2)] = 1$

g) $\log_2 \{2 + 3 \cdot \log_3 [1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1)]\} = 3$

243. Resolva a equação: $\log_3 [\log_2 (3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2$.

244. Resolva as equações:

a) $x^{\log_x (x+3)} = 7$

b) $x^{\log_x (x-5)^2} = 9$

c) $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$

d) $(\sqrt[3]{x})^{\log_x (x^2+2)} = 2 \cdot \log_3 \sqrt{27}$

245. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 \\ \log_2 y = \sqrt{x} \end{cases}$$

246. Resolva as equações:

a) $\log_4^2 x - 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

b) $6 \cdot \log_2^2 x - 7 \cdot \log_2 x + 2 = 0$

c) $\log x (\log x - 1) = 6$

d) $\log_2 x(2 \cdot \log_2 x - 3) = 2$

e) $2 \cdot \log_4^2 x + 2 = 5 \cdot \log_4 x$

f) $\log^3 x = 4 \cdot \log x$

247. Determine a solução real da equação $\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} = 2$.

Sugestão: $\frac{1}{x} = 2y$.

248. Resolva as equações:

a) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$

b) $\frac{3 + \log_2 x}{\log_2 x} + \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} + \frac{\log_3 x + 2}{\log_3 x + 3} = \frac{5}{4}$

d) $\frac{1 - \log x}{2 + \log x} - \frac{1 + \log x}{2 - \log x} = 2$

e) $\frac{1 - \log_2 x}{2 - \log_2 x} - \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{4 - \log_2 x}{5 - \log_2 x} - \frac{5 - \log_2 x}{6 - \log_2 x}$

249. Resolva a equação $log_x (2x + 3) = 2$.

Solução

$$\log_x (2x + 3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 & \text{(I)} \\ \quad e & \\ 2x + 3 = x^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos:

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$.

Somente $x = 3$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{3\}$.

250. Resolva as equações:

a) $\log_x (3x^2 - 13x + 15) = 2$

b) $\log_x (4 - 3x) = 2$

c) $\log_{(x-2)} (2x^2 - 11x + 16) = 2$

d) $\log_{\sqrt{x}} (2x^2 + 5x + 6) = 4$

e) $\log_{(x-1)} (x^3 - x^2 + x - 3) = 3$

f) $\log_{(x+2)} (x^3 + 7x^2 + 8x + 11) = 3$

g) $\log_{(2-x)} (2x^3 - x^2 - 18x + 8) = 3$

251. Resolva a equação $log_{(x+1)} (x^2 + x + 6) = 3$.

252. Resolva a equação $log_{(x+3)} (5x^2 - 7x - 9) = log_{(x+3)} (x^2 - 2x - 3)$.

Solução

$\log_{(x+3)} (5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)} (x^2 - 2x - 3) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 < x + 3 \neq 1 \\ \quad\text{e} \\ 5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{3}{4}$;

$x = 2$ não é solução, pois, fazendo $x = 2$ em $x^2 - 2x - 3$, encontramos $2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3 < 0$.

é solução, pois, fazendo $x = -\frac{3}{4}$ em $x^2 - 2x - 3$ e em $x + 3$,

encontramos, respectivamente:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 3 = -\frac{15}{16} < 0$$

$S = \emptyset$

253. Resolva as equações:

a) $\log_x (4x - 3) = \log_x (2x + 1)$
b) $\log_x (5x + 2) = \log_x (3x + 4)$
c) $\log_{(x+1)} (3x + 14) = \log_{(x+1)} (2 - x)$
d) $\log_{(x+5)} (3x^2 - 5x - 8) = \log_{(x+5)} (2x^2 - 3x)$
e) $\log_{(2x-4)} (5x^2 - 15x + 7) = \log_{(2x-4)} (x^2 - 3x + 2)$
f) $\log_{(x+2)} (3x^2 - 8x - 2) = \log_{(x+2)} (2x^2 - 5x + 2)$

254. Resolva as equações:

a) $\log_x^2 (5x - 6) - 3 \cdot \log_x (5x - 6) + 2 = 0$
b) $\log_x^2 (x + 1) = 2 + \log_x (x + 1)$
c) $2 \cdot \log_{(3x-2)}^2 (4 - x) - 5 \cdot \log_{(3x-2)} (4 - x) + 2 = 0$

255. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$ b) $\log_3 (2x - 1)^2 - \log_3 (x - 1)^2 = 2$

Solução

a) Antes de aplicarmos qualquer propriedade operatória, devemos estabelecer as condições de existência para os logaritmos.

Assim sendo, devemos ter:

$$\left.\begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ \quad\text{e} \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x > 1 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a equação proposta para $x > 1$, temos:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3 \Rightarrow \log_2 [(x + 1)(x - 1)] = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$.

Somente $x = 3$ é solução, pois satisfaz a condição (I).

$S = \{3\}$.

b) Estabelecendo a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left.\begin{array}{c} (2x - 1)^2 > 0 \\ \text{e} \\ (x - 1)^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a equação proposta para $x \neq \frac{1}{2}$ e $x \neq 1$, temos:

$$\log_3 (2x - 1)^2 - \log_3 (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow \log_3 \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 3^2 \Rightarrow \left|\frac{2x - 1}{x - 1}\right| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{x - 1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow x = 2 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ou} \\ \dfrac{2x - 1}{x - 1} = -3 \Rightarrow 2x - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem a condição (I).

$S = \left\{2, \frac{4}{5}\right\}$.

256. Determine as raízes da equação

$$\log\left(x + \frac{1}{3}\right) + \log\left(x - \frac{1}{3}\right) = \log \frac{24}{9}.$$

257. Determine a solução real da equação $log\ 2^x + log\ (1 + 2^x) = log\ 6$.

258. Determine a raiz real da equação $x + log\ (1 + 2^x) = xlog\ 5 + log\ 6$.

259. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x + 3) = 4$
b) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 2) = 2$
c) $\log x + \log (x - 21) = 2$
d) $\log_2 (5x - 2) - \log_2 x - \log_2 (x - 1) = 2$
e) $\log_3 (5x + 4) - \log_3 x - \log_3 (x - 2) = 1$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3)^2 = -4$
g) $\log_{36} (x + 2)^2 + \log_{36} (x - 3)^2 = 1$

260. Resolva a equação $(0,4)^{log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - log\ x^3}$.

261. Resolva a equação $log_2\ (9^{x-1} + 7) - log_2\ (3^{x-1} + 1) = 2$.

262. Resolva as equações:

a) $\dfrac{\log_3 (2x)}{\log_3 (4x - 15)} = 2$

b) $\dfrac{\log_2 (35 - x^3)}{\log_2 (5 - x)} = 3$

c) $\dfrac{\log (\sqrt{x + 1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x - 40}} = 3$

263. Resolva a equação $\dfrac{1}{2}\ log_3\ (x - 16) - log_3\ (\sqrt{x} - 4) = 1$.

264. Resolva a equação $log_3\ (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2 \cdot log_3\ (2^{x+2} - 3)$.

265. Resolva a equação $log_2\ (x - 2) + log_2\ (3x - 2) = log_2\ 7$.

Solução

Vamos estabelecer, inicialmente, a condição de existência dos logaritmos, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a equação, temos:

$\log_2 (x-2) + \log_2 (3x-2) = \log_2 7 \Rightarrow \log_2 [(x-2)(3x-2)] = \log_2 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(3x-2) = 7 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$

Somente $x = 3$ é solução, pois satisfaz a condição (I).
$S = \{3\}$.

266. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x + 4) + \log_2 (x - 3) = \log_2 18$
b) $\log_5 (1 - x) + \log_5 (2 - x) = \log_5 (8 - 2x)$
c) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3)$
d) $\log (2x + 1) + \log (4x - 3) = \log (2x^2 - x - 2)$
e) $\log_2 (4 - 3x) - \log_2 (2x - 1) = \log_2 (3 - x) - \log_2 (x + 1)$
f) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1)$
g) $\log (2x^2 + 4x - 4) + \operatorname{colog} (x + 1) = \log 4$

267. Resolva a equação $2 \cdot \log (\log x) = \log (7 - 2 \cdot \log x) - \log 5$.

268. Resolva a equação $\log \sqrt{7x + 5} + \dfrac{1}{2} \log (2x + 7) = 1 + \log \dfrac{9}{2}$.

269. Resolva as equações:

a) $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

b) $\log^{-1} x = 2 + \log x^{-1}$

c) $\log_8 x^3 = 5 + \dfrac{12}{\log_8 x}$

270. Resolva a equação $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$.

271. Resolva as equações:

a) $\log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0$
b) $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$
c) $\dfrac{\log_8 \left(\dfrac{8}{x^2}\right)}{\log_8^2 x} = 3$

272. Resolva a equação $x^2 + x \cdot \log 5 - \log 2 = 0$.

273. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$

Solução

Aplicando a propriedade dos logaritmos na segunda equação, temos:

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \Rightarrow \log_2 (xy) = \log_2 12 \Rightarrow xy = 12.$

O sistema proposto fica então reduzido às equações

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

cujas soluções são $x = 3$ e $y = 4$ ou $x = 4$ e $y = 3$.

$S = \{(3,4), (4,3)\}$.

274. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^{x-y} = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 2 \cdot \log 2 + \log 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512 \\ \log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

275. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}} (x + y)} = 5^{\log_5 (x - y)} \\ \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

276. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x + \operatorname{colog}_3 y = 1 \end{cases}$$

Solução

Lembrando que $colog_3\, y = -log_3\, y$ e fazendo a substituição $log_3\, x = a$ e $log_3\, y = b$ no sistema proposto, temos:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$$

mas $a = log_3\, x$ e $b = log_3\, y$, então:

$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$
$\log_3 y = 1 \Rightarrow y = 3$
$S = \{(9, 3)\}$.

277. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 0 \\ 4 \cdot \log x + 3 \cdot \log y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot \log_2 x + 3 \cdot \log_2 y = 27 \\ 5 \cdot \log_2 x - 2 \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$

278. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_2 (xy) \cdot \log_2 \left(\dfrac{x}{y}\right) = -3 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5 \end{cases}$$

279. Resolva a equação $4 \cdot x^{log_2 x} = x^3$.

Solução

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros, temos:

$4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3 \Rightarrow \log_2 (4 \cdot x^{\log_2 x}) = \log_2 x^3 \Rightarrow \log_2 4 +$
$+ (\log_2 x) \cdot (\log_2 x) = 3 \cdot \log_2 x \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$

Fazendo $log_2\, x = y$, temos:

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$.

Mas $y = log_2\, x$, então:

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$
$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$
$S = \{2, 4\}$.

280. Resolva as equações:

a) $9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3$

b) $x^{\log x} = 100 \cdot x$

c) $16^{\log_x 2} = 8x$

d) $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x$

e) $3^{2 \cdot \log_x 3} = x^{\log_x 3x}$

281. Resolva a equação $2^{\log_x (x^2 - 6x + 9)} = 3^{2 \cdot \log_x \sqrt{x - 1}}$.

282. Resolva as equações:

a) $\log (x^{\log x}) = 1$

b) $x^{\log x - 1} = 100$

c) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

283. Resolva as equações:

a) $x^{3 \cdot \log^2 x - \frac{2}{3} \cdot \log x} = 100 \sqrt[3]{10}$

b) $x^{\log_3^3 x - \log_3 x^3} = 3^{-3 \cdot \log_{2\sqrt{2}} 4 + 8}$

c) $x^{\log^2 x - 3 \cdot \log x + 1} = 1\,000$

284. Resolva a equação $\log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$.

285. Resolva a equação $3 + \log_x \left(\dfrac{x^{4x-6} + 1}{2} \right) = 2x$.

286. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \cdot y = 32 \\ x^{\log_2 y} = 64 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

287. Resolva a equação $\log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) + \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1)$.

Solução

Estabelecendo inicialmente a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x^2 - x + 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando as propriedades e transformando os logaritmos à base *2*, temos:

$$\log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) + \log_{2^{-1}} (2x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) - \log_2 (2x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow x - 2 = \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$S = \{4\}$.

288. Resolva as equações:

a) $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

b) $\log_2 (x + 2) + \log_{\frac{1}{2}} (5 - x) + \text{colog}_{\frac{1}{2}} (x - 1) = \log_2 (8 - x)$

c) $\log_3 (x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 1) = \log_3 (x - 4)$

289. Resolva a equação $\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4$.

Solução

$\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4 \Rightarrow \log_2^2 x - 9 \cdot \log_{2^3} x - 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x - 4 = 0.$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos:

$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -1$ mas $y = \log_2 x$, então:

$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$

$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{16, \dfrac{1}{2}\right\}.$

290. Resolva as equações:

a) $\log_3^2 x - 5 \cdot \log_9 x + 1 = 0$
b) $\log_2^2 x - \log_8 x^8 = 1$
c) $\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2$

291. Resolva as equações:

a) $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2$

b) $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \log_4 x - 2} = 4$

292. Resolva a equação:

$$\frac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1$$

293. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (y - x) + \log_2 \dfrac{1}{y} = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_9 (x^2 + 1) - \log_3 (y - 2) = 0 \\ \log_2 (x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_9 (x^2 + 2) + \log_{81} (y^2 + 9) = 2 \\ 2 \cdot \log_4 (x + y) - \log_2 (x - y) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 (\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} (\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases}$

294. Resolva a equação $log_2\, x + log_x\, 2 = 2$.

Solução

Lembrando que $log_x\, 2 = \dfrac{1}{log_2\, x}$, temos: $log_2\, x + \dfrac{1}{log_2\, x} = 2$.

Fazendo $log_2\, x = y$, vem:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 1$$

mas $y = log_2\, x$, então $log_2\, x = 1 \Rightarrow x = 2$.
$S = \{2\}$.

295. Determine o conjunto solução da equação
$\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) = 1,\ x > 3$.

296. Sejam a e b dois números reais, $a > 0$ e $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer a e b para que a equação $x^2 - x\,(log_b\, a) + 2\, log_a\, b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais?

297. Determine o valor de x, sabendo que $log_2\, x = log_{\sqrt{x}}\, x^2 + log_x\, 2$.

298. Determine o valor de x, sabendo que $log_{a^2}\, x + log_{x^2}\, a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \neq 1$.

299. Resolva a equação $log_x\, (x + 1) = log_{(x+1)}\, x$, em que x é um número real.

300. Resolva as equações:

a) $\log_2 x = \log_x 2$

b) $\log_3 x = 1 + \log_x 9$

c) $\log_2 x - 8 \cdot \log_{x^2} 2 = 3$

d) $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot \log_4 x^2 + 9 = 0$

301. Resolva as equações:

a) $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$

b) $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$

302. Resolva a equação $1 + 2 \cdot \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.

303. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \\ xy = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot (2 \cdot \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$

304. Resolva a equação $\dfrac{1}{\log_6 (x + 3)} + \dfrac{2 \cdot \log_{0,25} (4 - x)}{\log_2 (3 + x)} = 1$.

305. Resolva a equação $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

Solução

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \dfrac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \dfrac{x}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{16} = \log_2 \frac{x}{64} \Rightarrow \log_2 x \cdot (\log_2 x - 4) = \log_2 x - 6$$

Fazendo $\log_2 x = y$, vem:

$y(y - 4) = y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = 3$

mas $y = \log_2 x$, então:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$

$S = \{4, 8\}$.

306. Resolva as equações:

a) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$

b) $\log_{3x} \left(\dfrac{3}{x}\right) + \log_3 27x^2 = 5$

c) $\dfrac{1}{\log_x 8} + \dfrac{1}{\log_{2x} 8} + \dfrac{1}{\log_{4x} 8} = 2$

d) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0$

307. Resolva a equação

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x^2 - 3x + 2) = -2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x - 3).$$

308. Resolva a equação

$$x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 (2x) - 2} + (x + 2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3$$

309. Resolva as equações, sabendo que $0 < a \neq 1$:

a) $\log_a (ax) \cdot \log_x (ax) = \log_{a^2} \dfrac{1}{a}$

b) $2 \cdot \log_x a + \log_{ax} a + 3 \cdot \log_{a^2x} a = 0$

c) $\log_x (ax) \cdot \log_a x = 1 + \log_x \sqrt{a}$

d) $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$

310. Resolva a equação, sabendo que a e b são reais positivos e diferentes de 1:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \log_a x$$

311. Resolva a equação $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$.

312. Resolva a equação, sabendo que $0 < a \neq 1$: $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10}$.

313. Resolva a equação:

$$1 + \frac{\log (a - x)}{\log (x + b)} = \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)} (x + b)}$$

sabendo que $a > b > 0$ e $a - b \neq 1$.

314. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^3 = 96 \\ \log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y}\,(1 - \log_x 2) \\ \log_{y^3} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1 \end{cases}$

315. Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1. \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

316. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

317. Sendo *a* e *b* reais positivos e diferentes de *1*, resolva o sistema:

$\begin{cases} a^x \cdot b^y = ab \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$

318. Resolva o sistema de equações:

$\begin{cases} \log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \cdot \log_3 x \end{cases}$

319. Resolva os sistemas de equações para $x > 0$ e $y > 0$:

a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6 y^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^y = y^x \\ 2^x = 3^y \end{cases}$

320. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1\,024 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$