Lógica e Conjuntos

Anderson Feitoza Leitão Maia

MATEMÁTICA BÁSICA
Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará

01 de Junho de 2021

Apresentação

Lógica Matemática

Teoria de Conjuntos

Lógica Matemática

Lógica Matemática

Relação de Implicação.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p implica q quando na tabela de p e q não ocorrem VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos p simultaneamente verdadeiro e q falsa. (Notação: $p \Rightarrow q$)

Lógica Matemática

Relação de Implicação.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p implica q quando na tabela de p e q não ocorrem VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos p simultaneamente verdadeiro e q falsa. (Notação: $p \Rightarrow q$)

Observações

1ª) Notemos que p implica q quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema é uma implicação da forma

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}$$

Lógica Matemática

Relação de Implicação.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p implica q quando na tabela de p e q não ocorrem VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos p simultaneamente verdadeiro e q falsa. (Notação: $p \Rightarrow q$)

Observações

1ª) Notemos que p implica q quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.
2ª) Todo teorema é uma implicação da forma

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}$$

Exemplo

1º) $2|4 \Rightarrow 2|4 \cdot 5$
significa dizer que o condicional "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de $4 \cdot 5$" é verdadeiro.

Lógica Matemática

Relação de Equivalência.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p é equivalente a q quando p e q tem tabelas verdades iguais, isto é, quando p e q tem o mesmo valor lógico. (Notação: $p \Leftrightarrow q$)

Lógica Matemática

Relação de Equivalência.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p é equivalente a q quando p e q tem tabelas verdades iguais, isto é, quando p e q tem o mesmo valor lógico. (Notação: $p \Leftrightarrow q$)

Observações

1ª) Notemos que p equivale a q quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência.

$$\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$$

Lógica Matemática

Relação de Equivalência.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p é equivalente a q quando p e q tem tabelas verdades iguais, isto é, quando p e q tem o mesmo valor lógico. (Notação: $p \Leftrightarrow q$)

Observações

1ª) Notemos que p equivale a q quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência.

$$\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

Relação de Equivalência.

Definição

Dadas proposições p e q dizemos que p é equivalente a q quando p e q tem tabelas verdades iguais, isto é, quando p e q tem o mesmo valor lógico. (Notação: $p \Leftrightarrow q$)

Observações

1ª) Notemos que p equivale a q quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência.

$$\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$$

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Lógica Matemática

7. Verifique, por meio das tabelas-verdades, a validade das equivalências abaixo.

a) da conjunção

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

$p \wedge v \Leftrightarrow p$

$p \wedge f \Leftrightarrow f$

b) da disjunção

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$p \vee p \Leftrightarrow p$

$p \vee v \Leftrightarrow v$

$p \vee f \Leftrightarrow p$

c) da conjunção relativamente à disjunção

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

d) da negação

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

em que *p*, *q*, *r* são proposições quaisquer, *v* é uma tautologia e *f* uma proposição logicamente falsa.

Lógica Matemática

Senteças Abertas e Quantificadores

Definição

Orações que contem variaveis são chamadas funções proporcionais ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado as variaveis.

Lógica Matemática

Senteças Abertas e Quantificadores

Definição

Orações que contem variaveis são chamadas funções proporcionais ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado as variaveis.

Exemplos.

a) $x + 1 = 7$
b) $x > 2$
c) $x^3 = 2x^2$

Lógica Matemática

Senteças Abertas e Quantificadores

Definição

Orações que contem variaveis são chamadas funções proporcionais ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado as variaveis.

Exemplos.

a) $x + 1 = 7$
b) $x > 2$
c) $x^3 = 2x^2$

Tranformar Sentenças Abertas em Quantificadores

(1) atribuir valor as variaveis.
(2) utilizar quantificadores.

Lógica Matemática

O Quantificador Universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo simbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", " para todo", "para cada".

Lógica Matemática

O Quantificador Universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo simbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", " para todo", "para cada".

Exemplos.

1º) $(\forall x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$". **(Falsa)**

2º) $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"para todo número x, $x^3 = 2x^2$". **(Falsa)**

3º) $(\forall a)\ ((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$, que se lê:
"qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$". **(Verdadeira)**

Lógica Matemática

O Quantificador Universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo simbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", " para todo", "para cada".

Exemplos.

1º) $(\forall x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$". **(Falsa)**

2º) $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"para todo número x, $x^3 = 2x^2$". **(Falsa)**

3º) $(\forall a)((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$, que se lê:
"qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$". **(Verdadeira)**

O Quantificador Existencial

O quantificador existencial é indicado pelo simbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

Lógica Matemática

Exemplos.

1º) $(\exists\, x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x + 1 = 7$". (Verdadeira)

2º) $(\exists\, x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$". (Verdadeira)

3º) $(\exists\, a)(a^2 + 1 \leqslant 0)$, que se lê:
"existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo". (Falsa)

Lógica Matemática

Exemplos.

1º) $(\exists\, x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x + 1 = 7$". (Verdadeira)

2º) $(\exists\, x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$". (Verdadeira)

3º) $(\exists\, a)(a^2 + 1 \leqslant 0)$, que se lê:
"existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo". (Falsa)

Obs. Outro quantificador: $\exists|$ que se lê: existe um úniico" , " existe um e um só" , " existe só um" .

1º) $(\exists | x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"existe um só número x tal que $x + 1 = 7$". (Verdadeira)

2º) $(\exists | x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$". (Falsa)

Lógica Matemática

Negação de Conjunção

Tendo em vista que $(\sim)(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Lógica Matemática

Negação de Conjunção

Tendo em vista que $(\sim)(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo.

1º) p: $a \neq 0$

q: $b \neq 0$

$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

$\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

Lógica Matemática

Negação de Conjunção

Tendo em vista que $(\sim)(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo.

1º) p: $a \neq 0$
q: $b \neq 0$
$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$
$\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

Negação de Disjunção

Tendo em vista que $(\sim)(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Lógica Matemática

Exemplo.

1º) p: o triângulo ABC é isósceles
q: o triângulo ABC é equilátero
p $\vee$ q: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero
$\sim$(p $\vee$ q): o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

Lógica Matemática

Exemplo.

1º) p: o triângulo ABC é isósceles
q: o triângulo ABC é equilátero
p ∨ q: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero
∼(p ∨ q): o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

Negação de um condicional simples

Tendo em vista que $(\sim)(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Lógica Matemática

Exemplo.

1º) p: o triângulo ABC é isósceles
q: o triângulo ABC é equilátero
p $\vee$ q: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero
$\sim$(p $\vee$ q): o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

Negação de um condicional simples

Tendo em vista que $(\sim)(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \to q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

1º) p: $2 \in \mathbb{Z}$
q: $2 \in \mathbb{Q}$
$p \to q$: $2 \in \mathbb{Z} \to 2 \in \mathbb{Q}$
$\sim(p \to q)$: $2 \in \mathbb{Z}$ e $2 \notin \mathbb{Q}$

Lógica Matemática

Negação do Quantificador Universal

Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall)(P(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists)(\sim p(x))$.

Lógica Matemática

Negação do Quantificador Universal

Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall)(P(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists)(\sim p(x))$.

Exemplo.

1º) sentença: $(\forall x)\ (x + 3 = 5)$
negação: $(\exists x)\ (x + 3 \neq 5)$

2º) sentença: $(\forall x)\ (x(x + 1) = x^2 + x)$
negação: $(\exists x)\ (x(x + 1) \neq x^2 + x)$

3º) sentença: $(\forall x)\ (\sqrt{x^2 + 1} = x + 1)$
negação: $(\exists x)\ (\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1)$

4º) sentença: Todo losango é um quadrado.
negação: Existe um losango que não é quadrado.

Lógica Matemática

Negação do Quantificador Existencial

Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists)(P(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall)(\sim p(x))$.

Lógica Matemática

Negação do Quantificador Existencial

Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists)(P(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall)(\sim p(x))$.

Exemplo.

1º) sentença: $(\exists x)\,(x = x)$
negação: $(\forall x)\,(x \neq x)$

2º) sentença: $(\exists a)\left(a + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}\right)$
negação: $(\forall a)\left(a + \frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$

3º) sentença: $(\exists a)\left(\frac{1}{a} \in \mathbb{R}\right)$
negação: $(\forall a)\left(\frac{1}{a} \notin \mathbb{R}\right)$

Teoria de Conjuntos

Teoria de Conjuntos

Conjunto - Elemento - Pertinência

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição.

(a) Conjunto.

(b) Elemento.

(c) Pertinência entre elemento e conjunto.

Teoria de Conjuntos

Conjunto - Elemento - Pertinência

Na teoria dos conjuntos tres noções são aceitas sem definição.
(a) Conjunto.
(b) Elemento.
(c) Pertinência entre elemento e conjunto.

Obs. A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: eo mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema.

Teoria de Conjuntos

Conjunto - Elemento - Pertinência

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição.
(a) Conjunto.
(b) Elemento.
(c) Pertinência entre elemento e conjunto.

Obs. A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: e o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema.

Exemplos.

1) conjunto das vogais
2) conjunto dos algarismos romanos
3) conjunto dos números ímpares positivos
4) conjunto dos planetas do sistema solar

Teoria de Conjuntos

Elemento

Cada membro ou objeto que entra na formarção do conjunto é chamado elemento.

Teoria de Conjuntos

Elemento

Cada membro ou objeto que entra na formarção do conjunto é chamado elemento.

Exemplo.

1) a, e, i, o, u
2) I, V, X, L, C, D, M
3) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
4) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, ...

Teoria de Conjuntos

Elemento

Cada membro ou objeto que entra na formarção do conjunto é chamado elemento.

Exemplo.

1) a, e, i, o, u
2) I, V, X, L, C, D, M
3) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
4) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, ...

Pertinência

Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos:

$$x \in A.$$

Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

Teoria de Conjuntos

Diagrama de Venn

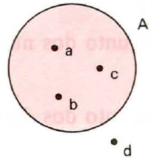
Quando usamos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado diagrama de Euler-Venn.

Teoria de Conjuntos

Diagrama de Venn

Quando usamos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado diagrama de Euler-Venn.

Exemplo.

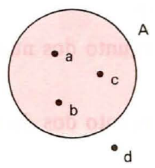


Teoria de Conjuntos

Diagrama de Venn

Quando usamos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado diagrama de Euler-Venn.

Exemplo.



Na representação acima temos:

$$a \in A, \quad b \in A \quad \text{e} \quad d \notin A.$$

Teoria de Conjuntos

Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Teoria de Conjuntos

Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplo.

1º) conjunto das vogais $\{a, e, i, o, u\}$

2º) conjunto dos algarismos romanos $\{I, V, X, L, C, D, M\}$

3º) conjunto dos nomes de meses de *31* dias

{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}

Teoria de Conjuntos

Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplo.

1º) conjunto das vogais {a, e, i, o, u}
2º) conjunto dos algarismos romanos {I, V, X, L, C, D, M}
3º) conjunto dos nomes de meses de *31* dias
{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}

Obs. Quando o conjunto é infinito ou quando o conjunto é finito com grande número de elementos:

1º) conjunto dos números ímpares positivos
{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}
2º) conjunto dos divisores positivos de *100*
{1, 2, 5, 10, ..., 100}

Teoria de Conjuntos

Descrição por uma propriedade

Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos:

$$A = \{x | x \text{ tem a propriedade } P\}$$

e lemos: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Teoria de Conjuntos

Descrição por uma propriedade

Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos:

$$A = \{x | x \text{ tem a propriedade } P\}$$

e lemos: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Exemplo.

1º) $\{x | x$ é Estado da região Sul do Brasil$\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$\{$Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul$\}$

2º) $\{x | x$ é divisor inteiro de $3\}$ é uma maneira de indicar o conjunto: $\{1, -1, 3, -3\}$

3º) $\{x | x$ é inteiro e $0 \leqslant x \leqslant 500\}$ pode também ser indicado por: $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 500\}$

Teoria de Conjuntos

Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Teoria de Conjuntos

Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplo.

1º) conjunto dos divisores de *1*, inteiros e positivos: $\{1\}$
2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

Teoria de Conjuntos

Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplo.

1º) conjunto dos divisores de *1*, inteiros e positivos: $\{1\}$
2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

Conjunto Vazio

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento algum.
O simbolo usual para o conjunto vazio é $\emptyset$.

Teoria de Conjuntos

Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplo.

1º) conjunto dos divisores de *1*, inteiros e positivos: $\{1\}$
2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

Conjunto Vazio

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento algum.
O simbolo usual para o conjunto vazio é $\emptyset$.

1º) $\{x \mid x \neq x\} = \varnothing$
2º) $\{x \mid x$ é ímpar e múltiplo de $2\} = \varnothing$
3º) $\{x \mid x > 0 \text{ e } x < 0\} = \varnothing$

Teoria de Conjuntos

Conjunto Universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria. Notação: U.

Teoria de Conjuntos

Conjunto Universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria. Notação: U.

Exemplos.
(1) As soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).
(2) Na geometria o universo pode ser o conjunto de todos os pontos do plano ou do espaço.

Teoria de Conjuntos

Conjunto Universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria. Notação: U.

Exemplos.
(1) As soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).
(2) Na geometria o universo pode ser o conjunto de todos os pontos do plano ou do espaço.

Conjuntos Iguais

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

Teoria de Conjuntos

Conjunto Universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria. Notação: U

Exemplos.
(1) As soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).
(2) Na geometria o universo pode ser o conjunto de todos os pontos do plano ou do espaço.

Conjuntos Iguais

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

$$\boxed{A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)}$$

Teoria de Conjuntos

Exemplos.

1º) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$
2º) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \{x \mid x$ é inteiro, positivo e ímpar$\}$
3º) $\{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

Thank you

Thank you for your attention!