75. *Corolário*

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, valem as relações:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} \\ \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \\ 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \\ \text{sen}^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} \end{array}}$$

Demonstração

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}} = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \text{cossec}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

$$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \cdot \text{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$$

EXERCÍCIOS

91. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as demais funções circulares de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \implies \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

92. Sabendo que *cossec* $x = -\frac{25}{24}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções circulares de x.

93. Sabendo que *tg* $x = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções circulares de x.

Solução

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \implies \sec x < 0$, temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{-\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$\text{sen } x = \text{tg } x \cdot \cos x = \left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

94. Calcule *cos x*, sabendo que $cotg\ x = \dfrac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

95. Calcule *sec x* sabendo que $sen\ x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, com $a > b > 0$.

96. Sabendo que $sec\ x = 3$, calcule o valor da expressão $y = sen^2\ x + 2 \cdot tg^2\ x$.

Solução

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 9 - 1 = 8$$

então

$$y = \text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{tg}^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

97. Sendo $sen\ x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor de

$$y = \frac{1}{\text{cossec } x + \text{cotg } x} + \frac{1}{\text{cossec } x - \text{cotg } x}.$$

98. Sabendo que $cotg\ x = \dfrac{24}{7}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{\text{tg } x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}.$$

Solução 1

Calculamos *tg x, cos x* e finalmente *y*:

$$\text{tg x} = \frac{1}{\text{cotg x}} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \Longrightarrow \cos x = -\frac{24}{25}$$

$$y = \frac{\text{tg x} \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)}{\left(1 - \frac{24}{25}\right)\left(1 + \frac{24}{25}\right)} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

Solução 2

Simplificamos *y* e depois calculamos o que for necessário:

$$y = \frac{\frac{\text{sen x}}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\text{sen x}}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen x}} = \text{cossec x} =$$

$$= -\sqrt{1 + \text{cotg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

99. Dado que $\cos x = \frac{2}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obtenha o valor de $y = (1 + \text{tg}^2 x)^2 + (1 - \text{tg}^2 x)^2$.

100. Calcule *sen x* e *cos x*, sabendo que $3 \cdot \cos x + \text{sen } x = -1$.

Solução

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} (1) \quad 3 \cdot \cos x + \text{sen x} = -1 \\ (2) \quad \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

De (1) vem: $\text{sen x} = -1 - 3 \cdot \cos x$ (1')

Substituindo (1') em (2), resulta:

$\cos^2 x + (-1 - 3 \cdot \cos x)^2 = 1$

isto é:

$\cos^2 x + 1 + 6 \cdot \cos x + 9 \cdot \cos^2 x = 1$

ou ainda:

$10 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \cos x = 0$ então $\cos x = 0$ ou $\cos x = -\frac{3}{5}$.

Substituindo cada uma dessas alternativas em (1'), encontramos:

$\text{sen } x = -1 - 3 \cdot 0 = -1$ ou $\text{sen } x = -1 - 3\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Assim, temos duas soluções:

1ª) $\cos x = 0$ e $\text{sen } x = -1$

ou

2ª) $\cos x = -\frac{3}{5}$ e $\text{sen } x = \frac{4}{5}$

101. Calcule *sen x* e *cos x*, sabendo que $5 \cdot \sec x - 3 \cdot tg^2 x = 1$.

102. Obtenha *tg x*, sabendo que $sen^2 x - 5 \cdot sen x \cdot cos x + cos^2 x = 3$.

103. Calcule *m* de modo a obter $sen x = 2m + 1$ e $cos x = 4m + 1$.

Solução

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, resulta:

$(2m + 1)^2 + (4m + 1)^2 = 1 \implies (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$

$\implies 20m^2 + 12m + 1 = 0 \implies m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40} =$

$= \frac{-12 \pm 8}{40} \implies m = -\frac{1}{2}$ ou $m = -\frac{1}{10}$.

104. Calcule *m* de modo a obter $tg x = m - 2$ e $cotg x = \frac{m}{3}$.

105. Determine *a* de modo a obter $cos x = \frac{1}{a + 1}$ e $cossec x = \frac{a + 1}{\sqrt{a + 2}}$.

106. Determine uma relação entre *x* e *y*, independente de *t*, sabendo que:
$x = 3 \cdot \text{sen}\ t$ e $y = 4 \cdot \cos t$.

Solução

Como $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \implies 16x^2 + 9y^2 = 144$$

107. Determine uma relação entre *x* e *y*, independente de *t*, sabendo que:
$x = 5 \cdot \text{tg}\ t$ e $y = 3 \cdot \text{cossec}\ t$.

Solução

Como $\text{cossec}^2 t = \text{cotg}^2 t + 1$ e $\text{cotg}\ t = \dfrac{1}{\text{tg}\ t}$, resulta:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1 \implies \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \implies x^2y^2 = 225 + 9x^2 \implies$$
$$\implies x^2y^2 - 9x^2 = 225.$$

108. Se $\text{sen}\ x + \cos x = a$ e $\text{sen}\ x \cdot \cos x = b$, obtenha uma relação entre *a* e *b*, independente de *x*.

109. Dado que $\text{sen}\ x \cdot \cos x = m$, calcule o valor de $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$ e $z = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Solução

Como $a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab$, temos:

$$y = (\text{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x =$$
$$= 1^2 - 2 \cdot (\text{sen}\ x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2m^2.$$

Como $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$z = (\text{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = y - (\text{sen}\ x \cdot \cos x)^2 =$$
$$= 1 - 2m^2 - m^2 = 1 - 3m^2.$$

110. Sabendo que $\text{sen}\ x + \cos x = a$ (*a* dado), calcule $y = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$.