Funções Trigonométricas

Anderson Feitoza Leitão Maia

MATEMÁTICA BÁSICA
Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará

24 de Agosto de 2021

Apresentação

Trigonometria na Circunferência

Trigonometria na Circunferência

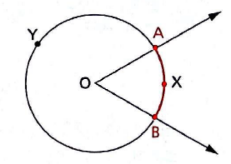
Definição

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos pertencentes aos lados do ângulo e à circunferência.

Trigonometria na Circunferência

Definição

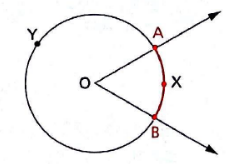
Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central AÔB, sendo A e B pontos pertencentes aos lados do ângulo e à circunferência.



Trigonometria na Circunferência

Definição

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central AÔB, sendo A e B pontos pertencentes aos lados do ângulo e à circunferência.

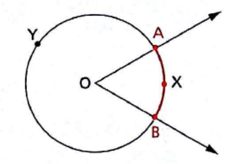


• A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência:**

Trigonometria na Circunferência

Definição

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central AÔB, sendo A e B pontos pertencentes aos lados do ângulo e à circunferência.



• A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência:**
arco de circunferência $\widehat{AXB}$;
arco de circunferência $\widehat{AYB}$;
A e B são as extremidades do arco.

Trigonometria na Circunferência

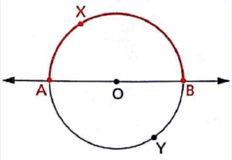
Semicircunferência

Se A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um dos quais é chamado **semicircunferência.**

Trigonometria na Circunferência

Semicircunferência

Se A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um dos quais é chamado **semicircunferência.**

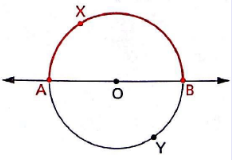


$\overset{\frown}{AXB}$ e $\overset{\frown}{AYB}$ são semicircunferências.

Trigonometria na Circunferência

Semicircunferência

Se A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um dos quais é chamado **semicircunferência.**



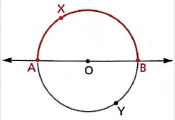
$\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$ são semicircunferências.

Arco Nulo e Uma Volta

Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado **arco nulo**) e outro é a circunferência (denominado **arco de uma volta.**)

Semicircunferência

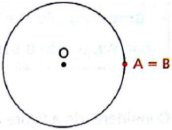
Se A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um dos quais é chamado **semicircunferência.**



$\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$ são semicircunferências.

Arco Nulo e Uma Volta

Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado **arco nulo**) e outro é a circunferência (denominado **arco de uma volta.**)

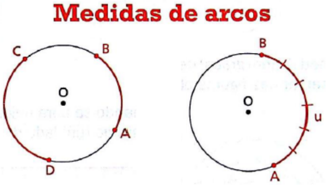


Trigonometria na Circunferência

Notação. Podemos escrever apenas $\widehat{AB}$ ao invés de $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$.

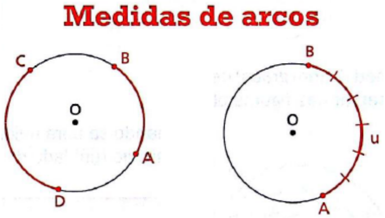
Trigonometria na Circunferência

Notação. Podemos escrever apenas $\widehat{AB}$ ao invés de $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$.



Trigonometria na Circunferência

Notação. Podemos escrever apenas $\widehat{AB}$ ao invés de $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$.

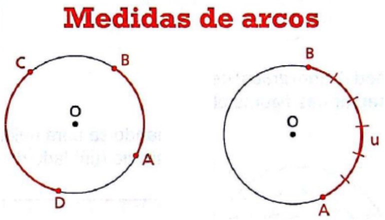


Unidades

Limitamos as unidades de arco a apenas duas: o **grau** e o **radiano.**

Trigonometria na Circunferência

Notação. Podemos escrever apenas $\widehat{AB}$ ao invés de $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$.

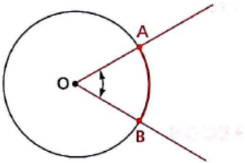


Unidades

Limitamos as unidades de arco a apenas duas: o **grau** e o **radiano.**

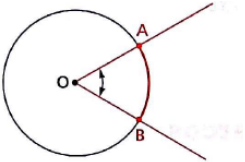
Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Trigonometria na Circunferência



AÔB ângulo central
$\overset{\frown}{AB}$ arco subtendido por AÔB

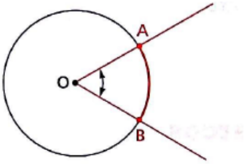
Trigonometria na Circunferência



AÔB ângulo central
$\overset{\frown}{AB}$ arco subtendido por AÔB

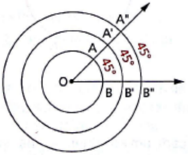
"A medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente".

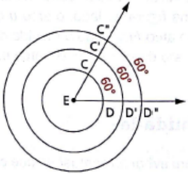
Trigonometria na Circunferência



AÔB ângulo central
$\widehat{AB}$ arco subtendido por AÔB

"A medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente".

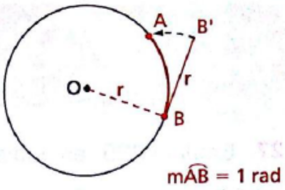




$m\widehat{AB} = m\widehat{A'B'} = m\widehat{A''B''} = 45°$ $m\widehat{CD} = m\widehat{C'D'} = m\widehat{C''D''} = 60°$

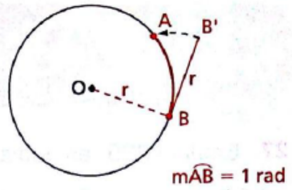
Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.

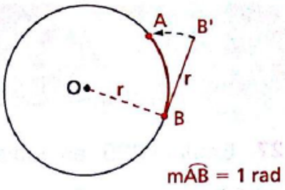


Correspondência para Conversão de Unidades.

$$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



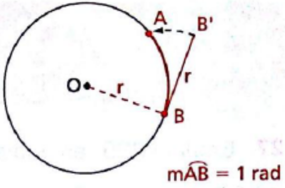
Correspondência para Conversão de Unidades.

$$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

27. Exprima 225° em radianos.

Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



Correspondência para Conversão de Unidades.

$$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

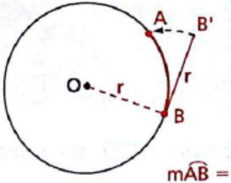
27. Exprima 225° em radianos.

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$225° \longrightarrow x$$

Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



$m\widehat{AB} = 1$ rad

Correspondência para Conversão de Unidades.

$$360^\circ \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180^\circ \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

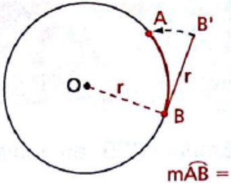
27. Exprima 225° em radianos.

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 225^\circ \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{225 \cdot \pi}{180}$$

Trigonometria na Circunferência

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



$m\widehat{AB} = 1$ rad

Correspondência para Conversão de Unidades.

$$\begin{aligned} 360° &\longrightarrow 2\pi \text{ rad} \\ 180° &\longrightarrow \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

27. Exprima 225° em radianos.

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

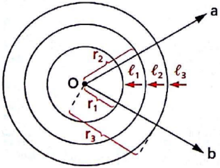
$$\begin{aligned} 180° &\longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 225° &\longrightarrow x \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{225 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

Trigonometria na Circunferência

Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb tal que $\alpha = 60^o$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.

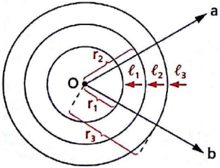
Trigonometria na Circunferência

Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.



Trigonometria na Circunferência

Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.

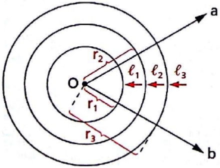


Determinemos esses comprimentos:

$$360° \longrightarrow 2\pi r_1$$
$$60° \longrightarrow \ell_1$$

Trigonometria na Circunferência

Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.

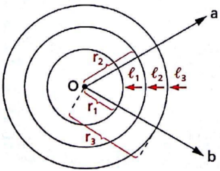


Determinemos esses comprimentos:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \longrightarrow 2\pi r_1 \\ 60° \longrightarrow \ell_1 \end{array}\right\rangle \ell_1 = \frac{\pi r_1}{3}$$

Trigonometria na Circunferência

Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.

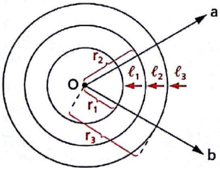


Determinemos esses comprimentos:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \longrightarrow 2\pi r_1 \\ 60° \longrightarrow \ell_1 \end{array}\right\rangle \ell_1 = \frac{\pi r_1}{3} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\pi}{3}$$

Trigonometria na Circunferência

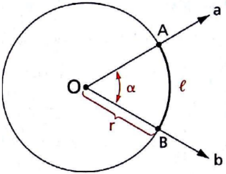
Medidas de Ângulo. Consideremos circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** aÔb, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.



Determinemos esses comprimentos:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \longrightarrow 2\pi r_1 \\ 60° \longrightarrow \ell_1 \end{array}\right\rangle \ \ell_1 = \frac{\pi r_1}{3} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\pi}{3}$$

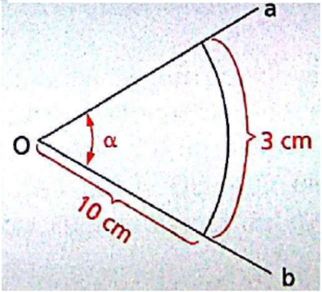
Resumindo.



$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{r} \ \text{(}\alpha\text{ em radianos)}}$$

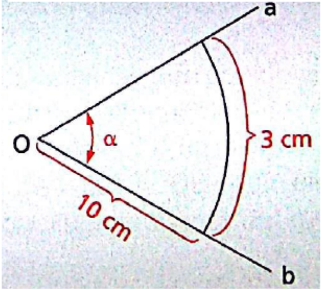
Trigonometria na Circunferência

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



Trigonometria na Circunferência

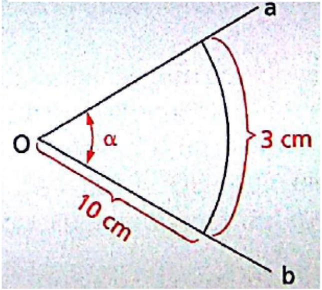
37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

Trigonometria na Circunferência

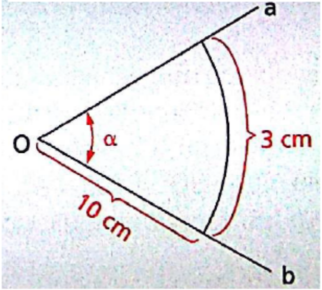
37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10} \text{ rad.}$$

Trigonometria na Circunferência

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.

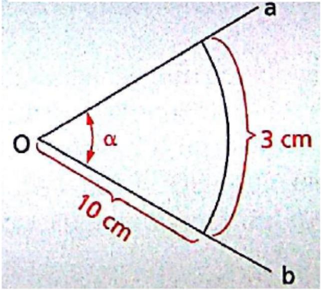


$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10} \text{ rad.}$$

Convertendo em graus:

Trigonometria na Circunferência

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10} \text{ rad.}$$

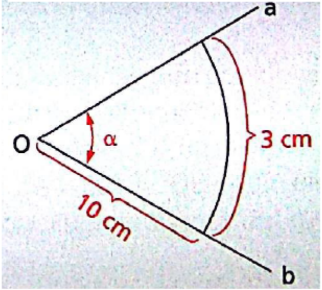
Convertendo em graus:

π rad $\longrightarrow$ 180°

$\frac{3}{10}$ rad $\longrightarrow$ x

Trigonometria na Circunferência

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



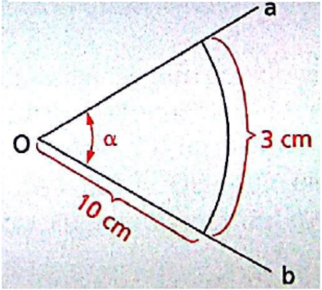
$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10} \text{ rad.}$$

Convertendo em graus:

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & \longrightarrow & 180° \\ \frac{3}{10} \text{ rad} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180°}{\pi}$$

Trigonometria na Circunferência

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo aÔb da figura.



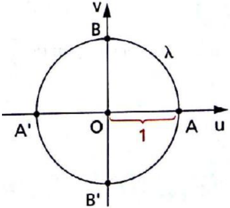
$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10}\ \text{rad.}$$

Convertendo em graus:

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & \longrightarrow & 180° \\ \frac{3}{10} \text{ rad} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180°}{\pi} = \frac{54°}{3{,}1416} = 17°11'19''$$

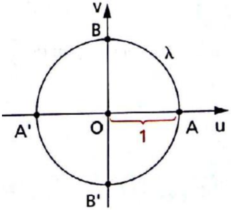
Trigonometria na Circunferência

Ciclo Trigonométrico. Consideremos a circunferência λ de centro O e raio 1. O comprimento da circunferência é 2π, pois $r = 1$.



Trigonometria na Circunferência

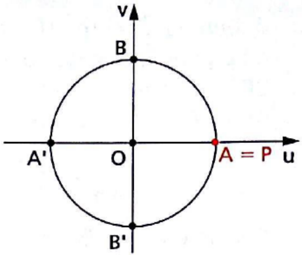
Ciclo Trigonométrico. Consideremos a circunferência λ de centro O e raio 1. O comprimento da circunferência é 2π, pois $r = 1$.



Iremos asociar a cada número real x com $0 \leq x \leq 2\pi$ um único ponto P da circunferência do seguinte modo:

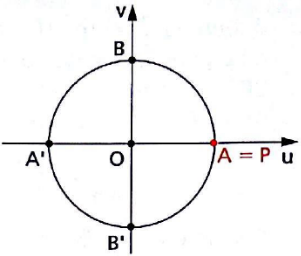
Trigonometria na Circunferência

1º) se $x = 0$, então P coincide com A;

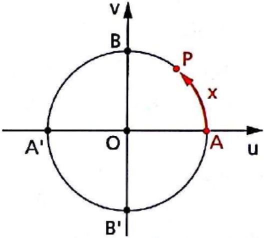


Trigonometria na Circunferência

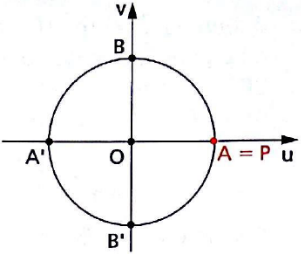
1º) se $x = 0$, então P coincide com A;



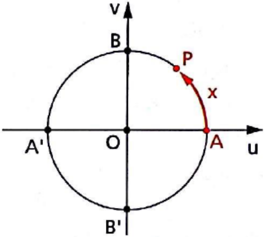
2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.



1º) se $x = 0$, então P coincide com A;



2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.



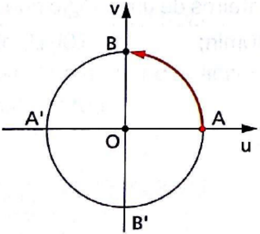
A circunferência λ anteriormente definida, com origem em A, é chamada **ciclo** ou **circunferência trigonométrica**.

Trigonometria na Circunferência

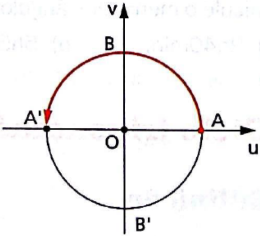
Se o ponto P está associado ao número x, dizemos que P é a imagem de x na circunferência.

Trigonometria na Circunferência

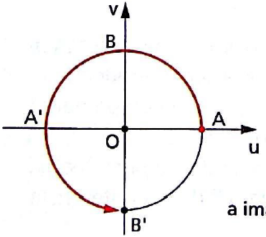
Se o ponto P está associado ao número x, dizemos que P é a imagem de x na circunferência. Assim, por exemplo, temos:



a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B



a imagem de π é A'



a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'

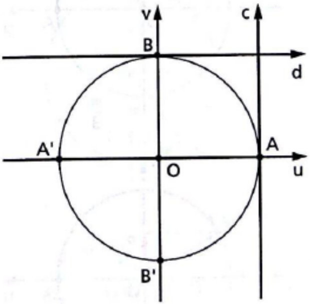
Funções Trigonométricas - Parte 2

Funções Trigonométricas - Parte 2

Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

Funções Trigonométricas - Parte 2

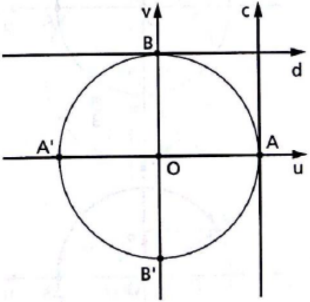
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:



Funções Trigonométricas - Parte 2

Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: O → A

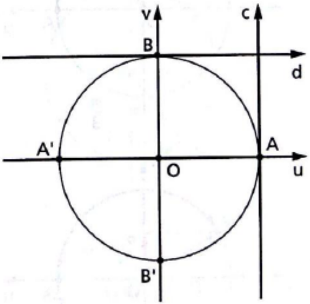


Funções Trigonométricas - Parte 2

Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: O → A

2º) eixo dos senos (v)
direção: perpendicular a u, por O
sentido positivo: O → B
sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$



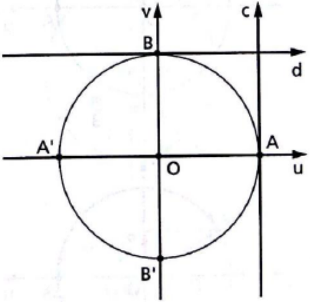
Funções Trigonométricas - Parte 2

Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: O → A

2º) eixo dos senos (v)
direção: perpendicular a u, por O
sentido positivo: O → B
sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$

3º) eixo das tangentes (c)
direção: paralelo a v por A
sentido positivo: o mesmo de v



Funções Trigonométricas - Parte 2

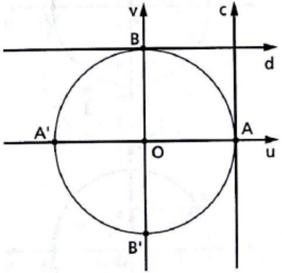
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: $O \to A$

2º) eixo dos senos (v)
direção: perpendicular a u, por O
sentido positivo: $O \to B$
sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$

3º) eixo das tangentes (c)
direção: paralelo a v por A
sentido positivo: o mesmo de v

4º) eixo das cotangentes (d)
direção: paralelo a u por B
sentido positivo: o mesmo de u



Funções Trigonométricas - Parte 2

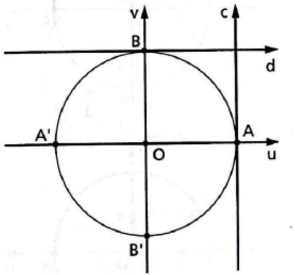
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ em $OA = 1$. Iremos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: $O \rightarrow A$

2º) eixo dos senos (v)
direção: perpendicular a u, por O
sentido positivo: $O \rightarrow B$
sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$

3º) eixo das tangentes (c)
direção: paralelo a v por A
sentido positivo: o mesmo de v

4º) eixo das cotangentes (d)
direção: paralelo a u por B
sentido positivo: o mesmo de u



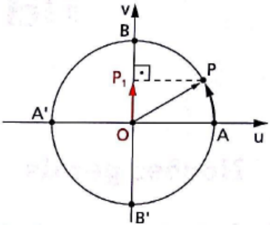
x está no 1º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{AB}$
x está no 2º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{BA'}$
x está no 3º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{A'B'}$
x está no 4º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{B'A}$

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Seno

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo.

Denominamos **seno** de x (e indicamos sen x) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.

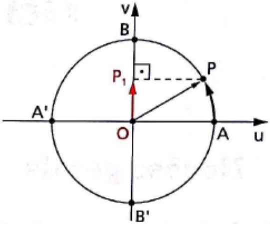


Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Seno

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo.

Denominamos **seno** de x (e indicamos sen x) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.



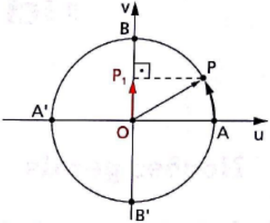
Obs. Para todo $x \in [0, \pi,]$ temos $-1 \leq sen\ x \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de *sen* x.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Seno

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo.

Denominamos **seno** de x (e indicamos sen x) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.



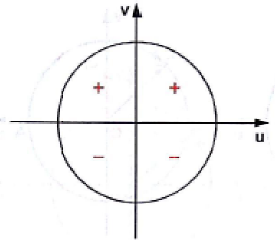
Obs. Para todo $x \in [0, \pi,]$ temos $-1 \leq sen\ x \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de *sen x*.

Fazendo x **percorrer o intervalo** $[0, 2\pi]$ **no sentido anti-horário, temos:**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

Funções Trigonométricas - Parte 2

O sinal de sen x também pode ser assim sintetizado:



O sinal de sen x também pode ser assim sintetizado:

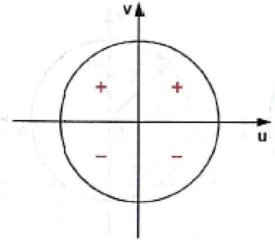
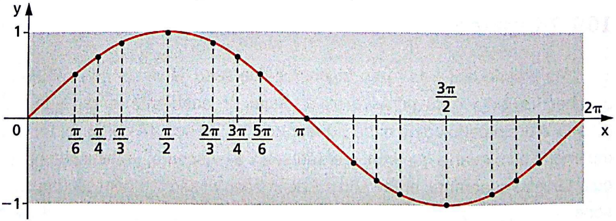


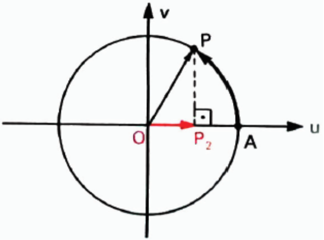
Gráfico senoide



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Cosseno**

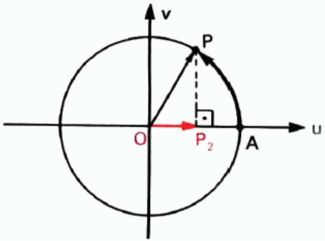
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos ***cosseno de x*** (indicamos $cos\ x$) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Cosseno**

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos *cosseno de x* (indicamos *cos x*) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.

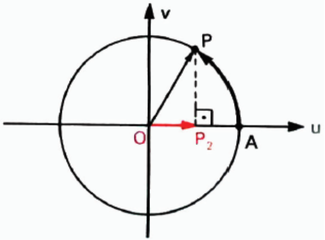


Obs. Para todo $x \in [0, \pi,]$ temos $-1 \leq cos\ x \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de *sen x*.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Cosseno**

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos *cosseno de x* (indicamos *cos x*) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.

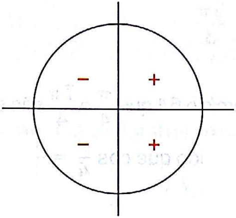


Obs. Para todo $x \in [0, \pi,]$ temos $-1 \leq cos\ x \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de $sen\ x$.

Fazendo x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ no sentido anti-horário, temos:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

O sinal de cos x também pode ser assim sintetizado:



O sinal de cos x também pode ser assim sintetizado:

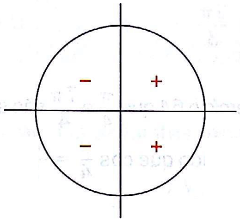
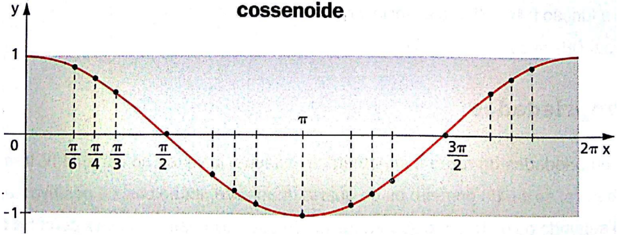


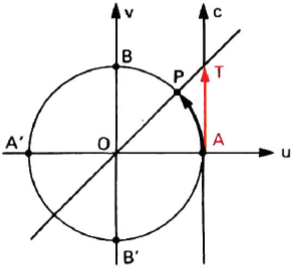
Gráfico cossenoide



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Tangente**

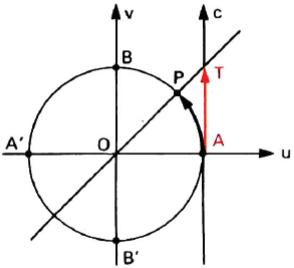
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos *tg x*) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Tangente**

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos *tg x*) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

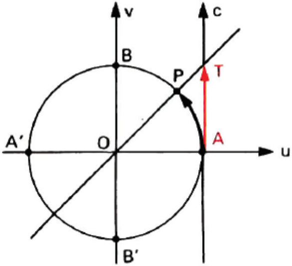


Obs. Para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{3\pi}{2}$ a função *tg x* não está definida, pois a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Tangente**

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos *tg x*) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

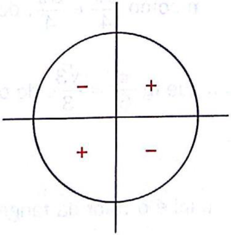


Obs. Para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{3\pi}{2}$ a função *tg x* não está definida, pois a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes.

Fazendo x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ no sentido anti-horário, temos:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

O sinal de tg x também pode ser assim esquematizado:



O sinal de tg x também pode ser assim esquematizado:

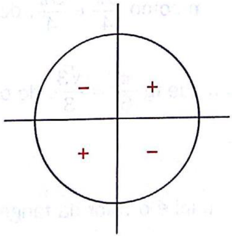
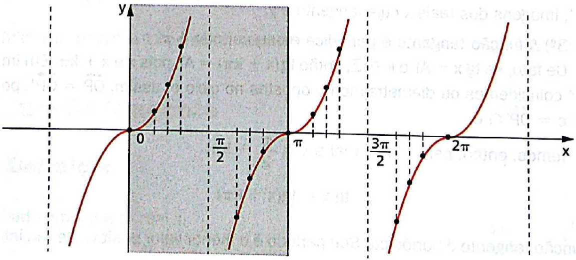


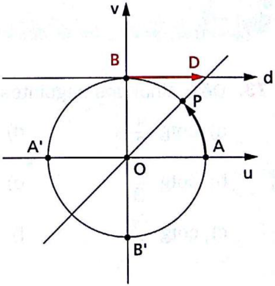
Gráfico
tangentoide



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cotangente

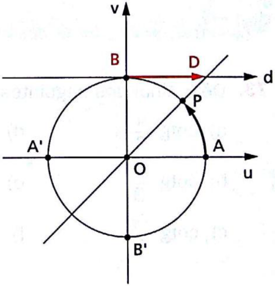
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente** de x (e indicamos cotg x) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cotangente

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente** de x (e indicamos cotg x) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.

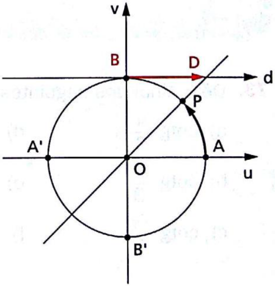


Obs. Para $x = 0, x = \pi$ e para $x = 2\pi$ a função *cotg x* não está definida, pois a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cotangente

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente** de x (e indicamos cotg x) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.



Obs. Para $x = 0, x = \pi$ e para $x = 2\pi$ a função *cotg* x não está definida, pois a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes.

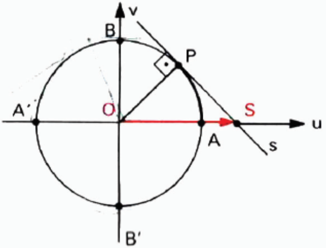
Propriedades

1ª) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então cotg x é positiva.
2ª) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então cotg x é negativa.
3ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então cotg x é decrescente.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Secante

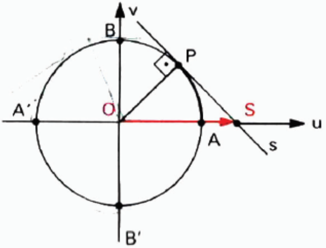
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos *secante de x* (e indicamos *sec x*) a abscissa OS do ponto S.



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Secante

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos *secante de x* (e indicamos *sec x*) a abscissa OS do ponto S.

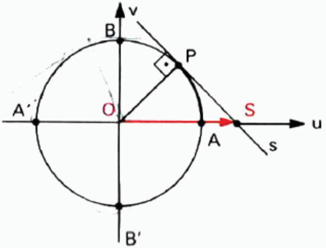


Obs. Para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{3\pi}{2}$ a função *sec x* não está definida, pois a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição **Secante**

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos *secante de x* (e indicamos *sec x*) a abscissa OS do ponto S.



Obs. Para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{3\pi}{2}$ a função *sec x* não está definida, pois a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos.

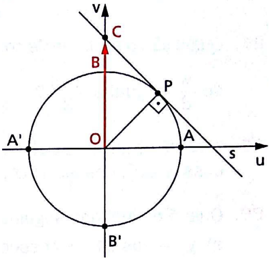
Propriedades

1ª) Se x é do 1º ou do 4º quadrante, então *sec x* é positiva.
2ª) Se x é do 2º ou do 3º quadrante, então *sec x* é negativa.
3ª) Se x percorre o 1º ou o 2º quadrante, então *sec x* é crescente.
4ª) Se x percorre o 3º ou o 4º quadrante, então *sec x* é decrescente.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cossecante

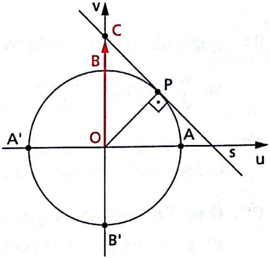
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta *s* tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos **cossecante** de *x* (e indicamos cossec x) a ordenada OC do ponto C.



Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cossecante

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos **cossecante** de x (e indicamos cossec x) a ordenada OC do ponto C.

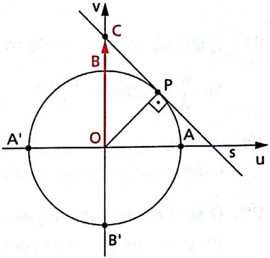


Obs. Para $x = 0, x = \pi$ e para $x = 2\pi$ a função *cossec* x não está definida, pois a reta s fica paralela ao eixo dos senos.

Funções Trigonométricas - Parte 2

Definição Cossecante

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos **cossecante** de x (e indicamos cossec x) a ordenada OC do ponto C.



Obs. Para $x = 0, x = \pi$ e para $x = 2\pi$ a função *cossec x* não está definida, pois a reta *s* fica paralela ao eixo dos senos.

Propriedades

1ª) Se x é do 1º ou do 2º quadrante, então *cossec* x é positiva.
2ª) Se x é do 3º ou do 4º quadrante, então *cossec* x é negativa.
3ª) Se x percorre o 2º ou o 3º quadrante, então *cossec* x é crescente.
4ª) Se x percorre o 1º ou o 4º quadrante, então *cossec* x é decrescente.

Relações Trigonométricas

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

x	sen x	cos x	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	−1	1
$\frac{3\pi}{2}$	−1	0	1
2π	0	1	1

Relações Trigonométricas

Teorema

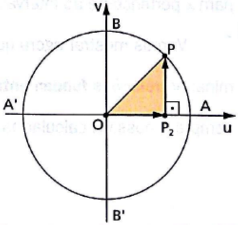
Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

x	sen x	cos x	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1
2π	0	1	1

$$x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$



Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$vale a relação:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$vale a relação:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$vale a relação:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

$$\text{tg } x = 0 = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Q	sinal de cotg x	sinal de $\frac{\cos x}{\text{sen } x}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Q	sinal de cotg x	sinal de $\frac{\cos x}{\text{sen } x}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

Se $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

$$\text{cotg } x = 0 = \frac{\cos x}{\text{sen } x}.$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$

Q	sinal de sec x	sinal de cos x
1º	+	+
2º	−	−
3º	−	−
4º	+	+

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$

Q	sinal de sec x	sinal de cos x
1º	+	+
2º	−	−
3º	−	−
4º	+	+

Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

$$\sec x = 1 = \frac{1}{\cos x}, \ (x = 0 \text{ ou } x = 2\pi)$$

$$\sec x = -1 = \frac{1}{\cos x}, \ (x = \pi)$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Q	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	−	−
4º	−	−

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Q	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	–	–
4º	–	–

Se $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$$\text{cossec } x = 1 = \frac{1}{\text{sen } x}, \left(x = \frac{\pi}{2}\right)$$

ou

$$\text{cossec } x = -1 = \frac{1}{\text{sen } x}, \left(x = \frac{3\pi}{2}\right)$$

Relações Trigonométricas

Resumindo:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Relações Trigonométricas

Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ vale as seguintes relações:

1ª) $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$

2ª) $\text{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x$

3ª) $1 + \text{cotg}^2\, x = \text{cossec}^2\, x$

4ª) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2\, x}$

5ª) $\text{sen}^2\, x = \dfrac{\text{tg}^2\, x}{1 + \text{tg}^2\, x}$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução
Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução
Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, x}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} \text{.}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que $sen\ x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução
Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução
Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Relações Trigonométricas

Exercício. Sabendo que *sen* $x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões geométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Thank you

Thank you for your attention!