Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Construção e Análise de Algoritmos

Lista de exercícios 3

1.

(a) Responda e explique cada um dos itens abaixo.
  (a) O que é a Classe P?
  (b) O que é um certificado de um problema de decisão? O que é a Classe NP e qual a relação dela com certificados?
  (c) O que é uma Redução Polinomial entre dois problemas e para que serve?
  (d) O que é a Classe NP-Completa?

(b) Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela e *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se P≠NP* ou *falsa se P≠NP*. Dê uma justificativa curta para cada resposta.
  (1) Não há problemas em P que são NP-Completos
  (2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
  (3) Existem problemas em P que estão em NP
  (4) Existem problemas em NP que não estão em P
  (5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
  (6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B $\in$ P, então A $\in$ P
  (7) O problema do Caixeiro Viajante é NP-Completo

2. Dado um grafo G, uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.

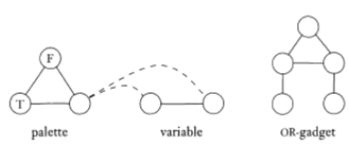

FIGURA 1. Use essas engrenagens na questão 1

3. Dizemos que um grafo G esta parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G, seja $r(v)$ o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamete $r(v)$ vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. Dica: Imagine rótulos negativos como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

4. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro $k > 0$, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D.

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura por vértices.

5. Prove que o problema CLIQUE, problema visto em sala de aula, é NP-completo usando o problema DOMINANTE definido na questão anterior.

6. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ de subconjuntos de S, onde $k > 0$, é possivel colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S. Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F.

7. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento $s \in S$ possui um peso $p(s)$ e um valor $v(s)$, existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V. Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

8. Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma coleção de subconjuntos $C_1, \ldots, C_m$ de um conjunto S, existe um subconjunto S^* com K elementos de S tal que, para todo subconjunto C_i, C_i contém algum elemento de S^*. Prove que HITTING-SET é NP-Completo. **Dica:** Cobertura por vértices.

9. Seja INDEPENDENTE o problema de decidir se, dados como entrada um inteiro k e um grafo $G = (V, E)$, existe um subconjunto de k vértices de G em que nenhum desses vértices está ligado com os $k - 1$ outros desse subconjunto, isto é, não possui nenhuma aresta, em G, ligando quaisquer dois vértices do subconjunto. Prove que INDEPENDENTE é NP-Completo.

10. Prove que o problema COB-VERT, problema da cobertura por vértices visto em sala de aula, é NP-completo usando o problema INDEPENDENTE definido na questão anterior.