

Aula 4

Crescimento de Funções e Notação Assintótica

Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará
Campus Russas

2021.1

Sumário

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Aulas Passadas

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

► Correção de Algoritmos Iterativos

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,
 - ▶ Melhor caso e

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,
 - ▶ Melhor caso e
 - ▶ Caso médio.

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,
 - ▶ Melhor caso e
 - ▶ Caso médio.
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,
 - ▶ Melhor caso e
 - ▶ Caso médio.
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
 - ▶ Melhor caso = $an - b$.

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
 - ▶ Invariante de laço
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
- ▶ Complexidade de Tempo/Espaço
 - ▶ Pior caso,
 - ▶ Melhor caso e
 - ▶ Caso médio.
 - ▶ Exemplo: Insertion-Sort
 - ▶ Melhor caso = $an - b$.
 - ▶ Pior caso = $an^2 + bn - c$.

Crescimento de Funções

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de
Funções

Notação
Assintótica

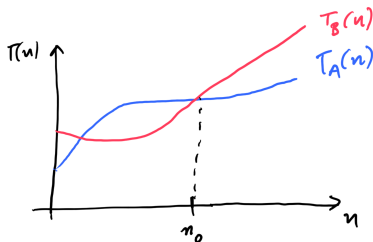
Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do
Insertion-Sort

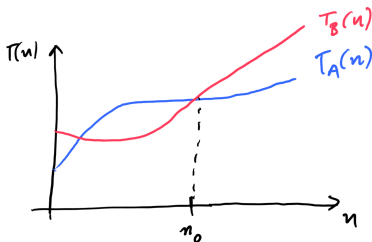
Crescimento de Funções

Sejam os algoritmos **A** e **B** que resolvem um determinado problema. No pior caso, temos as funções $T_A(n)$ e $T_B(n)$ para **A** e **B**, respectivamente, pelo gráfico abaixo. Sabemos que a partir de n_0 temos que sempre $T_B(n) \geq T_A(n)$. Qual o melhor algoritmo para resolver o problema? **A** ou **B**?



Crescimento de Funções

Sejam os algoritmos **A** e **B** que resolvem um determinado problema. No pior caso, temos as funções $T_A(n)$ e $T_B(n)$ para **A** e **B**, respectivamente, pelo gráfico abaixo. Sabemos que a partir de n_0 temos que sempre $T_B(n) \geq T_A(n)$. Qual o melhor algoritmo para resolver o problema? **A** ou **B**?



< 2/85 >

Resposta: Assintoticamente **A**

Notação Assintótica

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Notação Assintótica

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Notação Ω

Notação Ω

$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Notação Ω

$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Notação O

Notação Ω

$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Notação O

$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_2, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Notação Assintótica

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Notação Assintótica

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Notação Θ

Notação Θ

$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Notação Θ

$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Teorema

Notação Θ

$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 \text{ constantes positivas tais que}$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0\}$

Teorema

Sejam as funções $f(n)$ e $g(n)$. Temos que

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) \in O(g(n)) \text{ e } f(n) \in \Omega(g(n))$$

Abusos de notação

Obs.:

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de
Funções

Notação
Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do
Insertion-Sort

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$,

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos
 $n \in O(n^2)$,

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

► $n = O(n^2)$,

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

► $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$,

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$, significado

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$, significado $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + g(n)$, onde $g(n) = \Theta(n)$.

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$,
significado $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + g(n)$, onde $g(n) = \Theta(n)$.
- ▶ $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$,

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$,
significado $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + g(n)$, onde $g(n) = \Theta(n)$.
- ▶ $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$,
significado

Abusos de notação

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$,
significado
 $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + g(n)$, onde $g(n) = \Theta(n)$.
- ▶ $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$,
significado
para qualquer função $f(n) = \Theta(n)$,

Obs.: Para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, faremos $n \in O(n^2)$, em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Abusos

- ▶ $n = O(n^2)$, significado $n \in O(n^2)$.
- ▶ $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$,
significado $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + g(n)$, onde $g(n) = \Theta(n)$.
- ▶ $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$,
significado
para qualquer função $f(n) = \Theta(n)$, temos que $2n^2 + g(n) = \Theta(n^2)$.

Marque V ou F

- ▶ () $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ () $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ () $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ () $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ () $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Marque V ou F

- ▶ (F) $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ () $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ () $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ () $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ () $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Marque V ou F

- ▶ (F) $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ () $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ (F) $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ () $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ () $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Marque V ou F

- ▶ (F) $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ (V) $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ (F) $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ () $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ () $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Marque V ou F

- ▶ (F) $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ (V) $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ (F) $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ (F) $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ () $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Marque V ou F

- ▶ (F) $2n^2 + \Theta(n) = 2n^2 + 7n$
- ▶ (V) $\Theta(n^2) + 2n = \Omega(n)$
- ▶ (F) $\Omega(n^2) + 3n = 10n^3$
- ▶ (F) $5n^2 + 2n + 10 = \Omega(n^3)$
- ▶ (V) $n^2 + 2n + 10 = O(\frac{n^2}{10})$

Complexidades do Insertion-Sort

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de
Funções

Notação
Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do
Insertion-Sort

Complexidades do Insertion-Sort

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Mostre que:

Complexidades do Insertion-Sort

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Mostre que:

$$\blacktriangleright 7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$$

Complexidades do Insertion-Sort

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Complexidades do Insertion-Sort

PAA - Aula 4

Prof. Eurinardo

Aulas Passadas

Crescimento de Funções

Notação Assintótica

Notação O , Ω e Θ

Abusos de notação

Complexidades do Insertion-Sort

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$ e Melhor caso com $\Omega(\cdot)$.

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$ e Melhor caso com $\Omega(\cdot)$.

- ▶ Insertion-Sort, no pior caso, é $\Omega(n^2)$?

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$ e Melhor caso com $\Omega(\cdot)$.

- ▶ Insertion-Sort, no pior caso, é $\Omega(n^2)$? Sim

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$ e Melhor caso com $\Omega(\cdot)$.

- ▶ Insertion-Sort, no pior caso, é $\Omega(n^2)$? Sim
- ▶ Insertion-Sort, no melhor caso, é $O(n)$?

Mostre que:

- ▶ $7n^3 - 15n^2 + 20n - 300 = \Theta(n^3)$
- ▶ o Insertion-Sort no melhor caso é $\Theta(n)$
- ▶ o Insertion-Sort no pior caso é $\Theta(n^2)$

Observação

Não confundir!!! Pior caso com $O(\cdot)$ e Melhor caso com $\Omega(\cdot)$.

- ▶ Insertion-Sort, no pior caso, é $\Omega(n^2)$? Sim
- ▶ Insertion-Sort, no melhor caso, é $O(n)$? Sim



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L.,
CORMEN T.H.

Algoritmos: teoria e prática, 3ed.

Editora Campus, ano 2012.

Obrigado!