Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de f, trocando-se x por $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x-3)^2 + 4(2x-3) - 5$$
$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8.$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g, trocando-se x por $f(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$
$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13.$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0,$$

calculemos $g \circ f$ para $x = 2$

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11.$$

c) O problema em questão, resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja:

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \implies 4(x^2 - x - 6) = 0 \implies x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

422. Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
b) Calcule $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$.
c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

423. Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

424. Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

425. Nas funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obtenha as leis que definem:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

426. Considere a função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Qual é a lei que define $f(-x)$? E $f\left(\frac{1}{x}\right)$? E $f(x-1)$?

427. Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determine o valor de a de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

428. Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $f \circ g = g \circ f$.

429. Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que, se $f \circ g = g \circ f$, então $f = g$.

430. Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.
Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, isto é: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 4$. Então:
$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [g(x)]^2 - 3 \cdot g(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4$.
Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geqslant 0$. Então:
$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

431. Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

432. Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real. Forneça:

a) o domínio e a lei que define $f \circ g$;
b) o domínio e a lei que define $g \circ f$.

433. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha a lei que define $(h \circ g) \circ f$.

434. Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obtenha a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

435. Sendo $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $g(\theta) = sen\ 2\theta$, encontre os valores de θ para os quais $f \circ g$ se anula.
Observação: $f \circ g$ significa f composta com g.

436. Considere as funções

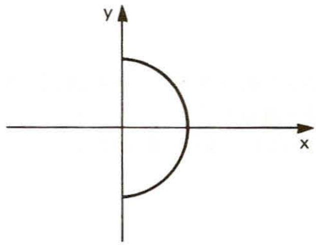
$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = ax + b.$$

Determine o conjunto C, dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f \circ g = g \circ f$.

437. Dadas as funções $f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$, qual é a relação que a e m devem satisfazer para que se tenha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

438. Julgue os itens abaixo.

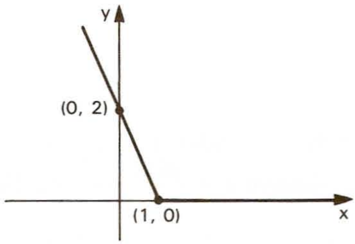
a) A figura abaixo é gráfico de uma função definida para $y = f(x)$.



b) Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então $f(a + 1) = f(1 - a)$.

c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4, 7\}$, pode-se afirmar que o número de funções de A para B é igual a 3.

d) A representação gráfica de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x-1| - (x-1)$ é o gráfico abaixo.



e) Para todo $x > 0$ temos que, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f(x) < 1$.

f) Se f é uma função definida para todo inteiro tal que $f(0) = 1$, $f(n + 1) = f(n) + 3$, então $f(300) = 901$.

439. Dadas $f(x) = 3$ e $g(x) = x^2$, determine $f(g(x))$.

440. Se $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, determine $(f \circ [f \circ f])\,(x)$.

441. Dadas as funções f, g e h, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $h(x) = x + 2$, obtenha $((h \circ f) \circ g)\,(2)$.

442. Dada a aplicação $f\colon Q \to Q$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, qual é o valor de x tal que $f(x) = f(x + 1)$?

443. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Determine a relação entre a, b, c e d, de modo que $f \circ g = g \circ f$.

444. Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da função g.

Solução

Se $f(x) = 3x - 5$, então trocando-se x por $g(x)$ temos:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$
mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$, então
$3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$
ou seja:
$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}.$$

445. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determine a lei da função g.

446. Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determine a lei da função f.

Solução

Se $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$, então $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 1$.
Como $g(x) = 3x - 2$, decorre $x = \dfrac{g(x) + 2}{3}$ e então:
$$f(g(x)) = 9\left[\frac{g(x)+2}{3}\right]^2 - 3 \cdot \left[\frac{g(x)+2}{3}\right] + 1 = [g(x)]^2 + 4g(x) + 4 - g(x) - 2 + 1 =$$
$$= [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) + 3; \text{ logo, } f(x) = x^2 + 3x + 3.$$

447. Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determine a lei da função f.

448. Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real e $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$ definida para todo x real. Determine a lei da função f.

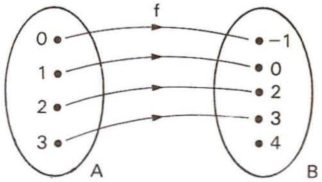
449. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo x real, calcule os valores de a e b.

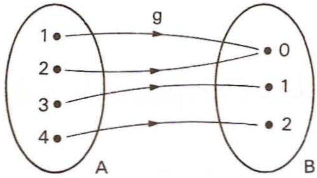
450. Considere as funções

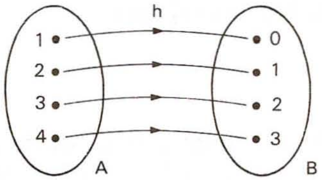
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + b \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

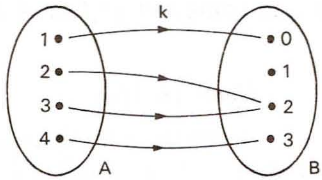
EXERCÍCIOS

460. Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora?

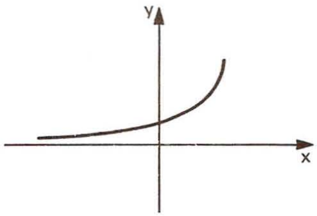
a)


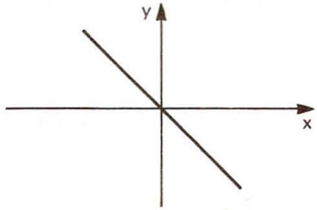
b)


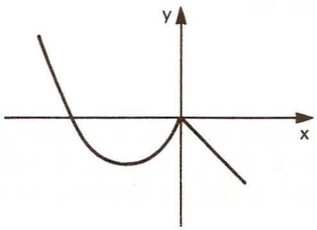
c)


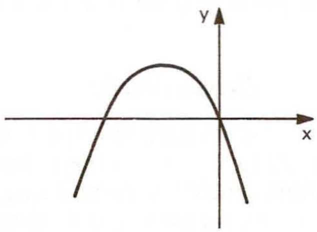
d)


461. Para as funções em $\mathbb{R}$ abaixo representadas, qual é injetora? E sobrejetora? E bijetora?

a)


b)


c)


d)


462. Nas funções seguintes classifique em:

I) injetora
II) sobrejetora
III) bijetora
IV) não é sobrejetora nem injetora

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
d) $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$
e) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $n(x) = [x]$
f) $p: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$
g) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$
h) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x| \cdot (x - 1)$

463. Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em B, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$, seja sobrejetora.

464. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, seja injetora.

465. Seja a função de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < 2\}$ em $B \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 3| - 2$. Se f é sobrejetora, determine B.

466. Determine o conjunto B de modo que a função $f: [-1, 2] \to B$, definida por $f(x) = |2x - 3|$, seja sobrejetiva. Esta função é injetiva? Justifique.

467. Nas funções seguintes, classifique em:

I) injetora
II) sobrejetora
III) bijetora
IV) não é injetora nem sobrejetora

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

d) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e) $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \dfrac{x + 1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

f) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$

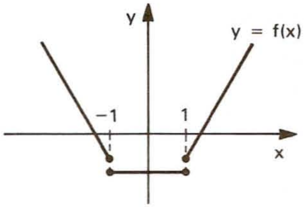
$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ [x] & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

468. Classifique em injetora, sobrejetora ou bijetora a aplicação $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

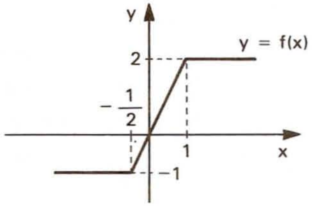
$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n + 1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

469. Observando os gráficos, julgue os itens seguintes.

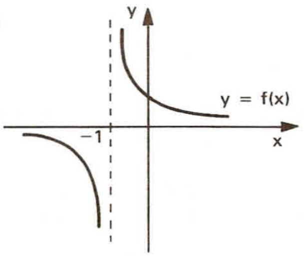
(I)



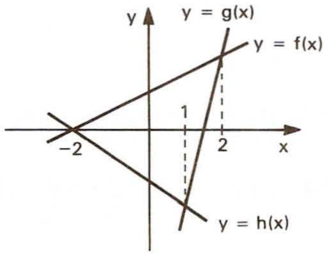
(II)



(III)



(IV)



a) O domínio da função em (I) é
$\{x \in \text{reais} \mid x \neq -1 \text{ ou } x \neq 1\}$.

b) A imagem da função em (II) é $\{y \in \text{reais} \mid -1 < y < 2\}$.

c) A função em (III) é decrescente no intervalo $(-1, +\infty)$.

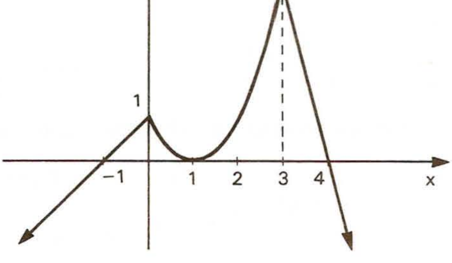
d) Com relação a (IV), podemos dizer que $h(x) < g(x) \leqslant f(x)$ para $1 < x \leqslant 2$.

e) A função em (I) é injetora.

f) Em (II) $f(0) = 0$ e $f(-1) = \dfrac{-1}{2}$.

g) Em (III) a função é negativa para $x < -1$ e positiva para $x > -1$.

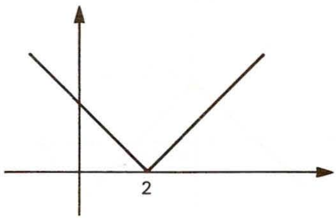
470. Com relação ao gráfico de uma função $y = f(x)$, representado abaixo, pode-se afirmar que:



a) o domínio da função é o conjunto dos números reais.
b) a imagem da função é o conjunto dos números reais.
c) a função é crescente no intervalo $(-\infty, 1]$.
d) a função é injetora em todo o seu domínio.
e) $f(1) = 0$ e $f(5) < 0$.
f) $\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 1$.
g) sabendo que no intervalo $[0, 3]$ a curva representa um arco de parábola, podemos concluir que a equação dessa parábola é $y = x^2 - 2x + 1$.
h) a semi-reta correspondente a $x \leqslant 0$ tem inclinação -1.

471. Sendo a função real $f(x) = |x - 2| + |x|$, pode-se afirmar:

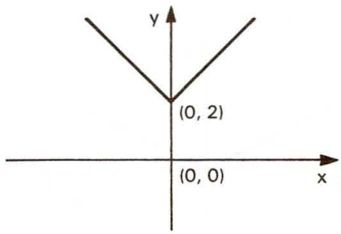
a) O gráfico da função é:



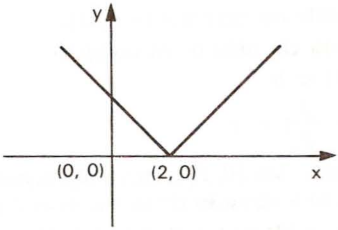
b) A função cresce no intervalo $[2, +\infty[$.
c) $f(x) = 2x - 2, \forall x \in R$.
d) O conjunto imagem da função é $\{y \in R, y \geqslant 2\}$.
e) A função *não* é injetora.
f) O conjunto domínio da função é R.

472. Considere a função definida por $y = f(x) = 2 - |x|, x \in \mathbb{R}$. Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas nos itens abaixo.

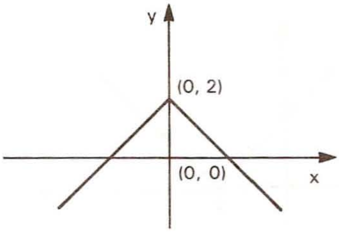
a) f é sobrejetiva.
b) f não é injetiva.
c) A função pode ser representada pelo gráfico:



d) A função pode ser representada pelo gráfico:



e) A função pode ser representada pelo gráfico:



473. A função $f: A \to B$ é dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Determine o domínio de f, isto é, $A = \{x \in R$ tal que existe $f(x)\}$.

b) Determine a imagem de f, isto é, $B = f(A)$.

c) A função f é injetora? Por quê?

d) Trace o gráfico da função f.

474. Existem funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a propriedade (I) $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas:

a) Se uma função f verifica (I), então f é injetora.

b) condição (1) é válida para a função $f(x) = 3x^5$, $x \in \mathbb{R}$.

c) O gráfico abaixo representa, no intervalo $[-1, 1]$, uma função que verifica (I).