Função Inversa - Função Exponencial

Anderson Feitoza Leitão Maia

MATEMÁTICA BÁSICA
Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará

10 de Agosto de 2021

Apresentação

Função Inversa

Função Inversa

Função Inversa

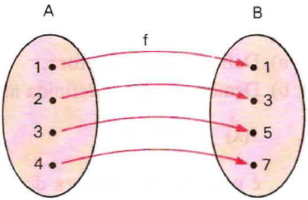
Motivação.

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

Função Inversa

Motivação.

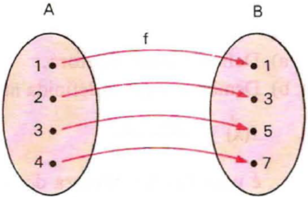
Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.



Função Inversa

Motivação.

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

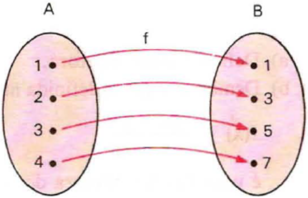


O que se pode dizer sobre f?

Função Inversa

Motivação.

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.



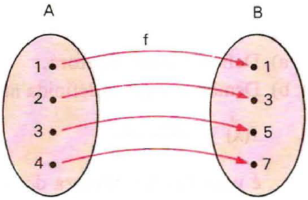
O que se pode dizer sobre f?

- Temos $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$

Função Inversa

Motivação.

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.



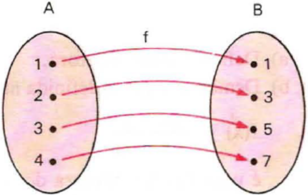
O que se pode dizer sobre f?

- Temos $f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$
- f é bijetora.

Função Inversa

Motivação.

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.



O que se pode dizer sobre f?

- Temos $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$
- A função f é bijetora.
- O $D(f) = A$ e $Im(f) = B$

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f.

Função Inversa

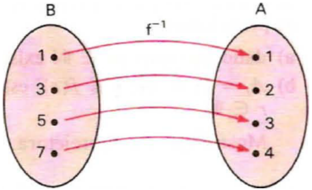
Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

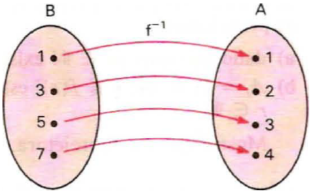
$$f^{-1} = \{(y,\ x) \mid (x,\ y) \in f\}$$



Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

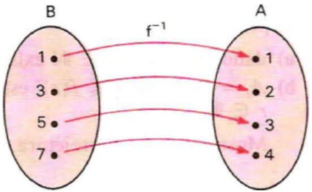


O que se pode dizer sobre a relação inversa f^{-1}?

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$



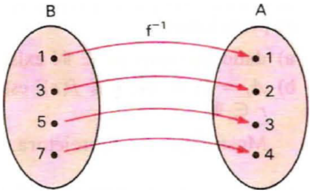
O que se pode dizer sobre a relação inversa f^{-1}?

• A relação f^{-1} é uma função

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$



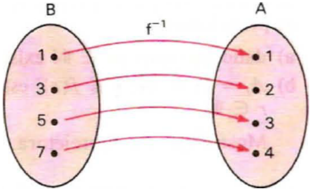
O que se pode dizer sobre a relação inversa f^{-1}?

- A relação f^{-1} é uma função
- Temos $f = \{(1,1),(3,2),(5,3),(7,4)\}$.

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$



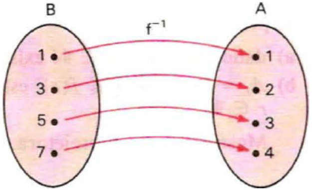
O que se pode dizer sobre a relação inversa f^{-1}?

- A relação f^{-1} é uma função
- Temos $f = \{(1,1),(3,2),(5,3),(7,4)\}$.
- A função f^{-1} é bijetora.

Função Inversa

Agora consideremos a relação inversa de f. Ou seja,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$



O que se pode dizer sobre a relação inversa f^{-1}?

- A relação f^{-1} é uma função.
- Temos $f = \{(1,1),(3,2),(5,3),(7,4)\}$.
- A função f^{-1} é bijetora.
- O $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Função Inversa

Sabemos que a função f é definida por $y = 2x - 1$.

Função Inversa

Sabemos que a função f é definida por $y = 2x - 1$. Note que a função f^{-1} é definida por

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

Função Inversa

Sabemos que a função f é definida por $y = 2x - 1$. Note que a função f^{-1} é definida por

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

1º) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$

Função Inversa

Sabemos que a função f é definida por $y = 2x - 1$. Note que a função f^{-1} é definida por

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

1º) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$

2º) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \dfrac{y+1}{2}$.

Função Inversa

Sabemos que a função f é definida por $y = 2x - 1$. Note que a função f^{-1} é definida por

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

1º) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$

2º) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \dfrac{y+1}{2}$.

Generalização

Seja $f : A \to B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se f é bijetora.

Função Inversa

Definição - Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B, a relacão inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de f e indicamos por f^{-1}.

Função Inversa

Definição - Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B, a relacão inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de f e indicamos por f^{-1}.

Observações

Função Inversa

Definição - Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de f e indicamos por f^{-1}[1].

Observações

1ª) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f, permutando-se os elementos de cada par, isto é:

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Função Inversa

Definição - Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B, a relacão inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de f e indicamos por f^{-1}.

Observações

1ª) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f, permutando-se os elementos de cada par, isto é:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}.$$

2ª) Pela observação anterior, temos:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}.$$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1}, teremos:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

isto é,

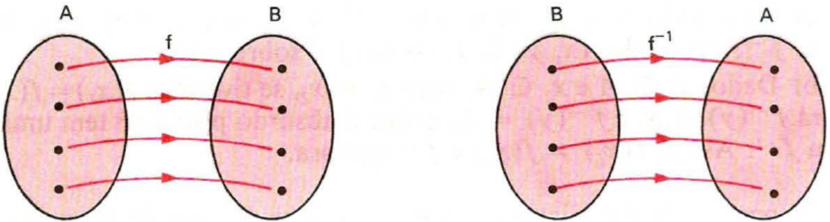
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Função Inversa

3ª) O domínio da função f^{-1} é B, que é a imagem da função f.
A imagem da função f^{-1} é A, que é o domínio da função f.

Função Inversa

3ª) O domínio da função f^{-1} é B, que é a imagem da função f.
A imagem da função f^{-1} é A, que é o domínio da função f.



$$D(f^{-1}) = B = Im(f) \quad \text{e} \quad Im(f^{-1}) = A = D(f).$$

Função Inversa

Determinação da Função Inversa.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função f, colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

Função Inversa

Determinação da Função Inversa.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função f, colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

e ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1}, como o conjunto

$$f^{-1} = \left\{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y + 1}{2}\right\},$$

devemos ter y em abscissa e x em ordenada.

Ou seja, se marcarmos os pontos

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$
$$f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

no plano cartesiano.

Função Inversa

Determinação da Função Inversa.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função f, colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

e ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1}, como o conjunto

$$f^{-1} = \left\{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y+1}{2}\right\},$$

devemos ter y em abscissa e x em ordenada.

Ou seja, se marcarmos os pontos

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$
$$f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

no plano cartesiano. Então, a primeira coordenada será marcada no eixo das abscissas e a segunda coordenada no eixo das ordenadas.

Função Inversa

Regra Prática

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x:

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x:

$$x = 3y + 2$$

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x:

$$x = 3y + 2 \implies 3y = x - 2$$

Função Inversa

Regra Prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x:

$$x = 3y + 2 \implies 3y = x - 2 \implies y = \frac{x-2}{3}.$$

Função Inversa

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x:

$$x = 3y + 2 \implies 3y = x - 2 \implies y = \frac{x-2}{3}.$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

$$x = y^3$$

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

$$x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}.$$

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

$$x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}.$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

$$x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}.$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Teorema

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Função Inversa

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é: $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = y^3$

II) expressando y em função de x:

$$x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}.$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Teorema

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Exercício. Demonstrar o teorema acima.

Função Inversa

1º) $f(x) = 2x - 4$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{2}$

Função Inversa

1º) $f(x) = 2x - 4$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{2}$

1º) $y = 2x - 4$ $y = \dfrac{x+4}{2}$

x	y
−4	−12
−3	−10
−2	−8
−1	−6
0	−4
1	−2
2	0
3	2
4	4

x	y
−12	−4
−10	−3
−8	−2
−6	−1
−4	0
−2	−2
0	2
2	3
4	4

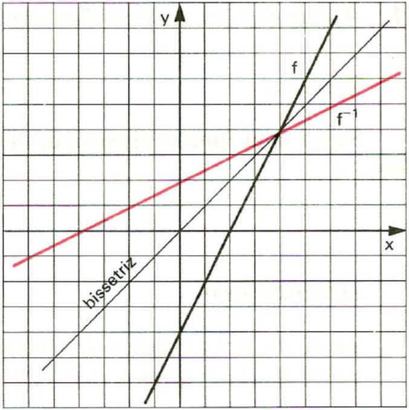
Função Inversa

1º) $f(x) = 2x - 4$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

1º) $y = 2x - 4$ $\quad y = \dfrac{x+4}{2}$

x	y
−4	−12
−3	−10
−2	−8
−1	−6
0	−4
1	−2
2	0
3	2
4	4

x	y
−12	−4
−10	−3
−8	−2
−6	−1
−4	0
−2	−2
0	2
2	3
4	4



Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad e \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A, \ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A, \ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A,\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad e \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A,\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$\forall y \in B,\ (f \circ f^{-1})(y)$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A, \ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$\forall y \in B, \ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A,\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$\forall y \in B,\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x)$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A,\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$\forall y \in B,\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Função Inversa

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demonstração.

$$\forall x \in A, \ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$\forall y \in B, \ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Teorema - Composta de Funções Inversas

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, entao:$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Revisão do Ensino Médio

Revisão do Ensino Médio

Potência de expoente natural

Definição

Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \ \forall\, n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Revisão do Ensino Médio

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

P_1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P_2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geqslant n$

P_3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P_4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

P_5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

P₁. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P₂. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geqslant n$

P₃. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

P₅. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.

1.º caso

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^n = 0 & \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$$

2.º caso

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.º caso

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0 & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0 & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Revisão do Ensino Médio

Potência de expoente inteiro negativo

Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \quad (a \neq 0)$$

Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, 0^{-n} é um símbolo sem significado.

Revisão do Ensino Médio

Potência de expoente inteiro negativo

Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \quad (a \neq 0)$$

Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, 0^{-n} é um símbolo sem significado.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Revisão do Ensino Médio

$P_1.$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$P_2.$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$P_3.$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$P_4.$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$P_5.$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

em que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Revisão do Ensino Médio

Raiz enésima aritmética

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Revisão do Ensino Médio

Raiz enésima aritmética

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

Revisão do Ensino Médio

Raiz enésima aritmética

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

$\sqrt{a^2} = |a|$

Revisão do Ensino Médio

Raiz enésima aritmética

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

$\sqrt{a^2} = |a|$

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$ e não $\sqrt{x^2} = x$

Raiz enésima aritmética

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

$\sqrt{a^2} = |a|$

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$ e não $\sqrt{x^2} = x$

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

R₁. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

R₂. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

R₃. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$

R₄. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

R₅. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Revisão do Ensino Médio

Potência de expoente racional

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Revisão do Ensino Médio

Potência de expoente racional

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotamos a seguinte definição especial:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0$$

Potência de expoente racional

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotamos a seguinte definição especial:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0$$

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

P₁. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

P₂. $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$

P₃. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

P₅. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Potência de expoente real

1ª) Toda potência de base real e positiva e expoente real é um número positivo.

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0$$

2ª) Para as potências de expoente real são válidas as propriedades (P), isto é:

P₁. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$

P₂. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$

P₃. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } c \in \mathbb{R})$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } c \in \mathbb{R})$

P₅. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$

Função Exponencial

Função Exponencial

Definição

Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$ chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.

Função Exponencial

Definição

Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$ chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow a^x \end{aligned}$$

Função Exponencial

Definição

Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$ chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.

Em símbolos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to a^x$$

Exemplos.

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $h(x) = 3^x$

d) $p(x) = 10^x$

e) $r(x) = (\sqrt{2})^x$

Função Exponencial

Propriedades Principais.

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1.$$

Função Exponencial

Propriedades Principais.

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1.$$

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$). Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

I) quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Função Exponencial

Propriedades Principais.

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1.$$

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

I) quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora.

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Lema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0.$$

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Lema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0.$$

Lema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^r > 1 \text{ se, e somente se, } r > 0.$$

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Lema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.

Lema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.

Lema 3 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos:

$a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Lema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0.$$

Lema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^r > 1 \text{ se, e somente se, } r > 0.$$

Lema 3 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos:

$$a^s > a^r \text{ se, e somente se, } s > r.$$

Lema 4 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:

$$a^\alpha > 1 \text{ se, e somente se, } \alpha > 0.$$

Função Exponencial

Resultados Principais

Teorema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Teorema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Teorema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 > x_2.$$

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Teorema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Teorema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 > x_2.$$

Teorema 3 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b < 0.$$

Função Exponencial

Resultados Auxiliares

Teorema 1 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Teorema 2 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 > x_2.$$

Teorema 3 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b < 0.$$

Teorema 4 Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 < x_2.$$

Função Exponencial

Relembrando

Vimos no último slide da seção "revisão do ensino médio", que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$. Para todo x real.

Função Exponencial

Relembrando.
Vimos no último slide da seção "revisão do ensino médio", que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$. Para todo x real.

Imagem
A imagem da função exponencial é:

$$Im = \mathbb{R}_+^*.$$

Função Exponencial

Relembrando.
Vimos no último slide da seção "revisão do ensino médio", que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$. Para todo x real.

Imagem
A imagem da função exponencial é:

$$Im = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico.
Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

Função Exponencial

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função Exponencial

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

Função Exponencial

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3º) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente,

Função Exponencial

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3º) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente,

4º) toma um dos aspectos da figura abaixo.

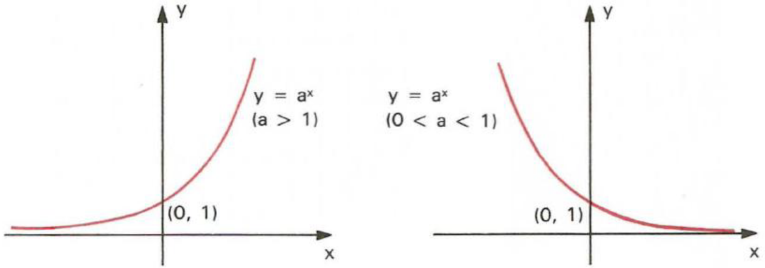
Função Exponencial

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3º) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente,

4º) toma um dos aspectos da figura abaixo.



Função Exponencial

1º) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

Função Exponencial

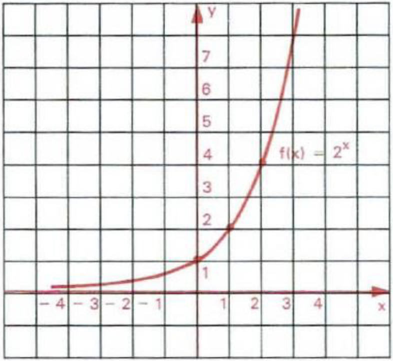
1º) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Função Exponencial

1º) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Função Exponencial

2º) Construir o gráfico da função exponencial da base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Função Exponencial

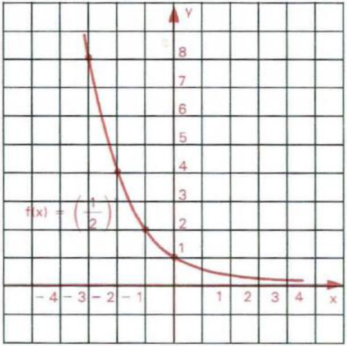
2º) Construir o gráfico da função exponencial da base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Função Exponencial

2º) Construir o gráfico da função exponencial da base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Função Exponencial

Execício. Determine o menor valor da expressão.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$$

Função Exponencial

Execício. Determine o menor valor da expressão.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$$

Sugestão. Note que a expressão

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

é decrescente com y.

Função Exponencial

Execício. Determine o menor valor da expressão.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$$

Sugestão. Note que a expressão

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

é decrescente com y.
Portanto, seu menor valor é o que se obtém para o máximo valor de $y = 4x - x^2$.

Função Exponencial

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra *e* e definido pela relação:

Função Exponencial

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra *e* e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R}$$

Função Exponencial

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra *e* e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$e \cong 2{,}7183.$$

Função Exponencial

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra *e* e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$e \cong 2{,}7183.$$

3º) Construir o gráfico da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$.

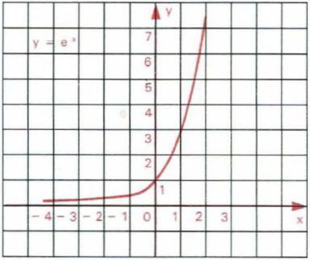
Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra *e* e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$e \cong 2{,}7183.$$

3º) Construir o gráfico da função exponencial de base *e*, $f(x) = e^x$.

x	e^x
−2	0,14
−1,5	0,22
−1	0,36
−0,5	0,60
0	1
0,5	1,65
1	2,72
1,5	4,48
2	7,39



Função Exponencial

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64, \; (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}, \; 4^x - 2^x = 2.$$

Função Exponencial

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64,\ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81},\ 4^x - 2^x = 2.$$

Método da redução a uma base comum.

Esse método será aplicado quando ambos os membros da equação forem redutíveis a potências de mesma bases $a(0 \leq a \neq 1)$.

Resumindo

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Função Exponencial

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64,\ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81},\ 4^x - 2^x = 2.$$

Método da redução a uma base comum.
Esse método será aplicado quando ambos os membros da equação forem redutíveis a potências de mesma bases $a(0 \leq a \neq 1)$.
Resumindo

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Obs. Essa equivalência decorre do fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora.

Função Exponencial

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64,\ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81},\ 4^x - 2^x = 2.$$

Método da redução a uma base comum.

Esse método será aplicado quando ambos os membros da equação forem redutíveis a potências de mesma bases $a(0 \leq a \neq 1)$.

Resumindo

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Obs. Essa equivalência decorre do fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora.

Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ b) $8^x = \frac{1}{32}$ c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

Função Exponencial

Soluções.

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

$S = \left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{5}$, $S = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$, $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

c) **Exercício.**

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{5}, \qquad S = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

c) **Exercício.**

Exercício. Resolva a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

Função Exponencial

Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$ b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$ c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3}$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$, $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

c) **Exercício.**

Exercício. Resolva a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$
Sugestão. Divida a expressão por 9^x.

Thank you

Thank you for your attention!