UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE RUSSAS

Algoritmos em Grafos

Aula 16: Fluxo Máximo em Redes(Ford-Fulkerson)

Professor Pablo Soares

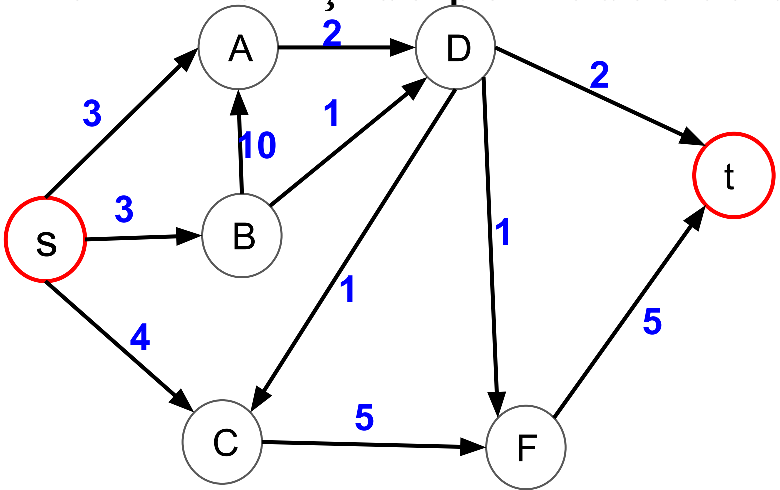
2022.1

Sumário

1. Árvore Geradora Mínima(**última aula**);
2. Fluxo Máximo em Redes
    a. Fluxo;
        i. Propriedades
    b. Rede Residual
    c. Caminho Aumentante
    d. Algoritmo de Ford-Fulkerson
        i. Complexidade do tempo de execução;
        ii. Exemplo.

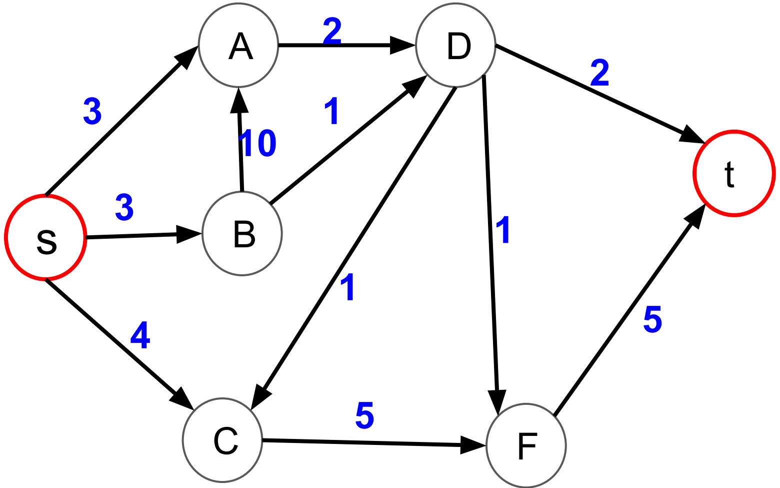
Fluxo Máximo em Redes

- Uma **rede** é um $G = (V, E)$ orientado
  - Em que cada aresta $(u, v) \in E$ possui uma **capacidade**
    - $c(u, v) \geq 0$ se $(u, v) \in E$
    - $c(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin E$
  - Dois vértices especiais
    - $s \rightarrow$ origem $\rightarrow$ Alcança todos os vértices
    - $t \rightarrow$ destino $\rightarrow$ Alcançado por todos os vértices



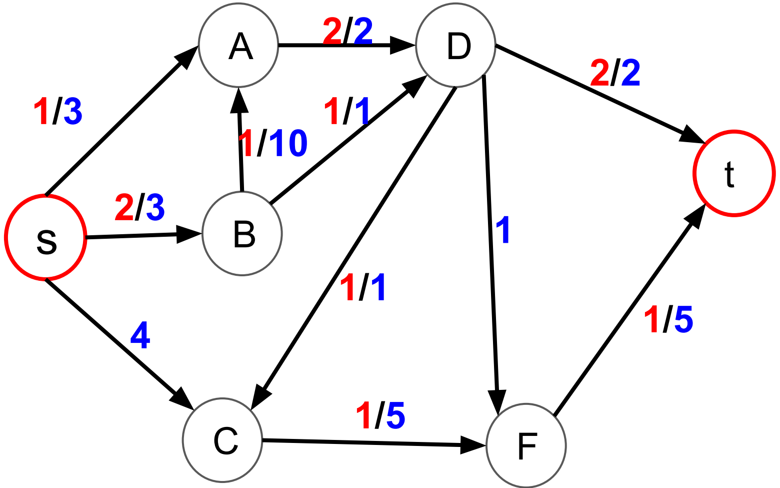
Fluxo Máximo em Redes

- Um <u>fluxo</u> "f" de s a t em G é uma função que associa um número não negativo $f(u, v)$ para cada aresta $(u, v) \in E$
  a. $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v),\ \forall\ (u, v) \in E$; **(capacidade)**
  b. $\Sigma f(w, u) = \Sigma f(u, z),\ \forall\ w, z, (u \neq s, u \neq t) \in V$; **(Conservação)**
  c. $f(u, v) = - f(v, u)$ **(antissimétrica)**
  d. $|f| = \Sigma f(s, v),\ \forall\ (s, v) \in E$ **(valor do fluxo)**



Fluxo Máximo em Redes

- Um <u>fluxo</u> "f" de s a t em G é uma função que associa um número não negativo $f(u, v)$ para cada aresta $(u, v) \in E$
  a. $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v), \forall\ (u, v) \in E$; **(capacidade)**
  b. $\Sigma f(w, u) = \Sigma f(u, z), \forall\ w, z, (u \neq s, u \neq t) \in V$; **(Conservação)**
  c. $f(u, v) = - f(v, u)$ **(antissimétrica)**
  d. $|f| = \Sigma f(s, v), \forall\ (s, v) \in E$ **(valor do fluxo)**



Fluxo Máximo em Redes

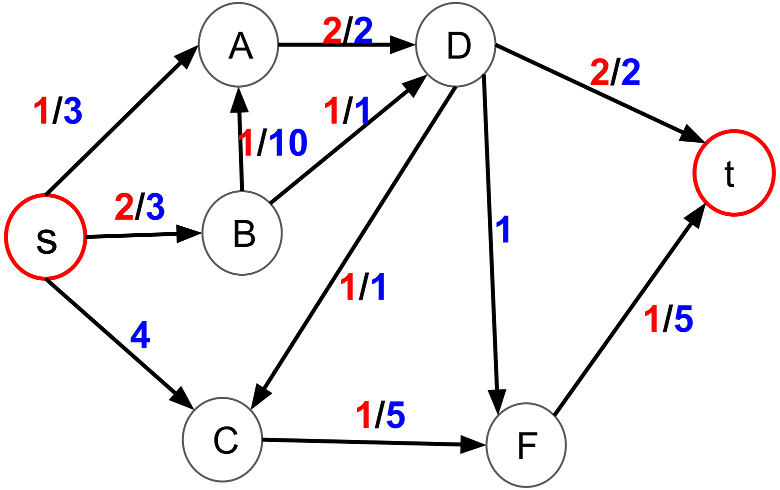
Como encontrar um fluxo que seja máximo??

Método de Ford-Fulkerson

1. Redes Residuais;
2. Caminho aumentante;

Fluxo Máximo em Redes

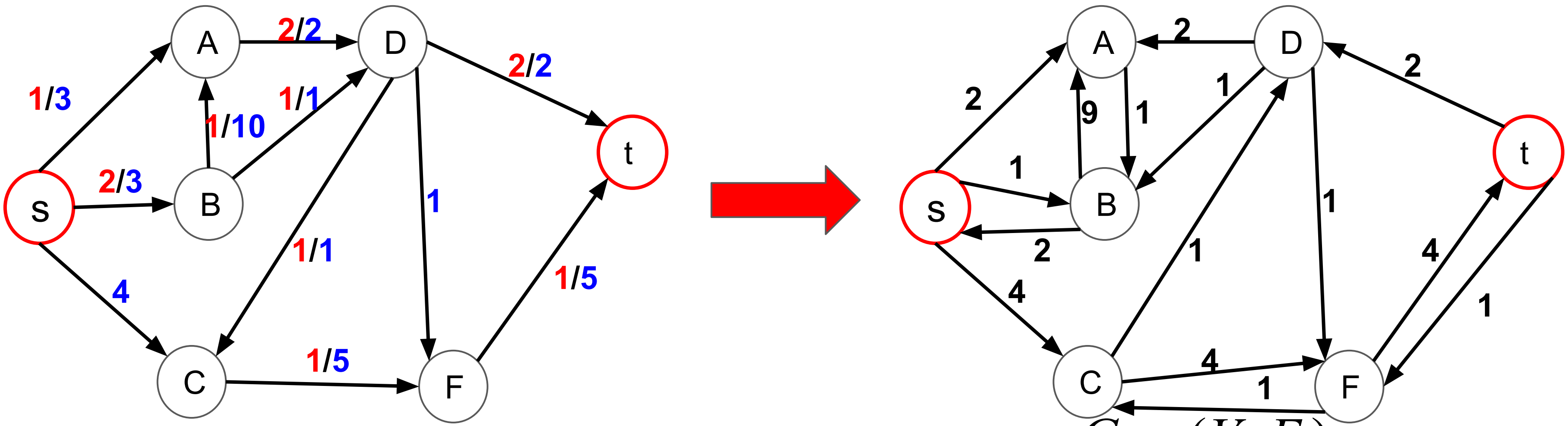
- Rede Residual
  a. Arestas que podem admitir mais fluxo;
  b. Capacidade residual $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v), \forall\ (u, v) \in E$
  c. Seja f um fluxo em $G = (V, E)$, a <u>rede residual</u> induzida por f
     - $G_f = (V, E_f)$, onde $E_f = \{(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in E : \boldsymbol{c_f > 0}\}$



$G = (V, E)$

Fluxo Máximo em Redes

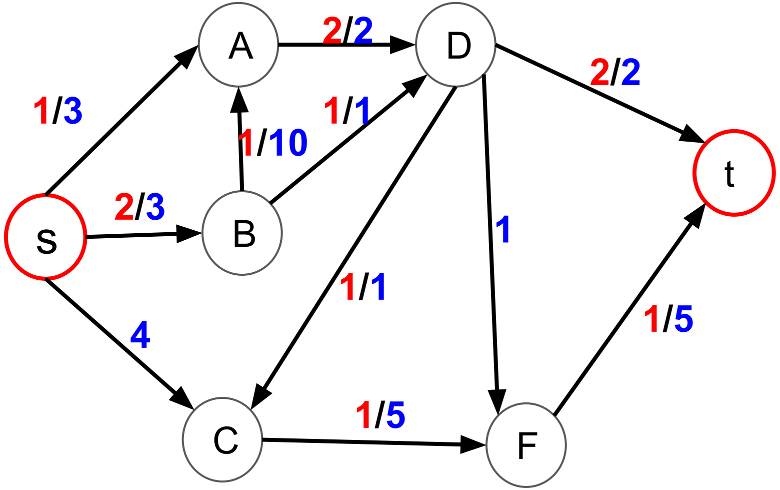
- Rede Residual
  a. Arestas que podem admitir mais fluxo;
  b. Capacidade residual $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v), \forall\ (u, v) \in E$
  c. Seja f um fluxo em $G = (V, E)$, a <u>rede residual</u> induzida por f
     - $G_f = (V, E_f)$, onde $E_f = \{(u, v) \in E : \boldsymbol{c_f > 0}\}$



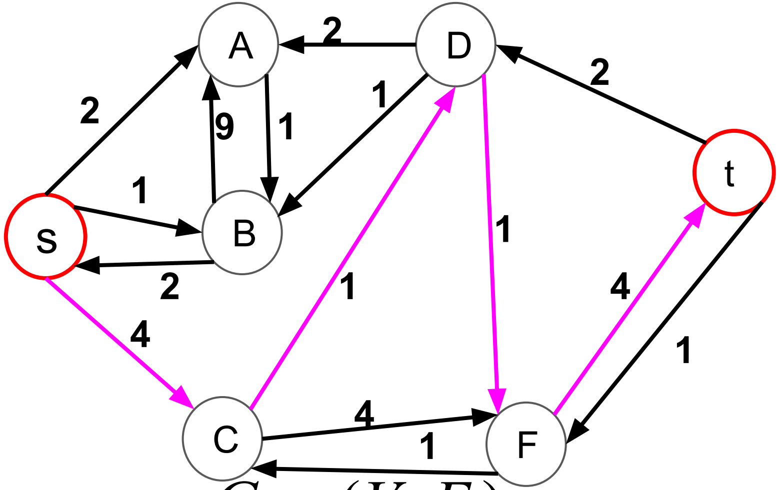
$G = (V, E)$ $\qquad$ $G_f = (V, E_f)$

Fluxo Máximo em Redes

- Caminho aumentante
  a. Seja f um fluxo em rede $G = (V, E)$, um <u>caminho aumentante</u> **P** é um caminho simples de "s" até "t" na **rede residual;**
  b. Capacidade residual
     - $c_f(\mathbf{P}) = min\{c_f(u, v): (u, v) \in \mathbf{P}\}$



$G = (V, E)$



$G_f = (V, E_f)$

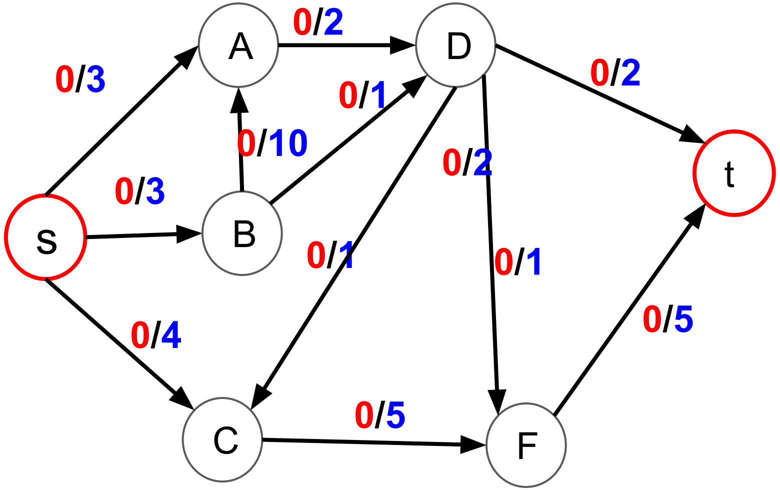
Pseudocódigo Ford-Fulkerson

```
Ford-Fulkerson(G, s, t)
    para cada aresta (u, v) ∈ E
        f[u, v]←0
        f[v, u]← 0
    fimpara
    enquanto existir um caminho P de s até t na rede residual G_f
        c_f (P) ← min{c_f(u, v): (u, v) ∈ P}
        para cada aresta (u, v) ∈ P
            f[u, v]←f[u, v] + c_f (P)
            f[v, u]←- f[u, v]
        fimpara
    fimenquanto
Fim.
```

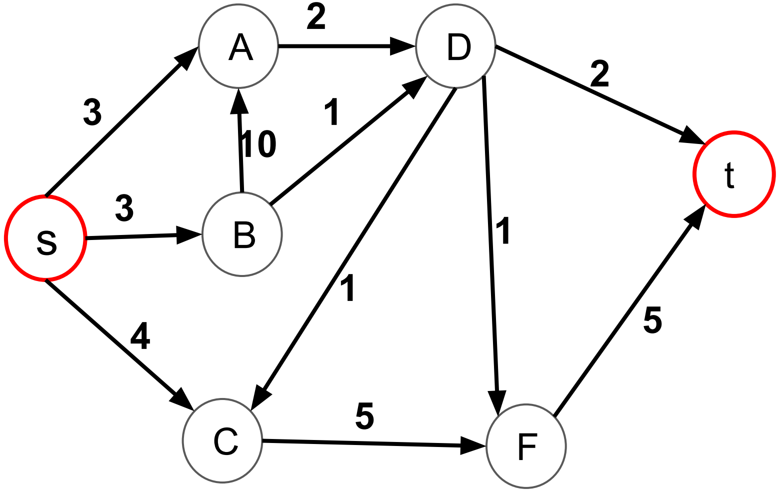
Complexidade do Tempo de Execução

- *Usando BFS*
    - $O(|E|f^*)$

Ford-Fulkerson (Exemplo)



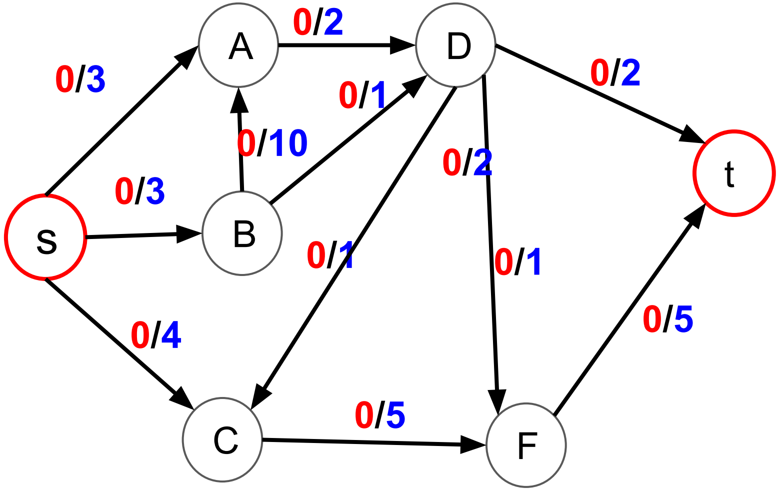
Grafo G



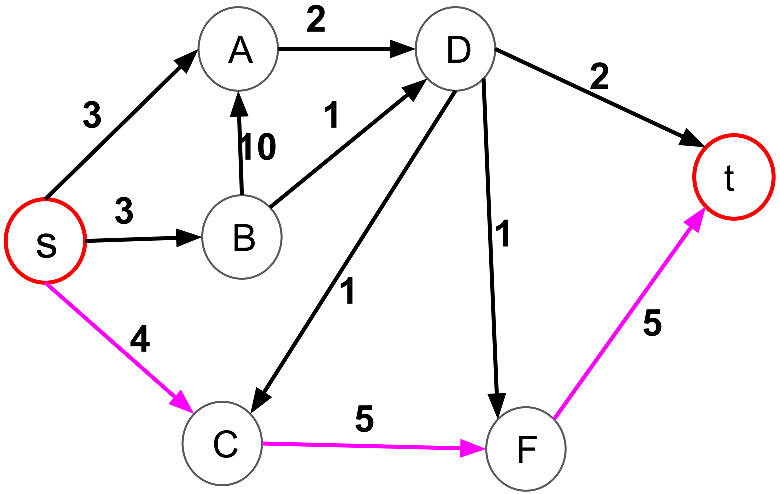
Rede Residual

Fluxo *f* = 0

Ford-Fulkerson (Exemplo)



Grafo G



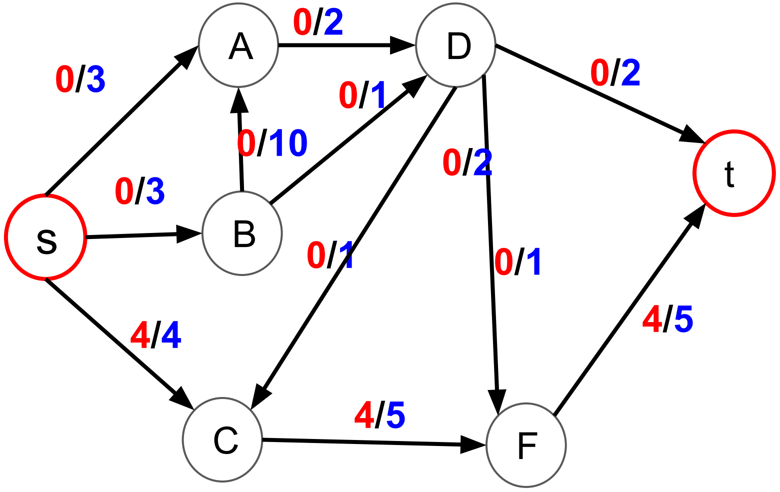
Rede Residual

Fluxo *f* = 0

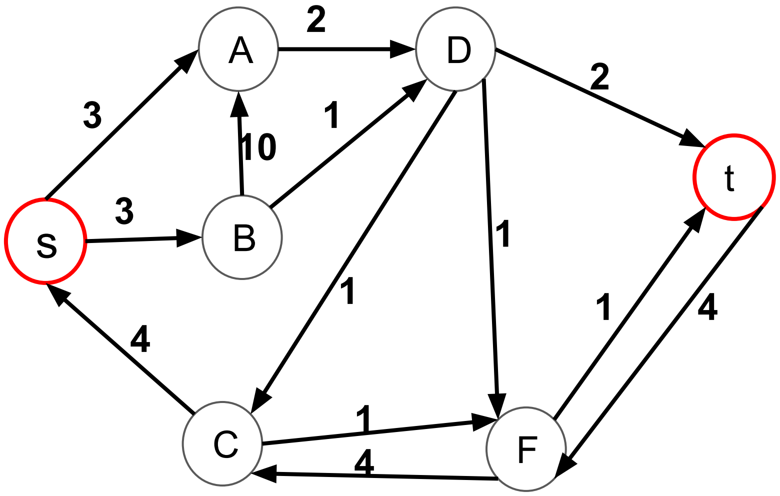
Caminho aumentante P: s - C - F - t

c_f (P) = *4*

Ford-Fulkerson (Exemplo)



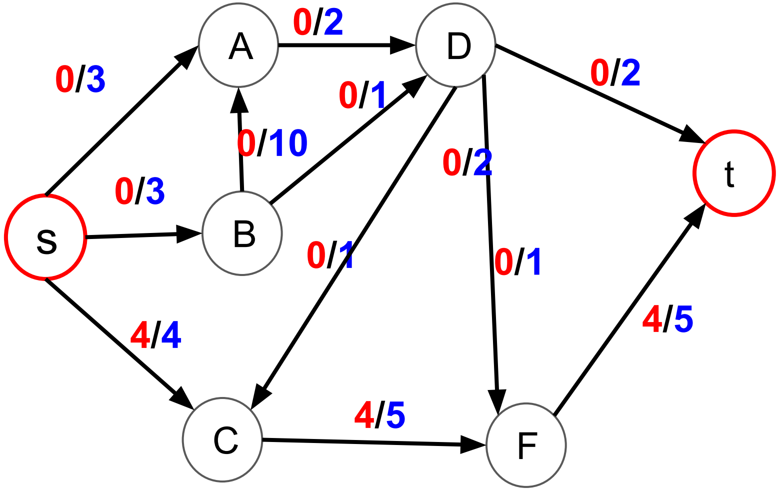
Grafo G



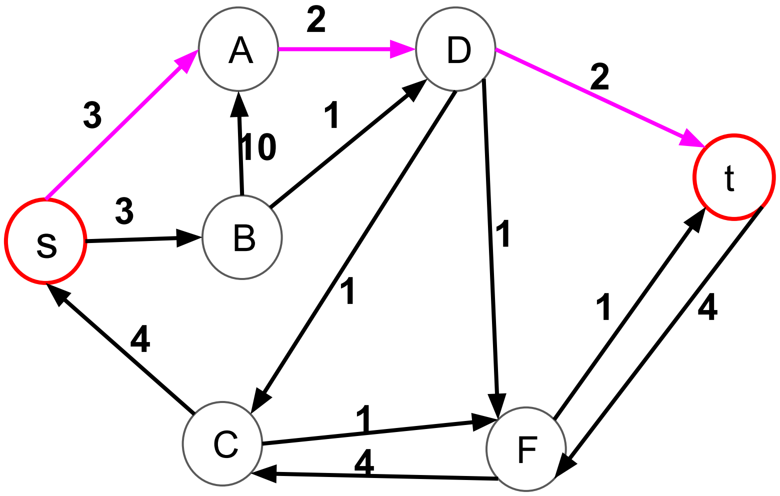
Rede Residual

Fluxo *f* = 4

Ford-Fulkerson (Exemplo)



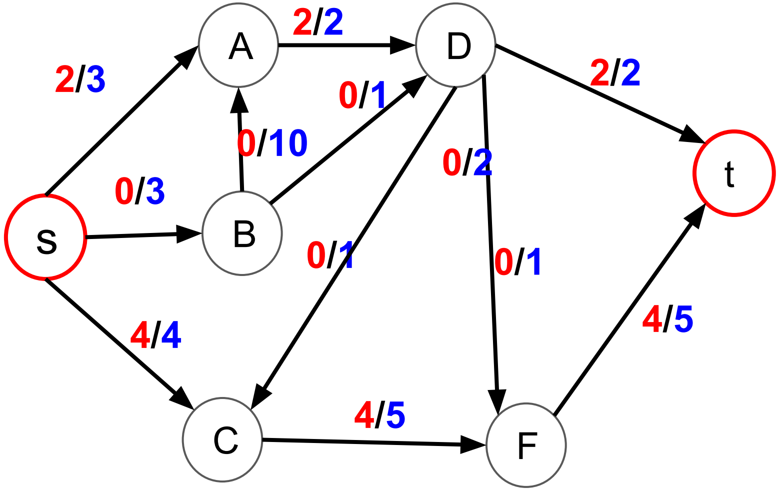
Grafo G



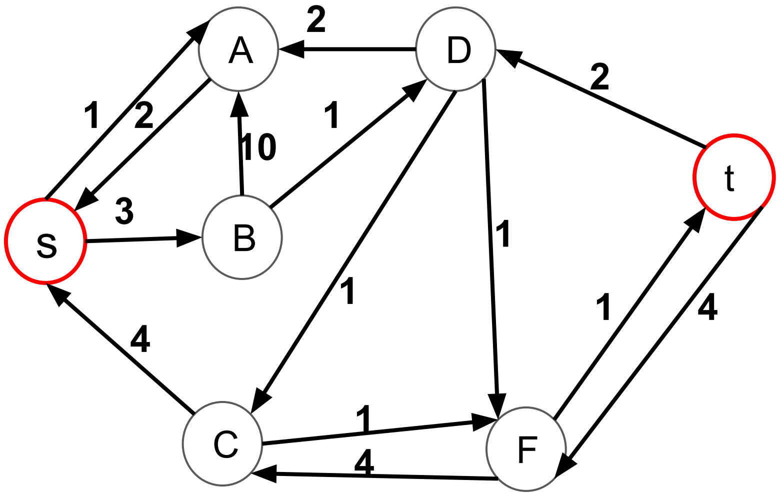
Rede Residual

Fluxo *f* = 4
Caminho aumentante P: s - A - D - t
c_f (P) = 2

Ford-Fulkerson (Exemplo)



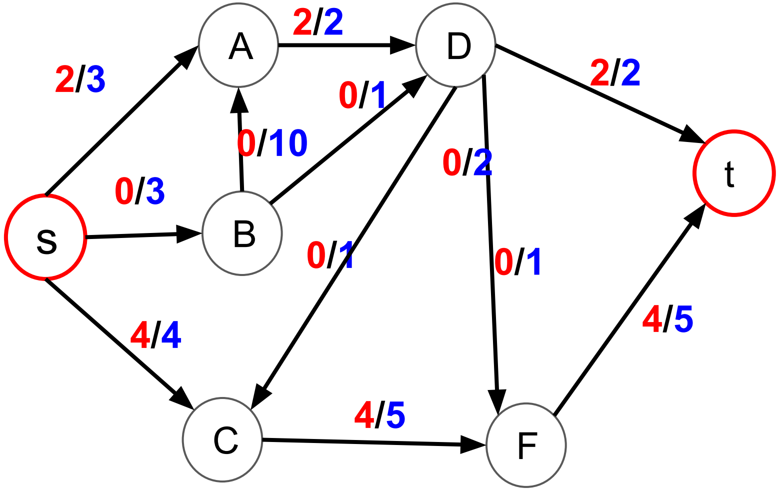
Grafo G



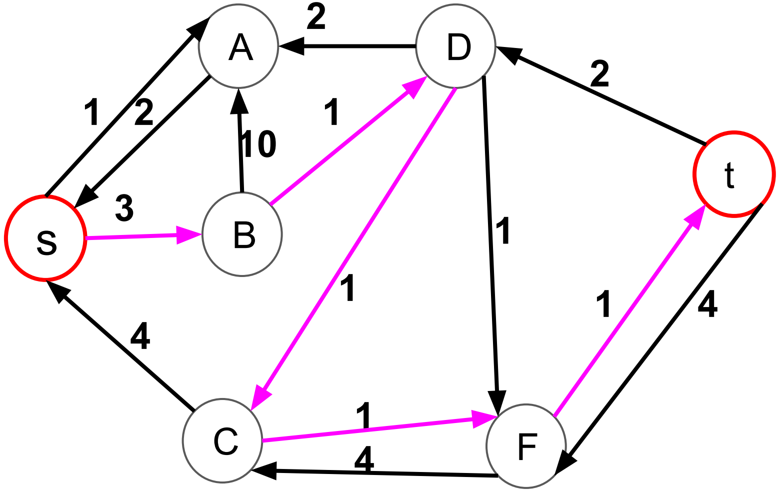
Rede Residual

Fluxo *f* = 6

Ford-Fulkerson (Exemplo)



Grafo G



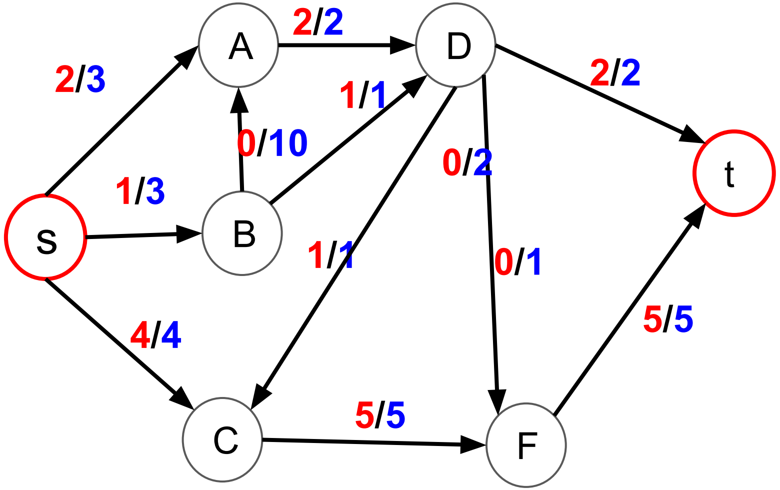
Rede Residual

Fluxo *f* = 6

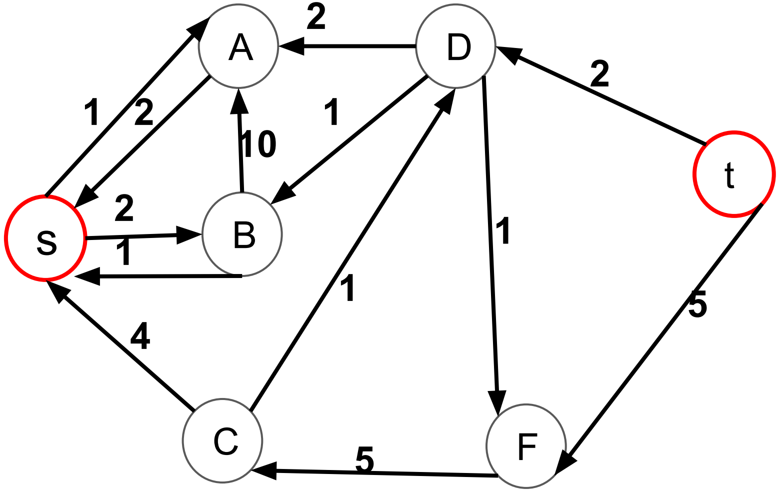
Caminho aumentante P: s - B - D - C - F - t

c_f **(P) = *1***

Ford-Fulkerson (Exemplo)



Grafo G

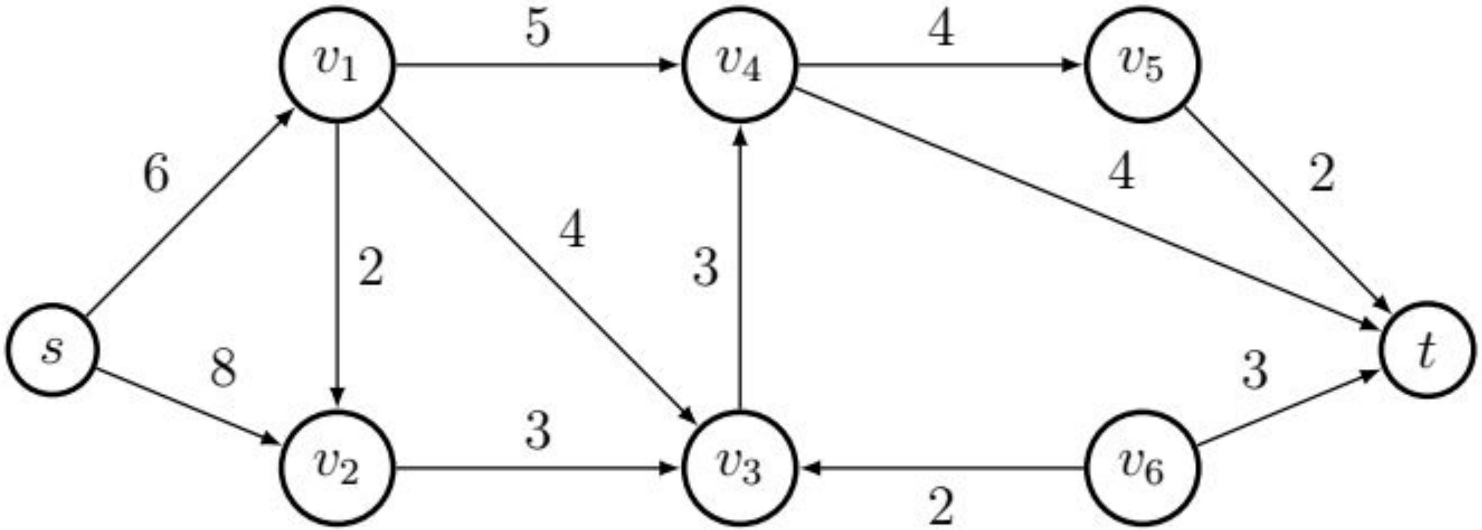


Rede Residual

Fluxo *f* = 7

Exercício de Fixação

Determine o fluxo máximo na rede abaixo.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE RUSSAS

Algoritmos em Grafos

Aula 16: Fluxo Máximo em Redes(Ford-Fulkerson)

Professor Pablo Soares

2022.1