Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \implies 3x - 1 - 2x > 3 \implies x > 3 + 1 \implies x > 4.$$

P-2) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$ e tem sinal constante, então:

a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.
b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos

1º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira por meio de uma multiplicação por 12.

2º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda foi obtida da primeira por meio de uma multiplicação por -1 e inversão do sentido da desigualdade.

3º) $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$. Notemos que a segunda foi obtida da primeira por meio da multiplicação por $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade **P-2** com o seguinte enunciado: "*Em uma inequação podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente*".

EXERCÍCIOS

206. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $4x + 5 > 2x - 3$
b) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leqslant 2x + 3$
c) $3(x + 1) - 2 \geqslant 5(x - 1) - 3(2x - 1)$

207. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{2} \geqslant x.$$

Solução

A inequação proposta é equivalente à inequação que se obtém multiplicando pelo mmc $(3, 2) = 6$:

$$2(x + 2) - 3(x - 1) \geqslant 6x.$$

Efetuando as operações, temos:

$$-x + 7 \geqslant 6x$$

ou ainda:

$$-7x \geqslant -7.$$

Dividindo ambos os membros por -7 e lembrando que devemos inverter a desigualdade, temos

$$x \leqslant 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}.$$

208. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{x - 3}{4} \geqslant 1$

b) $\dfrac{2x - 3}{2} - \dfrac{5 - 3x}{3} < 3x - \dfrac{1}{6}$

c) $(3x + 1)(2x + 1) \leqslant (2x - 1)(3x + 2) - (4 - 5x)$

d) $(3x - 2)^2 - (3x - 1)^2 > (x + 2)^2 - (x - 1)^2$

e) $4(x - 2) - (3x + 2) > 5x - 6 - 4(x - 1)$

f) $6(x + 2) - 2(3x + 2) > 2(3x - 1) - 3(2x + 1)$

209. Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por *1*, a nota da segunda prova é multiplicada por *2* e a da última prova é multiplicada por *3*. Os resultados, após somados, são divididos por *6*. Se a média obtida por este critério for maior ou igual a *6,5*, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno tenha tirado *6,3* na primeira prova e *4,5* na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

210. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 2$$

Solução

A inequação proposta é equivalente a $\dfrac{2x - 3}{x-1} - 2 \leqslant 0$,

que, reduzindo ao mesmo denominador, fica $\dfrac{-1}{x - 1} \leqslant 0$.

Notemos que a fração $\dfrac{-1}{x - 1}$ deverá ser não positiva; como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x - 1$ deverá ser positivo.

$$x - 1 > 0 \iff x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

211. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3$ b) $\dfrac{4x - 5}{2x - 1} \geqslant 2$ c) $\dfrac{-4 - 3x}{3x + 2} < -1$

XIV. Inequações simultâneas

100. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo *e*:

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{(I)} \\ \text{e} \\ g(x) < h(x) & \text{(II)} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto solução de (I) e S_2 o conjunto solução de (II), o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo

Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leqslant x + 4.$

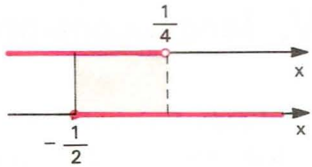
Temos que resolver duas inequações:

(I) $3x + 2 < -x + 3 \implies 4x < 1 \implies x < \dfrac{1}{4}$

(II) $-x + 3 \leqslant x + 4 \implies -2x \leqslant 1 \implies x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

A interseção desses dois conjuntos é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{4}\right\}.$$



EXERCÍCIOS

212. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$

b) $-4 < 4 - 2x \leqslant 3$

c) $-3 < 3x - 2 < x$

d) $x + 1 \leqslant 7 - 3x < \dfrac{x}{2} - 1$

e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

213. Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leqslant 1 \\ 3x - 1 \leqslant 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leqslant 2x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x-3) > 1 - 3(x-5) \end{cases}$

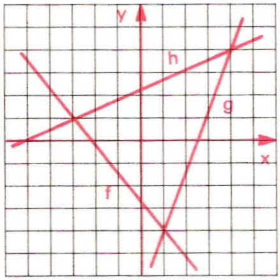
f) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$

214. Com base nos gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) < g(x) \leqslant h(x)$

b) $g(x) \leqslant f(x) < h(x)$

c) $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$



XV. Inequações-produto

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$f(x) \cdot g(x) > 0, \quad f(x) \cdot g(x) < 0, \quad f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$$

são denominadas *inequações-produto*.

101. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Assim, são possíveis dois casos:

1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução do sistema.

2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4).$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$