

# Aula 3

## Complexidade de Algoritmos

### Projeto e Análise de Algoritmos

Professor Eurinardo Rodrigues Costa  
Universidade Federal do Ceará  
Campus Russas

2021.1

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## ► Correção de Algoritmos Iterativos

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
  - ▶ Invariante de Laço

## Aula Passada

### Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

### Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

- ▶ Correção de Algoritmos Iterativos
  - ▶ Invariante de Laço
  - ▶ Exemplo: Insertion-Sort

# Complexidade de Algoritmos

## Complexidade de Tempo

PAA - Aula 3

Prof. Eurinardo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso



## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- Complexidade de pior caso

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de caso médio

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso



## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de caso médio  
=  $p_1 \times t_1 + p_2 \times t_2 + \dots + p_m \times t_m$ ,

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de caso médio  
=  $p_1 \times t_1 + p_2 \times t_2 + \dots + p_m \times t_m$ ,  
onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência da entrada  $E_i$ .

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de caso médio  
=  $p_1 \times t_1 + p_2 \times t_2 + \dots + p_m \times t_m$ ,  
onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência da entrada  $E_i$ .

## Complexidade de Espaço

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

## Complexidade de Tempo

Sejam  $A$  um algoritmo,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  entradas de  $A$  que possuem tamanho  $n$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando a entrada é  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Definem-se

- ▶ Complexidade de pior caso =  $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de melhor caso =  $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ▶ Complexidade de caso médio  
=  $p_1 \times t_1 + p_2 \times t_2 + \dots + p_m \times t_m$ ,  
onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência da entrada  $E_i$ .

## Complexidade de Espaço

Análogo a Complexidade de Tempo para células de memória (em vez de passos de execução).

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

---

## Algoritmo 1: Insertion-Sort

---

**Entrada:** Vetor  $A[1 \dots n]$  e inteiro  $n$  (tamanho de  $A$ )

**Saída:**  $A$  ordenado

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2      chave  $\leftarrow A[j]$ 
3      %inserir  $A[j]$  na sequência ordenada  $A[1 \dots j - 1]$ 
4       $i \leftarrow j - 1$ 
5      enquanto  $(A[i] > \text{chave})$  e  $(i > 0)$  faça
6           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ 
7           $i \leftarrow i - 1$ 
8      fim
9       $A[i + 1] \leftarrow \text{chave}$ 
10 fim
```

---

# Análise da ordenação por inserção

PAA - Aula 3

Prof. Eurinardo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

# Análise da ordenação por inserção

PAA - Aula 3

Prof. Eurinardo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

► Tempo do Insertion-Sort.

# Análise da ordenação por inserção

PAA - Aula 3

Prof. Eurinardo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

- ▶ Tempo do Insertion-Sort.
- ▶ Complexidade de melhor caso.



# Análise da ordenação por inserção

PAA - Aula 3

Prof. Eurinardo

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

- ▶ Tempo do Insertion-Sort.
- ▶ Complexidade de melhor caso.
- ▶ Complexidade de pior caso



LEISERSON, C.E., STEIN, C., RIVEST, R.L.,  
CORMEN T.H.

*Algoritmos: teoria e prática, 3ed.*

Editora Campus, ano 2012.

Aula Passada

Complexidade de Algoritmos

Complexidade de Tempo

Complexidade de Espaço

Complexidade de Algoritmos Iterativos

Análise da ordenação por inserção

Tempo do Insertion-Sort

Complexidade de melhor caso

Complexidade de pior caso

# Obrigado!