Funções Quadráticas

Anderson Feitoza Leitão Maia

MATEMÁTICA BÁSICA
Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará

27 de Julho de 2021

Apresentação

Funções Quadráticas

Funções Quadráticas

Funções Quadráticas

Função do 2º Grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados e $a \neq 0$.

Funções Quadráticas

Função do 2º Grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados e $a \neq 0$.

Lei de correspondência.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad (a \neq 0)$$

Funções Quadráticas

Função do 2º Grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados e $a \neq 0$.

Lei de correspondência.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad (a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = -2x^2 + 5x$

f) $f(x) = -3x^2$

Funções Quadráticas

Função do 2º Grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados e $a \neq 0$.

Lei de correspondência.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad (a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$

b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ em que $a = 2$, $b = 4$, $c = -3$

c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ em que $a = -3$, $b = 5$, $c = -1$

d) $f(x) = x^2 - 4$ em que $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$

e) $f(x) = -2x^2 + 5x$ em que $a = -2$, $b = 5$, $c = 0$

f) $f(x) = -3x^2$ em que $a = -3$, $b = 0$, $c = 0$

Funções Quadráticas

Teorema

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Funções Quadráticas

Teorema

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplos

1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

Funções Quadráticas

Teorema

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplos

1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Funções Quadráticas

Teorema

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplos

1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8

Funções Quadráticas

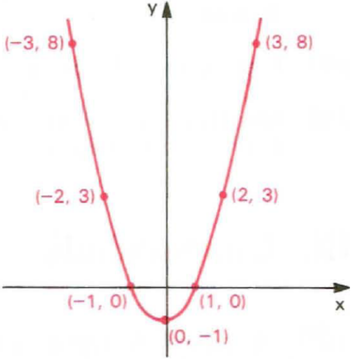
Teorema

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplos

1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8



Funções Quadráticas

2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

Funções Quadráticas

2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Funções Quadráticas

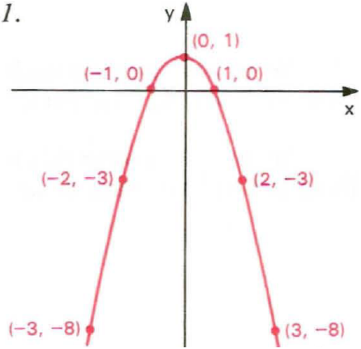
2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8

Funções Quadráticas

2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

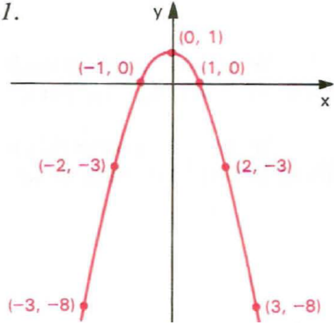
x	$y = -x^2 + 1$
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8



Funções Quadráticas

2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8



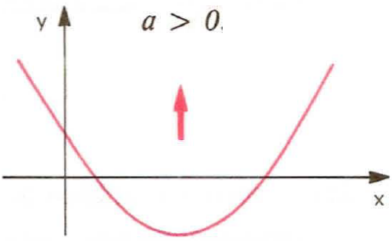
Concavidade

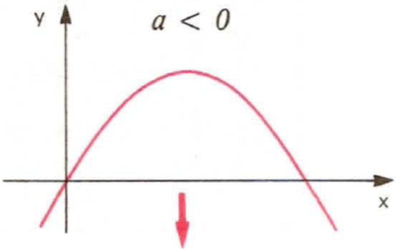
A parábola da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo".

Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.
Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Funções Quadráticas

Representação Geométrica.





Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ temos a chamada **forma canônica**

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Funções Quadráticas

A Forma Canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ temos a chamada **forma canônica**

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

OBS. A forma canônica geralmente é utilizada para construção do gráfico.

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Usando a forma canônica temos que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Usando a forma canônica temos que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Usando a forma canônica temos que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Funções Quadráticas

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Usando a forma canônica temos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

Portanto, o zeros das função de segundo grau são as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Usando a forma canônica temos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$,

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$,

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Funções Quadráticas

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar.

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

Número de raízes

A existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de Δ ser real. Assim, temos três casos a considerar.

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

Resumo

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

Funções Quadráticas

Significado Geométrico das Raízes

Dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Funções Quadráticas

Significado Geométrico das Raízes

Dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Exemplo. Considere a equação $y = x^2 - 4x + 3$. e construa o gráfico da função.
Solução. Como $\Delta = b^2 - 4ac$, então $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$.

Funções Quadráticas

Significado Geométrico das Raízes

Dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Exemplo. Considere a equação $y = x^2 - 4x + 3$. e construa o gráfico da função.
Solução. Como $\Delta = b^2 - 4ac$, então $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$. Uma vez que $\Delta \neq 0$, temos duas soluções:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Funções Quadráticas

Significado Geométrico das Raízes

Dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

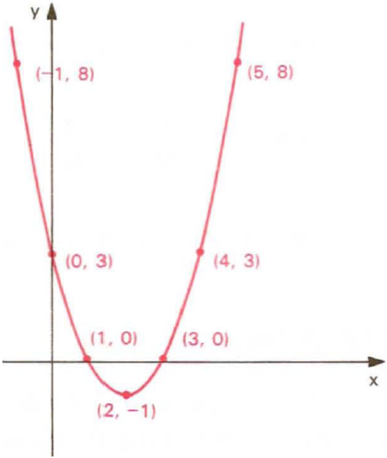
Exemplo. Considere a equação $y = x^2 - 4x + 3$. e construa o gráfico da função.
Solução. Como $\Delta = b^2 - 4ac$, então $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$. Uma vez que $\Delta \neq 0$, temos duas soluções:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ou seja,

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 1$$

Funções Quadráticas



Observe na figura acima que nos pontos $(1,0)$ e $(3,0)$ a parábla corta o eixo x.

Funções Quadráticas

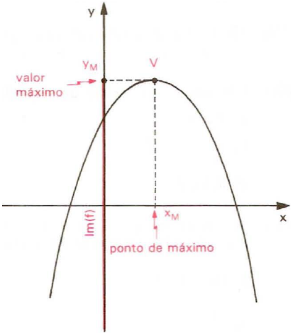
Máximo

• Dizemos que o numero $y_M \in Im(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$.
• O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função.

Funções Quadráticas

Máximo

- Dizemos que o numero $y_M \in Im(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$.
- O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função.



Funções Quadráticas

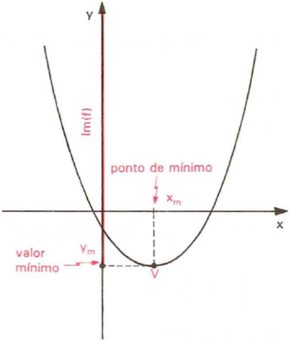
Mínimo

• Dizemos que o numero $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$.
• O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto de mínimo da função.

Funções Quadráticas

Mínimo

- Dizemos que o numero $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$.
- O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto de mínimo da função.



Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$. temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = \frac{-\Delta}{4a}$$

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \quad \text{isto é:} \quad y_m = -9$$

em

$$x_m = \frac{-b}{2a}$$

Funções Quadráticas

Ponto de Máximo (x_M, y_M).

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

Ponto de Mínimo (x_m, y_m).

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}.$$

Funções Quadráticas

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$.

Funções Quadráticas

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$.

Vértice da Parábola

O ponto

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

é chamado vértice da parábola.

Funções Quadráticas

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$.

Vértice da Parábola

O ponto
$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$
é chamado vértice da parábola.

Imagem. Tomemos inicialmente a função na forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Funções Quadráticas

EXERCÍCIO 1º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$.

Vértice da Parábola

O ponto

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

é chamado vértice da parábola.

Imagem. Tomemos inicialmente a função na forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0,$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º caso:

$a < 0$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º caso:

$a < 0 \implies a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º caso:

$a < 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$, e, portanto:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

Funções Quadráticas

Observemos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º caso:

$a < 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$$a < 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$$a < 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \operatorname{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$$a < 0 \implies \operatorname{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \implies \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

logo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$$a < 0 \implies Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

logo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 \implies \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \implies \mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

logo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 \implies \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$

Como $a = 2 > 0$, temos:

Funções Quadráticas

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \implies Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplo

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

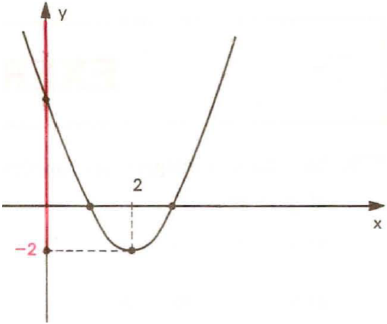
Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

logo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 \implies \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$

Como $a = 2 > 0$, temos: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}$.

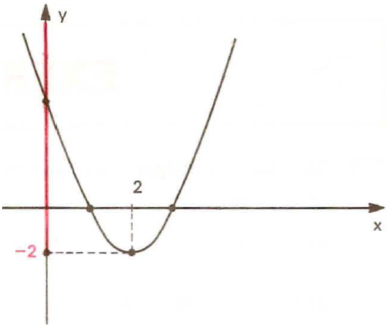
Funções Quadráticas

Gráfico.



Funções Quadráticas

Gráfico.



2º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}.$$

Funções Quadráticas

Eixo de Simetria

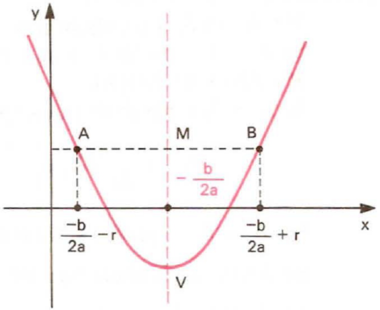
O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vertice.

Funções Quadráticas

Eixo de Simetria

O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vertice.

Visão Geomética.



Funções Quadráticas

Contrução do Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, coletamos informaçãoes preliminares que são:

Funções Quadráticas

Contrução do Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, coletamos informaçãoes preliminares que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

Funções Quadráticas

Contrução do Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, coletamos informaçãoes preliminares que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

2º) Se $a>0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Funções Quadráticas

Contrução do Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, coletamos informaçãoes preliminares que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

2º) Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3º) Zeros da função.
Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos

$$P_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x.

Funções Quadráticas

Contrução do Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, coletamos informaçãoes preliminares que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

2º) Se $a>0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3º) Zeros da função.

Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos

$$P_1\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

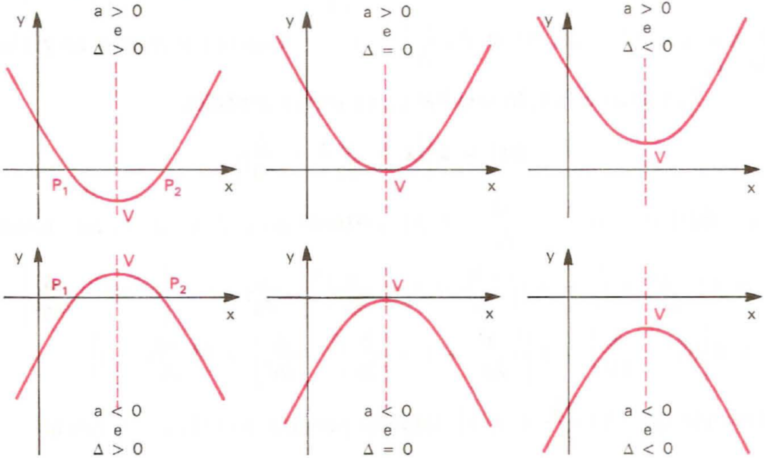
Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x.

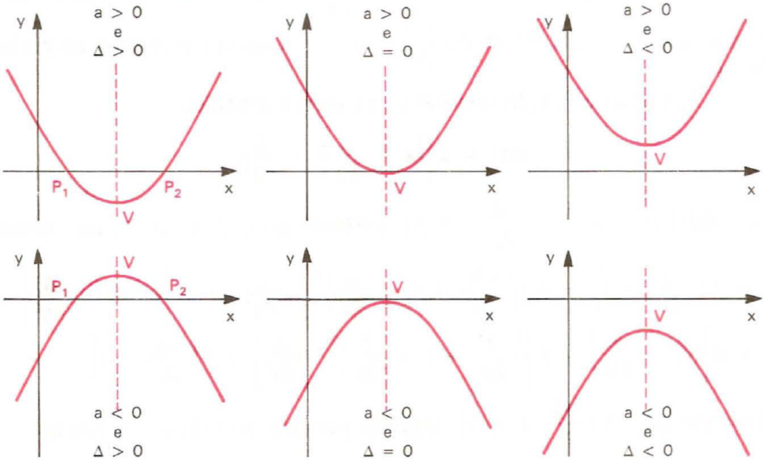
4º) Vértice da parábola é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, que é máximo se $a < 0$ ou é mínimo se $a > 0$.

Funções Quadráticas

Seguem os tipos de gráficos que podemos obter:



Seguem os tipos de gráficos que podemos obter:



Exercício.

- **Pesquisar sobre o Sinal da Função Quadrática.**
- **Pesquisar sobre a Inequação do 2^{o} grau.**

Thank you

Thank you for your attention!