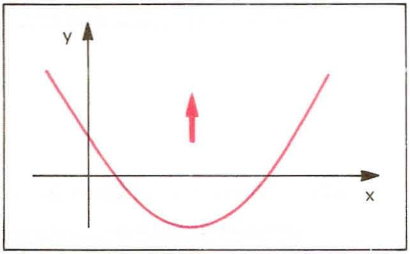
226. Em que condições a função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida?

227. Determine uma função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

228. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, determine o produto abc.

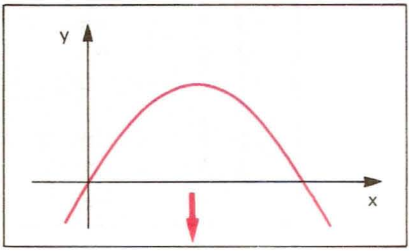
III. Concavidade

109. A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo".



Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.



IV. Forma canônica

110. A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores x e y, como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a x alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinada função quadrática os valores de abscissa (valores de x), em que a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros.

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada *forma canônica*.

EXERCÍCIOS

229. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
j) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$
k) $f(x) = 2x^2 - 4x$
l) $f(x) = -3x^2 + 6$
m) $f(x) = 4x^2 + 3$
n) $f(x) = -5x^2$

230. Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de *CR$ 1 250,00*, qual foi a quantidade vendida?

231. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

232. a) Resolva a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = -8 \end{cases}$.

233. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.
Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cuja solução é $z = 4$ ou $z = -1$, mas $z = x^2$; então:

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \implies \nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

234. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$
c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$
d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$
f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$
g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$
h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

235. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$$a = m,\ b = 2m - 1,\ c = m - 2 \ \text{ e } \ \Delta = 4m + 1.$$

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos, então:

$$a = m \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 4m + 1 > 0$$

ou seja:

$$m \neq 0 \quad \text{e} \quad m > -\frac{1}{4}$$

236. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

237. Determine os valores de m para que a equação do 2º grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

238. Determine os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

239. Determine os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

240. Determine os valores de m para que a função $f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

241. Determine os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

242. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas; α e β são dois números reais não nulos. O que se pode afirmar sobre as raízes do trinômio $\frac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2 c$?

243. Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2, temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e para produto P das raízes $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

244. Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2, calcule:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

245. As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Calcule o valor de m.

246. As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Calcule o módulo da diferença entre essas raízes.

247. Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual é o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$?

248. Determine o parâmetro m na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ele tenha uma raiz nula e a outra positiva.

249. Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Sendo $k \neq 0$, determine k.

250. Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

251. Obtenha uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e -3

b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) $0{,}4$ e 5

d) 1 e $-\sqrt{2}$

e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

252. Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2, obtenha a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$

b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$

c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$

d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

2º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}.$$

VII. Vértice da parábola

117. O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

256. Determine os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 3x$

c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

257. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em IR.

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

258. Determine o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

259. Determine o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ para que o valor máximo seja 2.

260. Determine o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m-1)x + (m+2)$ para que o valor máximo seja 2.

261. Determine o valor de m na função real $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

262. Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

Solução

Indicando por x e z esses números e por y o seu produto, temos:

$$x + z = 8 \qquad y = x \cdot z$$

Como precisamos ficar com uma só das variáveis, x ou z, fazemos

$$x + z = 8 \implies z = 8 - x$$

e portanto:

$$y = x \cdot z \implies y = x(8 - x) \implies y = -x^2 + 8x$$

Como $a = -1 < 0$, y é máximo quando

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} \implies x = 4.$$

Substituindo em $z = 8 - x$, vem $z = 4$.

Logo, os números procurados são 4 e 4.

263. Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

264. Dada $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, para que valor de x a função atinge um máximo?

265. A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v.

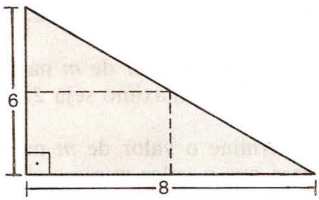
266. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$, determine aqueles cujo produto é máximo.

267. Dentre todos os retângulos de perímetro $20\,cm$, determine o de área máxima.

268. Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

269. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

270. É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima.



271. Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado *4 cm*, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

272. Num triângulo isósceles de base *6 cm* e altura *4 cm* está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima, sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

273. Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas $(4, 10)$ deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6. Qual é a distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q)?

274. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar *400* metros de tela de arame, de modo a produzir área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

VIII. Imagem

118. Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou seja, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$. Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$$a > 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0, \text{ e, portanto:}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x - \dfrac{5}{3}$.

Na função $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x - \dfrac{5}{3}$, temos:

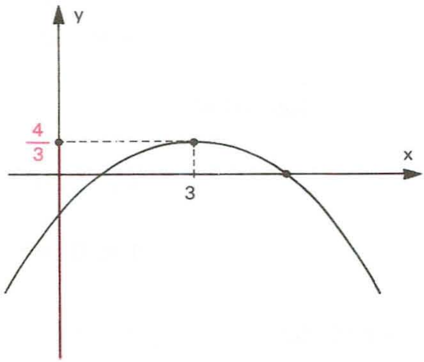
$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = 2 \quad e \quad c = -\frac{5}{3}$$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

e portanto:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\dfrac{16}{9}}{4\left(\dfrac{-1}{3}\right)} = \frac{4}{3}.$$



Como $a = -\dfrac{1}{3} < 0$, temos:

$$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{4}{3}\right\}.$$

EXERCÍCIOS

275. Determine a imagem das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = 3x^2 - 9x + 6$

d) $y = -4x^2 + 8x + 12$

e) $y = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

f) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

EXERCÍCIOS

278. Faça o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1$ ou $x = 3$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$.

Vértice

Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos

$a = 1, b = -4, c = 3$ e $\Delta = 4$.

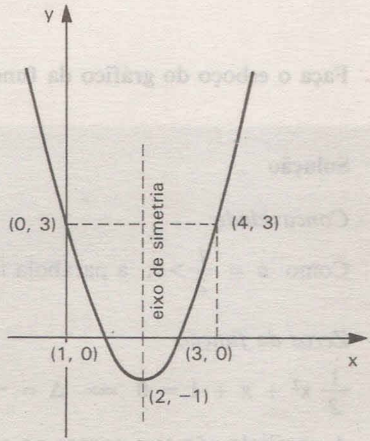
Como $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1$,

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico

Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y. Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y, podemos determinar um outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação à reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).



279. Faça o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

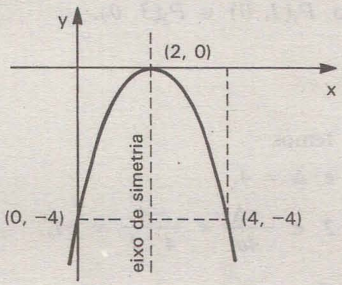
$-x^2 + 4x - 4 = 0 \implies x = 2$

A parábola admite um único ponto no eixo x, que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x, então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico



280. Faça o esboço do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \implies \Delta = -1 < 0 \implies \nexists$ raízes reais.

A parábola não tem pontos no eixo dos x.

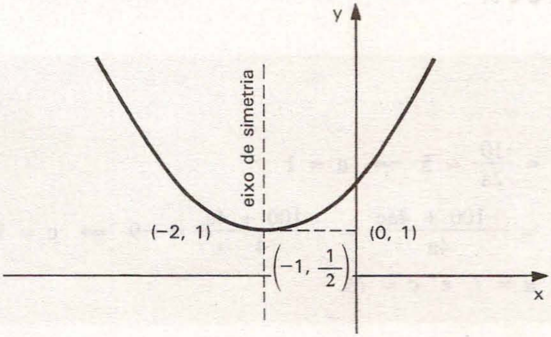
Vértice

Em $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, temos:

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ e $\Delta = -1$.

Como $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, o vértice é $V\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Gráfico



281. Construa o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

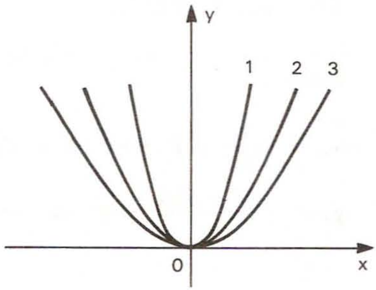
e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

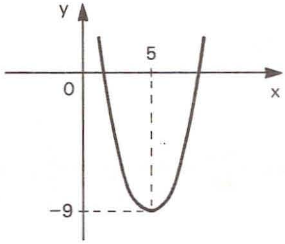
g) $y = -x^2 + x - 1$

h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

282. No gráfico ao lado estão representadas três parábolas, *1*, *2*, *3*, de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$. Qual é a relação entre *a*, *b* e *c*?



283. O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:



Determine *a* e *c*.

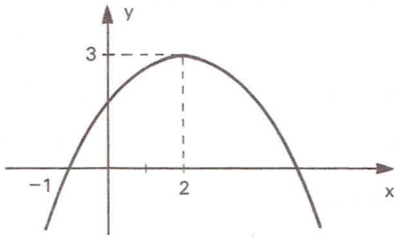
Solução

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2a} = 5 \Longrightarrow a = 1$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-100 + 4ac}{4a} = \frac{-100 + 4c}{4} = -9 \Longrightarrow c = 16$$

Resposta: $a = 1$ e $c = 16$.

284. A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.



Determine o trinômio.

Solução

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 2 \Longrightarrow -b = 4a \Longrightarrow b^2 = 16a^2 \quad \text{(I)}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 3 \Longrightarrow -(16a^2 - 4ac) = 12a$$

$$16a - 4c = -12 \Longrightarrow 4a - c = -3 \quad \text{(II)}$$

Como $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 4$ (já utilizado em I)

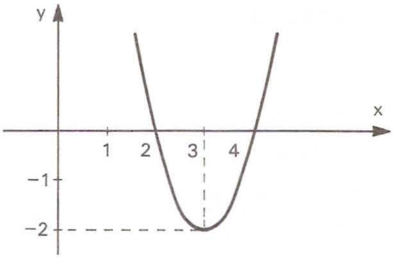
Temos, ainda: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = -5 \implies c = -5a$ (III)

Substituindo (III) em (II), vem: $4a + 5a = -3 \implies a = -\dfrac{1}{3}$.

Portanto: $b = \dfrac{4}{3}$ e $c = \dfrac{5}{3}$.

Então, o trinômio é: $y = \dfrac{-1}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

285. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado abaixo, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine o valor de a.



286. Determine a função $g(x)$ cujo gráfico é o simétrico do gráfico da função $f(x) = 2x - x^2$ em relação à reta $y = 3$. Esboce o gráfico.

287. Os gráficos de duas funções quadráticas g e h interceptam-se nos pontos $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, com $x_2 > x_1$, como mostra a figura.

Se $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = dx^2 + ex + f$, a área da região sombreada, na figura, é dada por $F(x_2) - F(x_1)$, em que $F(x) = \dfrac{d-a}{3} \cdot x^3 + \dfrac{e-b}{2} \cdot x^2 + (f-c)x$.

Nessas condições, quanto vale a área da região sombreada, no caso em que $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$?