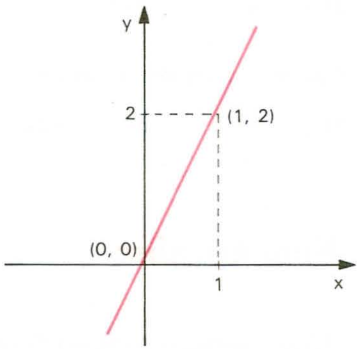
Exemplos

1º) Construir o gráfico da função $y = 2x$. Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e no caso da função linear um dos pontos é a origem, basta atribuir a x um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

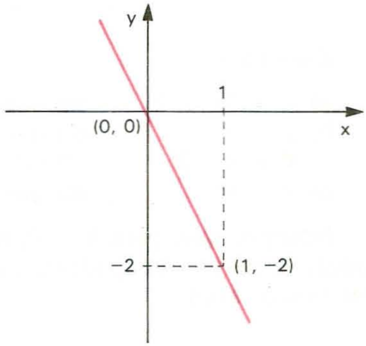
x	y = 2x
1	2



Pelos pontos $P(0, 0)$ e $Q(1, 2)$ traçamos a reta PQ, que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Construir o gráfico da função $y = -2x$. Analogamente, temos:

x	y = −2x
1	−2



EXERCÍCIOS

169. Construa o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2$

b) $y = \sqrt{2}$

c) $y = -3$

d) $y = 0$

170. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{x}{2}$

171. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = -x$ b) $y = -2x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\frac{x}{2}$

IV. Função afim

83. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ e b são números reais dados.

$$\boxed{f(x) = ax + b} \quad (a \neq 0)$$

Exemplos

a) $y = 3x + 2$	em que	$a = 3$	e	$b = 2$
b) $y = -2x + 1$	em que	$a = -2$	e	$b = 1$
c) $y = x - 3$	em que	$a = 1$	e	$b = -3$
d) $y = 4x$	em que	$a = 4$	e	$b = 0$

Notemos que, para $b = 0$, a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim.

V. Gráfico

84. *Teorema*

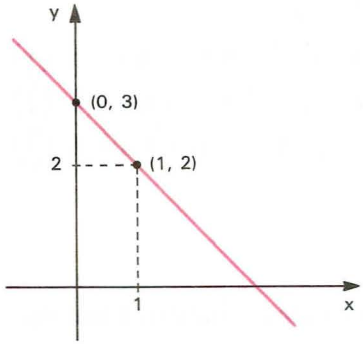
"O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ é uma reta."

Demonstração

Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

2ª) Construir o gráfico da função $y = -x + 3$.
De modo análogo, temos:

x	y = −x + 3
0	3
1	2



EXERCÍCIOS

172. Construa o gráfico cartesiano das funções de IR em IR:

a) $y = 2x - 1$
b) $y = x + 2$
c) $y = 3x + 2$
d) $y = \frac{2x - 3}{2}$
e) $y = -3x - 4$
f) $y = -x + 1$
g) $y = -2x + 3$
h) $y = \frac{4 - 3x}{2}$

173. Resolva analítica e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução analítica

Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vamos apresentar dois deles.

1º processo: Substituição

Este processo consiste em substituir o valor de uma das incógnitas, obtido a partir de uma das equações, na outra.

Resolvendo, por exemplo, a primeira equação na incógnita x, temos:

$$x - y = -3 \iff x = y - 3$$

e substituímos x por esse valor na segunda equação:

$$2(y - 3) + 3y = 4 \iff 2y - 6 + 3y = 4 \iff y = 2$$

que levamos à primeira equação, encontrando:

$$x - 2 = -3 \iff x = -1.$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

2º processo: Adição

Este processo baseia-se nas seguintes propriedades:

I. "Num sistema de equações, se multiplicamos todos os coeficientes de uma equação por um número não nulo, o sistema que obtemos é equivalente ao anterior (*)".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

II. "Num sistema de equações, se substituímos uma das equações pela sua soma com uma outra equação do sistema, o novo sistema é equivalente ao anterior".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O fundamento do processo da adição consiste no seguinte: aplicando a primeira propriedade, multiplicamos cada equação por números convenientes, de modo que os coeficientes de determinada incógnita sejam opostos e, aplicando a segunda propriedade, substituímos uma das equações pela soma das duas equações.

Assim, no sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

multiplicamos a primeira equação por *3*

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação pela soma das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 5x = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

►

(*) Sistemas de equações são equivalentes quando apresentam as mesmas soluções.

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo $x = -1$ em $2x + 3y = 4$, encontramos:

$$2 \cdot (-1) + 3y = 4 \Rightarrow y = 2.$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

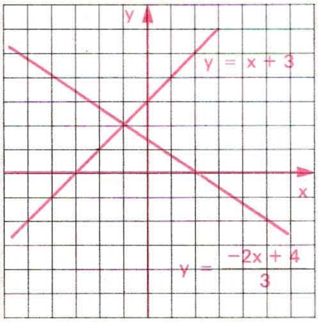
Solução gráfica

O sistema proposto

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \dfrac{-2x + 4}{3} \end{cases}$$



Construímos os gráficos de

$$y = x + 3 \quad e \quad y = \frac{-2x + 4}{3}.$$

A solução do sistema são as coordenadas do ponto de interseção das retas, portanto $(-1, 2)$.

174. Resolva analítica e graficamente os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

175. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x - y} + \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x - y} - \dfrac{1}{x + y} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Sugestão:

Faça $\dfrac{1}{x - y} = a$ e $\dfrac{1}{x + y} = b$.

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x + y + 1} - \dfrac{2}{2x - y + 3} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{2}{x + y + 1} + \dfrac{3}{2x - y + 3} = 1 \end{cases}$

176. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, -2)$.

Solução

Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos os valores de a e b.
Considerando que o ponto $(1, 2)$ pertence à reta de equação $y = ax + b$, ao substituirmos $x = 1$ e $y = 2$ em $y = ax + b$, temos a sentença verdadeira

$$2 = a \cdot 1 + b \quad \text{isto é:} \quad a + b = 2.$$

Analogamente, para o ponto $(3, -2)$, obtemos:

$$-2 = a \cdot 3 + b \quad \text{isto é:} \quad 3a + b = -2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

encontramos $a = -2$ e $b = 4$.
Assim, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

177. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos:

a) (2, 3) e (3, 5) b) (1, −1) e (−1, 2) c) (3, −2) e (2, −3) d) (1, 2) e (2, 2)

178. De uma caixa contendo bolas brancas e pretas, retiraram-se *15* brancas, ficando a relação de *1* branca para *2* pretas. Em seguida, retiraram-se *10* pretas, restando, na caixa, bolas na razão de *4* brancas para 3 pretas. Determine quantas bolas havia, inicialmente, na caixa.

179. A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Determine o valor de $f(3)$.

VI. Imagem

86. *Teorema*

O conjunto imagem da função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é $\mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \dfrac{y - b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y.$$

VII. Coeficientes da função afim

87. O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado *coeficiente angular* ou *declividade* da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear*.

Exemplo

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que, se $x = 0$, temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

EXERCÍCIOS

180. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 3)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

A equação procurada é da forma $y = ax + b$.
Se o coeficiente angular é 2, então $a = 2$.
Substituindo $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, vem:

$$3 = 2 \cdot 1 + b \implies b = 1.$$

A equação procurada é $y = 2x + 1$.

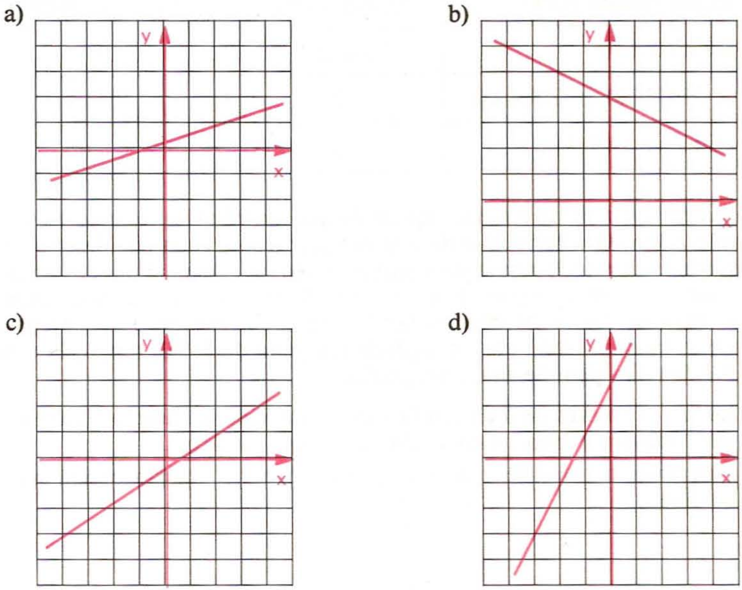
181. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e tem coeficiente angular igual a -3.

182. Obtenha a equação da reta com coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$ e passando pelo ponto $(-3, 1)$.

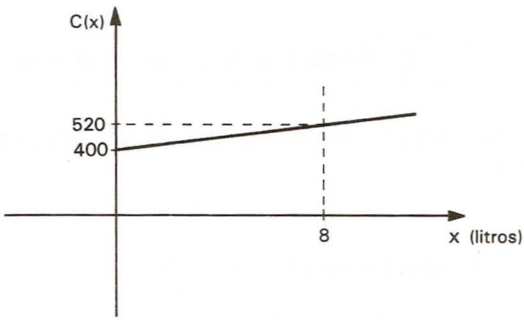
183. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

184. Obtenha a equação da reta com coeficiente linear igual a -3 e passa pelo ponto $(-3, -2)$.

185. Dados os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência dessas funções.



186. O custo C de produção de x litros de uma certa substância é dado por uma função linear de x, com $x \geqslant 0$, cujo gráfico está representado abaixo.



Nessas condições, o custo de *CR\$ 700,00* corresponde à produção de quantos litros?

Exemplo

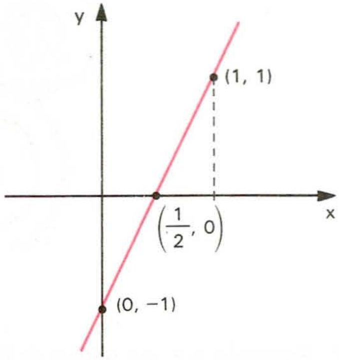
O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$ pois, fazendo $2x - 1 = 0$, vem $x = \frac{1}{2}$.

Podemos interpretar o zero da função afim como sendo a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x.

Exemplo

Fazendo o gráfico da função $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo dos x em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

x	y
0	−1
1	1



EXERCÍCIOS

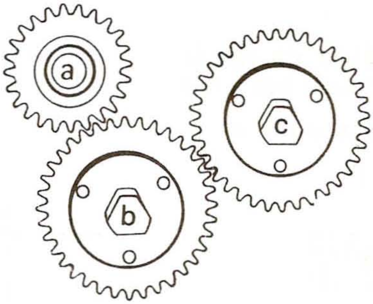
188. Na hora de fazer seu testamento, uma pessoa tomou a seguinte decisão: dividiria sua fortuna entre sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, dando a cada criança que fosse nascer o dobro daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser repartida a herança legada?

189. Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de $660\ km/h$, enquanto o avião a hélice voa em média a $275\ km/h$. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?

190. O salário médio, por hora de trabalho, numa fábrica de *110* trabalhadores é de *CR$ 250,00*. Calculando-se, no entanto, apenas com os *100* trabalhadores homens, a média passa a ser *CR$ 265,00*. Qual o salário médio das mulheres, por hora de trabalho, em cruzeiros reais?

191. Paulo e Joana recebem o mesmo salário por hora de trabalho. Após Paulo ter trabalhado *4* horas e Joana *3* horas e *20* minutos, Paulo tinha a receber *CR$ 150,00* a mais que Joana. Calcule em cruzeiros reais um décimo do que Paulo recebeu.

192. Qual o menor número inteiro de voltas que deve dar a roda *c* da engrenagem da figura, para que a roda *a* dê um número inteiro de voltas?



193. Supondo que dois pilotos de Fórmula 1 largam juntos num determinado circuito e completam, respectivamente, cada volta em *72* e *75* segundos, responda: depois de quantas voltas do mais rápido, contadas a partir da largada, ele estará uma volta na frente do outro?

IX. Funções crescentes ou decrescentes

89. *Função crescente*

A função $f\colon A \longrightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *crescente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Em símbolos: f é crescente quando

$$(\forall x_1, x_2)\ (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

e isso também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2)\ \left(x_1 \neq x_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\right).$$

X. Crescimento/decréscimo da função afim

91. *Teoremas*

I) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

Demonstração

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente } \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

II) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

Demonstração

$$f(x) = ax + b \text{ é decrescente } \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

EXERCÍCIOS

195. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em IR:

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo ($a = 3$).
b) É decrescente, pois o coeficiente angular é negativo ($a = -4$).

196. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em IR.

a) $y = 1 + 5x$
b) $y = -3 - 2x$
c) $y = x + 2$
d) $y = 3 - x$
e) $y = -2x$
f) $y = 3x$

197. Estude, segundo os valores do parâmetro m, a variação (crescente, decrescente ou constante) da função $y = (m - 1)x + 2$.

Solução

Se $m - 1 > 0$, isto é, $m > 1$, então a função terá coeficiente angular positivo e, portanto, será crescente em $\mathbb{R}$.
Se $m - 1 < 0$, isto é, $m < 1$, então a função terá coeficiente angular negativo e, portanto, será decrescente em $\mathbb{R}$.
Se $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$, então a função é $y = (1 - 1)x + 2$, ou seja, $y = 2$, que é constante em $\mathbb{R}$.

198. Estude, segundo os valores do parâmetro m, a variação (crescente, decrescente ou constante) das funções abaixo.

a) $y = (m + 2)x - 3$
b) $y = (4 - m)x + 2$
c) $y = 4 - (m + 3)x$
d) $y = m(x - 1) + 3 - x$

XI. Sinal de uma função

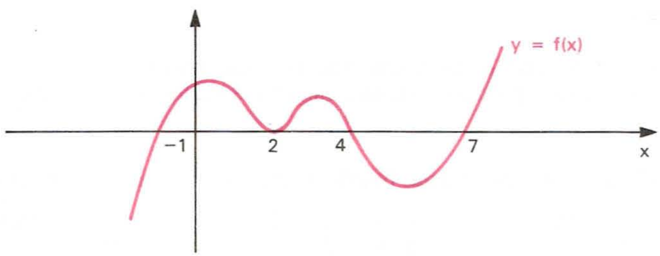
92. Seja a função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$. Vamos resolver o problema "para que valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?".

Resolver este problema significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada x pertencente ao seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função, quando a função está representada no plano cartesiano, basta examinar se é positiva, nula ou negativa a ordenada de cada ponto da curva.

Exemplo

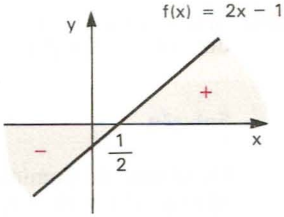
Estudar o sinal da função $y = f(x)$ cujo gráfico está abaixo representado.



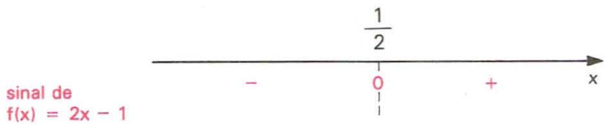
Logo:

para $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de a)

para $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de $-a$)



Fazendo o esquema gráfico, temos:



2º) Estudar os sinais de $f(x) = -2x + 4$.

Temos:

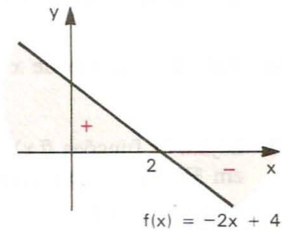
$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$a = -2 \Rightarrow a < 0$ e $-a > 0$

para $x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de a)

para $x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de $-a$)

Fazendo o esquema gráfico:



EXERCÍCIOS

200. Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 - x$

d) $y = 5 + x$

e) $y = 3 - \frac{x}{2}$

f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

g) $y = 2x - \frac{4}{3}$

h) $y = -x$

201. Seja a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2 são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

$$x > \frac{7}{4}.$$

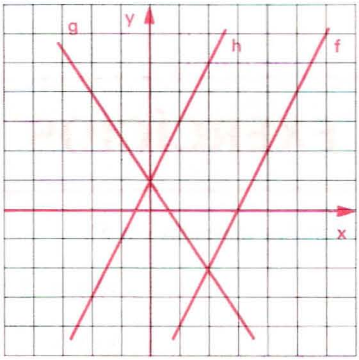
202. Para que valores do domínio da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2}$ a imagem é menor que 4?

203. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

204. Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \dfrac{4x - 1}{2}$ definidas em $\mathbb{R}$. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $f(x) \geqslant g(x)$?　　b) $g(x) < h(x)$?　　c) $f(x) \geqslant h(x)$?

205. Dados os gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:



a) $f(x) > g(x)$
b) $g(x) \leqslant h(x)$
c) $f(x) \geqslant h(x)$
d) $g(x) > 4$
e) $f(x) \leqslant 0$