⑦ $X|Y \sim Pois(Y)$ = Gamma-Poisson mixture

$Y \sim Gamma(a, b)$ → prior density

a) Encontre a marginal de X, $f_X(x)$.

b) Encontre a condicional Y/X, $f_{Y/X}(y/x)$ → posterior density

a) $$f_{X,Y}(x,y) = f_{X/Y}(x;y) \cdot f_Y(y)$$

$$= Pois(Y=y) \cdot gamma(a,b)(y)$$

• $$f_{X/Y}(x;y) = \mathbb{P}(Pois(y) = x) = \frac{y^x}{x!} \exp(-y), \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

• $$f_Y(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} \exp(-by), \quad y \geq 0$$

$$\therefore f_{X,Y}(x,y) = \frac{y^x \exp(-y)}{x!} \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} \exp(-by)$$

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^x \exp(-y)}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} \exp(-by)\, dy$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} y^x \exp(-y)\, y^{a-1} \exp(-by)\, dy$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} y^{\overbrace{x+a-1}^{\alpha}} \exp(-y\underbrace{(1+b)}_{\beta})\, dy$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \exp(-y\beta)\, dy \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{\beta^\alpha}$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} \exp(-y\beta)\, \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, dy$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \int_0^{\infty} f_{\text{Gamma}(\alpha,\beta)}(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{x!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \cdot 1 = \frac{b^a\, \Gamma(x+a)}{x!\, \Gamma(a)\, (1+b)^{x+a}}$$

$$= \frac{b^a}{(1+b)^{a+x}} \frac{1}{x!} \frac{(x+a-1)!}{(a-1)!}$$

$x \in \mathbb{Z}_+,\ a \in \mathbb{Z}$

$\Gamma(m) = (m-1)!$ if $m \in \mathbb{Z}_+$

$$= \binom{x+a-1}{x \text{ ou } a-1} \frac{b^a}{(1+b)^{a+x}}$$

$$\frac{b^a}{(1+b)^{a+x}} = \left(\frac{b}{1+b}\right)^a \frac{1}{(1+b)^x} = (1-p)^a p^x$$

$$= \mathbb{P}\Big(\text{Neg.bin.}(\underbrace{x}_{N^{\circ}\text{ de sucessos}}, \underbrace{p = \tfrac{1}{1+b}}_{\hookrightarrow \text{ prob. de sucesso}}) = x + a\Big)$$

b) $f_{Y/X}(y; x) = f_{X,Y}(x,y) / f_X(x)$

$$= \frac{y^x \exp(-y)}{x!} \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} \exp(-by) \Big/ f_X(x)$$

$$= \frac{\frac{y^x \exp(-y)}{\cancel{x!}} \frac{\cancel{b^a}}{\cancel{\Gamma(a)}} y^{a-1} \exp(-by)}{\frac{\cancel{b^a}\,\Gamma(x+a)}{\cancel{x!}\,\cancel{\Gamma(a)}\,(1+b)^{x+a}}}$$

$$= y^{x+a-1} \frac{\exp(-y\overset{\lambda}{\widetilde{(b+1)}})}{\Gamma(x+a)} (1+b)^{x+a}$$

$$= y^{\alpha-1} \frac{\exp(-y\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} , \quad y \geq 0$$

$$= f_{\text{Gamma}(\alpha,\lambda)}(y) , \quad \begin{array}{l} \alpha = x+a \\ \lambda = b+1 \end{array}$$

$$f_{\text{gamma}(\alpha,\lambda)}(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) , \quad t \geq 0$$

① Lançaremos uma moeda honesta até obtermos exatamente duas coroas.

a) Descreva o espaço amostral.

b) Qual a probabilidade de que sejam necessários exatamente k lançamentos?

a) $\Omega = \left\{ \bigcup_{d \in \mathbb{N}} (a_i)_{i \in [d]} \,;\, a_i \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{d} a_i = 2 \right\} \cup (0)_{i \in \mathbb{N}}$

b) X = nº de lançamentos até obter duas coroas

$\mathbb{P}(X=2) = \,?\qquad 1 \cdot 1 = p^2 = p^2(1-p)^{k-2}$

$\mathbb{P}(X=3) = 101,\ \cancel{110},\ 011 = 2 \cdot p^2(1-p)^1 = 3p^2(1-p)^{k-2}$

$P(X=4) = \cancel{1100},\ \cancel{1010},\ 1001, = 3 \cdot p^2(1-p)^2 = 6\,p^2(1-p)^{k-2}$

$0011,\ 0101,\ \cancel{0110}$

$$\binom{k-1}{r-1} = \binom{4-1}{2-1} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{2-1} p^k (1-p)^{k-2}$$

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\binom{k-1}{M-1}}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fixo}}}{\underline{1}}$$

② Suponha que 20% dos proprietários de computador usam computador da Apple, 70% usam Microsoft e 10% usam diferentes variações do Linux. Suponha também que 65% dos usuários Mac já foram infectados por um vírus de computador, 85% dos usuários de Windows e 20% dos usuários de Linux já pegaram vírus.

a) Qual a probabilidade de selecionarmos um proprietário de computador que já teve o computador infectado por um vírus?

b) Dado que ela já teve o computador infectado, qual a probabilidade dela ser um usuário Windows?

a) Suponha que há 100 pessoas.

		VÍRUS	N- VÍRUS
MAC	20	13	7
WINDOWS	70	59,5	10,5
LINUX	10	2	8
TOTAL	100	74,5	25,5

$$P\left(\begin{matrix}\text{uma pessoa}\\ \text{já infectada}\end{matrix}\right) = \frac{74{,}5}{100} = 74{,}5\%$$

b) $$P(\text{windows} / \text{infectada}) = \frac{59{,}5}{74{,}5} \simeq 0{,}79 = 79\%$$

③ Seja a seguinte função de densidade de probabilidade: $f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (-1,1) \\ 0, & c.c \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$

a) Encontre c.

b) Encontre $F_X(x)$

c) Encontre a função quantil e calcule a mediana

a)

(4) Mostre que

$$f_X(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad \theta \in (0,1), \quad x \in \mathbb{N}$$

é uma função de probabilidade.

i) $f_X(x) \geq 0$

De fato, $\theta > 0$, $0 < 1-\theta \Rightarrow (1-\theta)^{x-1} > 0$

ii) $$\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{x-1} = \theta \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(1-\theta)^x}{1-\theta}$$

$$= \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{x=1}^{\infty} (1-\theta)^x$$

$$= \cancel{\frac{\theta}{1-\theta}(1-\theta)} \frac{1}{1-(1-\theta)}$$

$$= 1.$$