ESPERANÇA CONDICIONAL

→ Primeiro, vamos pensar o que é esperança. A esperança representa o valor médio, o valor central, o valor que de alguma maneira representa uma variável aleatória.

⇒ A esperança condicional $E[X/Y]$ é uma outra variável aleatória que representa esse valor médio quando já se sabe a informação Y. Ou seja, observando Y, tendo acesso a Y, qual o valor médio de X?

Nesse sentido, $\mathbb{E}X/Y$ é a variável aleatória que toma valores

$$\mathbb{E}X/Y\,(y) = \mathbb{E}(X/Y=y)$$

e que tem distribuição a condicional:

$$\mathbb{E}X/Y \sim f_{X/Y}$$

Podemos pensar que $\mathbb{E}X/Y$ é o seu "melhor chute" para X ~~dado~~ que você sabe Y. Nesse sentido, note que

① $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}X/Y = \mathbb{E}X$

$$\mathbb{E}X/Y=y = \sum x \, f_{X/Y}(x;y)$$

ZERO INFORMAÇÃO!

$$= \sum x \, f_{X,Y}/f_Y = \sum x \, f_X \cdot f_Y / f_Y$$
$$= \mathbb{E}X$$

ou seja, saber Y não te ajuda em nada de saber X. Claro, são independentes!

② $Y = X \Rightarrow \mathbb{E}X/X = X$

ou seja, sabendo X, seu melhor chute para X é a própria X!

$$\mathbb{E}X/X=x_1 = \sum_x x \cdot f_{X/X} = \sum x \, \delta_{x_1}(x) = x_1$$

$$\mathbb{P}((X,X)=(x_1,x_2)) = \mathbb{P}(X=x_1, X=x_2) = \mathbb{P}(\{X=x_1\} \cap \{X=x_2\})$$

$$f_{X,X}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \neq x_2 \\ f_X(x_1), & x_1 = x_2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x_1 \neq x_2 \\ \mathbb{P}(X=x_1), & x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$f_{X/X}(x_1;x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \neq x_2 \\ 1, & x_1 = x_2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

16 i) $\mathbb{E}[r(X)s(Y)/X] = r(X)\,\mathbb{E}[s(Y)/X]$

$\underbrace{r(X)s(Y)}_{}$ → função de (X,Y)

$r(X)$ ↳ sei esse cara se eu sei X!

ii) $\mathbb{E}[r(X)/X] = r(X)$

i) $\mathbb{E}[r(X)s(Y)/X=x_1] = \mathbb{E}[g(X,Y)/X=x_1]$

$$= \sum_y r(x_1)s(y)\,f_{Y/X}(y;x_1)$$

$$= r(x_1)\sum_y s(y)\,f_{Y/X}(x_1,y)$$

$$= r(x_1)\,\mathbb{E}[s(Y)/X=x_1]$$

$\mathbb{E}[s(Y)/X]$ é uma função de X.

Vamos avaliar em x_1:

$$\mathbb{E}[s(Y)\,|\,X=x_1] = \sum_y s(y)\, f_{Y|X}(y; x_1)$$

ii) Basta considerar $s(Y)=1$.

$\mathbb{E}[c\,/\,Y] = c$ para quaisquer c, Y.

De fato, se X é v.a $X \equiv c \Rightarrow \mathbb{P}(X=c)=1$ então para quaisquer outra Y, a distribuição conjunta é

$$\mathbb{P}((X,Y)\in(A,B)) = \mathbb{P}(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\})$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } A \neq \{c\} = \mathbb{P}(\cancelto{0}{X \neq c})\cdot \mathbb{P}(Y\in B) \\ \mathbb{P}(Y\in B), & \text{se } A = \{c\} = \mathbb{P}(\cancelto{1}{X=c})\cdot \mathbb{P}(Y\in B) \end{cases}$$

De fato, $A \cap B \subset A$

se $A \neq \{c\}$, então
$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})$
$= \mathbb{P}(\{X \neq c\} \cap \{Y \in B\}) \subset \mathbb{P}(\{X \neq c\}) = 0$

se $A = \{c\}$, então
$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(\Omega \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(Y \in B)$

$X \equiv c \Rightarrow \Omega = \{X = c\}$.

OBS: $\mathbb{P}(X = c) = 1$ não implica $X \equiv c$.
exemplo $X(\omega) = \begin{cases} c, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \omega \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Portanto, se $X \equiv c$, $f_{X,Y}(x,y) = \delta_c(x)$.

$\mathbb{E}[c \,/\, Y = y] = \sum_x x f_{X/Y}(x;y) = \sum x f_X(x) = \sum x \delta_c(x)$
$\hookrightarrow f_{X/Y}(x;y) = \delta_c(x)$ $= c$.

Concluindo,

$$\mathbb{E}[\,r(X)\,s(Y)/X\,] \overset{i)}{=} r(X)\,\mathbb{E}[s(Y)/X]$$
$$= r(X)\,\mathbb{E}[1/X]$$
$$= r(X)\cdot 1 = r(X).$$

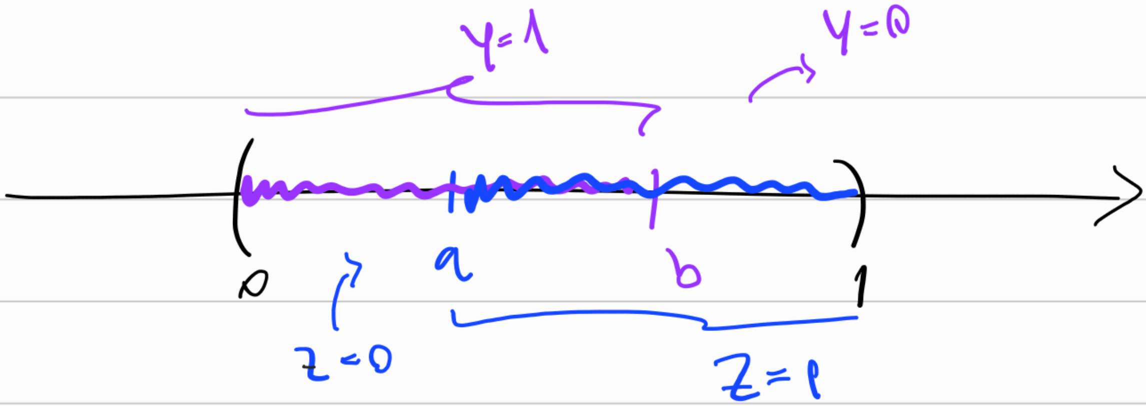
$\blacksquare$

(22) $X \sim Unif(0,1)$

$0 < a < b < 1$

$$Y = \begin{cases} 1, & 0 < x < b \\ 0, & c.c. \end{cases} = f(X)$$

$$Z = \begin{cases} 1, & a < x < 1 \\ 0, & c.c \end{cases} = g(X)$$



a) $Y \perp\!\!\!\perp Z$?

Não!

$$Y = \mathbb{1}_{(0,b)}(X) \Rightarrow \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X \in (0,b)) = F_X(b) = b$$

$$Z = \mathbb{1}_{(a,1)}(X) \Rightarrow \mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X \in (a,1))$$

$$= F_X(1) - F_X(a) = 1 - a$$

$$\mathbb{P}(Y,Z = (1,1)) = \mathbb{P}(X \in (a,b)) = F_X(b) - F_X(a) = b - a$$

$$\therefore \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(Z=1) \neq \mathbb{P}((Y,Z) = (1,1)).$$

$$b \cdot (1-a) \neq b - a$$

b) $\mathbb{E}[Y/Z]$

$Z=1$:

$$\mathbb{E}[Y/Z=1] = \sum_{y=0}^{1} y\, f_{Y/Z}(y;1) = 1 \cdot f_{Y/Z}(1;1)$$

$$\{Z=1\} = \{X \in (a,1)\}$$

- $\mathbb{P}(Y=1/Z=1) = \mathbb{P}(Y=1/X\in(a,1))$

$$= \mathbb{P}(X\in(0,b)/X\in(a,1)) = \mathbb{P}(X\in(0,b)\cap(a,1))/\mathbb{P}(X\in(a,1))$$

$$= \mathbb{P}(X\in(a,b))/\mathbb{P}(X\in(a,1))$$

$$= b-a/1-a$$

$Z=0$:

$$\mathbb{E}[Y/Z=0] = \sum_{y=0}^{1} y\, f_{Y/Z}(y;0) = 1 \cdot f_{Y/Z}(1;0)$$

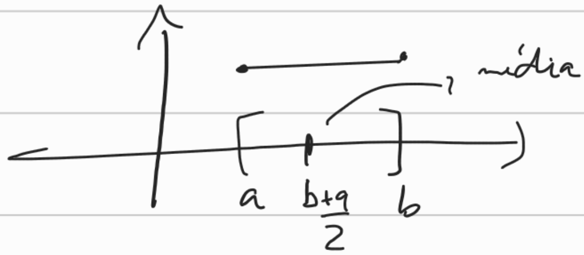
$$\mathbb{P}(Y=1/Z=0) = \mathbb{P}(X\in(0,b)/X\in(0,a))$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X\in(0,b) \cap X\in(0,a))}{\mathbb{P}(X\in(0,a))} = \frac{\mathbb{P}(X\in(0,a))}{\mathbb{P}(X\in(0,a))} = 1$$

$$\therefore\ \mathbb{E}[Y/Z=0] = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\,Y/Z = \begin{cases} 1, & Z=0 \\ \dfrac{b-a}{1-a}, & Z=1 \end{cases}$$

(19) $X_i \sim \mathrm{Unif}(a,b)$



$$\mathbb{E}X_i = \int_a^b x\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2\,\cancel{(b-a)}}$$

$$= \frac{b+a}{2} \;;$$

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}(b^3-a^3)$$

$$\mathrm{Var}\,X = \frac{1}{3(b-a)}(b^3-a^3) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(b^3-a^3)}{(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}} + \frac{-b^2-2ab-a^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\mathbb{P}(Y=1 / X < x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{(0,b)}(x)$$

$$\mathbb{P}(Y=0 / X < x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[b,1)}(x)$$

$$\Rightarrow f_{Y/X}(y;x) = \delta_{\{1\}}(y)\,\mathbb{1}_{(0,b)}(x) + \delta_{\{0\}}(y)\,\mathbb{1}_{[b,1)}(x)$$

$$\mathbb{P}(Z=1 / X < x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{(a,1)}(x)$$

$$\mathbb{P}(Z=0 / X < x) = 1\, \mathbb{1}_{(0,a]}(x)$$

$$\Rightarrow f_{Z|X}(z;x) = \delta_{\{1\}}(z)\,\mathbb{1}_{(a,1)}(x) + \delta_{\{0\}}(z)\,\mathbb{1}_{(0,a]}(x) = f_Z(z)$$

$$\neq \mathbb{P}(Z=z) \cdot f_X(x)$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}((Y=y) \cap X \in (0,b)) + \mathbb{P}(Y=y \cap X \in [b,1))$$

$$= \mathbb{P}(Y=y / X \in (0,b)) + \mathbb{P}(Y=y / X \in [b,1))$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=1 / X \in (0,b))$$

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=0 / X \in [b,1))$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = f_Y(y) = \delta_{\{1\}}(y)\,\mathbb{1}_{(0,b)}(x) + \delta_{\{0\}}(y)\,\mathbb{1}_{[b,1)}(x)$$

$$Y = \mathbb{1}_{(0,b)}(X) \qquad \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{(0,b)}(X)=1)$$

$$=$$

Note que Y e Z são funções de X:

$$Y = \mathbb{1}_{(0,b)}(X) \Rightarrow \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{(0,b)}(X)=y)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(X \in (0,b)), & \text{se } y=1 \\ \mathbb{P}(X \notin (0,b)), & \text{se } y=0 \end{cases}$$

$$Z = \mathbb{1}_{(a,1)}(X)$$

$$= F_X(b) \text{ distribuição da uniforme}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X<b)$$

$$\mathbb{P}(Y=1 \cap X<b) = \mathbb{P}(Y=1) \neq \mathbb{P}(Y=1)\cdot\mathbb{P}(X<b)$$

$\therefore$ Y e Z são ambos <u>dependentes</u> de X.

$$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X \in (0,a)) = F_X(a)$$

$$\mathbb{P}(Z=1) = 1 - \mathbb{P}(Z=0) = 1 - F_X(a)$$

$$\mathbb{P}((Y,Z)=(1,1)) = \mathbb{P}(X \in (a,b))$$

$$* = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = F_X(b)$$

$$\mathbb{P}(Z=1) = 1 - F_X(a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=1)\cdot\mathbb{P}(Z=1) = F_X(b)(1-F_X(a)) \neq *$$

$\therefore$ NÃO SÃO INDEPENTES!

$$\mathbb{P}(Z=1 / X<a) = 0 \qquad \mathbb{P}(Y=1/X<a)$$

$$\mathbb{P}(Z=0 / X<a) = 1 \qquad = \delta_{\{1\}}(1)\, \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(a)$$

$$= 1$$

$$d_{Z/X}(z; a) = \delta_{\{0\}}(z) \qquad \mathbb{P}(Z=0/X<a) = \delta_{\{0\}}(0)\, \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(a)$$

$$= 1$$

$$\mathbb{P}(Z=z, X \leq x) = \delta_{\{0\}}(z)\, F_X(x)$$

$$g(z) = \mathbb{P}(Z=z/X<a) = \delta_{\{0\}}(z)$$

$\Rightarrow$ Z/X é constante.

$$h(x) = \mathbb{P}(Z=z / X<x) = \begin{cases} \delta_{\{0\}}(1) & , z=1, x=a \\ \delta_{\{0\}}(0) & , z=0, x=a \\ \delta_{\{0\}}(0), & z=0, x<a \\ \delta_{\{0\}}(1) & z=1, x<a \\ \delta_{\{1\}}(1) & z=1, x>a \\ \delta_{\{1\}}(0) & z=0, x>a \end{cases}$$

$z=1$, $x=a$

$$h(x,z) = \mathbb{P}(Z=z/X<x)$$

$$= \delta_{\{1\}}(z)\, \mathbb{1}_{(a,+\infty)}(x) + \delta_{\{0\}}(x)\, \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(x)$$

Se $Y \perp\!\!\!\perp Z$, então $Y/X \perp\!\!\!\perp Z/X$.

$$\mathbb{P}(Y/X=x \in A,\ Z/X=x \in B)$$
$$= \mathbb{P}((Y,Z)/X=x \in A \times B)$$
$$= \mathbb{P}(Y/X=x \in A) \cdot \mathbb{P}(Z/X=x \in B)$$

$$\mathbb{P}(Y=1/X=(a+b)/2) = f((a+b)/2) = 1$$

$$\mathbb{P}(f(X)/X) = f(X)$$

$$\mathbb{E}[g(X)/X] := \mathbb{P}(g(X)/X)$$

$$\mathbb{E}[g(X)/X=x] = \mathbb{P}(g(X)/X=x)$$
$$= g(x)$$