École **S**upérieure **Pri**vée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Série d'exercices N°1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3A & 3 B

Exercice 1

Introduction

Ce chapitre met l'accent sur des méthodes numériques permettant de résoudre un système d'équations linéaires sans avoir à calculer l'inverse d'une matrice, ce qui les rend plus efficaces et moins coûteuses en termes de calcul. Toutefois, cela ne signifie pas que le calcul de l'inverse d'une matrice est totalement inutile, car il reste important dans certains cas spécifiques.

Dans ce contexte, pour renforcer vos compétences en analyse matricielle. Considérons deux matrices inversibles A et B, c'est-à-dire que A^{-1} et B^{-1} existent. Une question naturelle se pose alors : peut-on affirmer directement que l'inverse de $A^{-1} + B^{-1}$ existe également ? La réponse est non ! C'est précisément l'objectif de cet exercice.

Soient $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,n}$ deux matrices inversibles telles que $A + B$ est inversible. Montrer que $A^{-1} + B^{-1}$ est inversible et qu'on a

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A = A(A + B)^{-1}B.$$

Exercice 2

On considère le système d'équations linéaires (S), dont l'écriture matricielle est donnée par $AX = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ et\, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Partie I :

1. (a) *Montrer que (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.*
   (b) *Résoudre (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.*

2. (a) *Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S).

   (b) *Écrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S).

   (c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations en utilisant*

      i. *la méthode de Jacobi.*

      ii. *la méthode de Gauss-Seidel.*

Partie II :

3. *En considérant l'erreur* $E = ||X - X^{(k)}||_2$, *avec* X *la solution exacte,* $X^{(k)}$ $(k \in \{1, 2\})$ *une solution approchée par l'une des deux méthodes et* $||\,.\,||_2$ *la norme euclidienne définie par*

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

   calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

4. *Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système* (S).

Exercice 3

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \text{et } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles* A_α *est inversible.*
2. *Déterminer une condition suffisante sur* α *assurant la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution du système* (S_α).
3. *Pour* $\alpha = 3$,

   (a) *Résoudre* (S_3) *par la méthode du pivot de Gauss.*

   (b) *Donner le schéma itératif de la méthode de Jacobi.*

   (c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution du* (S_3) .

4. *On considère la suite numérique* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} X_0 = b \\ A_3^n X_n = b \end{cases}$$

(a) Vérifier l'existence de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; A_3 X_n = X_{n-1}$.

(c) Pour $n = 2$ *donner un raisonnement (sans faire le calcul de* A_3^2*) pour la résolution du système*

$$A_3^2 X = b$$

Exercice 4 *On considère le système linéaire suivant :*$Ax = b$ *avec :*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \ \text{et}\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver les matrices* L *et* U *telles que* $A = LU$, *où :*
   — L *est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.*
   — U *est triangulaire supérieure.*
2. *Résoudre* $Ax = b$ *en utilisant cette décomposition.*

Nous allons explorer une autre décomposition de A, en recherchant cette fois une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux ne sont pas nécessairement égaux à 1.

$$A = LL^T$$

où L *est une matrice triangulaire inférieure, et* L^T *sa transposée.*

3. *Déterminer les coefficients de* L.
4. *Résoudre le système* $Ax = b$ *en utilisant cette nouvelle décomposition.*
5. *Comparer la solution obtenue avec les deux méthodes, que peut-on remarquer ?*

Faites des recherches sur Internet pour trouver ses conditions d'application et ses avantages !