

# Labo Signaalverwerking

Dries Kennes (R0486630)

May 15, 2018

## Opdracht 2A: Analyse v.e. actieve filtertrap

### Specificatie

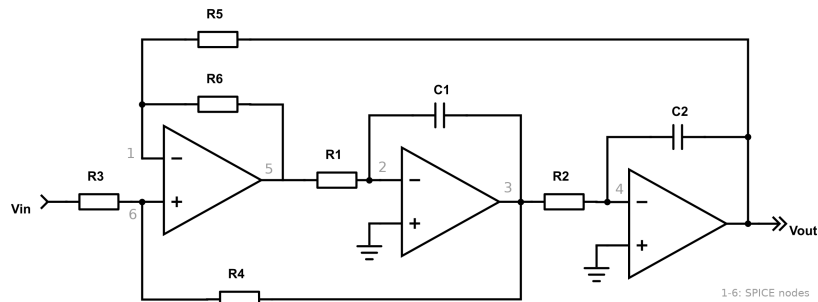


Figure 1: Het schema.

- **Low Pass KHN - Non Inverting** (schema nr 5)
- Filter is een *LDL*
  - $|H(0)| = 6dB$
  - $|H(10kHz)| = -34dB$
  - $Q_p = 4$

### Analyse

#### DC & HF

Bij DC zijn condensatoren open kring, dus wordt de versterking bepaald door de feedback weerstanden  $R_4$ ,  $R_5$ , en  $R_6$ . Dit is dus een vaste versterking.  $|H(DC)| = A$ .

Bij HF ( $f = \infty$ ) zijn de condensatoren kortsluitingen, dus wordt het signaal volledig onderdrukt door het ontbreken van de feedback lussen  $C_1$  en  $C_2$ .  $|H(HF)| = -\infty dB$

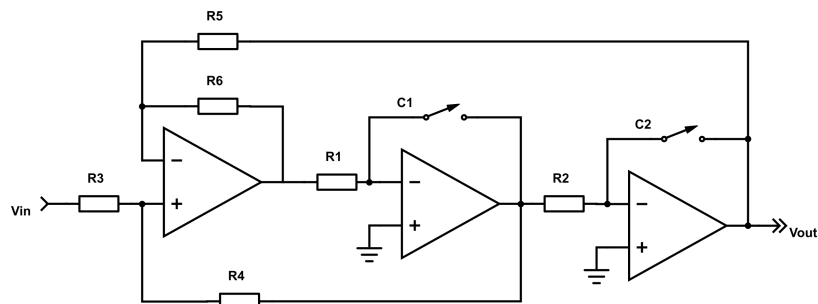


Figure 2: Schema met alle condensatoren open kring. (DC)

## Bepaal de transferfunctie

Ik heb de transfer functie uitgerekend door het schema op te splitsen in twee integrators en de eerste opamp.

## De integrators

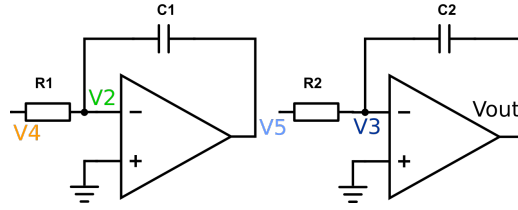


Figure 3: Deel van het schema met de integrators.

De algemene formule voor een integrator is  $v_o = \frac{-v_i}{sRC}$ .

Voor deze twee specifieke gevallen:  $v_5 = \frac{-v_4}{sR_1C_1}$  en  $v_{out} = \frac{-v_5}{sR_2C_2}$ .

Gecombineerd:  $v_{out} = \frac{v_4}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}$  of  $v_4 = s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 v_{out}$

## Superpositie

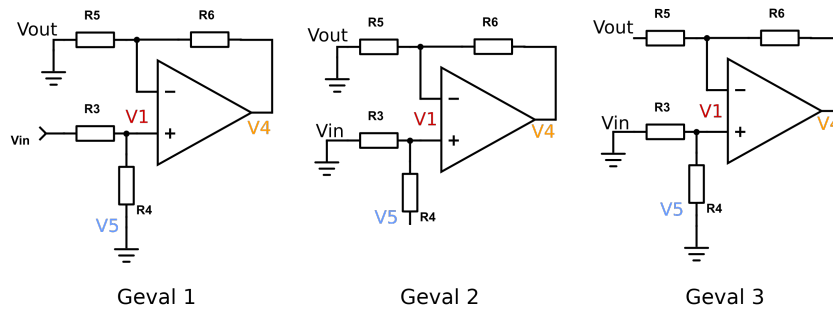


Figure 4: Superpositie schemas

**Geval 1:**  $v_{in}, v_{out} = v_5 = 0$

De opamp is nu een niet inverterende versterker.

$$v_4 = v_1 \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right)$$

$$v_1 = v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow v_4 = v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) = v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_6 + R_5}{R_5}$$

**Geval 2:**  $v_5, v_{out} = v_{in} = 0$

De opamp is nu een niet inverterende versterker.

$$v_4 = v_1 \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right)$$

$$v_1 = v_5 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} \Rightarrow v_4 = v_5 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) = v_5 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_6 + R_5}{R_5}$$

**Geval 3:**  $v_{out}, v_5 = v_{in} = 0$

De opamp is nu een inverterende versterker.

$$v_4 = \frac{-R_6}{R_5} \cdot v_{out}$$

## Totaal

$$v_4 = \sum v_4 = v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + v_5 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + \frac{-R_6}{R_5} \cdot v_{out}$$

$$v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} = -v_5 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + \frac{R_6}{R_5} \cdot v_{out} + v_4$$

Vervang in deze formule  $v_5$  en  $v_4$  door de formules van de twee integrators:

$$v_{in} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} = v_{out} \cdot (sR_2C_2 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + \frac{R_6}{R_5} + s^2R_1R_2C_1C_2v)$$

$$\frac{v_{in}}{v_{out}} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} = s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_2C_2 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + \frac{R_6}{R_5}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} \cdot \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_2C_2 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} + \frac{R_6}{R_5}}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_5} \cdot \frac{1}{\frac{R_6}{R_5} \cdot (s^2 \cdot \frac{R_1R_2C_1C_2R_5}{R_6} + sR_2C_2 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_6} + 1)}$$

## Het resultaat:

$$H(s) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_6} \cdot \frac{1}{s^2 \cdot \frac{R_1R_2C_1C_2R_5}{R_6} + sR_2C_2 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_6+R_5}{R_6} + 1}$$

## Pole-zero plot

Geen zeros, wel polen, namelijk:

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{s}{Q\omega_n} + 1 = 0$$

$$\frac{s^2}{(2000\pi)^2} + \frac{s}{4 \cdot 2000\pi} + 1 = 0$$

$$\frac{s^2}{(2000\pi)^2} + \frac{s}{8000\pi} + 1 = 0$$

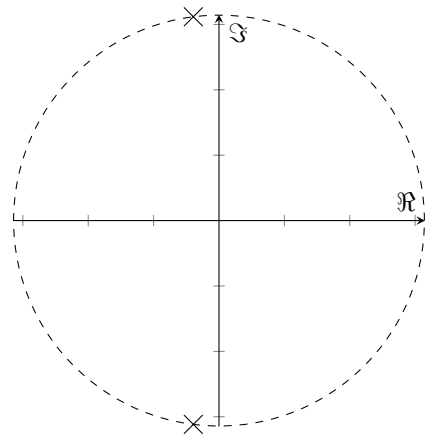
2 complexe polen:

$$250\pi(-1 + 3\sqrt{7}i) \text{ en } 250\pi(-1 - 3\sqrt{7}i)$$

of ongeveer

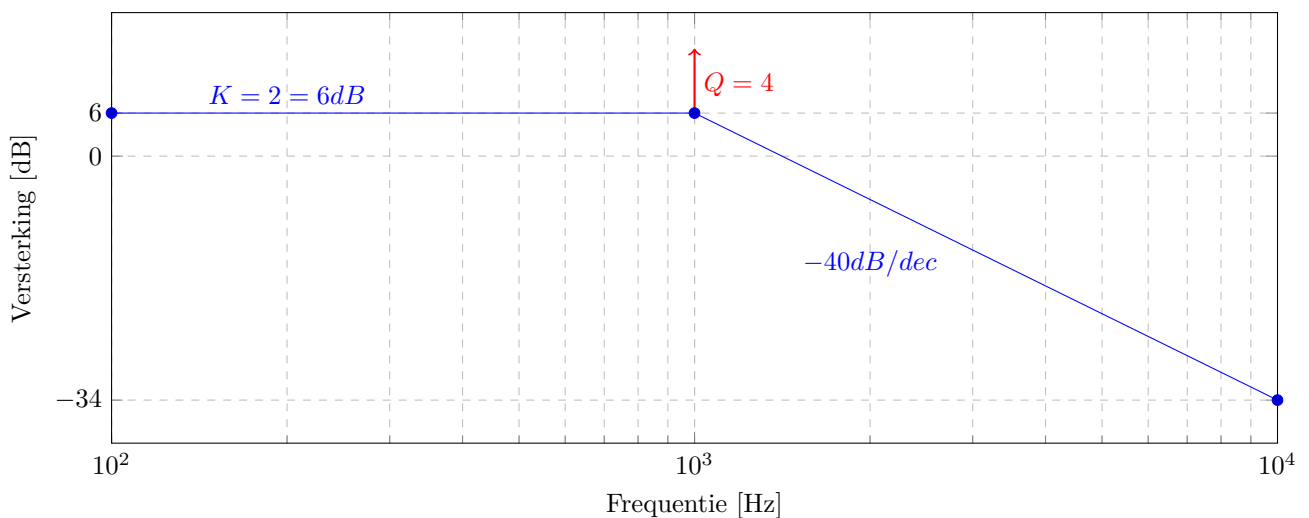
$$-785 + 6234i = 6283\angle 97^\circ \text{ en } -785 - 6234i = 6283\angle -97^\circ$$

(Schets) Pole-Zero Plot



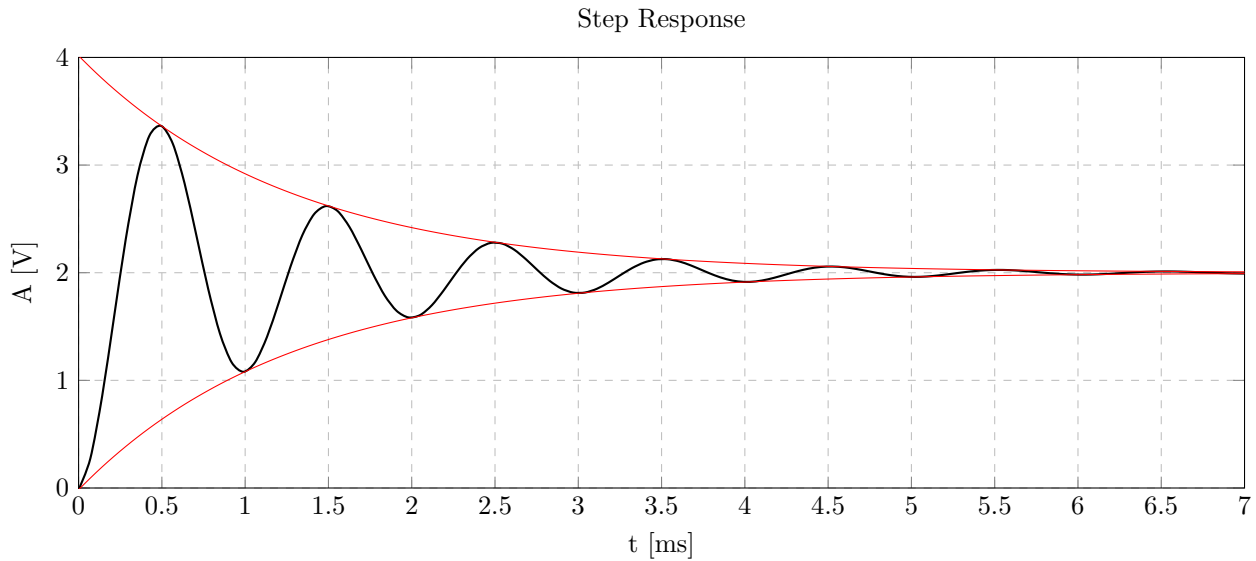
## Frequentiegedrag

Asymptotisch Bodediagram



De lijn van  $-40\text{dB/dec}$ , het beginpunt bij  $10\text{kHz}$ ,  $-34\text{dB}$ , en het filtertype (LDF) laat toe  $f_n$  te berekenen. We moeten  $40\text{dB}$  zakken van  $6\text{dB}$  tot  $-34\text{dB}$ , dit is dus 1 decade, ofwel  $f_n = 1\text{kHz}$ . Door de dubbele pool is er maar 1 knik in de grafiek, daar gaat de helling van 0 naar  $-40\text{dB/dec}$ .

## Tijdsgedrag



Het tijdsgedrag van een filter wordt bepaald door de transfer functie vanuit het  $s$  domein om te zetten naar het  $t$  domein met een inverse Laplace transformatie.

$$H(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right)$$

met  $K = 2$  en  $\zeta = \frac{1}{2Q} = \frac{1}{2 \cdot 4} = 0.125$  en  $\omega = 2\pi \cdot f_n = 2000\pi$

$$H(t) \approx 2 - 2e^{-250\pi \cdot t} \cos(2000\pi \cdot t)$$

Deze afronding is nauwkeurig genoeg om de functie te tekenen.

## Synthese

### Vergelijk transfer functie met de algemene vorm

Algemene vorm LDL filter:  $H(s) = K \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + \frac{1}{Q} \cdot (\frac{s}{\omega_n}) + 1}$

- $K = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_6}$
- $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{C_1 C_2 R_1 R_2 R_5}{R_6}$
- $\frac{1}{Q\omega_n} = C_2 R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4+R_3} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_6}$

### Ontwerpvergelijkingen

Kies:

- $C_2 = c^{te} = 1$
- $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_6$

Motivering:

- $C_2 = 1$  omdat van  $C_1$  makkelijker een ontwerpvergelijking te vinden is.
- $R_5$  variabel omdat die enkel in tellers zit. Dit maakt ontwerpvergelijkingen makkelijker.

De transfer functie wordt dan:

$$H(s) = \frac{R+R_5}{2R} \cdot \frac{1}{s^2 R C_1 C_2 R_5 + s \cdot (R+R_5) \cdot \frac{C_2}{2} + 1}$$

Met de vergelijkingen van uit de transfer functie:

- $K = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_6}$
- $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{C_1 C_2 R_1 R_2 R_5}{R_6}$
- $\frac{1}{Q\omega_n} = C_2 R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4+R_3} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_6}$

Geeft:

- $K = \frac{R}{2R} \cdot \frac{R_5+R}{R} = \frac{R_5+R}{2R} \Rightarrow R_5 + R = 2KR \Rightarrow R_5 = R(2K - 1)$
- $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{C_1 C_2 R^2 R_5}{R} = C_1 C_2 R R_5 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\omega_n^2 C_2 R_5 R}$
- $\frac{1}{Q\omega_n} = C_2 R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4+R_3} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_6} = C_2 R \cdot \frac{R}{2R} \cdot \frac{R_5+R}{R} = \frac{C_2(R_5+R)}{2} \Rightarrow Q = \frac{2}{\omega_n C_2 2KR} \Rightarrow R = \frac{1}{Q\omega_n C_2 K}$

De ontwerpvergelijkingen:

- $R = \frac{1}{Q\omega_n C_2 K}$
- $R_5 = R(2K - 1)$
- $C_1 = \frac{1}{\omega_n^2 C_2 R_5 R}$

## Impedantieschaling

Waarden zonder impedantieschaling:

- $R = 0.0000198943... \Omega$
- $R_5 = 0.0000596831... \Omega$
- $C_1 = 21.33... F$
- $C_2 = 1 F$

Met schalingsfactor  $10^9$ :

- $R = R * ISF = 19894.36... = 19.89 k\Omega$
- $R_5 = R_5 * ISF = 59683.10... = 59.68 k\Omega$
- $C_1 = \frac{C_1}{ISF} = 0.000000021333... = 21.33 nF$
- $C_2 = \frac{C_2}{ISF} = 0.000000001 = 1 nF$

## Simulatie op basis van de transferfunctie (Matlab)

```

1  % Gegevens
2  fn = 1000; % 1kHz
3  K = 2; % 6dB
4  Q = 4;
5
6  wn = 2*pi*fn;
7  H_N = K * [0 0 1];
8  H_D = [1/wn^2 1/(Q*wn) 1];
9  H = tf(H_N, H_D) % H_N / H_D;
10
11 % Figuren uit gegevens
12 figure(1); hold on; pzmap(H); figure(2); hold on; bode(H); figure(3); hold on; step(H);
13
14 % Ontwerpvergelijkingen
15 C2 = 1;
16 R=1/(C2*K*Q*wn);
17 R5=R*(2*K-1);
18 C1=1/(wn^2*C2*R5*R);
19
20 % Impedantieschaling
21 ISF= 10^9;
22 C1 = C1/ISF, C2 = C2/ISF % OUTPUT: C1 = 2.1333e-08 C2 = 1.0000e-09
23 R = R*ISF, R5 = R5*ISF % OUTPUT: R = 1.9894e+04 R5 = 5.9683e+04
24
25 % K, wn, fn, en Q uit componenten
26 Kc = (R+R5)/(2*R) % OUTPUT: 2 => OK
27 wnc = 1/sqrt(C1*C2*R*R5);
28 fnc = wnc/(2*pi) % OUTPUT: 1.0000e+03 => OK
29 Qc = 2/(C2*wn*(R5+R)) % OUTPUT: 4 => OK
30
31 % H uit componenten
32 H_Nc = ((R5+R)/(2*R)) * [0 0 1];
33 H_Dc = [C1*C2*R*R5 C2*(R5+R)/2 1];
34 Hc = tf(H_Nc, H_Dc);
35
36 % Figuren uit componentwaarden
37 figure(1); pzmap(Hc); figure(2); bode(Hc); figure(3); step(Hc);

```

## Pole Zero plot

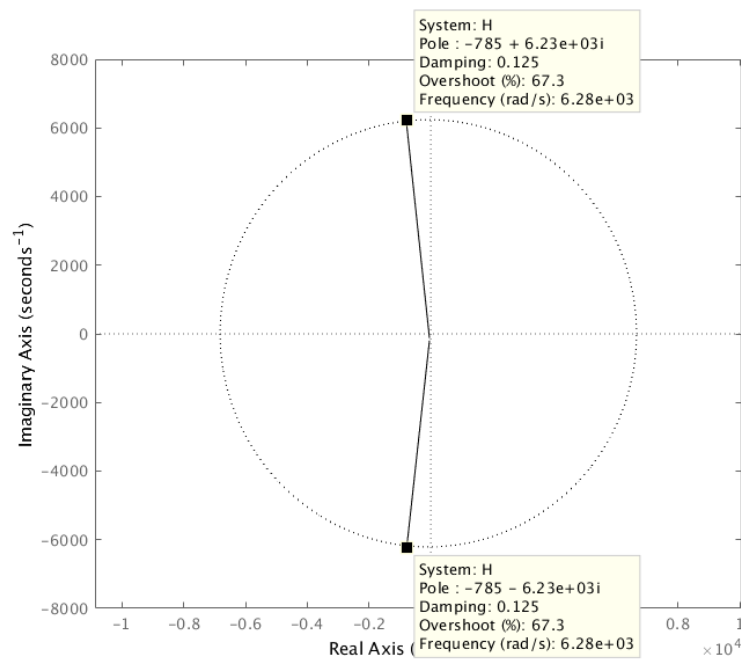


Figure 5: Pole zero plot

## Bode plot

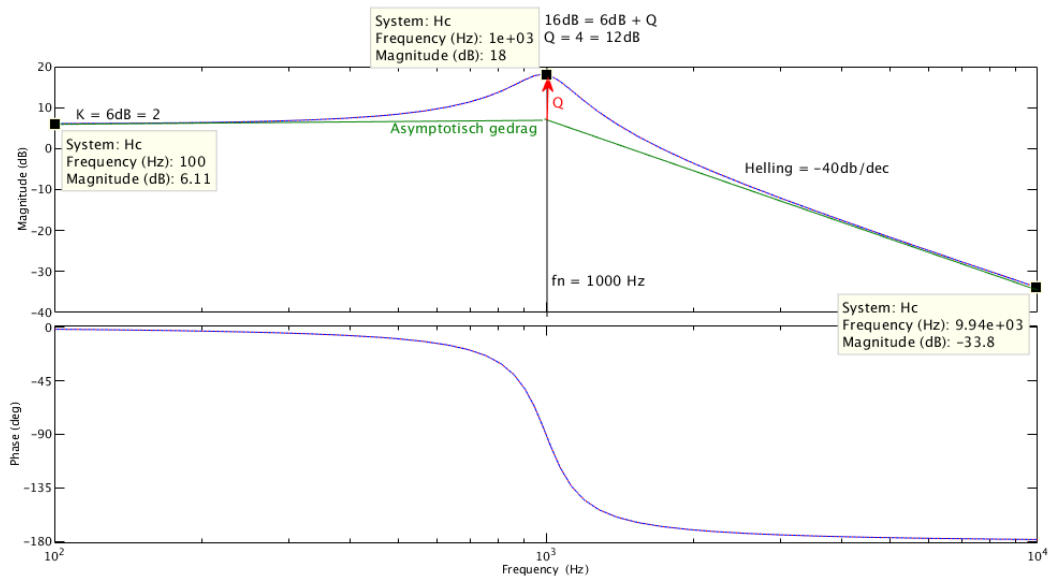


Figure 6: Bode Plot

Door de dubbele pool is er maar 1 knik in de (anymptotische) grafiek, daar gaat de helling van 0 naar  $-40\text{dB/dec}$ .

## Stapresponsie

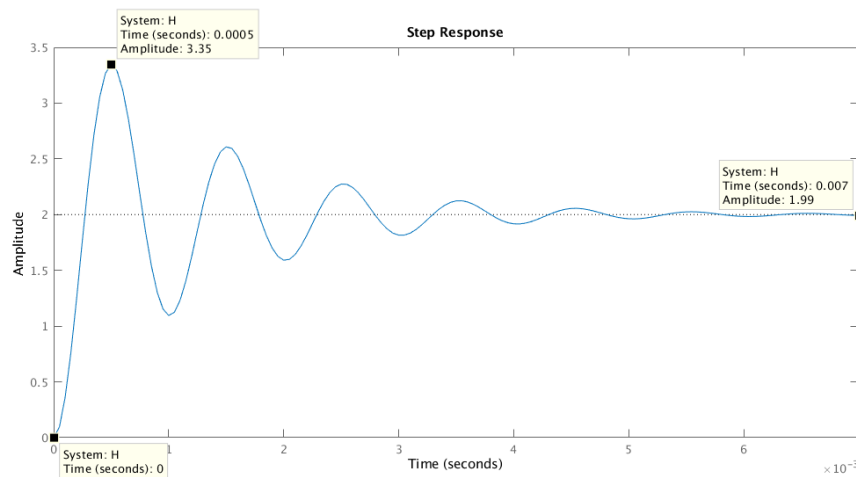


Figure 7: Stapresponsie

## Simulatie op basis van de componenten (SPICE)

De numering van de nodes is niet systematisch. Ze zijn aangeduid op het schema uit de opgave in lichtgrijs.

### Ideaal

```
1 * Ideaal schema
2 .inc opampIdeaal.cir
3 R3 N006 vin 19894
4 R1 N002 N005 19894
5 R2 N004 N003 19894
6 C2 Vout N004 1n
7 C1 N003 N002 21.33n
8 R6 N005 N001 19894
9 R4 N003 N006 19894
10 R5 Vout N001 59683
11 V1 vin 0 AC 1
12 XU4 N001 N006 N005 opampIdeal
13 XU5 N002 0 N003 opampIdeal
14 XU6 N004 0 Vout opampIdeal
15 .ac dec 100 100 1MEG
16 .probe
17 .end
```

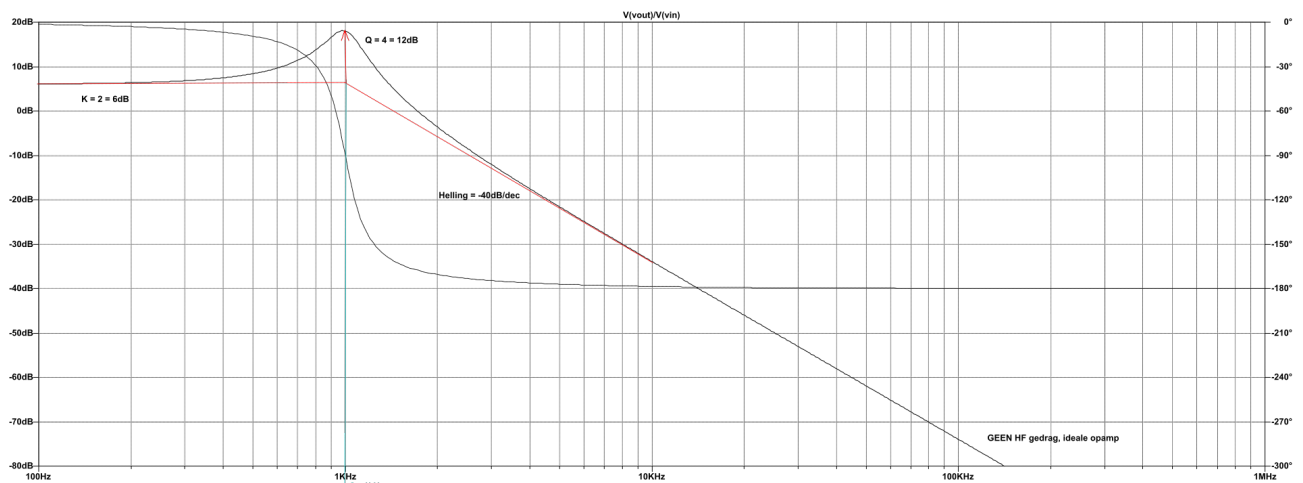


Figure 8: Ideaal Bode Plot

## VCVS

Netlist vrijwel identiek aan het ideaal geval, enkel het opamp model is aangepast.

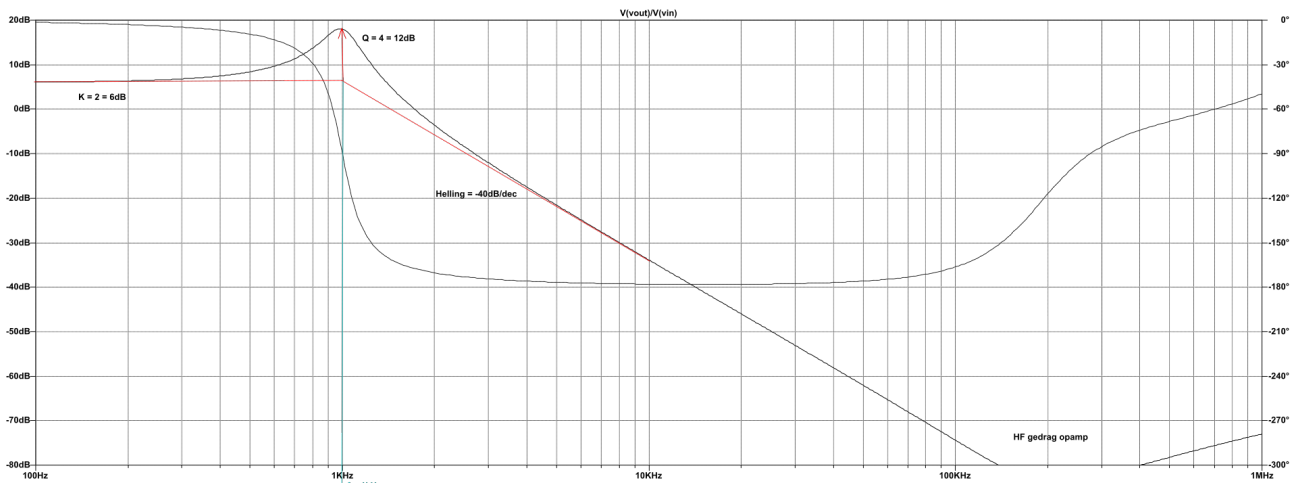


Figure 9: VCVS Bode Plot

## tl084

Netlist vrijwel identiek aan het ideaal geval, het opamp model is aangepast en extra voeding ( $\pm 15V$ ) toegevoegd voor de opamps.

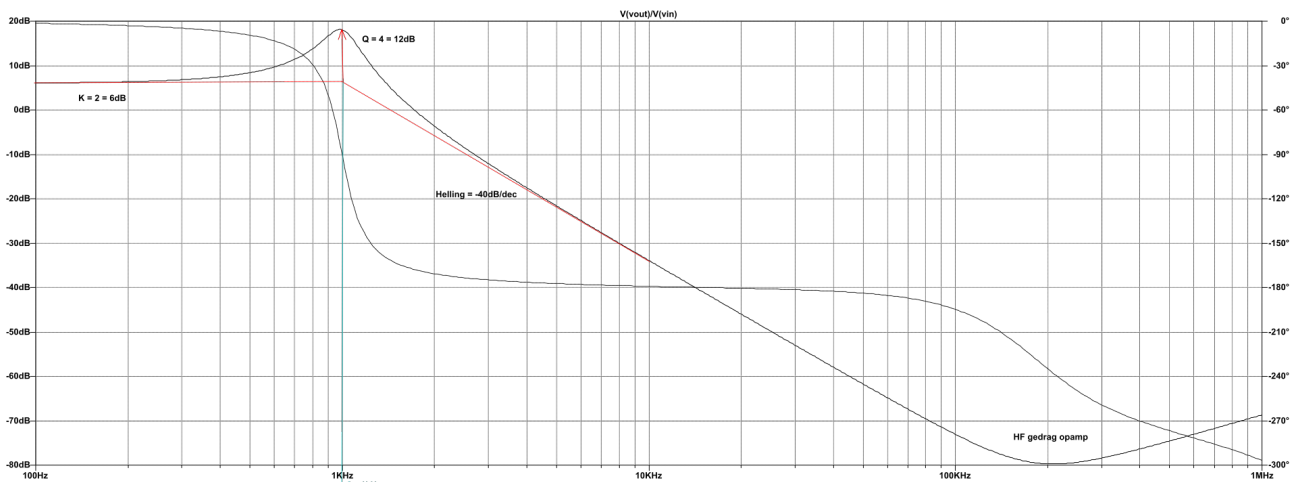


Figure 10: TL084 Bode Plot

## Monte Carlo analyse R5% - C20%

Bij een Monte Carlo analyse worden de weerstanden en condensatoren vervangen door een model dat rekening houdt met de toleranties van de componenten.



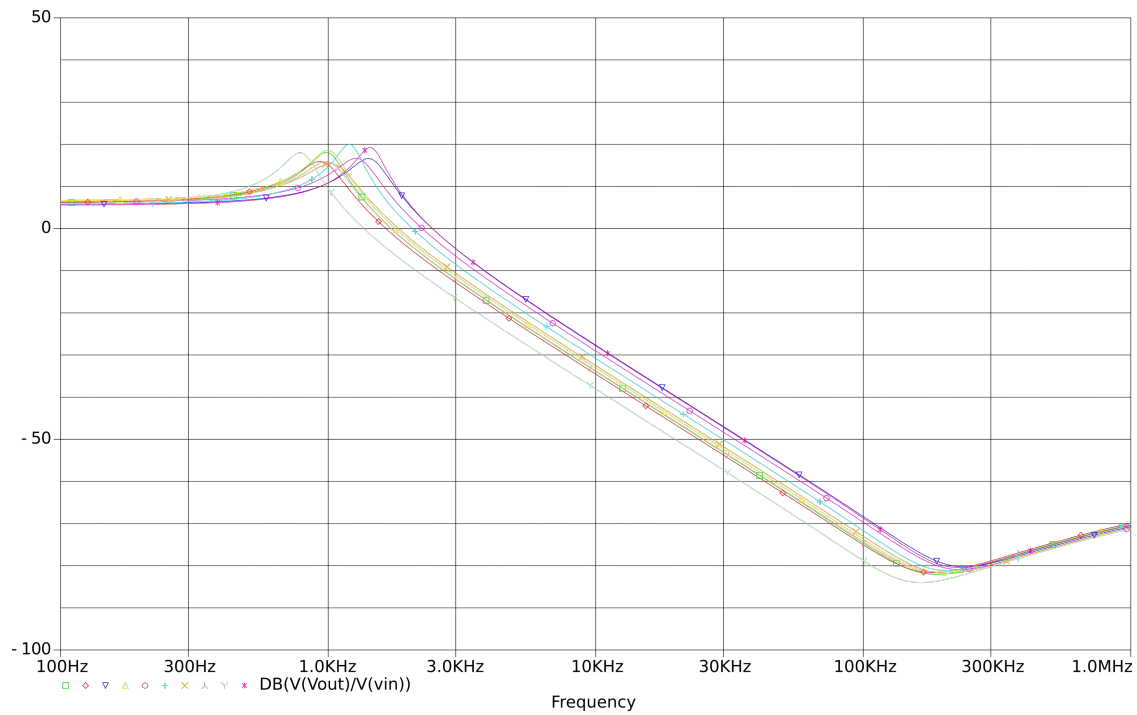


Figure 11: Monte Carlo analyse 5%

Hier is duidelijk op te zien dat de kantelfrequentie een stukje kan verschuiven, ongeveer  $100Hz$  naar beneden en  $300Hz$  naar boven.

### Monte Carlo analyse 1%

Code bijna gelijk aan de vorige, alleen 1% i.p.v. 5% en 20%.

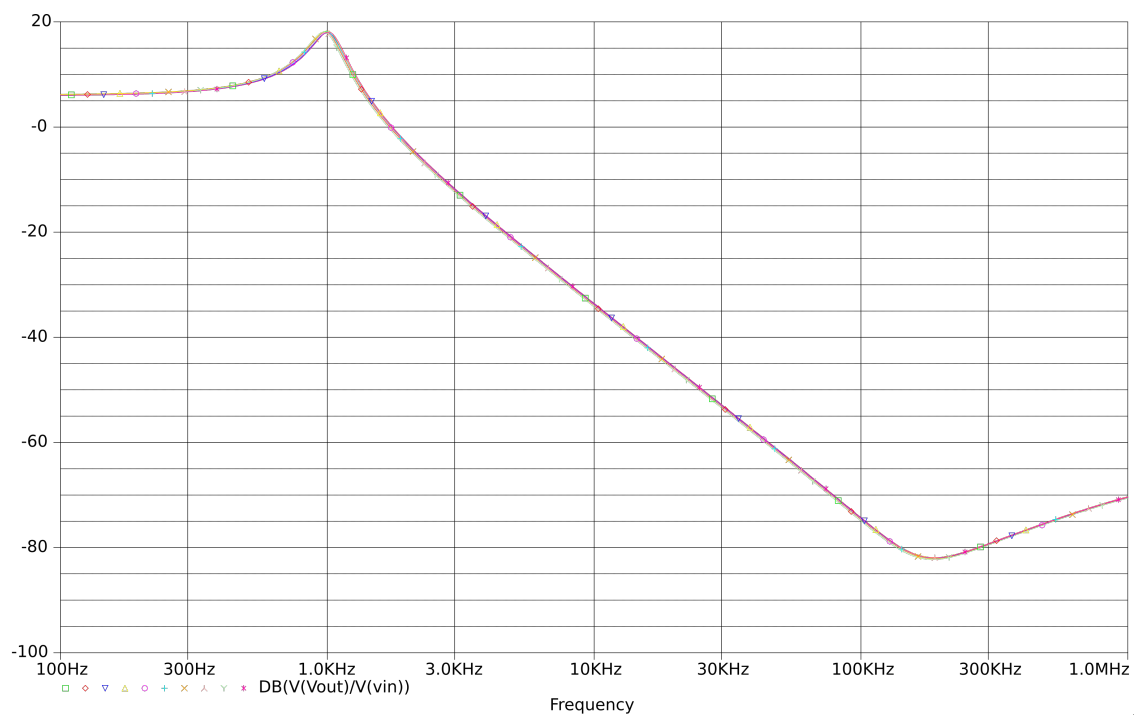


Figure 12: Monte Carlo analyse 1%

Hier is duidelijk veel minder verschil. M.a.w. als de filter nauwkeurig moet zijn, is investeren in 1% componenten geen slecht idee.

## Ingangsimpedantie

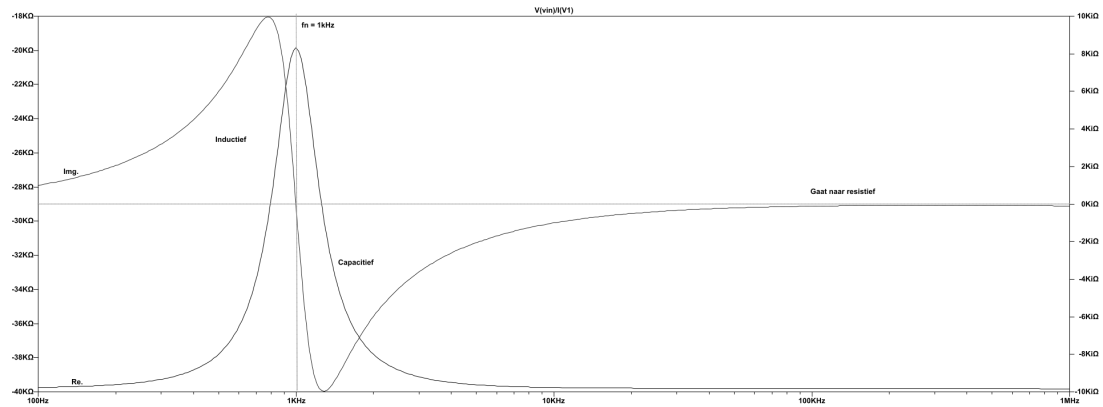


Figure 13: Cartesiaanse Ingangsimpedantie

Omdat er  $180^\circ$  fasedraaing zit op de ingangsstroom is de reële as (links) negatief en lijkt deze ondersteboven te staan. De reële impedantiecomponent *daalt* rond de kantelfrequentie. De maximale ingangsimpedantie is  $40k\Omega$ , de minimale  $20k\Omega$ .

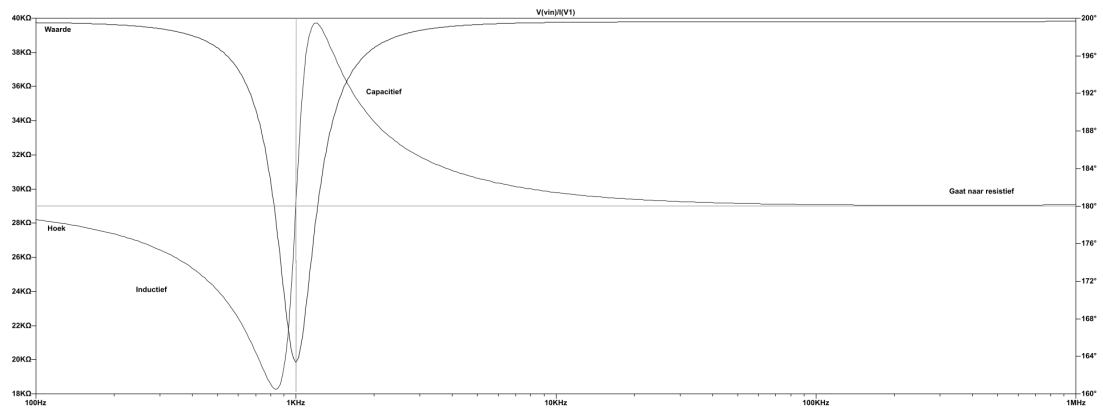


Figure 14: Polaire Ingangsimpedantie

## Stapresponsie

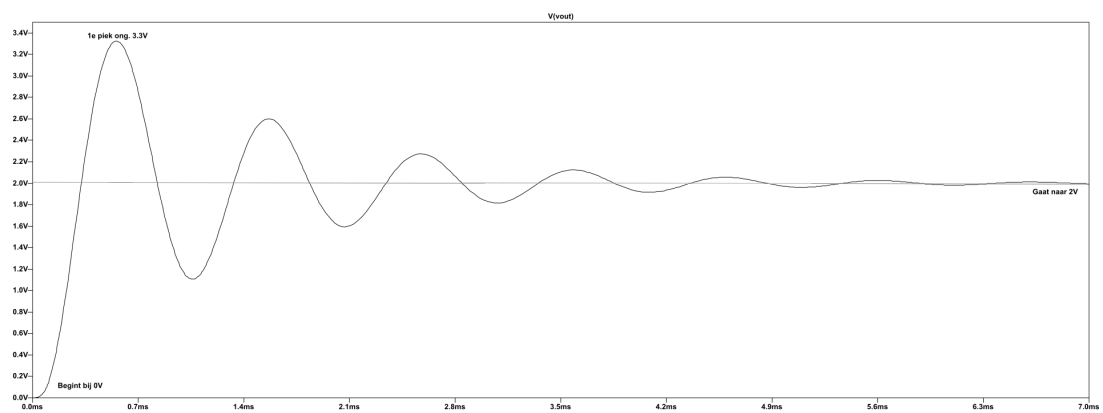


Figure 15: Stapresponsie

De stapresponsie berekend via SPICE is vrijwel identiek aan die berekend via Matlab.