Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

FISICA

Ingegneria Informatica e Automatica1

09.06.2023-A.A. 2022-2023 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione

N.1. Sia z l'asse verticale rivolto verso l'alto, con origine al suolo, e $t_0 = 0$ l'istante in cui il bullone si stacca, in modo che $z(t_0) = h, v_z(t_0) = 0$. Sia t_1 l'istante in cui il bullone si trova a $h/2$ dal suolo e t_2 l'istante in cui tocca il suolo: si sa che $t_2 - t_1 = \Delta t = 1s$. Poiché il moto di caduta è uniformemente accelerato ($\alpha_z = -g$) si ha che:

$$z(t_1) = \frac{h}{2} = h - \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$z(t_2) = 0 = h - \frac{1}{2} g t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Da cui si ottiene $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}$ e quindi $h = (g(\Delta t)^2)/(3-2\sqrt{2}) = 57.18$ m

N.2. Si consideri un sistema di assi cartesiani con l'asse x orizzontale (orientato verso destra) e l'asse y verticale (orientato verso l'alto).

a) Il sistema proiettile + blocco è sottoposto alle seguenti forse esterne: il peso del blocco $M\boldsymbol{g}$, la reazione normale $\mathbf{N}$ dovuta al piano del tavolo, e il peso del proiettile $m\boldsymbol{g}$. Tutte le forze sono verticali per cui $\sum F_x = dP_x/dt = 0$ e quindi P_x certamente si conserva. Anche P_y è costante perché quando il proiettile inizia a penetrare nel blocco, il suo peso è bilanciato da un piccolo aumento della reazione vincolare $\mathbf{N}$ e quindi la risultante delle forze lungo la direzione y resta nulla. L'energia cinetica invece non si conserva perché l'urto è completamente anelastico.

b) Immediatamente prima dell'urto, $P_x^i = mv_p$ avendo chiamato v_p la velocità del proiettile; dopo l'urto, il blocco (con dentro il proiettile) ha una velocità v_0 per cui $P_x^f = (m+M)v_0$. Perciò
$P_x^i = P_x^f \rightarrow mv_p = (m+M)v_0$.

Questa relazione permette di calcolare v_p solo se si conosce v_0, che però si ottiene dal moto parabolico del sistema blocco + proiettile mentre cade a terra. Posta l'origine degli assi nel punto ove avviene l'urto e posto $t = 0$ l'istante in cui inizia il moto, le equazioni orarie sono:

$$x(t) = v_0 t \qquad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2.$$

All'istante t_1 in cui il blocco tocca terra, si ha $x(t_1) = l$ e $y(t_1) = -H$. Da quest'ultima si ricava $t_1 = \sqrt{2H/g}$ che, sostituita nella precedente, dà $v_0 = \sqrt{(gl^2)/(2H)}$ e successivamente

$$v_p = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{gl^2}{2H}}.$$

c) Nel momento in cui il blocco (trattato come puntiforme) tocca il suolo, è soggetto a una forza impulsiva dovuta al pavimento che annulla la componente verticale della sua quantità di moto. E' lecito invece assumere che la quantità di moto lungo l'asse orizzontale si conservi, il che significa che:

i) la forza impulsiva esercitata dal pavimento è praticamente verticale;

ii) il moto di strisciamento inizia con una velocità orizzontale pari a v_0. L'accelerazione del corpo durante lo strisciamento si ottiene dalla relazione $v^2 = v_0^2 + 2_{\alpha x}(x - x_0)$ imponendo che sia $v = 0$ quando $(x - x_0) = L$.

Si trova quindi $\alpha_x = -v_0^2/(2L)$. Durante lo strisciamento la II legge di Newton dice inoltre che $-f_d = (m+M)\alpha_x$ e che $N = (m+M)g$. Essendo $f_d = \mu_d N$ si ottiene che

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2_g L} = \frac{l^2}{4HL}.$$

N.3 Cominciamo col calcolare le coordinate termodinamiche incognite nei vari stati *A*, *B*, *C* e *D*. Nello stato *A*, essendo noti n, V_A e T_A, dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava

$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49\ 10^5\ Pa.$

Nello stato *B*, essendo $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $p_B = p_A$, utilizzando nuovamente l'equazione di stato si ottiene

$$T_B = \frac{3}{2}T_A = 450\ K.$$

Per lo stato *C*, ricordiamo che la trasformazione *BC* è adiabatica reversibile, per cui

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

dove $\gamma = \frac{5}{3}$ per un gas perfetto monoatomico. Dalla 9.29, tenendo presente che $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $V_C = 2V_A$, si ricava

$T_C = T_B \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma-1} = 2T_A \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} = 371.47\ K$

dove nel secondo passaggio si è usata la relazione $T_B = \frac{3}{2}T_A$. Per determinare la pressione p_C, si parte dall'equazione di stato $p_C V_C = nRT_C$ e, usando il risultato 9.30 e il fatto che $V_C = 2V_A$, si ricava

$$p_C = p_A \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} = 1.54\ 10^5\ Pa.$$

Infine, per lol stato *D*, consideriamo che la trasformazione *CD* è isocora e quindi $V_D = V_C = 2V_A$. Inoltre, la trasformazione *DA* è adiabatica reversibile, quindi sussiste la relazione $p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma$, da cui si ottiene

$$p_D = p_A \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} = 0.78\ 10^5\ Pa.$$

Dall'equazione di stato si ottiene infine $T_D = (2^{1-\gamma})T_A = 188.99\ K$.

a) Grazie al primo principio della termodinamica sappiamo che in un ciclo $\Delta u = 0$ per cui $Q = W$. Il gas non compie lavoro nella trasformazione isocora *CD*: in tutte le altre trasformazioni il lavoro è non nullo. Però, nelle trasformazioni adiabatiche *BC* e *DA*, il gas non scambia calore. Pertanto anziché calcolare il lavoro totale L come somma dei lavori compiuti lungo le *tre* trasformazioni non isocore *AB*, *BC* e *DA*, conviene calcolare il calore totale scambiato dal gas lungo le *due* trasformazioni non adiabatiche, ossia *AB* e *CD*. Ricordando che $c_V = 3R/2$ e $c_p = 5R/2$, il calore scambiato nell'isobara *AB* vale

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 3116.25\ J$$

mentre quello scambiato lungo l'isocora *CD* vale

$$Q_{CD} = nc_v(T_D - T_C) = -2274.60\ J.$$

In particolare, $Q = Q_{AB} + Q_{CD} = 841.65\ J$ è il calore scambiato durante l'intero ciclo, che coincide con il lavoro totale compiuto:

$$W = Q = 841.65\ J.$$

b) Il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 1 - \frac{c_V(T_C - T_D)}{c_p(T_B - T_A)} = 0.27$$

che va paragonato con

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 0.58$$

che rappresenta il rendimento della macchina di Carnot.

c) Essendo l'entropia una funzione di stato, la sua variazione su un ciclo è sempre nulla, quindi $\Delta S = 0$. Essendo le adiabatiche reversibili anche isoentropiche, segue che $\Delta S_{BC} = 0$ e $\Delta S_{DA} = 0$. Pertanto

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = 0$$

da cui $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$. Per calcolare la variazione di entropia nella trasformazione isobara *AB*, utilizziamo la relazione

$$\Delta S_{AB} = nc_p ln\frac{T_B}{T_A} = 8.42\ J/K.$$

N.4. 4. I tre condensatori sono in parallelo, la capacità equivalente iniziale è $C_{eq}^{in} = 3C_0$, invece, la capacità equivalente dopo aver inserito una lastra di dielettrico in uno dei tre capacitori è $C_{eq}^{fin} = (2 + \varepsilon_r)C_0$.

Le espressioni dell'energia elettrostatica immagazzinata sono: $U_c^{in} = \frac{1}{2}C_{eq}^{in}\Delta V = \frac{3}{2}C_0\Delta V$, $U_c^{fin} = \frac{1}{2}C_{eq}^{fin}\Delta V = \frac{1}{2}(2 + \varepsilon_r)C_0\Delta V = 2U_c^{in}$, da cui si ricava $\varepsilon_r = 4$. Per le cariche:

$$Q_1 = Q_2 = C_0\Delta V = 48nC$$

$$Q_3 = \varepsilon_r C_o \Delta V = 192nC$$

N.5 5. $f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -2At\pi R^2 \Rightarrow |f_i| = 2At^*\pi R^2 = 1.25mV$, se il vettore induzione magnetica è uscente dal foglio la corrente indotta scorre in senso orario.