**Università degli Studi di Roma “La Sapienza”**

**FISICA**

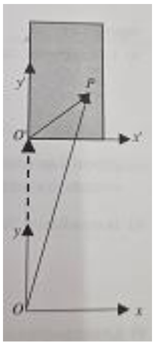
**Ingegneria Informatica e Automatica1**

**19.10.2023-A.A. 2022-2023 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione**

**soluzioni**

## 1. ESERCIZIO

Si definiscano due sistemi di riferimento $Oxy$ e $O'x'y'$ solidali, rispettivamente, con le scale e l’ascensore come in Figura.




Sia $t_0 = 0$ l’istante in cui il mazzo di chiavi sfugge alle mani dell’uomo e sia $h = 1.00\ m$ la sua quota iniziale $y'(t_0)$. L’ascensore si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato verso l’alto, per cui l’accelerazione di trascinamento (cfr. Equazione 1.23) è uguale a $\mathbf{a}_T = \alpha_{O'}\mathbf{u}_y$ dove $\alpha_{O'} = 1.0\ m/s^2$. L’accelerazione delle chiavi rispetto a $O'$ è quindi $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T = -(g + \alpha_{O'})\ \ \mathbf{u}_y$. Il moto avviene solo lungo la direzione verticale, pertanto l’equazione oraria del moto rispetto a $O'$ è

$$x'(t) = x'(t_0) \qquad\qquad y'(t) = h + \frac{1}{2}\alpha'_y t^2 = h - \frac{1}{2}(g + \alpha_{O'})t^2.$$

a) Le chiavi toccano il pavimento dell’ascensore al tempo $t_1$ tale che $y'(t_1) = 0$ per cui

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_{O'} + g}} = 0.43\ s.$$

b) Dal punto di vista di *O*, le chiavi hanno una velocità iniziale (di trascinamento) $\mathbf{v}(t_0) = v_{0y}(t_0)\boldsymbol{u}_y$ dove $v_{0y}(t_0) = 2.0\ m/s$ . Pertanto le equazioni del moto rispetto a *O* sono:

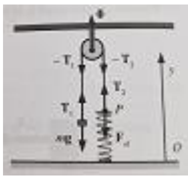
$$x(t) = x(t_0) \qquad y(t) = y(t_0) + v_{0y}(t_0)t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2$$

dove $\alpha_y = -g$. Lo spostamento delle chiavi nell'intervallo di tempo tra $t_0$ e $t_1$ è quindi

$$\Delta x = 0 \qquad \Delta y = v_{0y}(t_0)t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 = -0.047\ m.$$

2. **ESERCIZIO**

In Figura è rappresentato il diagramma delle forze agenti. In particolare, sul corpo di massa $m$ agiscono la forza peso, $m\mathbf{g}$, e la tensione $\mathbf{T}_1$ della fune; sull'estremo $P$ della fune a contatto con la molla agiscono la tensione $\mathbf{T}_2$ e la forza elastica $\mathbf{F}_{el}$; sulla carrucola agiscono le forze $-\mathbf{T}_1$, $-\mathbf{T}_2$ e la forza $\boldsymbol{\phi}$ esercitata dal gancio.



Scegliamo un sistema di riferimento inerziale con l'asse $x$ orizzontale e l'asse $y$ verticale e orientato verso l'alto, con origine nell'estremità fissa della molla. Scriviamo le equazioni di Newton nel caso generale (e non direttamente nella condizione di equilibrio) perché saranno utili per la soluzione del punto (b). Esse risultano:

$$\begin{cases} m\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 = m\mathbf{a} \quad (corpo\ m) \\ \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_{el} = 0 \quad (punto\ P) \\ \boldsymbol{\phi} - \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 = 0 \quad (puleggia). \end{cases} \tag{2.43}$$

Nella seconda equazione, il secondo membro è zero perché il punto $P$ è privo di massa. Tale equazione ci dice semplicemente che è sempre $T_2 = F_{el}$. Inoltre, visto che la carrucola ha massa trascurabile, il suo unico effetto è quello di far variare la direzione della fune e, quindi, della tensione da essa esercitata. Pertanto $T_1 = T_2$ e quindi da ora in poi indicheremo entrambe queste quantità con $T$. Proiettando le Equazioni 2.43 lungo l'asse $y$, otteniamo quindi

$$\begin{cases} -mg + T = ma \\ +T - F_{el} = 0 \\ +\phi - 2T = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Indicando con $yp$ la coordinata del punto $P$, la forza elastica ha modulo $F_{el} = kyp$, visto che la molla ha lunghezza a riposo trascurabile. Pertanto, dalla seconda equazione risulta che $T = F_{el} = kyp$. Esplicitando anche l'espressione dell'accelerazione $\alpha = \frac{d^2y}{dt^2}$ nella prima equazione, otteniamo

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kyp. \tag{2.45}$$

a) Si ha l'equilibrio quando $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ o, equivalentemente, $kyp = mg$. Di conseguenza, si ricava la posizione di equilibrio dell'estremo libero della molla: $y_{p,eq} = mg/k$. In tali condizioni risulta che $F_{el} = T = mg$. Inoltre, si ottiene che il modulo della reazione vincolare che il gancio esercita sulla carrucola all'equilibrio è $\phi = 2mg$.
b) Per determinare il moto del sistema in una posizione generica (quindi fuori dall'equilibrio), si consideri la prima delle Equazioni 2.44. Tenendo conto della posizione di equilibrio appena determinata, tale equazione si può scrivere nella forma:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = k\left(y_p - y_{p,eq}\right) \rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = k\Delta y_p. \tag{2.46}$$

Nell'ultimo passaggio si è indicato con $\Delta y_p$ lo spostamento del punto $P$ dalla posizione di equilibrio. Si osservi che se l'estremo $P$ si sposta dall'equilibrio di un tratto $\Delta y_p$, la massa $m$ si sposta di un tratto $\Delta y = y - y_{eq}$. Quindi, ponendo $y - y_{eq} = \varepsilon$, l'Equazione 2.46 per il moto della massa massa $m$ diventa

$$m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -k\varepsilon \tag{2.47}$$

che rappresenta l'equazione di un moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. La soluzione generale è del tipo

$$\varepsilon(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{2.48}$$

Le costanti arbitrarie $A$ e $\varphi$ si determinano imponendo le condizioni iniziali. Secondo il testo del problema, all'istante $t = 0$ la massa $m$ si è spostata di un tratto $l$ dalla posizione di equilibrio verso il basso, ed è ferma. Per cui $\varepsilon(t = 0) = -l, \frac{d\varepsilon}{dt}(t = 0) = 0$. Si ottiene quindi

$$-l = A\cos\varphi$$

$$0 = -\omega A\sin\varphi$$

Da cui si trova $A = -l$ e $\varphi = 0$. L'equazione oraria è quindi $\varepsilon(t) = y(t) - y_{eq} = -l\cos\omega t$. Pertanto, l'intero sistema si muove di moto armonico, intorno alla posizione di equilibrio, con pulsazione $\omega$. In particolare, dalla prima equazione del sistema 2.44 si ottiene per la tensione nella fune l'espressione

$$T = mg + m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \omega^2 l\cos\omega t.$$

Si osservi che solo all'equilibrio $T = mg$, mentre in generale $T$ è una funzione del tempo, così come $\phi = 2T$.

3. **ESERCIZIO**

Sia $Q_2 = +1000\,J$ il calore che il gas assorbe dalla sorgente a temperatura $T_2, Q_1$ il calore che cede alla temperatura $T_1$, e $L = +250\,J$ il lavoro compiuto in un ciclo. Alla fine di un ciclo l'energia interna del gas torna al valore iniziale, perciò $\Delta U = 0$ e quindi $Q_1 + Q_2 - L = 0$ da cui $Q_1 = L - Q_2 = -750\,J$ (negativo perché ceduto dal gas).

a) Il rendimento del ciclo è

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = 0.25.$$

b) Alla fine del ciclo, il gas torna nello stato iniziale e quindi anche la sua entropia (che è una funzione di stato) torna al valore iniziale, per cui $\Delta S_{sist} = 0$ (intendendo con "sistema" il gas). La variazione di entropia dell'universo (termodinamico) è data da

$$\Delta S_U = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Ossia è uguale alla somma delle variazioni di entropia delle due sorgenti. Queste ultime si possono calcolare immaginando uno scambio di calore reversibile isotermo, ossia

$$\Delta S_2 = \frac{-Q_2}{T_2} = -1.667\,J/K \qquad\qquad \Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} = +2.143\,J/K,$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che un calore positivo (assorbito) dal punto di vista del gas è negativo (ceduto) dal punto di vista della sorgente. Infine, si ottiene $\Delta S_U = +0.476\,J/K$.

c) Il fatto che l'entropia dell'universo aumenti durante un ciclo è sufficiente a provare che tale ciclo è irreversibile. Si può però anche ragionare sul rendimento: infatti una macchina di Carnot operante tra le stesse due temperature avrebbe un rendimento

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.416$$

Mentre per il ciclo descritto dal problema si ha $\eta = 0.25 < \eta_C$. A parità di calore assorbito $Q_2$, tale macchina di Carnot produrrebbe un lavoro pari a $L_{rev} = \eta_C Q_2 = 416\,J$. La differenza tra i due lavori è $L_{rev} - L = 166\,J$. D'altra parte $T_1 \Delta S_U = 166\,J$, come si voleva verificare.

4. ESERCIZIO

Applicando il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio r si avrà:

$0 < r < R$ $\quad Q_{int} = Q + \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ dove la densità di carica della sfera è pari a: $\rho = -\frac{3Q}{4\pi r^3}$ da cui il campo elettrico in punti interni alla sfera:

$E_{int}(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q+\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ diretto radialmente

$r > R \qquad Q_{int} = 0 \qquad E_{ext}(r) = 0$

5.ESERCIZIO

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica per la massa m si avrà: $qV = \frac{1}{2}mv^2$ inoltre nella zona dove è presente il vettore induzione magnetica sulla carica q agirà la forza di Lorentz di modulo pari a: $F_L = qvB_0 = m\frac{v^2}{\frac{d}{2}}$ che messa a sistema con la precedente restituisce:

$$v = \frac{4V}{dB_o} = 2 \cdot 10^3\,\frac{m}{s} \; e \; q = \frac{1}{2V}mv^2 = 2 \cdot 10^{-6}C$$