## Übungsaufgaben: Abgabe

1. Schreiben Sie in Mengenschreibweise:
   (a) $A =$ Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen von 21 bis 39: $A = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$ oder $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 21 \leq n \leq 39, \exists k \in \mathbb{N} : \; n = 3k\}$.
   (b) $B =$ Menge aller Primzahlen von 13 bis 41: $B = \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$.

   und bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$ sowie $A \setminus B$.
   *Lösung:*

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{13, 17, 19, 21, 23, 24, 27, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 39, 41\} \\ A \cap B &= \emptyset \\ A \setminus B &= A \end{aligned}$$

   **(10 Punkte: jeweils 2 Punkte für $A$,$B$ und jeweils 2 Punkte für Mengenoperationen)**

2. Welche Aussagen sind jeweils hinreichend und/oder notwendig füreinander? Geben Sie alle gültigen Implikationen an und begründen Sie diese.
   A. $x > 1$
   B. $x^2 > 1$.
   C. $x \geq 1$

   *Lösung:*
   Aus $x > 1$ folgt $x^2 > 1$: $x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1$. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist eine streng monotone wachsende Funktion, deswegen ist $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1^2$.
   Die Umkehrung ist falsch: Denn für $x = -2$ ist $x^2 > 1$, aber $-2 < 1$.
   Aus $x > 1 \;\Rightarrow\; x \geq 1$, denn natürlich ist jede Zahl $> 1$ auch $\geq 1$. Die Umkehrung ist wiederum falsch, denn $x = 1 \geq 1$, aber nicht größer als 1.
   Zwischen $x^2 > 1$ und $x \geq 1$ bestehen keine Implikationen.
   Sie können sich die Implikationen auch mit Hilfe der Mengen erklären, für die die Aussagen wahr sind: Aussage $A$ ist wahr genau dann, wenn $x \in (1, \infty)$. Aussage $B$ ist wahr genau dann, wenn $|x| > 1$, also $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Aussage $C$ ist wahr genau dann, wenn $x \in [1, \infty)$. Es gilt nun:

$$(1, \infty) \subset [1, \infty) \;\Leftrightarrow\; A \Rightarrow C$$

$$(1, \infty) \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \;\Leftrightarrow A \Rightarrow B$$

   **(10 Punkte): jeweils 5 Punkte pro richtiger Implikation mit Begründung**

3. Zeigen Sie dass

$$(x, y) \in \mathcal{R} \;:\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = x - y$$

   auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $[0]$, $[1]$ und $\left[\frac{1}{2}\right]$.
   *Lösung:*
   Reflexiv? Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $x^2 - x^2 = x - x = 0$. Also $(x, x) \in \mathcal{R}$.

Symmetrisch? Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - y^2 = x - y$, dann ist $y^2 - x^2 = y - x$ (Multiplikation der Gleichung mit $-1$), also ist $(y, x) \in \mathcal{R}$.
Transitiv? Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - y^2 = x - y$ und $y^2 - z^2 = y - z$. Wir stellen die 2. Gleichung nach $y^2$ um und setzen das in die 1. Gleichung ein:

$$x^2 - (z^2 + y - z) = x - y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - z^2 = x - z.$$

Also ist $(x, z) \in \mathbb{R}$.
Die Äquivalenzklasse $[0]$ enthält alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $(x, 0) \in \mathcal{R}$. Also muss für diese $x$ gelten: $x^2 = x$ Ist $x \neq 0$, dann können wir diese Gleichung durch $x$ teilen und erhalten $x = 1$. Geometrisch interpretiert enthält $x^2 = x$ die Schnittpunkte der Normalparabel mit der Winkelhalbierenden:

$$[0] = \{0, 1\}.$$

Wir haben eben ausgerechnet, dass $1 \in [0]$, also muss gelten: $[0] = [1]$.
Die Äquivalenzklasse $\left[\frac{1}{2}\right]$ enthält alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $\left(x, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{R}$, also muss gelten: $x^2 - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$. Ist $x \neq \frac{1}{2}$, dann können wir die Gleichung durch $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ teilen und erhalten $x + \frac{1}{2} = 1$, also $x = \frac{1}{2}$:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

**(10 Punkte)**

4. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv? Überprüfen Sie bitte, ob die Abbildungen jeweils injektiv und/oder surjektiv sind.

   (a) $f(x) = 5x + 3$

   (b) $f(x) = e^{-x^2}$

   *Lösung:*

   (a) $f$ ist injektiv, denn für beliebige $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ folgt aus $5x_0 + 3 = 5x_1 + 3$ direkt $x_0 = x_1$. Die Funktion ist surjektiv, denn für $y \in \mathbb{R}$ existiert $x = \frac{y-3}{5}$, so dass $y = 5x + 3$. Also ist $f$ bijektiv.

   (b) Die Funktion $f$ ist nicht injektiv, denn es ist $e^{-(-1)^2} = e^{-1^2} = e^{-1}$, aber $-1 \neq 1$. Die Funktion ist nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$, denn zu $y < 0$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $e^{-x^2} = y$, denn $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   **(10 Punkte: 5 Punkte je Teilaufgabe**

5. Geben Sie alle bijektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ an.
   *Lösung:*
   Es gibt $2 \cdot 3$ bijektive Abbildungen. Die Abbildungen sind surjektiv, also muss jedes Element aus $\{a, b, c\}$ „getroffen“ werden; die Abbildungen sind injektiv, also darf jedes

Element aus $\{a, b, c\}$ höchstens einmal getroffen werden.

$$\begin{aligned}
&f_1(1) = a,\ f_1(2) = b,\ f_1(3) = c\\
&f_2(1) = a,\ f_2(2) = c,\ f_2(3) = b\\
&f_3(1) = b,\ f_3(2) = a,\ f_3(3) = c\\
&f_4(1) = b,\ f_4(2) = c,\ f_4(3) = a\\
&f_5(1) = c,\ f_5(2) = a,\ f_5(3) = b\\
&f_6(1) = c,\ f_6(2) = b,\ f_6(3) = a
\end{aligned}$$

**(10 Punkte)**