Hinweis: Ich schreibe manchmal Spaltenvektoren wie z.B. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **aus Faulheit und Platzgründen als Zeilenvektor** $(1,2)$**. Nicht wundern.**

Verständnisfragen

1. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?
   (a) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max_k x_k - \min_k x_k$ (größter minus kleinster Eintrag in einem Vektor).
   Beispiel: sei $x = (1,2,3,4)$, *dann ist* $\max_k x_k = 4$ *und* $\min_k x_k = 1$ *und damit* $f(x) = 4 - 1 = 3$.
   nicht linear, denn $(-1)f((1,2)) = (-1)(2-1) = -1$, *aber* $f((-1)(1,2)) = f((-1,-2)) = -1+2 = 1$.
   (b) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_n - x_1$.
   Beispiel: sei $x = (1,2,3,4,5)$, *dann ist* $f(x) = 5 - 1 = 4$.
   ist linear, denn
   $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_1 + \mu y_1) = \lambda(x_n - x_1) + \mu(y_n - y_1) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
   (c) $f:\mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = median(x)$ (wenn man die Einträge der Größe nach sortiert, ist der Median genau gleich dem mittleren Eintrag).
   Beispiel: sei $x = (2,-1,0,4,3)$, *wir sortieren der Größe nach:* $-1,0,2,3,4$, *dann ist der Median* $= 2$, *also* $f(x) = 2$. *nicht linear, denn*
   $$f((1,7,3)) + f((2,1,0)) = 3 + 1 = 4,\ f((1,7,3) + (2,1,0)) = f(3,7,3)) = 3.$$
   (d) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_n + (x_n - x_{n-1})$ (=Extrapolation eines Vektoreintrags)
   Beispiel: sei $x = (1,4,5,10)$, *dann ist* $f(x) = 10 + (10-5) = 15$. *linear, denn*
   $$f(\lambda x + \mu y) = 2\lambda x_n + 2\mu y_n - \lambda x_{n-1} - \mu y_{n-1} = \lambda(2x_n - x_{n-1}) + \mu(2y_n - y_{n-1}) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
2. Sei $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir wissen, dass gilt:
   $$f((1,1,0)) = -1, \quad f((-1,1,1) = 1, \quad f((1,-1,-1)) = 1.$$
   Welche Aussage ist richtig?
   - ☐ f muss linear sein.
   - ☐ f kann linear sein.
   - ☐ f kann nicht linear sein.

   f kann nicht linear sein, denn $(-1)f((-1,1,1)) = -1$, *aber* $f((-1)(-1,1,1)) = f(1,-1,-1) = 1$.
3. Es sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 1, \quad f\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right) = 3.$$
   Ist es möglich, dass f linear ist?
   f kann nicht linear sein, denn $2 \cdot f((1,2)) = 2$, *aber* $f(2(1,2)) = f((2,4)) = 3$.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Wir wissen, dass

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.$$

Können Sie dann die folgenden Funktionswerte berechnen?

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right), \quad f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right), \quad f\left(\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right), \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Es ist wegen der Linearität von f:

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}, \ f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}, \ f\left(\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \text{linear unabhängig zu } (1,0), \text{ nicht berechenbar.}$$

Standardaufgaben

1. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Für welche Wahl von a, b, c ist die Matrix A invertierbar. Berechnen Sie entsprechend das Inverse A^{-1}.*(Wiederholung)*
Lösung: $\det A = 1$ (Produkt der Diagonalelemente) und damit ist A für alle a, b, c invertierbar. Die Inverse berechnet sich indem man $Ax = e_1$, $Ay = e_2$, $Az = e_3$ löst, die Inverse wird dann aus den Spalten x, y, z gebildet, also$A^{-1} = [xyz]$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -a & ac-b\\0 & 1 & -c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Sei

$$M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\det(M), \det(N), \det(MN), \det(M)\det(N), \det(M^t), \det(M+N)-(\det(M)+\det(N)).$$

(*Wiederholung*)

(b) Ist det eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ (von der Menge der 2×2-Matrizen nach $\mathbb{R}$)? Überprüfen Sie die Linearität mit Hilfe von Aufgabenteil a).

Lösung:

(a) $\det(M) = ad - bc$, $\det(N) = xw - yz$, $\det(MN) = adxw + bcyz - adyz - bcwx = \det(M)\det(N)$, $\det(M^t) = \det(M)$, $\det(M+N) = (a+x)(d+w) - (c+z)(b+y)$, $\det(M) + \det(N) = ad - bc + xw - yz$.

(b) nicht linear, denn $\det(M+N) - \det(M) - \det(N) = dx + aw - bz - cy$. Wenn det linear wäre, müsste 0 herauskommen.

3. Sei $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\}$. Für welche x ist diese Menge eine Basis von $\mathbb{R}^2$? (*Wiederholung*)
Lösung:
Wir schauen uns die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ an. Diese Matrix hat genau dann Rang 2 (d.h. die beiden Spaltenvektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$), falls $x_2 \neq 0$ ist.

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, ob f linear ist.
Lösung:
nicht linear, denn

$$(-1)f((1,0)) = (-1)(1,0) = (-1,0), \quad \text{aber: } f((-1)(1,0)) = f((-1,0)) = (1,0).$$

5. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W gilt:

$$f(0) = 0.$$

Lösung: Für eine lineare Abbildung gilt für $v \in V$: $f(v - v) = f(v) - f(v)$, daraus folgt direkt $f(0) = 0$.

6. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = (1,1)$, $f(e_3) = (2,2)$. Geben Sie die Darstellungsmatrix dieser Abbildung an. *Lösung:* Das Bild des i-ten Basisvektor liefert uns die i-te Spalte der Darstellungsmatrix, also:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Es seien

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \; g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $g \circ f$.
Lösung:
Wir rechnen die Darstellungsmatrizen A von f und B von g aus und multiplizieren diese:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$(g \circ f)(x) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -4x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}.$$

8. Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Dimension von Kern und Bild.
Lösung:
Wir berechnen den Kern, indem wir das LGS $Ax = 0$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen. Da die rechte Seite $= 0$ ist, genügt es, A in Zeilenstufenform zu bringen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{III mit I vertauschen,2I+3II} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow_{II-3III, II+3IV} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\ker(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist rg(A) $= 2$ und damit $\dim \ker(f_A) = 4 - 2 = 2$.
Das Bild von f_A ist der von den Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3, v_4 von $A = [v_1 v_2 v_3 v_4]$ aufgespannte Raum. Die erste Spalte v_1 ist gleich $-v_4$. Weiter ist $v_2 = \frac{3}{2}(v_1 - v_3)$. Wir können also v_1, v_3 als Basis von $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ wählen:

$$Bild(f_A) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Er ist also zweidimensional: $\dim Bild(f_A) = 2$.

9. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2.

Lösung:

(a) Wir bestimmen den Rang von $A = [v_1 v_2]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 2$ und damit bilden v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(b) Wir rechnen $f(v_1)$, $f(v_2)$ und erhalten damit die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix bzgl. v_1, v_2:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$