Verständnisfragen

1. Haben reelle lineare Gleichungssysteme mit zwei verschiedenen Lösungen immer unendlich viele Lösungen? *ja, denn kein (reelles!) lineares Gleichungssystem kann nur zwei verschiedene Lösung haben.*

2. Wenn ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mt n Unbekannten und n Gleichungen für **ein** $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, ist es dann auch für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar? *Ja, denn wenn $Ax = b$ eindeutig lösbar ist, besitzt A vollen Rang* $\mathrm{rg(A) = n}$. *Somit ist auch jedes andere lineare Gleichungssystem $Ax = b'$ eindeutig lösbar.*

3. Folgt aus $\mathrm{rg(A) = rg(A|b)}$, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist? *Nein, es folgt daraus, dass es lösbar ist, die Lösung muss nicht eindeutig sein.*

4. (a) Ein lineares Gleichungssystem besitzt dieselbe Anzahl an Gleichungen wie an Unbekannten oder mehr Gleichungen als Unbekannte: Was können Sie daraus über die Anzahl an Lösungen oder die Dimension des Lösungsraums schlußfolgern? *Sei n die Anzahl an Gleichungen = Anzahl an Unbekannten. Dann gilt* $\mathrm{rg(A) \leq rg(A|b) \leq n}$. *Somit kann das Gleichungssystem lösbar, eindeutig lösbar oder nicht lösbar sein. Bezeichne n die Anzahl der Gleichungen und m die Anzahl der Unbekannten mit $n > m$. Dann ist* $\mathrm{rg(A) \leq rg(A|b) \leq m < n}$. *Das lineare Gleichungssystem kann lösbar (*$\mathrm{rg(A) = rg(A|b) < m}$*), eindeutig (lösbar* $\mathrm{rg(A) = rg(A|b) = m}$*) oder nicht lösbar (*$\mathrm{rg(A) < rg(A|b)}$*) sein. Die Dimension des Lösungsraum ist immer, wenn $Ax = b$ lösbar ist,* $\dim(\mathbb{L}) = m - \mathrm{rg(A)}$.

   (b) Ein lineares Gleichungssystem besitzt weniger Gleichungen als Unbekannte: Was können Sie in diesem Fall über die Anzahl der Lösung(en) und die Dimension des Lösungsraums sagen? *Wir wissen, dass das lineare Gleichungssystem unterbestimmt ist. Sei n die Anzahl an Gleichungen, m die Anzahl der Unbekannten, dann ist immer* $\mathrm{rg(A) \leq n < m}$. *Also kann das lineare Gleichungssystem lösbar (*$\mathrm{rg(A) = rg(A|b)}$*) oder nicht lösbar* ($\mathrm{rg(A) < rg(A|b)}$*) sein, aber niemals eindeutig lösbar. Der Lösungsraum ist entweder leer oder besitzt Dimension* ≥ 1.

Standardaufgaben

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & & & x_3 & + & 4x_4 & = & 8 \end{array}$$

Lösung:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Es ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie geometrisch (also mit Hilfe einer Zeichnung), dass das LGS keine Lösung besitzt. *Lösung:* Wenn wir die beiden zugehörigen Geradengleichungen aufschreiben, aluten diese $2x - y = 3$, also $y = 2x - 3$, und $-6x + 3y = 1$, also $y = \frac{1}{3} + 2x$. Es handelt sich also um zwei parallele Geraden (die Steigung ist jeweils 2). Sie besitzen demnach keinen Schnittpunkt und das LGS somit keine Lösung.

3. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, so dass das folgende lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{llll} x_1 & -3x_2 & & = 6 \\ x_1 & & +3x_3 & = -3 \\ 2x_1 & +kx_2 & +(3-k)x_3 & = 1 \end{array}$$

Lösung:
Wir verwenden den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & k & (3-k) & 1 \end{array}\right), \quad \big| I - II, 2I - III$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -6-k & -(3-k) & 11 \end{array}\right), \quad \big| -\frac{1}{3} II$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6-k & -(3-k) & 11 \end{array}\right), \quad \big| (6+k)II + III$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3+2k & -7-3k \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, falls rg(A) $\neq$ rg(A|b) ist, also

$$k = -\frac{3}{2} : \mathrm{rg(A)} = 2, \mathrm{rg(A|b)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, falls rg(A) = rg(A|b) = 3 ist, also

$$k \neq -\frac{3}{2} : \mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg(A|b)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{genau eine Lösung}$$

Der Fall, dass rg(A) = rg(A|b) = 2 und dass somit unendlich viele Lösungen existieren, kann nicht eintreten, da $3 + 2k$ nicht dieselbe Nullstelle besitzt wie $-7 - 3k$.

4. Geben Sie mit Hilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix an, wie viele Lösungen die folgenden Gleichungssysteme besitzen.

a)

$$\begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 14 \\ 2x + 3y &= -4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + y &= 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Lösung: Ich bezeichne alle Koeffizientenmatrizen mit A, alle erweiterten Koeffizientenmatrizen mit $A|b$.

(a) $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$, also existiert genau eine Lösung.

(b) $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$, also existiert genau eine Lösung.

(c) $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A|b}) = 1$, also existieren unendlich viele Lösungen.

5. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x + ky &= 4 \end{aligned}$$

Lösung: Das LGS hat genau dann keine Lösung, falls $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rg}(\mathrm{A|b})$. Dies ist nur möglich für $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ und $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$. Wir wählen entsprechend k so, dass die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten Zeile ist: $k = -2$.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 9 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}$$

Jeder Rechenschritt muss nachvollziehbar sein!
Lösung: Wir verwenden den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 9 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad \big| 6I - II, I + III$$
$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 16 & 12 & 2 & 54 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 12 \end{array}\right), \quad \big| -\frac{16}{3}II + III$$
$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 16 & 12 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{15}{8} \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile lesen wir ab:

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{5}{8}x_4 = -\frac{15}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = -\frac{4}{3}\left(-\frac{15}{8} + \frac{5}{8}x_4\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{6}x_4.$$

Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies:

$$16x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 54 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{16}\left(54 - 2x_4 - 12(\frac{5}{2} - \frac{5}{6}x_4)\right) = \frac{3}{2} + \frac{x_4}{2}.$$

Eingesetzt in die erste Zeile ergibt das:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 9 - 3\left(\frac{3}{2} + \frac{x_4}{2}\right) - 2\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6}x_4\right) = -\frac{1}{2} + \frac{x_4}{6}.$$

Wir erhalten also unendlich viele Lösungen:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{x_4}{6} \\ \frac{3}{2} + \frac{x_4}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{6}x_4 \end{pmatrix} \;\Big|\; x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(10 Punkte: umschreiben in $(A|b)$, 2 Pkte, für jeden Gauss-Schritt 2 Pkte: 6 Pkte insgesamt, Lösung: 2 Pkte)

2. Geben Sie jeweils – wenn möglich – ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen an, das
   (a) keine,
   (b) genau eine,

(c) genau zwei,

(d) unendlich viele

Lösungen besitzt.
Begründen Sie Ihre Wahl bzw. warum ein solches Gleichungssystem nicht existieren kann – entweder durch eine Rechnung oder eine Skizze mit kurzer Erklärung.
Lösung:

(a) drei parallele Geraden besitzen keinen keinen Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}.$$

(b) drei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, z.B. im Ursprung wie $y = x$, $y = -x$ und $y = 2x$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

(c) das geht nicht: drei Geraden können sich niemals in genau zwei verschiedenen Punkten schneiden.

(d) drei Geraden, von denen alle identisch sind:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

(12 Punkte: 3 Punkte pro Teilaufgabe - 1 Pkt Bsp, 2 Pkte Begründung)

3. Betrachten Sie das folgende von $b \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccll} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1\\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2\ .\\ x_1 & +2x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & = & b \end{array}$$

Entscheiden Sie für welche b das lineare Gleichungssystem lösbar ist und geben Sie in diesem Fall die Lösung an.
Lösung:
Wir verwenden erneut den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -\frac{5}{2} & b\end{array}\right), \quad \big| I-II, I-III\\
=&\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & 1-b\end{array}\right), \quad \big| II+2*III\\
=&\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1-2b\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile lesen wir ab:

$$0 \cdot x_3 = 1 - 2b$$

Das ist nur lösbar, wenn $1 - 2b = 0$ ist, also $b = \frac{1}{2}$. In diesem Fall können wir x_3 beliebig wählen. Eingesetzt in die zweite Zeile erhalten wir:

$$2x_2 - 3x_3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3.$$

Eingesetzt in die erste Zeile bekommen wir:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 + x_3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3.$$

Damit erhalten wir unendlich viele Lösungen:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} \\ \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(14 Punkte: 3 Pkte je Gauss-Schritt (insgesamt 9 Punkte), Berechnung von b: 3 Punkte, Lösungsmenge 2 Punkte)

4. Ein Apotheker hat aus den Bestandteilen Fett, Kamille und Zink eine Hautsalbe gemischt, die 32g wiegt. Leider kennt er die genauen Mengen der einzelnen Zutaten nicht mehr. Er erinnert sich aber, dass das Fett viermal so viel wo wie die Kamille. Seinem Helfer fällt ein, dass er das Zink nach der Kamille abgewogen hat und ein Gewichtsstück von 2 Gramm zusätzlich auf die Waage legen musste. Welche Mengen an Fett, Kamille und Zink sind in der Hautsalbe verarbeitet?
   Formulieren Sie die Fragestellung als lineares Gleichungssystem und lösen Sie es mit dem Gauß-Algorithmus. Jeder Rechenschritt muss nachvollziehbar sein.
   (14 Punkte) *Lösung:* Wir erhalten aus der Textaufgabe die folgenden drei Gleichungen: $x_F + x_K + x_Z = 32$, $x_F = 4x_K$ und $x_Z = x_K + 2$, wobei x_F die gesuchte Menge Fett in Gramm, x_K die gesuchte Menge Kamille in Gramm und x_Z die gesuchte Menge Zink in Gramm. Wir schreiben es in Matrixschreibweise als lineares Gleichungssystem und lösen es mit Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 5 & 1 & 32 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 5 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{array}\right)$$

Also sind in der Hautsalbe $7g$ Zink, $5g$ Kamille und $20g$ Fett verarbeitet. **(Gleichungen aus Text: 6 Punkte, Gauß jeweils 2 Punkte pro Schritt, 2 Punkte für Antwortsatz)**