Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden Begriffe wiederholen

- Teiler bzw. größter gemeinsamer Teiler (ggT)
- Primzahl
- natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlenmengen

und üben,

- Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion durchzuführen;
- mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT zweier ganzer Zahlen zu berechnen;
- in Restklassen zu rechnen (Modulorechnung).

Verständnisfragen

1. Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a, b ist eine Primzahl. Besitzen die Zahlen a, b weitere gemeinsame Teiler?
2. Wieviele gerade Primzahlen gibt es?
3. Zeigen Sie:
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: Ist $a \mid b$ und $b \mid a \Rightarrow a = b$ oder $a = -b$.
   (b) $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$: $a_1 \mid b_1$ und $a_2 \mid b_2 \Rightarrow a_1 a_2 \mid b_1 b_2$
4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $n! = 0$ in $\mathbb{Z}_n$?
5. Erklären Sie, warum der Euklidische Algorithmus immer zu einer Lösung führt.
6. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Beweisen Sie richtige Aussagen bzw. geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.
   - ☐ $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - ☐ $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - ☐ $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - ☐ $\exists a \in \mathbb{R} : a^2 \notin \mathbb{Q}, a^4 \in \mathbb{Q}$
   - ☐ $\exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a + b \in \mathbb{Q}, a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

Vollständige Induktion

1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der vollständigen Induktion:
   (a) n Menschen schütteln sich genau einmal untereinander die Hände. Dann wird genau $\frac{n(n-1)}{2}$-mal die Hände geschüttelt.
   (b) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Standardaufgaben

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $d = \mathrm{ggT}(104, 47)$ und Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$, so dass $d = 104r + 47b$.
2. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $d = \mathrm{ggT}(12345, 54321)$.
3. Berechnen Sie
   (a) $12 \mod 5$
   (b) $237 \mod 10$
   (c) $222 \mod 11$
   (d) $1001 \mod 11$
4. Berechnen Sie für $n \geq 4$
   (a) $(n+1) \mod n$
   (b) $n(n+1) \mod n$
   (c) $(n+1)(n-1) \mod n$
   (d) $(n-1) \mod (n+1)$
   (e) $(n+2)^2 \mod (n+1)$
5. Zeigen Sie, dass eine Zahl $a = a_n \dots a_0$ genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Summe $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ ihrer Ziffern a_i durch 11 teilbar ist. Ist die Zahl 317206375 durch 11 teilbar?
6. Zeigen Sie, dass $2^{10} = 1 \mod 11$.
7. Zeigen Sie, dass $9518^{42} = 4 \mod 5$.
8. (*) Was sind die letzten drei Ziffern von 7^{9999}? Starten Sie zunächst mit $7^4 = 2401$ und betrachten Sie dann $7^{4k} = (2400+1)^k$ mittels des Binomischen Lehrsatzes.
   Der Binomische Lehrsatz lautet

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der vollständigen Induktion:
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : 8^n - 3^n$ ist ein Vielfaches von 5.
   (b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Verwenden Sie die Rekursionsformel für $\binom{n}{k}$:
   $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
   (16 Punkte)

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $d = \mathrm{ggT}(98701, 345)$ (per Hand!). **(4 Punkte)**

3. (a) Beweisen Sie eine Teilbarkeitsregel für 7 und 13:
      1. Bestimmen Sie zunächst die Primfaktorzerlegung von 1001.
      2. Zeigen Sie, dass eine Zahl genau dann durch 7 oder 13 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme seiner 3-er Päckchen von Ziffern durch 7 oder 13 teilbar ist. *Hinweis: Überlegen Sie sich, dass Sie jede Zahl also* $1000 \cdot a + b = 1001 \cdot a + (b - a)$ *darstellen können. Wann ist* $1001 \cdot a + (b - a)$ *durch* 1001 *teilbar?*
      3. Ist 317206375 durch 3 oder 7 teilbar? Beantworten Sie die Frage mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln.

   (b) Bestimmen Sie den Rest von 3^{15} und 15^{83} bei Division durch 13.

   (12 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass $35^{57} - 7$ durch 11 teilbar ist. **(8 Punkte)**

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **04.05.2020**.