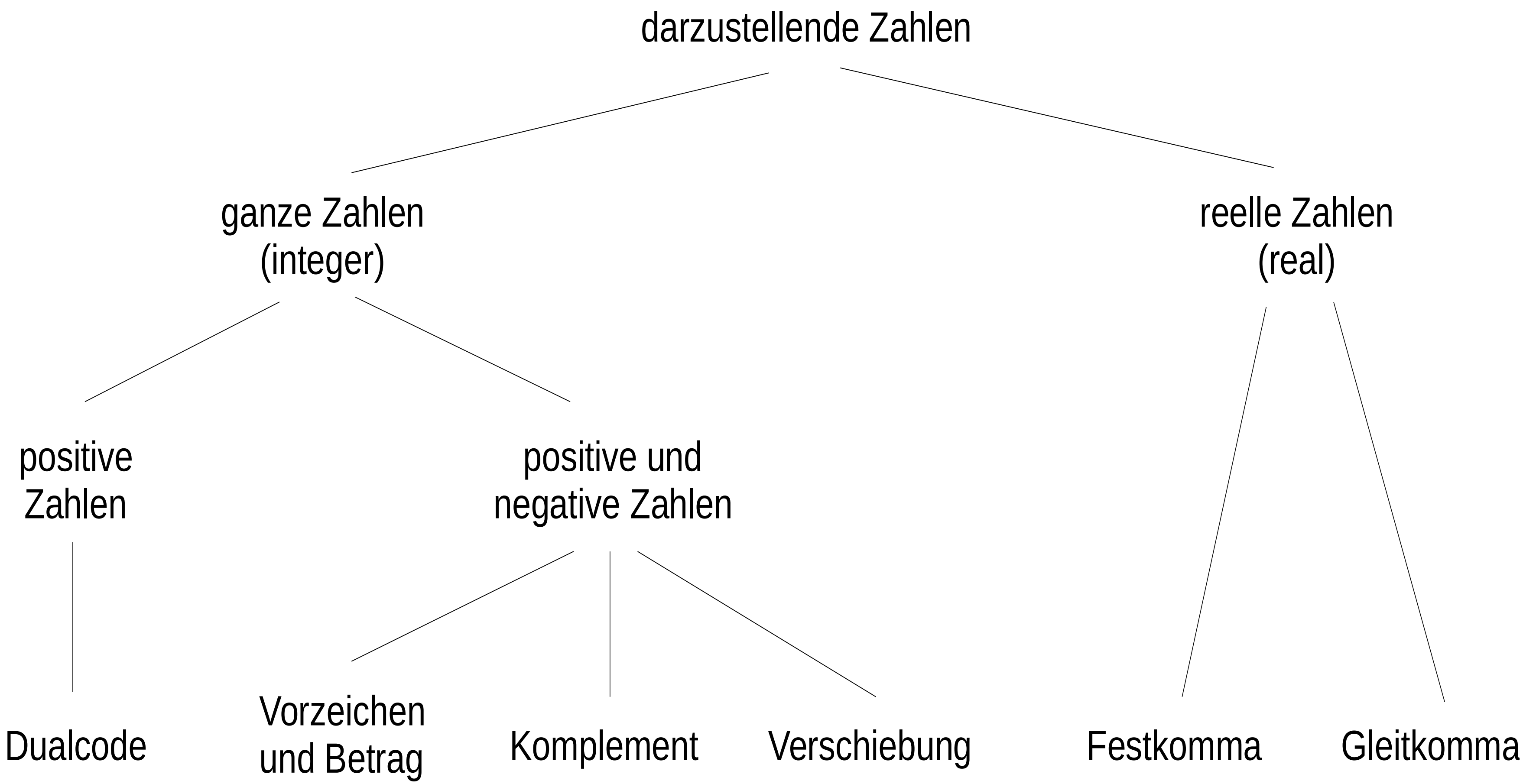
Unterlagen zur Vorlesung

Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Überblick über die Zahlendarstellungsarten



Addition von Binärstellen

Allgemein gilt:

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 0 Übertrag 1

1 + 1 + 1 = 1 Übertrag 1 (vom Übertrag)

Beispiel:

0 1 0 1 1 0 1 = 45_{10}

0 1 1 0 1 1 0 = 54_{10}

\-------------------------

1 1 1 1 = Übertrag

\-------------------------

1 1 0 0 0 1 1 = 99

- Weiterhin gilt: Die Subtraktion wir zurückgeführt auf die Addition

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

Eine Stelle wird als Vorzeichenbit benutzt.

Ist das am weitesten links stehende Bit (MSB, most significant bit):

MSB = 0 ➨ positive Zahl

MSB = 1 ➨ negative Zahl

Beispiel:

0001 0010 = +18

1001 0010 = -18

Zahlenbereich bei n Stellen ???

Nachteile:

- Bei Addition und Subtraktion müssen die Vorzeichen der Operanden gesondert betrachtet werden.
- **Es gibt zwei Repräsentationen der Zahl 0**

  (mit positivem und mit negativem Vorzeichen)

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

Beispiel:

Betrag durch 3 Bit:

0000 = 0	1000 = -0
0001 = 1	1001 = -1
0010 = 2	1010 = -2
0011 = 3	1011 = -3
0100 = 4	1100 = -4
0101 = 5	1101 = -5
0110 = 6	1110 = -6
0111 = 7	1111 = -7

Symmetrischer Zahlenbereich

Einerkomplement - Darstellung

Um eine Zahl zu negieren, wird jedes Bit der Zahl komplementiert.

$$\text{Bsp:}\quad 4 = 0100_2 \xrightarrow{\textit{Komplementbildung}} -4 = 1011_{ek}$$

Negative Zahlen sind wiederum durch ein gesetztes Bit in der ersten Stelle charakterisiert.

Vorteil gegenüber der Darstellung mit Vorzeichenbit:

Die erste Stelle bei Addition und Subtraktion muss **nicht** gesondert betrachtet werde.

Aber

Es gibt weiterhin zwei Darstellungen der Null

Einerkomplement - Darstellung

Beispiel:

Um das Einerkomplement zu bilden, wird jedes Bit der entsprechenden positiven Zahl negiert.

0000 = 0	1000 = -7
0001 = 1	1001 = -6
0010 = 2	1010 = -5
0011 = 3	1011 = -4
0100 = 4	1100 = -3
0101 = 5	1101 = -2
0110 = 6	1110 = -1
0111 = 7	1111 = -0

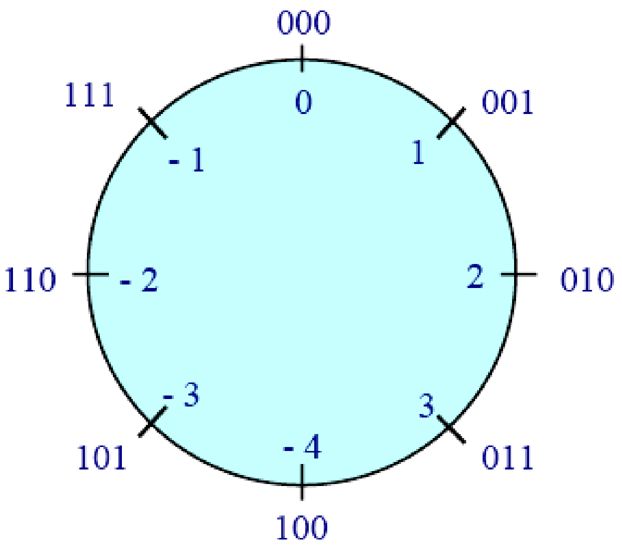
Zweierkomplement - Darstellung

Man addiert nach der Stellenkomplementierung noch eine 1

Nachteil:

Unsymmetrischer Zahlenbereich. Die kleinste negative Zahl ist betragsmäßig um 1 größer als die größte positive Zahl

3-Bit-ZK-Zahlen:



Aus der ersten Stelle der Zahl kann das Vorzeichen abgelesen werden.

Zweierkomplement - Darstellung

0000 = 0	1000 = -8
0001 = 1	1001 = -7
0010 = 2	1010 = -6
0011 = 3	1011 = -5
0100 = 4	1100 = -4
0101 = 5	1101 = -3
0110 = 6	1110 = -2
0111 = 7	1111 = -1

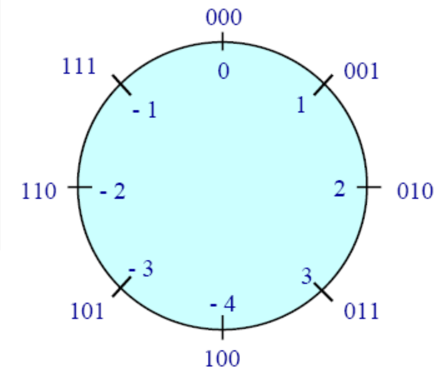
Unsymmetrischer Zahlenbereich

Zweierkomplement - Darstellung

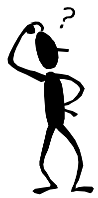
Aus dieser Konstruktion ergibt sich der Stellenwert des MSB einer Zweierkomplementzahl mit $n+1$ Bit zu -2^n:

$z_n\, z_{n-1}\, \ldots\, z_0$ hat den Wert:

$$Z = -z_n \cdot 2^n + z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + z_0$$



Damit kann man den Dezimalwert der Zahl direkt angeben.



Beispiel:

1101	=	$-1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	=	-3
1111 11101	=	...	=	-3

Zweierkomplement - Darstellung

Beispiel (n = 31)

```
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0010   = 2
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0001   = 1
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000   = 0
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111   = -1
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110   = -2
```

1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 $= -\ 2^{31}$

$= -2147483648$

0111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 $= \ 2^{31} - 1$

$= 2147483\ 647$

Beispiel

Die Zahl -77_{10} soll mit 8 Bit dargestellt werden

$77_{10} = 0100\ 1101_2$

Bitweise komplementieren

Mit Vorzeichenbit : $-77 = 1100\ 1101_2$

Einerkomplement : $-77 = 1011\ 0010_2$

Addition von 1

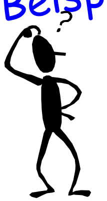
Zweierkomplement : $-77 = 1011\ 0011_2$

Zweierkomplement (ZK) - Darstellung

- Gehört zu einer positiven Dezimalzahl X_d die Dualzahl X_b, so entspricht das Zweierkomplement ZK (X_b) der Zahl ($- X_d$.).

- Bildungsregel für negative Zahlen im Zweierkomplement:
  - Stelle zunächst die positive Zahl mit der erforderlichen Anzahl von Bit dar, MSB ist das Vorzeichen (=0)
  - Invertiere alle Bit der Zahl X_b (Einerkomplement)
  - Addiere 1 im LSB, ein eventuell auftretender Übertrag in der höchsten Stelle wird ignoriert
- Um den dezimalen Wert einer negativen Zweierkomplement-Zahl zu finden, kann man erneut die ZK-Bildungsregel anwenden.

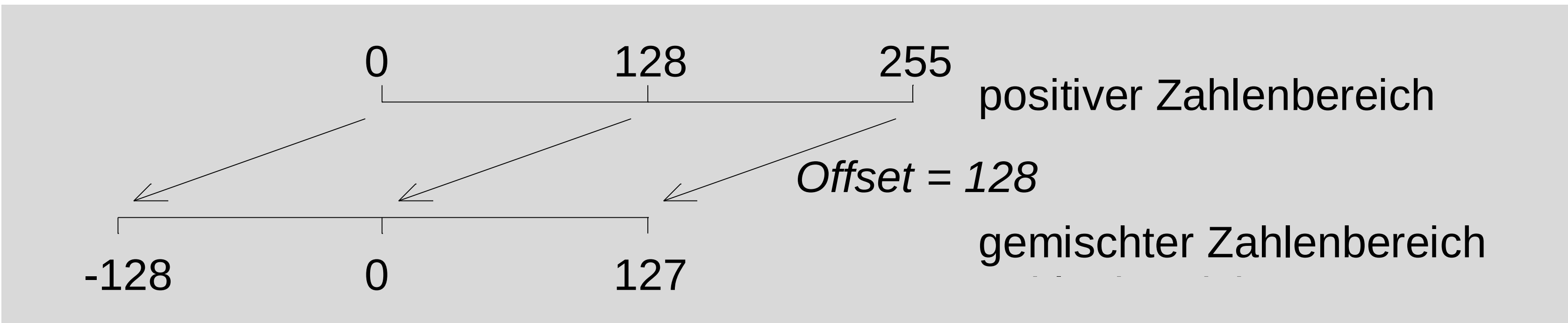
Bitte ein Beispiel dafür ???



Beispiel: Wie errechnet man im ZK: $(35 - 91)_{10}$

Offset- oder Exzess - Darstellung

Bildung eines neuen Zahlenbereichs durch Verschieben um einen konstanten Wert (sog. Offset):



- Mit dieser Darstellung kann man auch umgekehrt negative Zahlen in positive verwandeln. Dies wird angewendet für den Vergleich von Zahlen (bei Exponenten).

- Beispiel:

  $Z = -120 \implies Z_{offset} = -120 + 128 = 8 \implies$ Charakteristik = 0000 1000

Offset- oder Exzeß- Darstellung

Wird hauptsächlich bei der Exponenten-Darstellung von Gleitkommazahlen benutzt.

Die Darstellung einer Zahl erfolgt in Form ihrer **Charakteristik**.

Der gesamte Zahlenbereich wird durch Addition einer Konstanten (Exzeß, Offset) so nach oben verschoben, dass die kleinste (negative) Zahl die Darstellung **0…0** erhält.

Bei n Stellen ist der Offset 2^{n-1} **!**

Der Zahlenbereich ist hier auch asymmetrisch.

Möglichkeiten zur Zahlendarstellung

Darstellung mit				
Dezimalzahl	Betrag + Vorzeichen	Einer-komplement	Zweier-komplement	Charakteristik
-4	- - -	- - -	1 0 0	0 0 0
-3	1 1 1	1 0 0	1 0 1	0 0 1
-2	1 1 0	1 0 1	1 1 0	0 1 0
-1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	0 1 1
0	1 0 0, 0 0 0	1 1 1, 0 0 0	0 0 0	1 0 0
1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	1 0 1
2	0 1 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0
3	0 1 1	0 1 1	0 1 1	1 1 1

Fest- und Gleitkommazahlen

⇨ spezielle Vereinbarungen für die Darstellung von Vorzeichen und Komma im Rechner sind erforderlich.

Darstellung des Kommas: 2 Möglichkeiten

- Festkommadarstellung
- Gleitkommadarstellung

Festkommazahlen

Festlegung:

Das Komma sitzt im Maschinenwort immer an einer festen Stelle. Ggf. muss man die darzustellenden Zahlen durch Maßstabsfaktoren in das gewählte Format überführen.

Die Nachteile der Festpunktdarstellung sind:

- Man kann mit einer bestimmten Anzahl von Bits nur einen beschränkten Wertebereich abdecken.
- Die Stelle des Kommas muss allgemein festgelegt werden. Aber wo soll man dies festlegen, wenn manchmal mit sehr kleinen, hochgenauen Werten und ein anderes Mal mit sehr großen Werten gearbeitet werden muss?

Aufgrund dieser Nachteile wird die Festkommadarstellung meist nur in Rechnern verwendet, die für Spezialanwendungen (z.B. Multimedia) benötigt werden.

Festkommazahlen

Festkommaformat

- einfaches Beispiel: gegeben Format mit 4 Stellen vor dem Komma, 3 Stellen nach dem Komma.

$$\boxed{\_\ \_\ \_\ \_\ ,\ \_\ \_\ \_}$$

Problem:
- 54321 ist nicht mehr darstellbar!
- 0,001549 " " " !

$\Rightarrow$ Format ist zu starr, es skaliert nicht mit der Größe der Zahlen.

Im obigen Beispiel wäre:
- kleinste Zahl = 0
- größte Zahl = 15,875 (→ verifizieren Sie das!)

Festkommazahlen

- Datentyp "integer" (Ganzzahlen) ist ein spezielles Festkommaformat.
- Manche Programmiersprachen erlauben die Definition von Ganzzahlen unterschiedlicher Länge.

Beispiel: Java

Datentyp	Byte	Wertebereich
byte	1	- 256 bis 255
short	2	- 32768 bis 32767
int	4	- 2^{31} bis 2^{31} -1
long	8	- 2^{63} bis 2^{63} -1