Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden **Begriffe** bzw. **Sätze** wiederholen:

- zyklische Gruppe, Erzeuger
- Körper
- Homomorphismus
- Chinesischer Restsatz

Sie sollen üben

- zu überprüfen, ob eine Abbildung ein Homomorphismus ist;
- den Erzeuger einer Gruppe zu bestimmen bzw. zu überprüfen, ob eine Gruppe zyklisch ist;
- zu überprüfen, ob zwei Gruppen isomorph sind;
- ein System aus Kongruenzgleichungen mit Hilfe des chinesischen Restsatzes zu lösen;

Präsenzaufgaben

Verständnisfragen

1. Erklären Sie, wann eine Abbildung zwischen zwei Gruppen ein Homomorphismus ist. Was muss zusätzlich gelten, damit sie ein Isomorphismus ist?
2. Warum ist $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\phi(n) = n \mod 3$ ein Homomorphismus? Ist ϕ auch ein Isomorphismus?
3. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}_n^*$ zyklisch?
4. Sei $p \in \mathbb{P}$. Warum gilt in $\mathbb{Z}_p$ $(p-1)(p-1) = 1$?
5. Sei $p \in \mathbb{P}$. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_p$ die Zahl p.
6. Finden Sie Beispiele für Elemente a, b, c, $a \neq 0$, so dass $ab = ac$ und $b \neq c$ für
   (a) $\mathbb{Z}_8$
   (b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
7. Bestimmen Sie alle Lösungen von $x^2 - 5x + 6 = 0$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_{12}$. Warum gibt es in $\mathbb{Z}_{12}$ mehr als zwei Lösungen?
8. (a) Welche Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ haben Rest 1 bei Division durch 2 und 3?
   (b) Welche Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ haben Rest 1 bei Division durch 2,3 und 5?
   (c) Welche Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ haben Rest 1 bei Division durch 2,3,5 und 7?

Standardaufgaben

1. Bestimmen Sie die Ordnung der Untergruppe, die von dem jeweils angegebenen Element erzeugt wird:
   (a) $(\mathbb{Z}_{25}, +)$, 15
   (b) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9, +)$,$(2, 6)$
2. Welche der folgenden Gruppen ist/ sind zyklisch?
   - ☐ $(\mathbb{Q}, +)$
   - ☐ $(6\mathbb{Z}, +)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25})$
3. Welche der folgenden Abbildungen sind Homomorphismen?
   (a) $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$, $\phi(a) = |a|$
   (b) $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_2$, $\phi(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
   (c) $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x, y) = x + y$
4. Konstruieren Sie einen Körper mit genau 4 Elementen.
5. (a) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{Z}$, die bei Division durch 2 oder 5 Rest 1 besitzen, aber durch 3 teilbar sind.
   (b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{Z}$, die bei Division durch 3 oder 7 Rest 2 besitzen, aber durch 8 teilbar sind.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Bestimmen Sie alle Erzeuger der Gruppe $\mathbb{Z}_{11}^*$. **(5 Punkte)**

2. Es ist die folgende Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert:
$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow \quad ad = bc.$$
   (a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.
   (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[(n, 1)]$ für $n \in \mathbb{Z}$, $[(3, 2)]$ sowie $[-21, 15]$.
   (c) Sei
$$A = \left\{ [(a, b)] \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$
   die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass A mit der Multiplikation aus $\mathbb{Z}$ eine Gruppe bildet, d.h. wir definieren
$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c), (b \cdot d)].$$
   (d) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, \cdot)$ isomorph zu $(A, \cdot)$ ist. Geben Sie dafür eine Abbildung $f : \mathbb{Q} \to A$ an und zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist.

   (20 Punkte)

3. Es sind $1234 \in \mathbb{Z}_{2000}$ und $567 \in \mathbb{Z}_{2000}$. Addieren Sie die beiden Zahlen 1234 und 567 in $\mathbb{Z}_{2000}$ bzw. in $\mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{5^3}$. Verwenden Sie dafür den erweiterten euklidischen Algorithmus.
   (15 Punkte)

4. Es ist das folgende System an Kongruenzgleichungen gegeben:
$$x \equiv 4 \mod 11, \; x \equiv 3 \mod 17, \; x \equiv 6 \mod 18.$$
   (a) Erklären Sie, warum eine Lösung x für dieses Gleichungssystem existiert.
   (b) Berechnen Sie diese Lösung.

   (10 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **18.05.2020** bis zu Beginn der Vorlesung 8:00.