Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden **Begriffe** bzw. **Sätze** wiederholen:

- Vektorraum, Untervektorraum
- lineare (Un)Abhängigkeit
- Basis, Dimension eines Vektorraums

Sie sollen üben

- mit Vektoren zu rechnen
- lineare Unabhängigkeit von Vektoren zu überprüfen bzw. nachzurechnen, ob eine Menge von Vektoren eine Basis bilden,
- zu überprüfen, ob es sich bei einer Untermenge um einen Untervektorraum handelt.

Verständnisfragen

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Korrigieren Sie falsche Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel für eine falsche Aussage an.
   - ☐ Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie dieselbe Richtung besitzen. Ihre Länge kann unterschiedlich sein.
   - ☐ Die Vektoren v, w sind genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn $v + w \in \mathbb{R}^2$ ist.
   - ☐ Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ hat nur eine Basis, nämlich $\{e_1, e_2\}$ mit $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$.
   - ☐ In jedem Vektorraum gibt es eine linear unabhängige Menge, die aus genau einem Vektor besteht.
   - ☐ Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn v und w ungleich dem Nullvektor sind.
   - ☐ Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda v + \mu w = 0$ folgt, dass $\lambda = \mu = 0$ ist.
2. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist dünnbesetzt, d.h. fast alle Einträge sind Null. Geben Sie in einem kurzen Satz an, was dies in den folgenden Anwendungen bedeutet:
   (a) x enthält den täglichen Zahlungseingang eines Unternehmens während n Tage;
   (b) x enthält die Materialkosten für ein Projekt, d.h. die Kosten für n benötigte Materialien;
   (c) x stellt ein einfarbiges Bild aus n Pixeln dar, jeder Eintrag von x enthält die Helligkeit eines Pixels;
   (d) x enthält den täglichen Regenfall an einem Ort während n Tage.
3. Zeichnen Sie in ein xy-Koordinatensystem drei linear unabhängige Vektoren.

4. Zeichnen Sie in ein xy-Koordinatensystem zwei linear abhängige Vektoren.
5. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^{100}$ stellt die Altersverteilung in einer Bevölkerung dar. Der Eintrag x_i enthält die Anzahl der Personen, die $i-1$ Jahre alt sind, für $i = 1, \ldots, 100$. Es ist niemand in dieser Bevölkerung über 99 Jahre alt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung
   (a) die Gesamtanzahl an Personen in der Bevölkerung;
   (b) die Gesamtanzahl an Personen in der Bevölkerung, die 65 Jahre oder älter sind;
   (c) das Durchschnittsalter der Bevölkerung.

Standardaufgaben

1. Überprüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Paare von Vektoren linear unabhängig oder kollinear sind.
   (a) $u = (1,3),\ v = (4,12)$;
   (b) $x = (12,4),\ y = (2,6)$;
   (c) $r = (1,4),\ s = (1,6)$.
2. Welche der folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind Linearkombinationen der Vektoren $(1,0,1)$ und $(1,2,3)$?
   - ☐ $(1,1,1)$
   - ☐ $(0,1,1)$
   - ☐ $(0,1,2)$
   - ☐ $(0,1,3)$
3. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren
$$u = (1,1,1),\ v = (1,1,2),\ w = (3,3,5)$$
   linear abhängig sind.
4. Sind die Vektoren $v = (a, a+1)$ und $w = (a, 2a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.
5. Finden Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, so dass alle Vektoren in der folgenden Teilmenge
$$U = \big\{(x,x,y) \bigm| x, y \in \mathbb{R}\big\}$$
   als Linearkombination von v und w dargestellt werden können.
6. Ist die folgende Menge eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
$$\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$
7. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweiligen Vektorräumen?
   (a) $\{(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (b) $\big\{(x_1,x_2,0) \bigm| x_1,x_2 \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (c) $\big\{(x_1,x_2) \bigm| x_1^2 + x_2^2 = 4\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Sind die folgenden Mengen Untervektorräume?
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

   Überprüfen Sie rechnerisch die Eigenschaften eines Untervektorraums.
   (20 Punkte)

2. Stellen Sie den Vektor w als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

$$w = (2, 1, 1),\ v_1 = (1, 5, 1),\ v_2 = (0, 9, 1),\ v_3 = (3, -3, 1).$$

   (5 Punkte)

3. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$ in $\mathbb{R}^5$.
   (a) Bestimmen Sie alle Teilmengen V von $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, die linear unabhängig sind.
   (b) Bestimmen Sie alle möglichen Basen von $\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_5)$ aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 und stellen Sie die Vektoren jeweils als Linearkombination bezüglich dieser Basis her.

   (20 Punkte)

4. Seien v_1, v_2, v_3 beliebige Vektoren in einem reellen Vektorraum und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$av_1 - bv_2,\ cv_2 - av_3, bv_3 - cv_1$$

   linear abhängig sind.
   (5 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **25.05.2020** bis zu Beginn der Vorlesung 8:00.