3 Einführung in die lineare Algebra

3.1 Vektorräume

3.1.1 Vektoren

Definition 3.1

Ein n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

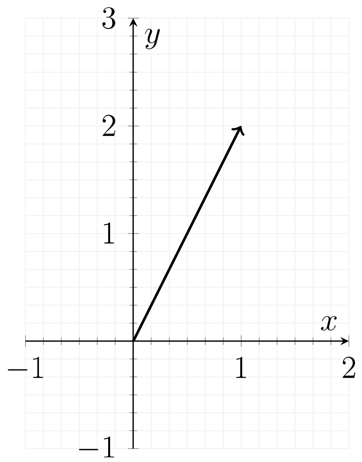
von reellen Zahlen $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ heißt **Vektor**. Er zeichnet sich aus durch seine **Richtung** und seine **Länge**. Die Länge eines Vektors berechnet sich als

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Bemerkung 3.1. *Reelle Zahlen bezeichnet man als* ***Skalare****, wenn man den Unterschied zu Vektoren verdeutlichen möchte. So ist die Temperatur beispielsweise eine skalare Größe, wohingegen die Kraft eine vektorielle Größe ist, bei der Richtung und Betrag gleichermaßen wichtig sind.*

Beispiel 3.2

1. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor in der Ebene ($=\mathbb{R}^2$) der Länge $\sqrt{5}$.



2. Der **Nullvektor** 0 ist ein Vektor der Länge Null. Alle Einträge sind Null.

3. Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor der Länge 1. Als ***i*-ten Standardbasisvektoren** bezeichnen wir einen Einheitsvektor, dessen Einträge bis auf den i-ten Eintrag alle Null sind:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ i-te Zeile.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Wir haben einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ in Zeilenform eingeführt, d.h. wir haben seine Einträge *untereinander* geschrieben. Man spricht auch von **Spaltenvektor**. Man kann einen Vektor genauso gut als **Zeilenvektor** definieren und seine Einträge *nebeneinander* schreiben. Möchte man einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor transformieren oder umgekehrt, muss man den Vektor **transponieren**. Man schreibt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vektorrechnung

Definition 3.3

Vektoren werden miteinander **addiert** (bzw. subtrahiert), indem ihre einzelnen Komponenten miteinander addiert (bzw. subtrahiert) werden:

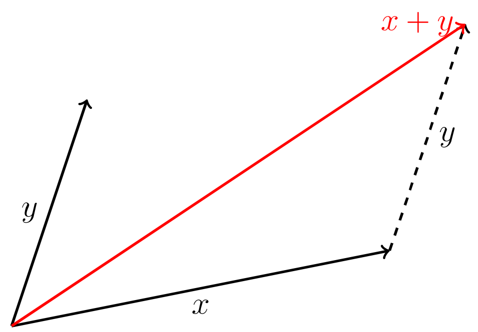
$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.4

Die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ addieren sich also zum Vektor

$$x + y = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch addiert man Vektoren, indem man den zweiten Vektor an die Spitze des zweiten Vektors zeichnet. Die Summe der Vektoren ist dann der resultierende Vektor der vom Ursprung zur Spitze des zweiten Vektors zeigt.

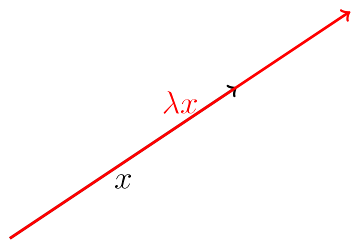


Definition 3.5

Ein Vektor wird **mit einem Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ **multipliziert**, indem jeder Eintrag mit λ multipliziert wird:

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Geometrisch wird ein Vektor durch Multiplikation mit einem Skalar *skaliert*, d.h. seine Richtung ändert sich nicht, nur seine Länge wird mit dem Faktor λ skaliert:



3.1.2 Definition eines Vektorraums

Wir haben gesehen, dass man Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren kann, dabei bildet die Menge der Vektoren gemeinsam mit der Addition eine abelsche Gruppe. Besitzt eine Menge solche zwei Operationen, bezeichnet man sie als Vektorraum, genauer:

Definition 3.6

Sei V eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Auf V sei eine Addition definiert, d.h. eine Abbildung $+ : V \times V \to V$, und eine skalare Multiplikation, d.h. eine Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$. Man bezeichnet V als **$\mathbb{K}$-Vektorraum**, falls gilt:

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(V2) Die skalare Multiplikation ist assoziativ und sie ist mit der Addition verträglich, d.h.

- Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v \in V$ gilt: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
- für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$ gilt: $\lambda(v + w) = \lambda v + \mu w$;
- für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$.

Bemerkung 3.2. *1. Wir werden in dieser Vorlesung vor allem reelle Vektorräume betrachten, d.h. der Körper $\mathbb{K}$ sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Denken Sie also zunächst bei den Skalaren an reelle Zahlen.*

2. Das neutrale Element der Addition ist der Nullvektor. Das inverse Element zu einem Vektor v der Addition ist $-v$.

Beispiel 3.7

Die wichtigsten Beispiele für reelle Vektorräume sind die Mengen

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \, x_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

und insbesondere die Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2) \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und der Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.1.3 Darstellung von Vektoren und Linearkombinationen

Wir haben oben bereits stillschweigend eine Darstellung von Vektoren verwendet, indem wir einen Vektor in der Ebene beispielsweise als $(1, 2)$ geschrieben haben. Eine solche Darstellung setzt immer eine *Basis* voraus. Ein Vektor wird dann als *Linearkombination* bezüglich dieser Basis dargestellt; die Koeffizienten dieser Linearkombination werden dann für die Darstellung des Vektors als Zahlentupel verwendet. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ besteht die üblicherweise verwendete – deswegen auch als *Standardbasis* bezeichnete - Basis aus den Vektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. Der Vektor $(1, 2)$ schreibt sich dann als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten $(1, 2)$ dienen dann der Darstellung des Vektors: Der Vektor $(1, 2)$ ist derjenige Vektor, den man erhält, wenn man 1 Einheit in e_1-Richtung und anschließend 2 Einheiten in e_2-Richtung läuft.
Wir werden in diesem Abschnitt nun allgemein die Begriffe der Linearkombination und Basis erklären.

Definition 3.8

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Dann heißt die Summe

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$.
Die Menge

$$span(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \left\{ v \in V \;\middle|\; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} : \; v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k \right\}$$

aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ wird als **Span** bezeichnet. Es ist der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Raum.

Beispiel 3.9

Eine Linearkombination der Vektoren e_1, e_2 ist z.B. der Vektor $(1, 2)$, denn es ist

eben
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
Man kann sich entsprechend überlegen, dass sich alle Vektoren (x_1, x_2) der Ebene $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Vektoren e_1, e_2 schreiben lassen, nämlich:
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
Der von den Vektoren e_1, e_2 aufgespannte Raum ist also die Ebene:
$$span(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2.$$

Beispiel 3.10

Es sei $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Die Menge der Linearkombinationen von v sind alle Vektoren, die ein Vielfaches von v sind:
$$span(v) = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \; w = \lambda v. \right\}$$
Der von v aufgespannte Raum ist also eine Ursprungsgerade mit Richtung v.

Beispiel 3.11

Es seien die Vektoren $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 1)$ und $v_3 = (3, -1)$ gegeben. Welche Vektoren sind im Raum $span(v_1, v_2, v_3)$ enthalten? Wir versuchen einen beliebigen Vektor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 zu schreiben, d.h. wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so dass
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$
ist. Dafür lösen wir das lineare Gleichungssystem:
$$x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \quad x_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3.$$
Aus der zweiten Gleichung erhalten wir z.B. $\lambda_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 - x_2$. Eingesetzt in die erste Gleichung bekommen wir
$$x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3x_2 = 7\lambda_1 + 5\lambda_2 - 3x_2,$$
also beispielsweise $\lambda_1 = \frac{1}{7}(x_1 + 3x_2 - 5\lambda_2)$, $\lambda_3 = \frac{1}{7}(-3\lambda_2 + 2x_1 - x_2)$. Wir können λ_2 beliebig wählen, da das Gleichungssystem unterbestimmt ist, z.B. $\lambda_2 = 0$.

Dann ist
$$\lambda_1 = \frac{1}{7}(x_1 + 3x_2), \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = \frac{1}{7}(2x_1 - x_2).$$
Wir können also jeden beliebigen Vektor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben:
$$span(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2.$$
Wir haben gesehen, dass die Darstellung eines Vektors $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination dieser drei Vektoren nicht eindeutig ist. Wir konnten λ_2 beliebig wählen. Dies liegt daran, dass die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind:
$$v_1 = \frac{14}{10} v_2 - \frac{3}{5} v_3.$$
Möchte man eine eindeutige Darstellung jedes Vektors als Linearkombination, muss man *linear unabhängige* Vektoren wählen. Dies führt dann zur Definition der linearen Unabhängigkeit und einer Basis:

Definition 3.12

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen **linear unabhängig**, falls gilt für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$
Gleichbedeutend ist, dass sich kein Vektor als Linearkombination der übrigen $(n-1)$ Vektoren darstellen läßt.
Die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Bemerkung 3.3.

1. *Ein einzelner Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn er nicht der Nullvektor ist: $v \neq 0$.*
2. *Zwei Vektoren v, w sind genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht Vielfaches voneinander sind, d.h. aus $\lambda v = \mu w$ folgt immer $\lambda = \mu = 0$. Umgekehrt sind sie linear abhängig, wenn sie dieselbe Richtung besitzen und damit Vielfaches voneinander sind: Es gibt dann $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass $v = \lambda w$ ist.*

Beispiel 3.13

Sind die Vektoren $u = (0, 1)$, $v = (1, 0)$ und $w = (-1, 2)$ linear abhängig? Wir betrachten die Gleichung
$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0.$$

Man sieht leicht, dass $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -1$ eine Lösung dieser Gleichung ist. Somit sind die Vektoren linear abhängig voneinander.

Beispiel 3.14

Sind die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$ und $v_3 = (7, 8, 9)$ linear abhängig? Wir stellen erneut die folgende Gleichung auf:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichung zeilenweise auf, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit den drei Unbekannten λ_1, λ_2 und λ_3:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot 7 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 8 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 6 + \lambda_3 \cdot 9 = 0 \end{aligned}$$

Eine nichttriviale Lösung dieses Gleichungssystems lautet $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$. Damit sind die Vektoren linear abhängig.

Definition 3.15

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Eine Menge von Vektoren $v_1, v_2, \ldots$ heißt **Basis** des Vektorraums V, falls gilt:

1. $span(v_1, v_2, \ldots) = V$, d.h. der Vektorraum wird von den Vektoren $v_1, v_2, \ldots$ aufgespannt;
2. die Vektoren $v_1, v_2, \ldots$ sind linear unabhängig.

Die Anzahl an Vektoren in einer Basis heißt **Dimension** des Vektorraums, und man schreibt $\dim(V)$. Besteht die Basis aus unendlich vielen Vektoren, spricht man von einem unendlich-dimensionalen Vektorraum.

Bemerkung 3.4. *Die Dimension eines Vektorraums ist unabhängig von der Wahl der Basis, d.h. jede Basis eines Vektorraums besteht aus genau gleich vielen Vektoren. Diese Anzahl entspricht gerade der maximalen Anzahl an linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum.*

Beispiel 3.16

Die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ besteht aus den Vektoren e_1, e_2. Entsprechend ist der Vektorraum zweidimensional: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Jede zwei linear unabhängige Vekotren $u, v \in \mathbb{R}^2$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

Die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ besteht aus den Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Der Vektorraum ist entsprechend dreidimensional: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Definition 3.17

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt **Unterverktorraum**, falls gilt:

(UV1) U ist abgeschlossen bzgl. der Addition: $u, v \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U$;

(UV2) U ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation: $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$.

Bemerkung 3.5. *Aus (UV1) und (UV2) folgt, dass der Nullvektor in U enthalten sein muss: aus (UV2) folgt, dass zu jedem $u \in U$ auch $-u \in U$ ist. Also folgt aus (UV1), dass $u + (-u) = 0 \in U$. Ist also 0 in einer Menge nicht enthalten, kann man sofort schließen, dass es sich nicht um einen Untervektorraum handeln kann.*

Beispiel 3.18

1. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ Vektoren. Der von diesen Vektoren aufgespannte Raum $span(v_1, \ldots, v_k)$ ist immer ein Untervektorraum.
2. Eine Ebene durch den Ursprung ist immer ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 3.19

Die Menge $U = \left\{(x_1, x_2, 0) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, denn es gilt:

(UV1) Seien $x = (x_1, x_2, 0)$ und $y = (y_1, y_2, 0)$ zwei beliebige Vektoren in U. Dann ist $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0)$ ebenfalls in U. U ist also abgeschlossen bzgl. der Addition.

(UV2) Sei $x = (x_1, x_2, 0)$ ein beliebiger Vektor in U und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in U$. Also ist U abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation.

Die Menge U ist also ein Untervektorraum. Es handelt sich um die xy-Ebene.

3.2 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind Systeme aus Gleichungen, bei denen die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots$ nur linear voneinander abhängen, d.h. sie werden beispielsweise nicht miteinander multipliziert oder potenziert. Lineare Gleichungssysteme (kurz: LGS) werden heutzutage in fast allen Algorithmen jeglicher Software verwendet. Dies liegt an den Rechenfähigkeiten von Computern: Da sie keine Infinitesimalrechnung beherrschen (also nicht mit Unendlich rechnen können), muss alles für den Rechner diskretisiert werden, also durch endliche viele kleine Teile angenähert werden, auf denen dann die Funktionswerte etc. bestimmt werden. Beispielsweise werden Graphiken oder Bilder als riesige *Tabellen* (genannt Matrizen) gespeichert, in denen Feldern die Farbwerte von jedem Pixel enthalten sind. Ändern sich beispielsweise die Lichtverhältnisse in einem Computerspiel, müssen lineare Gleichungssysteme gelöst werden, um die Graphik daran anzupassen; ein weiteres sehr wichtiges Beispiel sind Differentialgleichungen, die physikalische Vorgänge beschreiben. Sie verwandeln sich ebenfalls durch Diskretisierung im Rechner in große lineare Systeme, bei denen oftmals Millionen von Unbekannte auftauchen. Lineare Systeme können sehr schnell und effizient von Computern berechnet werden. Dies liegt an den Besonderheiten der Matrizenrechnung, die wir im folgenden Abschnitt kennenlernen wollen, und an der Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme, dem Gauß-Algorithmus. Es ist für das Verständnis von Algorithmen bzw. Computeranwendungen wichtig, die Funktionsweise dieser Lösungsmethode einmal richtig verstanden zu haben, ebenso wie die Lösbarkeit von LGS; das Lösen von linearen Gleichungssystemen überlassen wir aber in Zukunft lieber den Rechnern.

3.2.1 Einleitung

Wir betrachten folgendes lineare Gleichungssystem aus zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen ist eine *Geradengleichung*. Wir können sie jeweils nach y auflösen und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 6 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist eine Gerade mit Steigung $a = 2$ und y-Achsenabschnitt $b = -1$. Die zweite Gleichung beschreibt eine Gerade mit Steigung $a = -\frac{3}{2}$ und

y-Achsenabschnitt $b = 6$. Punkte (x, y), die beide Gleichungen erfüllen, müssen auf beiden Geraden liegen: Jede Lösung ist damit ein Schnittpunkt der Geraden.
Wir können den Schnittpunkt berechnen, indem wir die Geradengleichungen gleichsetzen und nach x auflösen:

$$-\frac{3}{2}x + 6 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich $y = 3$.

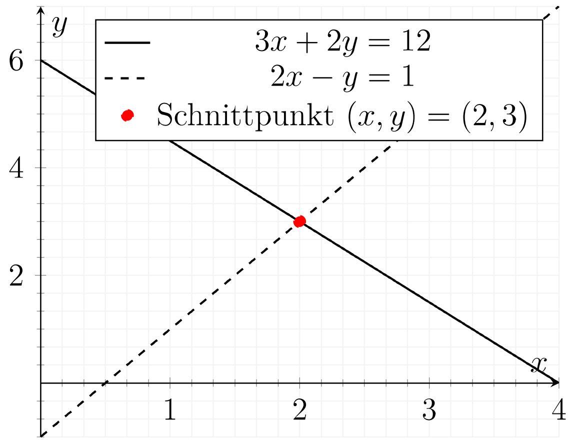


Abbildung 3.1 Graphische Darstellung des linearen Gleichungssystems $3x + 2y = 12$,$2x - y = 1$ und seiner Lösung.

Dieses System ist also **eindeutig lösbar**: Es besitzt genau eine Lösung. Jedes lineare System aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten entspricht zwei Geraden in der Ebene. Wann besitzt also ein solches lineare Gleichungssystem eine Lösung? Genau dann, wenn sich die Geraden schneiden oder übereinstimmen. Es besitzt genau dann keine Lösung, wenn die Geraden parallel sind. Wir sehen also, dass ein LGS aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten drei mögliche Lösungsmengen besitzen kann:

1. eine einzige Lösung $\Leftrightarrow$ Geraden schneiden sich

2. unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$ Geraden liegen übereinander

3. keine Lösung $\Leftrightarrow$ Geraden sind parallel

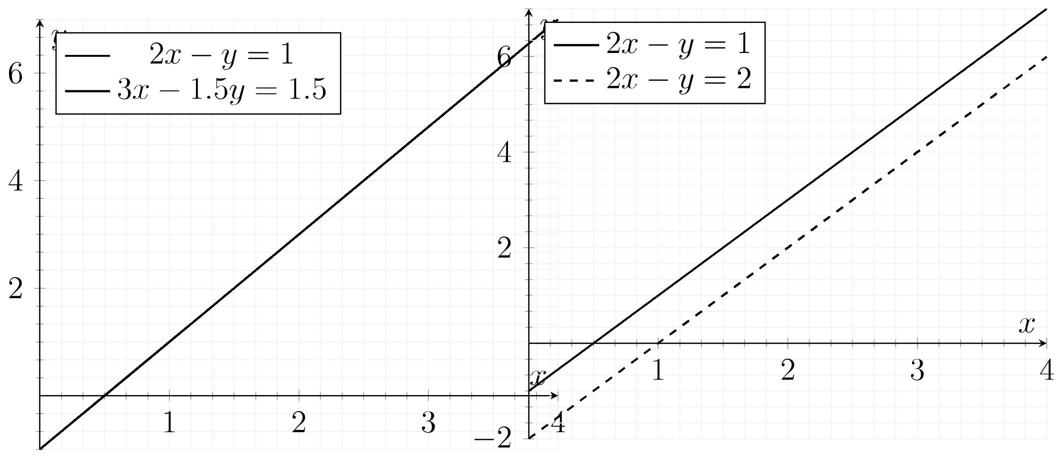


Abbildung 3.2 *Links:* Geraden stimmen überein: Alle Punkte auf der Geraden sind Lösung des linearen Gleichungssystems. *Recht:* Kein Schnittpunkt: Geraden sind parallel

Wie sieht das nun für allgemeine lineare Gleichungssysteme aus? Dafür müssen wir zunächst definieren, was wir unter einem linearen Gleichungssytem verstehen:

Definition 3.20

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten ist definiert als

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Die **Koeffizienten** $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ sind reelle Zahlen, ebenso wie die **rechte Seite** $b_1, \ldots, b_m$. Die Koeffizienten tragen Doppelindizes ij: Der erste Index i ist der **Zeilenindex** und gibt die Zeilennummer an; der zweite Index j ist der **Spaltenindex** und gibt die Spalte an, in der der Koeffizient steht.

Da diese Schreibweise sehr länglich ist, verwendet man in der Regel die Matrixschreibweise. Dabei werden die Koeffizienten a_{ij} des Gleichungssystems in eine **Koeffizientenmatrix** A geschrieben, die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite ebenfalls als Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Notation wird aus dem obigen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bzw. kurz

$$Ax = b.$$

Definition 3.21

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Jeder Vektor

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

für den $Ax^* = b$ gilt, heißt **Lösung** von $Ax = b$. Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** oder **Lösungsraum** und wird mit $\mathbb{L}$ bezeichnet.

Da die Unbekannte für das Lösen des LGS zunächst keine Rolle spielt, betrachten wir im Folgenden die **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$\left(A \middle| b \right),$$

die die gesamte relevante Information des LGS enthält.

Beispiel 3.22

Das obige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

schreibt sich damit als

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Da wir häufig mehr als 2 oder 3 Unbekannte haben, schreiben wir x_1, x_2 anstelle von x, y für die Unbekannten!

3.2.2 Gauß-Algorithmus: Lösungsverfahren für LGS

Wie aus dem Lösen von linearen Gleichungssystemen aus der Schule bekannt ist, spielt die Reihenfolge der Gleichungen keine Rolle. Wir dürfen also die Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix vertauschen. Außerdem kann man Vielfaches einer Gleichung auf eine andere Gleichung addieren. Wir dürfen also Vielfaches einer Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix auf eine andere Zeile addieren. Diese Erkenntnis wollen wir in einem Satz zusammenfassen:

Satz 3.23

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ändert sich durch

1. Vertauschen der Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left(A \middle| b\right)$ sowie
2. Addition von Vielfachen einer Zeile auf eine andere Zeile von $\left(A \middle| b\right)$

nicht.

Bemerkung 3.6. *Aus 2. folgt, dass man auch eine Gleichung mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$ multiplizieren darf.*

Durch diese elementaren Umformungen lassen sich LGS so vereinfachen, dass man die Lösung ablesen kann. In unserem Beispiel kann man beispielsweise das $\frac{3}{2}$-fache der 1. Zeile von der 2. Zeile abziehen und erhält:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 12 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow^{\text{II - }\frac{3}{2}\cdot\text{I}} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{21}{2} \end{array}\right)$$

Wir können nun die 2. Zeile noch mit $\frac{2}{7}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{21}{2} \end{array}\right) \quad \overset{\frac{2}{7}\cdot \mathrm{II}}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Jetzt kann man $x_2 = 3$ in der 2. Zeile ablesen. Dieses Ergebnis in die 1. Zeile eingesetzt ergibt $2x_1 = 4$, also $x_1 = 2$. Dieses Lösungsverfahren kann man auf beliebige lineare Gleichungssysteme verallgemeinern: Ziel ist es immer, eine Matrix in **Zeilenstufenform** zu erhalten, bei der unterhalb der Diagonalen nur Nullen stehen. Dieses Verfahren heißt **Gauß-Verfahren**:

Gauß-Verfahren:

1. Falls notwendig, wird die 1. Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht, so dass der 1. Koeffizient $a_{11} \neq 0$ ist.

2. *Optional:* Man multipliziert die 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$, so dass der 1. Koeffizient $= 1$ ist.

3. Man addiert Vielfaches der 1. Zeile auf die 2. bis m-te Zeile, so dass die Koeffizienten a_{21} bis a_{m1} alle verschwinden, also Null werden.

4. Nun betrachtet man das reduzierte System von der 2. bis m-ten Zeile und verfährt damit wie in 1. bis 3.: Man tauscht die 2. Zeile mit einer der Zeilen 3 bis m, so dass der Koeffizient $\tilde{a}_{22} \neq 0$ ist. Dann addiert man Vielfaches der 2. Zeile auf die 3. bis m-te Zeile, so dass die Koeffizienten $\tilde{a}_{32}$ bis $\tilde{a}_{m2}$ verschwinden.

5. Man wiederholt die obigen Schritte, bis die erweiterte Koeffizientematrix in Zeilenstufenform vorliegt:

$$\left(A \middle| b\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a_{11}} & \tilde{a_{12}} & \dots & \tilde{a_{1n}} & \tilde{b_1} \\ 0 & \tilde{a_{22}} & \dots & \tilde{a_{2n}} & \tilde{b_2} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a_{mn}} & \tilde{b_m} \end{array}\right).$$

   (Die letzten Zeilen können vollständig Null sein!)

3.2.3 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

In der Zeilenstufenform läßt sich nun an der erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen, ob das LGS lösbar ist. Dafür benötigen wir die Definition des Rangs einer Matrix:

Definition 3.24

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(A \middle| b\right)$ besitze Zeilenstufenform.

Dann bezeichnet man mit **Rang** von A bzw. $\left(A \middle| b\right)$ die Anzahl der Zeilen, die *mindestens einen Eintrag* $\neq 0$ enthalten. Man schreibt

$$\mathrm{rg(A)} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{rg}\left(\mathrm{A} \middle| \mathrm{b}\right).$$

Bemerkung 3.7. *Für den Rang eines LGS $Ax = b$ mit m Gleichungen und n Unbekannten gilt also immer Rang $\left(A \middle| b\right) \leq \min(m, n)$.*

Beispiel 3.25

Sich schneidende Geraden: Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(A \middle| b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

unseres obigen Beispiels hat den Rang 2:

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A} \middle| \mathrm{b}\right) = \mathrm{rg(A)} = 2.$$

Man zählt die Zeilen, in denen irgendein Eintrag $\neq 0$ ist.

Beispiel 3.26

Übereinstimmende Geraden: Die erweiterte Koeffizientenmatrix von

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x - \frac{3}{2}y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

nach Anwendung des Gauß-Algorithmus lautet

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und hat damit $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = 1$.

Beispiel 3.27

Parallele Geraden: Die erweiterte Koeffizientenmatrix von

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

nach Anwendung des Gauß-Algorithmus lautet

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und hat damit $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = 2$, aber $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$.

Beispiel 3.28

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Sie ist bereits in Zeilenstufenform. Sie hat keine Zeile aus Nullen, also ist $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 3$.

Beispiel 3.29

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

lässt sich mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform bringen (s. Vorlesung), und man erhält die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

die zwei Zeilen mit Nicht-Null-Einträgen besitzt. Also ist $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$.

Für die Lösbarkeit eines LGS besteht folgender Zusammenhang zum Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix:

Beweis 3.8. *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen und n Unbekannten. Es besitzt genau dann eine*

1. ***eine Lösung***, *wenn gilt:*

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\right);$$

genauer:

   a) ***genau eine Lösung***, *wenn gilt*

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{n}(= \textit{Anzahl Unbekannte});$$

   b) ***unendlich viele Lösungen***, *wenn gilt*

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) < \mathrm{n}(= \textit{Anzahl Unbekannte});$$

2. ***keine Lösung***, *wenn gilt*

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) \neq \mathrm{rg}(\mathrm{A}).$$

Beispiel 3.30

Wir betrachten erneut die obigen drei linearen Gleichungssysteme für zwei Geraden:

Sich schneidende Geraden: Es ist

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

und damit:

$$\operatorname{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 2.$$

Mit Hilfe des Satzes schließen wir, dass das System eine eindeutige Lösung besitzt. Dies haben wir oben bereits durch Rechnung bzw. durch die Skizze gezeigt.

Übereinstimmende Geraden: Es ist

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit $\operatorname{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 1 < 2$. Das LGS hat also eine Lösung, aber keine eindeutige. Die Lösungsmenge ist die Gerade $y = 2x - 1$.

Parallele Geraden: Es ist

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und damit $\operatorname{rg}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{b}\right) = 2 \neq \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 1$. Das LGS ist also nicht lösbar.

Um die *Größe* des Lösungsraums angeben zu können, hat man den Begriff der Dimension des Lösungsraums eingeführt:

Satz 3.31

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und A eine Koeffizientenmatrix mit m Zeilen und n Spalten. Wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ lösbar ist, dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ mit der Dimension

$$\dim(\mathbb{L}) = n - \operatorname{rg}(\mathrm{A}).$$

Daraus kann man ableiten, dass auch für die Dimension des Lösungsraums von $Ax = b$ für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\dim(\mathbb{L}) = n - \operatorname{rg}(\mathrm{A})$.

Beispiel 3.32

Jedes LGS, das eindeutig lösbar ist, besitzt nur eine einzige Lösung. Die Lösungsmenge besteht damit aus einem Punkt und ist somit 0-dimensional: $dim(\mathbb{L}) = 0$.

Beispiel 3.33

Im Beispiel der Geraden, die übereinstimmen,

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x - \frac{3}{2}y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

haben wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Variable x ist also frei wählbar: egal, wie wir x wählen, erhalten wir immer eine Lösung $\begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die Lösungsmenge eine Gerade und ist eindimensional: $\dim(\mathbb{L}) = 1$.

Beispiel 3.34

Das lineare Gleichungssystem (s.oben)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(A\middle|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

in Zeilenstufenform (nach Anwendung des Gauß-Algorithmus). Wenn man die Lösung *von unten nach oben* bestimmt, erhält man aus der 4. Zeile

$$0 \cdot x_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_4 \in \mathbb{R},$$

man kann also x_4 beliebig wählen. Dies eingesetzt in die 3. Zeile ergibt:

$$0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 \in \mathbb{R};$$

auch x_3 kann also beliebig gewählt werden. Die Lösungen x_3, x_4 in die 2. Zeile eingesetzt ergibt:

$$-x_2 + x_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = x_4.$$

Eingesetzt in die 1. Zeile erhält man schließlich:

$$-3x_1 + 3x_4 + x_3 - x_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}\left(1 - 2x_4 - x_3\right).$$

Damit können wir die Lösungsmenge schreiben als

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(1 - 2x_4 - x_3\right) \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir können also x_3, x_4 frei wählen. Die Variablen x_1, x_2 hängen dann von diesen beiden ab und sind also nicht frei wählbar. Die Dimension der Lösungsmenge ist in diesem Beispiel also $\dim(\mathbb{L}) = 2$. Die Lösungsmenge ist eine Ebene.

Wir haben am Beispiel der Geradengleichungen bereits erkannt, dass es einen Zusammenhang zwischen linearer Unabhängigkeit von Spaltenvektoren und der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems gibt. Wir betrachten das noch einmal am folgenden Beispiel:

Beispiel 3.35

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Um die Frage zu beantworten, müssen wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0.$$

Wenn wir es zeilenweise aufschreiben erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 + 0 \cdot \lambda_5 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 3\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 + (-2) \cdot \lambda_5 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 + 9\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 + (-8) \cdot \lambda_5 &= 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + (-1) \cdot \lambda_2 + (-2)\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 + 2 \cdot \lambda_5 &= 0 \\ (-2)\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 + 2 \cdot \lambda_4 + (-4) \cdot \lambda_5 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir dieses lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise schreiben, erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus formen wir diese erweiterte Koeffizientenmatrix um und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Koeffizientenmatrix hat also Rang 3: $\mathrm{rg}(A) = 3$. Das lineare Gleichungssystem ist zwar lösbar, aber nicht eindeutig. Es gibt also $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$, die das Gleichungssystem lösen. Die Vektoren sind linear abhängig. Genauer entspricht der Rang der Matrix der maximalen Anzahl an linear unabhängigen Spalten bzw. der Dimension des Raums, der von den Spaltenvektoren aufgespannt wird.

Satz 3.36

Sei $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren und $A = [v_1 v_2 \ldots v_n]$ die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{rg(A)} &= \dim\left(span(v_1, \ldots, v_n)\right) \\ &= \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge } \{v_1, \ldots, v_n\}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt: Die Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn $\mathrm{rg(A)} < \mathrm{n}$.

3.3 Matrizenrechnung

Im obigen Abschnitt zu linearen Gleichungssystemen haben wir bereits von Matrizen gesprochen und Eigenschaften wie den Rang kennengelernt. In diesem Abschnitt möchten wir jetzt das *Rechnen mit Matrizen* kennenlernen, Matrizen als Transformationen in der Ebene veranschaulichen und die wichtigen Eigenschaften der *linearen Unabhängigkeit* von Vektoren und die *Determinante* von Matrizen behandeln. Alle diese Eigenschaften liefern uns am Ende eine Vielzahl an äquivalenten Kriterien, die uns erlauben zu entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

3.3.1 Definition & spezielle Matrizen

Definition 3.37

Eine $(n \times m)$-Matrix A ist ein Schema aus reellen Zahlen, das die Zahlen in n Zeilen und m Spalten anordnet:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die Einträge oder **Elemente** a_{ij} der Matrix A besitzen einen Doppelindex ij. Der erste Index i bezeichnet die Zeile und heißt deswegen **Zeilenindex**, der zweite Index j die Spalte. Er wird als **Spaltenindex** bezeichnet. Kurz schreibt man auch

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}\,.$$

Beispiel 3.38

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

   ist eine $(2, 3)$-Matrix.

2. Eine Matrix heißt obere (oder untere) **Dreiecksmatrix**, wenn alle ihre Einträge unterhalb (oder oberhalb) der Diagonalen Null sind.
   Beispiel:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn die Zeilen- gleich der Spaltenanzahl ist.
   Beispiel:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Eine Matrix heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente bis auf diejenigen auf der Diagonalen Null sind.
   Beispiel:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Die $(n \times n)$-Matrix, deren Elemente auf der Diagonalen Eins sind und sonst Null, also
   $$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   heißt **Einheitsmatrix**.

3.3.2 Rechnen mit Matrizen

Transponieren Eine $(n \times m)$-Matrix A wird transponiert zu A^t, indem man Zeilen mit Spalten vertauscht:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.39

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.9. *Durch das Transponieren wird aus einer $(n \times m)$-Matrix A eine $(m \times n)$-Matrix A^t.*

Addition Zwei $(n \times m)$-Matrizen A, B werden addiert (oder subtrahiert), indem man ihre Elemente addiert (bzw. subtrahiert):

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.10. *Die Zeilen- und Spaltenanzahl von A und B müssen gleich sein, damit man sie addieren kann.*

Beispiel 3.40

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 11 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.11. *Die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe: Die Matrizenaddition ist assoziativ. Das neutrale Element ist die Nullmatrix – eine Matrix, deren Einträge alle Null sind – und das inverse Element zu einer beliebigen $(n \times m)$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist gerade $-A = (-a_{ij})$.*

Multiplikation Eine $(n \times m)$ Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einer $(m \times k)$-Matrix $B = (b_{ij})$ multipliziert, indem Zeilen mit Spalten multipliziert werden, d.h. für den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte wird das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B gebildet:

$$A \cdot B = C, \quad \text{mit } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Bemerkung 3.12. *Die Spaltenanzahl von A muss gleich der Zeilenanzahl von B sein, ansonsten können die Matrizen nicht miteinander multipliziert werden. Das Produkt einer $(n \times m)$-Matrix A mit einer $(m \times k)$-Matrix B ist eine $(n \times k)$-Matrix AB.*

Beispiel 3.41

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 49 & 41 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.13. *Es kann zum Üben der Matrizenmultiplikation helfen, folgendes Schema zu verwenden:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 49 & 41 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h. im allgemeinen gilt nicht:

$$AB \neq BA.$$

Beispiel 3.42

Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.14. *Handelt es sich bei der Menge der Matrizen mit der Multiplikation um eine Gruppe? Zunächst stellt man fest, dass man sich auf die Menge der quadratischen $(n \times n)$-Matrizen beschränken muss, damit die Multiplikation zwischen allen Elementen definiert. Die Multiplikation ist dann assoziativ: $A(BC) = (AB)C$. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix E_n. Es gibt aber nicht zu jeder $(n \times n)$-Matrix A ein inverses Element der Multiplikation A^{-1}, so dass $AA^{-1} = E_n$ gilt. Insbesondere gilt deswegen der Satz des Nullprodukts nicht auf der Menge der Matrizen: Es gibt Matrizen $A \neq 0$, $B \neq 0$, dessen Produkt Null ist: $AB = 0$ (s. Beispiel 3.42.*

Neben der nicht-kommutativen Multiplikation gibt es einen weiteren wichtigen Unterschied zwischen Matrizenrechnung und dem Rechnen mit reellen Zahlen: Es existiert zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein *Inverses der Multiplikation*, nämlich $\frac{1}{a}$, so dass $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist. Diese Tatsache erlaubt es uns, Gleichungen wie z.B. $5x = 3$ direkt nach x aufzulösen, indem wir die Gleichung mit $\frac{1}{5}$ von beiden Seiten multiplizieren. Im Gegensatz dazu besitzt *nicht* jede Matrix $A \neq 0$ ein inverses Element der Multiplikation. Wenn eine Matrix A ein solches Inverses A^{-1} besitzt, können wir ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ einfach lösen, indem wir die Gleichung mit A^{-1} durchmultiplizieren. Wir erhalten dann $x = A^{-1}b$ als (eindeutige) Lösung. Wie wir aber oben gesehen haben, ist nicht jedes lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar; deshalb kann auch nicht jede Matrix ein Inverses besitzen. Im folgenden definieren wir zunächst, was wir genau unter einer inversen Matrix verstehen:

Definition 3.43

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt **invertierbar**, wenn es eine $(n \times n)$-Matrix X gibt, so dass

$$AX = XA = E.$$

Man schreibt dann $A^{-1} = X$ und nennt diese Matrix die **inverse Matrix** von A.

Wenn eine Matrix A invertierbar ist, können wir ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig durch $x = A^{-1}b$ lösen. Diese Erkenntnis liefert uns das folgende Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix:

Beweis 3.15. *Eine $(n \times n)$-Matrix A ist invertierbar.*
$\Leftrightarrow$ *Sie besitzt vollen Rang:* $\mathrm{rg(A) = n}$.
$\Leftrightarrow$ *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt für jede rechte Seite b ein eindeutige Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$.*

Neben diesen Unterschieden zum Rechnen mit reellen Zahlen gelten doch die allermeisten Rechengesetze der reellen Zahlen auch für das Rechnen mit Matrizen. Im folgenden finden Sie diese Rechenregeln für die Matrizenrechnung zusammengefasst.

Beachten Sie die speziellen Regeln für die Matrizentransposition und das Inverse einer Matrix:

$$\begin{aligned}
A\,(BC) &= (AB)\,C \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{Assoziativgesetz}\\
A + B &= B + A \quad \text{Kommutativgesetz der Addition}\\
A\,(B + C) &= AB + AC \quad \text{Distributivgesetz}\\
A + 0 &= A \quad \text{Nullmatrix (=Einträge sind Null) ist das neutrale Element der Addition}\\
A \cdot E &= E \cdot A = A \quad \text{Einheitsmatrix ist neutrales Element der Multiplikation}\\
(AB)^t &= B^t A^t\\
(AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1}
\end{aligned}$$

3.3.3 Determinante

1. Wir betrachten das lineare (2×2)-Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}y &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}y &= b_2
\end{aligned}$$

Es besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

Wenn wir es lösen wollen, addieren wir das $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$-fache der 1. Zeile auf die 2. Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{array}\right)$$

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der Koeffizientematrix 2 ist. Damit dies in unserem Fall erfüllt ist, muss gelten:

$$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Diese Größe nennt man die **Determinante** von

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Geometrisch gibt die Determinante den Flächeninhalt des von zwei Vektoren (im mathematisch positiver Reihenfolge) aufgespannten Parallelogramms an: Seien v, w zwei (Zeilen)Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und A die Matrix, deren Zeilen aus den Vektoren v und w gebildet wurden. Dann ist der Flächeninhalt des von v, w aufgespannten Parallelogramms gleich $\det(A)$:

Bemerkung 3.16. *Die Determinante* $\det(A)$ *wird häufig auch durch Betragsstriche* $|A|$ *geschrieben.*

Rechenregeln für die Determinante

1. Entsteht B durch Vertauschen von zwei Zeilen von A ist: $\det(B) = -\det(A)$.
   Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\det(A) = -5$; vertauscht man die beiden Zeilen von A erhält man die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(B) = 5 = -\det(A)$.

2. Entsteht B durch Addition von einer Zeile auf eine andere Zeile von A ist: $\det(B) = \det(A)$.
   Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\det(A) = -5$; addiert man die Summe der beiden Zeilen von A in die 2. Zeile erhält man die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mit $\det(B) = \det(A) = -5$.

3. Die Determinante $\det(A)$ einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge.

4. Entsteht B durch Multiplikation von einer Zeile von A mit λ, dann ist $\det(B) = \lambda \det(A)$.

5. **Multiplikationssatz:** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Wir können also die Determinante einer quadratischen Matrix A berechnen, indem wir den Gauß-Algorithmus durchführen und uns merken, wie oft wir dabei Zeilen vertauscht haben. Dann gilt:

Satz 3.44

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Wenn wir A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in eine Dreiecksmatrix A' umwandeln und dabei k-mal Zeilen vertauschen müssen und die Zeilen mit $\lambda_1, \dots \lambda_m$ multiplizieren, berechnet sich die Determinante von A durch

$$(-1)^k \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \det(A) = \det(A').$$

Die Determinante $\det(A')$ einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.

Beispiel 3.45

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Big| \; I + II, I + (-1)III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Big| \; II + III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus haben wir einmal die 3. Zeile mit (-1) multipliziert, d.h. die Determinante von A berechnet sich als (-1) mal das Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det(A) = (-1)1 \cdot 2 \cdot 7 = -14.$$

Für eine (2×2)-Matrix A haben wir gesehen, dass $\det(A) = 0$ genau dann gilt, wenn A das Einheitsquadrat auf eine Gerade abbildet und nicht auf ein Parallelogramm. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass die Matrix A keinen vollen Rang $(= Rang(A) = 2)$ besitzt und dass also die Spalten der Matrix linear abhängig voneinander sind. Diese Aussagen gelten für beliebige $(n \times n)$-Matrizen. Wir haben also mit Hilfe der Determinante ein weiteres Kriterium für die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems erhalten:

Satz 3.46

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&Rang(A) = n \\
\Leftrightarrow\ & \det(A) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{Alle Spalten (oder Zeilen) von } A \text{ sind linear unabhängig zueinander.} \\
\Leftrightarrow\ & Ax = b \text{ ist eindeutig lösbar für jede rechte Seite } b. \\
\Leftrightarrow\ & A \text{ ist invertierbar.}
\end{aligned}$$

Die Determinante einer (3×3)-Matrix können wir auch direkt ausrechnen, ohne den Gauß-Algorithmus durchzuführen:

Satz 3.47

Die Determinante einer (3×3)-Matrix A berechnet sich als

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$