

Tutorium Hardware- und Systemgrundlagen

Gruppe 1

Raum F109 | Mittwoch, 11.30 Uhr

Mirko Bay

[mirko.bay@htwg-konstanz.de]

Gruppe 2

Raum F110 | Mittwoch, 11.30 Uhr

Michael Bernhardt

[michael.bernhardt@htwg-konstanz.de]

Zahlensysteme II

Dual-, Oktal-, Dezimal-,
Hexadezimalsystem

Betrag + Vorzeichen
Einer- / Zweierkomplement

IEEE-P 754-Floating-Point-Standard
BCD-Zahl

Zahlensysteme II: Mögliche Aufgabentypen

Eine Zahl zur Basis 2 kann als „normale“ Dualzahl, mit Betrag+Vorzeichen (B+VZ), als Einerkomplement (EK) und als Zweierkomplement (ZK) dargestellt werden:

$$\text{Beispiel: } -(77)_{10} = -(0100\ 1101)_2 = (1100\ 1101)_{\text{B+VZ}} = (1011\ 0010)_{\text{EK}} = (1011\ 0011)_{\text{ZK}}$$

Dezimal → Dual

$$-(77)_{10} \rightarrow -(?)_2$$

$$\begin{aligned} -(77)_{10} &= -(64+8+4+1)_{10} \\ &= -(0100\ 1101)_2 \end{aligned}$$

Dual → Betrag+Vorzeichen

$$-(0100\ 1101)_2 \rightarrow (?)_{\text{B+VZ}}$$

Bei Darstellung als Betrag+Vorzeichen wird ein Bit zusätzlich (das vorderste Bit) für das Vorzeichen benötigt:

0 = positive Zahl
1 = negative Zahl

$$-(0100\ 1101)_2 = (1100\ 1101)_{\text{B+VZ}}$$

Dual → Einerkomplement

$$-(0100\ 1101)_2 \rightarrow (?)_{\text{EK}}$$

Bei der Darstellung als Einerkomplement werden alle Ziffern der Dualzahl „herumgedreht“, also aus 0 wird 1 und umgekehrt:

$$\begin{aligned} &-(0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)_2 \\ &= (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)_{\text{EK}} \end{aligned}$$

Dual	EK
0000 = 0	1000 = -7
0001 = 1	1001 = -6
0010 = 2	1010 = -5
0011 = 3	1011 = -4
0100 = 4	1100 = -3
0101 = 5	1101 = -2
0110 = 6	1110 = -1
0111 = 7	1111 = -0

Einerkompl. → Zweierkompl.

$$(1011\ 0010)_{\text{EK}} \rightarrow (?)_{\text{ZK}}$$

Das Zweierkomplement baut auf dem Einerkomplement auf. Daher ist für die Ermittlung des ZK immer das EK notwendig!

Für das ZK muss zum EK noch eine $(1)_2$ hinzu addiert werden:

$$\begin{array}{r} (1011\ 0010)_{\text{EK}} \\ + (0000\ 0001)_{\text{EK}} \\ \hline = (1011\ 0011)_{\text{ZK}} \end{array}$$

Aufgabe 1:

$(-28)_{10}$ als 16-Bit-Zahl im Einer- und Zweierkomplement!

$$\begin{aligned}
 (-28)_{10} &= -(16 + 8 + 4) \\
 &= -(1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2) \\
 &= -(0000\ 0000\ 0001\ 1100)_2 = (1111\ 1111\ 1110\ 0011)_{EK} = (1111\ 1111\ 1110\ 0100)_{ZK}
 \end{aligned}$$

Bei negativer Zahl muss für das Einerkomplement die komplette Zahl herumgedreht werden!

$$\begin{array}{r}
 (1111\ 1111\ 1110\ 0011)_{EK} \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

Für Zweierkomplement erst negieren (=EK), dann +1

Aufgabe 2:

$-(2^6)_{10}$ ins Zweierkomplement

(Klausur SS 05)

Erst Einerkomplement bilden (durch negieren),
dann 1 addieren für Zweierkomplement!

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 -(2^6)_{10} = -(0100\ 0000)_2 = (1011\ 1111)_{\text{EK}} = & 1011 & 1111 \\
 + & & & & & & & 1 \\
 = & 111 & 111 \\
 \hline
 & (1100 & 0000)_{\text{ZK}}
 \end{array}
 \end{array}$$

Aufgabe 3:

$-(23)_{12}$ in Zweierkomplementzahl mit 8 Stellen

(Klausur WS 06/07)

$$\begin{aligned}
 -(23)_{12} &= - (2 \cdot 12^1 + 3 \cdot 12^0)_{10} \\
 &= - (2 \cdot 12 + 3 \cdot 1) \\
 &= - (24 + 3) = \\
 &= - (27)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 27 : 2 = 13 & \text{Rest } 1 \\
 13 : 2 = 6 & \text{Rest } 1 \\
 6 : 2 = 3 & \text{Rest } 0 \\
 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 \\
 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1
 \end{array}$$

Erst Einerkomplement bilden (durch negieren),
dann 1 addieren für Zweierkomplement!

$$= - (0001\ 1011)_2 = (1110\ 0100)_{EK} =$$

$$\begin{array}{r}
 (1110\ 0100)_{EK} \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 (1110\ 0101)_{ZK}
 \end{array}$$

Aufgabe 4:

Füllen Sie die Tabelle aus und geben Sie jeweils das Ergebnis der arithmetischen Operation in binärer Darstellung an. Darstellung mit 8 Bit.

(Testat WS 02/03)

Dezimal	Betrag + Vorzeichen	Einerkomplement	Zweierkomplement
$\begin{array}{r} -71 \\ +38 \\ \hline -33 \end{array}$	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div> $- (71)_{10} = (1100\ 0111)_{B+VZ}$ $+ (38)_{10} = (0010\ 0110)_{B+VZ}$ $(1010\ 0001)_{B+VZ}$ </div> </div>	$- (71)_{10} = (1011\ 1000)_{EK}$ $+ (38)_{10} = (0010\ 0110)_{EK}$ $= (1101\ 1110)_{EK}$	$- (71)_{10} = (1011\ 1001)_{ZK}$ $+ (38)_{10} = (0010\ 0111)_{ZK}$ $= (1110\ 0000)_{ZK}$

Vorsicht! Addition in B+VZ
nicht (wirklich) möglich!
Am Besten Ergebnis
aus Dezimal übertragen!

Aufgabe 5:

$-\left|\sqrt{(40)_{16}}\right|$ als Zweierkomplement mit 8 Stellen

(Klausur SS 10)

$$(40)_{16} = 4 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 \\ = (64)_{10}$$

$$-\left|\sqrt{(64)_{10}}\right| = -(8)_{10} \\ -(8)_{10} = -(0000\ 1000)_2$$

$$-(0000\ 1000)_2 = (1111\ 0111)_{\text{EK}} \\ (1111\ 0111)_{\text{EK}} = (1111\ 1000)_{\text{ZK}}$$

Erst Einerkomplement bilden (durch negieren),
dann 1 addieren für Zweierkomplement!

Aufgabe 6:

Gegeben sie eine Menge Z von Oktalzahlen $Z = \{ 7, 24, 52 \}$.

- a) Welche Dezimalzahl K ergibt sich aus der Summe der drei Oktalzahlen?
 - b) Dezimalzahl K aus a) als Zahl in Form Betrag + Vorzeichen mit 8 Bit
 - c) Dezimalzahl aus a) als negative Zahl (-K) im Zweierkomplement mit 8 Bit
- (Testat SS 06)

a)

$$\begin{aligned}(7)_8 &= 7 \cdot 8^0 = (7)_{10} \\ (24)_8 &= 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = (20)_{10} \\ (52)_8 &= 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = (42)_{10} \\ \hline &= (69)_{10}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(69)_{10} &= (64 + 4 + 1)_{10} \\ &= (0100\ 0101)_2 \\ &= (0100\ 0101)_{B+VZ}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}-(0100\ 0101)_2 &= (1011\ 1010)_{EK} \\ (1011\ 1010)_{EK} &= (1011\ 1011)_{ZK}\end{aligned}$$

Aufgabe 7:

Wie lautet die dezimale Summe, wenn zur Zahl $(1001\ 0110)_{ZK}$ die Zahl $(63)_{10}$ hinzu addiert wird?

(Testat SS 03)

Rückinterpretation von ZK:
Erste Ziffer nimmt man negativ, die anderen
werden hinzu addiert!

$$\begin{aligned}(1001\ 0110)_{ZK} &= -2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^1 \\ &= -128 + 16 + 4 + 2 \\ &= -(106)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}(63)_{10} &= (0011\ 1111)_2 & \\ & & + \frac{(0011\ 1111)_{ZK}}{(1001\ 0110)_{ZK}} \\ & & \frac{(1101\ 0101)_{ZK}}{(1101\ 0101)_{ZK}}\end{array}$$

$$-(106)_{10} + (63)_{10} = -(43)_{10}$$

Aufgabe 8:
**Wie viele binäre Stellen braucht man mindestens, damit die Zahl $(64)_{10}$
in Zweierkomplement-Form darstellbar ist?**
(Klausur WS 07/08)

$(64)_{10} = (0100\ 0000)_2$
 $(0100\ 0000)_2 = (0100\ 0000)_{\text{ZK}}$
=> 8 Stellen, da das Vorzeichen mit beachtet werden muss

Aufgabe 9:
Wandeln Sie $-\lvert\sqrt{(61)_8}\rvert$ in eine Zweierkomplement-Zahl mit 8 Stellen um!
(Klausur WS 11/12)

$$(61)_8 = 6 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \\ = (49)_{10}$$

$$-\lvert\sqrt{(49)_{10}}\rvert = -(7)_{10} \\ -(7)_{10} = -(0000\ 0111)_2$$

$$-(0000\ 0111)_2 = (1111\ 1000)_{EK} \\ (1111\ 1000)_{EK} = (1111\ 1001)_{ZK}$$

Erst Einerkomplement bilden (durch negieren),
dann 1 addieren für Zweierkomplement!

Aufgabe 10:
**Wie lauten die größte positive (z_{\max}) und die kleinste negative ($-z_{\min}$)
Dezimalzahl, die sich mit m Stellen in der Form Betrag + Vorzeichen
darstellen lassen?**

(Klausur SS 2010)

z.B. $m = 3$:

$$z_{\max} = (011)_2 = 2^{(3-1)} - 1 = (3)_{10}$$

$$z_{\min} = (111)_2 = -2^{(3-1)} - 1 = (-3)_{10}$$

$$z_{\max} = 2^{(m-1)} - 1$$

$$z_{\min} = -2^{(m-1)} - 1$$

Aufgabe 11:

In einem Rechnersystem müssen die beiden hexadezimalen Zahlen $(45C,4)_{16}$ und $(1BD,F)_{16}$ addiert werden. Zusätzlich muss dazu noch die Oktalzahl $(37,2)_8$ addiert werden. Geben Sie das Ergebnis der Addition der drei Zahlen als Hexadezimal und Zahl im Zweierkomplement an!

(Testat SS 06)

$$\begin{array}{rcl} (45C,4)_{16} & = & (0100\ 0101\ 1100, 0100)_{ZK} \\ + (1BD,F)_{16} & = & (0001\ 1011\ 1101, 1111)_{ZK} \\ + (37,2)_8 & = & (0000\ 0001\ 1111, 0100)_{ZK} \\ \hline & = & (0110\ 0011\ 1001, 0111)_{ZK} \\ & = & (639,7)_{16} \end{array}$$