Tutorium
Hardware- und Systemgrundlagen

Gruppe 1
Raum F109

Mirko Bay
[mirko.bay@htwg-konstanz.de]

Gruppe 2
Raum F110

Michael Bernhardt
[michael.bernhardt@htwg-konstanz.de]

Boole'sche Algebra I

Schaltalgebra
Huntington'sche Axiome

Schaltfunktionen & Schaltnetze
Funktionstabellen

Aussagenlogik
Strukturbäume

Min- / Max-Terme
Disjunktive / Konjunktive Normalform

Shannonscher Entwicklungssatz (& Binärbäume)
Multiplexer-Bausteine

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Huntigton'sche Axiome

Kommutativgesetz:	$a \vee b = b \vee a$ $a \wedge b = b \wedge a$
Distributivgesetz	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Neutrale Elemente	$a \vee 0 = a$ $a \wedge 1 = a$
Inverse Elemente	$a \wedge \bar{a} = 0$ $a \vee \bar{a} = 1$
Assoziativgesetz	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
Idempotengesetz	$a \wedge a = a$ $a \vee a = a$
Absorptionsgesetz	$a \wedge (a \vee b) = a$ $a \vee (a \wedge b) = a$
DeMorgan-Gesetze	$\overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$ $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Web-Service zum Auflösen boole'scher Funktionen:
www.elektroniker-bu.de/boolesche

Elementare Regeln

Konstanten	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
	$0 \vee 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
	$1 \vee 1 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$
	$0 \vee 1 = 1$	$0 \wedge 1 = 0$

Variablen	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 0 = 0$
	$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 1 = a$
	$a \vee a = a$	$a \wedge \overline{a} = 0$
	$a \vee \overline{a} = 1$	$a \wedge a = a$

Aufgabe 1:
Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$(a \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c) = a \wedge \overline{b}$$

$$(a \cdot \overline{b}) + (a \cdot \overline{b} \cdot c) = a \cdot \overline{b} \quad (\textit{alternative Schreibweise})$$

Bei einer der alternativen Schreibweise wird ein UND als mal-Zeichen und das ODER als plus-Zeichen geschrieben! $\cdot$ $+$

Vorteile: übersichtlichere und kürzere Schreibweise

Meist wird eine Mischung aus beiden Schreibweisen verwendet:

Das UND als mal-Zeichen, $\cdot$
Das ODER als logisches Zeichen $\vee$

$$(a \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c) = a \wedge \overline{b}$$
$$(a \wedge \overline{b}) \vee \cancel{(a \wedge \overline{b} \wedge c)} = a \wedge \overline{b}$$
$$(a \wedge \overline{b}) = a \wedge \overline{b}$$

Absorptionsgesetz

$$(a \cdot \overline{b}) + (a \cdot \overline{b} \cdot c) = a \cdot \overline{b}$$
$$(a \cdot \overline{b}) + \cancel{(a \cdot \overline{b} \cdot c)} = a \cdot \overline{b}$$
$$(a \cdot \overline{b}) = a \cdot \overline{b}$$

Aufgabe 2:
Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\left(a \vee b\right) \wedge \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge \left(a \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) = 0$$

$$\left(a + b\right) \cdot \left(\overline{a} + b\right) \cdot \left(a + \overline{b}\right) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = 0 \quad \left(\textit{alternative Schreibweise}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(a \vee b\right) \wedge \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge \left(a \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) &= 0 && \textit{Distributivgesetz} \\
\left[a \vee \left(b \wedge \overline{b}\right)\right] \wedge \left[\overline{a} \vee \left(b \wedge \overline{b}\right)\right] &= 0 && \textit{Inverses Element} \\
\left(a \vee 0\right) \wedge \left(\overline{a} \vee 0\right) &= 0 && \textit{Neutrales Element} \\
a \wedge \overline{a} &= 0 && \textit{Inverses Element} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 3:
Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\left(\overline{a \wedge b} \vee \bar{c}\right) \wedge \left(\bar{a} \vee b \vee \bar{c}\right) = \bar{a} \vee \bar{c}$$

$$\left(\overline{a \cdot b} + \bar{c}\right) \cdot \left(\bar{a} + b + \bar{c}\right) = \bar{a} + \bar{c} \qquad \left(\textit{alternative Schreibweise}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{a \wedge b} \vee \bar{c}\right) \wedge \left(\bar{a} \vee b \vee \bar{c}\right) &= \bar{a} \vee \bar{c} && \\
\left(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}\right) \wedge \left(\bar{a} \vee b \vee \bar{c}\right) &= \bar{a} \vee \bar{c} && \textit{DeMorgan} \\
\bar{a} \vee \left[\left(\bar{b} \vee \bar{c}\right) \wedge \left(b \vee \bar{c}\right)\right] &= \bar{a} \vee \bar{c} && \textit{Distributivgesetz} \\
\bar{a} \vee \left[\left(\bar{b} \wedge b\right) \vee \left(\bar{b} \wedge \bar{c}\right) \vee \left(\bar{c} \wedge b\right) \vee \left(\bar{c} \wedge \bar{c}\right)\right] &= \bar{a} \vee \bar{c} && \textit{Inverses Element} \\
\bar{a} \vee \left[0 \vee \left(\bar{b} \wedge \bar{c}\right) \vee \left(\bar{c} \wedge b\right) \vee \left(\bar{c} \wedge \bar{c}\right)\right] &= \bar{a} \vee \bar{c} && \textit{Idempotenzgesetz} \\
\bar{a} \vee \left[\bar{c} \vee \left(\bar{c} \wedge \bar{b}\right) \vee \left(\bar{c} \wedge b\right)\right] &= \bar{a} \vee \bar{c} && \textit{Absorptionsgesetz} \\
\bar{a} \vee \bar{c} &= \bar{a} \vee \bar{c} &&
\end{aligned}$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 4:
Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\overline{\overline{a \wedge b} \vee c} \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$

$$\overline{\overline{a \cdot b} + c} + (a \cdot c) = a \cdot (b + c) \qquad (alternative\ Schreibweise)$$

$$\overline{\overline{a \wedge b} \vee c} \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$
$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b} \vee c} \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$
$$(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$
$$(ab\,\bar{c} \vee a) \cdot (ab\,\bar{c} \vee c) = a \wedge (b \vee c)$$
$$((a \vee a) \cdot (b \vee a) \cdot (\bar{c} \vee a)) \cdot ((a \vee c) \cdot (b \vee c) \cdot (\bar{c} \vee c)) = a \wedge (b \vee c)$$
$$a \cdot \cancel{(a \vee b)} \cdot \cancel{(a \vee c)} \cdot \cancel{(a \vee c)} \cdot (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$$
$$a \cdot (b \vee c) = a \cdot (b \vee c)$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 5:
Zeigen Sie die Identität der folgenden Gleichung mit Hilfe schaltalgebraischer Umformungen:

$$\boldsymbol{a \wedge b \vee c \wedge d \vee a \wedge c = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c)}$$

$$\boldsymbol{ab \vee cd \vee ac = (a \vee c)(a \vee d)(b \vee c)}$$

Kurzschreibweise:
kürzer und übersichtlicher!

$$
\begin{aligned}
ab \vee cd \vee ac &= (a \vee c) \cdot (a \vee d) \cdot (b \vee c) \\
ab \vee cd \vee ac &= (a \vee \cancel{ad} \vee \cancel{ac} \vee cd) \cdot (b \vee c) \\
ab \vee cd \vee ac &= ab \vee ac \vee \cancel{bcd} \vee cd \\
ab \vee cd \vee ac &= ab \vee cd \vee ac
\end{aligned}
$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 6:
Zeigen Sie die Identität der folgenden Gleichung mit Hilfe schaltalgebraischer Umformungen:

$$\overline{(x \wedge \overline{y})} \wedge \overline{(\overline{x} \wedge y)} = x \leftrightarrow y$$

vgl. Übung 04 (Lösungen)

Äquivalenz: $\leftrightarrow$

$(x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \cdot x_2) \vee (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)$

Antivalenz: $\nleftrightarrow$

$(x_1 \nleftrightarrow x_2) = (\overline{x}_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot \overline{x}_2)$

$$\overline{(x \wedge \overline{y})} \wedge \overline{(\overline{x} \wedge y)} = x \leftrightarrow y$$

$$(\overline{x} \vee y) \cdot (x \vee \overline{y}) = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (y \cdot x) \qquad \textit{DeMorgan}$$

$$(\overline{x} \cdot x) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (y \cdot x) \vee (y \cdot \overline{y}) = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (y \cdot x) \qquad \textit{Distributivgesetz}$$

$$(\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (y \cdot x) = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (y \cdot x) \qquad \textit{Inverses Element}$$

Aufgabe 7:
Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$y = \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \lor \left(\overline{x_2} \nleftrightarrow x_1\right) \cdot \overline{x_3} \lor \left(x_2 \leftrightarrow x_1\right) \cdot x_3}$$

(Testat WS 10/11)

Besonderheit: Negation der Äqui- / Antivalenz

$$\overline{x_1 \leftrightarrow x_2} = x_1 \nleftrightarrow x_2$$
$$\overline{x_1 \nleftrightarrow x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$$

Die Variablen selbst bleiben unberührt!

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor\left(\overline{x_2}\nleftrightarrow x_1\right)\cdot\overline{x_3}\lor\left(x_2\leftrightarrow x_1\right)\cdot x_3}$$

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor\left(\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2\right)\cdot\overline{x_3}\lor\left(x_2\cdot x_1\lor\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\right)\cdot x_3}$$

Anti – / Äquivalenz

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\lor\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\lor x_1\cdot x_2\cdot x_3\lor\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3}$$

Distributivgesetz

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\lor\cancel{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}}\lor x_1\cdot x_2\cdot x_3\lor\cancel{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3}}$$

Absorptionsgesetz

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2\cdot\left(\overline{x_3}\lor x_3\right)}$$

Inverses Element

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2\cdot\left(\cancel{1}\right)}$$

Neutralelement

$$y=\overline{\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\lor x_1\cdot x_2}$$

Äquivalenz

$$y=\overline{x_2\leftrightarrow x_1}$$

DeMorgan

$$y=x_2\nleftrightarrow x_1$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 8:

Gegeben ist $\boldsymbol{Z = [((a \vee 0) \cdot \overline{b}) \cdot (b \vee a) \cdot 1] \vee (c \cdot \overline{d}) \cdot (\overline{c} \vee 0)}$

a) Gegen Sie den zu Z dualen Ausdruck Z^D an.

b) Vereinfachen Sie den Ausdruck Z soweit es geht.

(Testat WS 10/11)

Den dualen Ausdruck erhält man durch Austausch von

AND ↔ OR

0 ↔ 1

Achtung: Man muss in jeder Operation Klammern setzen, da AND und OR verschiedene Operatorprioritäten haben!

a) $Z^D = [((a \cdot 1) \vee \overline{b}) \vee (b \cdot a) \vee 0] \cdot (c \vee \overline{d}) \vee (\overline{c} \cdot 1)$

b)

$$Z = [((a \vee 0) \cdot \overline{b}) \cdot (b \vee a) \cdot 1] \vee (c \cdot \overline{d}) \cdot (\overline{c} \vee 0)$$ *Neutralelement*

$$Z = [(a \cdot \overline{b}) \cdot (b \vee a)] \vee (c \cdot \overline{d}) \cdot \overline{c}$$

$$Z = [a \cdot \overline{b} \cdot b \vee a \cdot \overline{b} \cdot a] \vee c \cdot \overline{d} \cdot \overline{c}$$ *Inverses Element / Idempotzenzgesetz*

$$Z = a \cdot 0 \vee a \cdot \overline{b} \vee 0$$

$$Z = a \cdot \overline{b}$$

Aufgabe 9:
Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\boldsymbol{y = \overline{\overline{x_2 \cdot \left(x_2 \nleftrightarrow x_3\right)} \cdot \overline{\overline{\overline{x_3} \cdot \overline{\left(x_2 \nleftrightarrow x_3\right)}}}} \vee \left(\overline{\left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)} \nleftrightarrow 1\right)}$$

(Testat SS 07)

$$x \leftrightarrow 1 \;=\; x\cdot 1 \vee \overline{x}\cdot\overline{1} \;=\; x\cdot 1 \vee \overline{x}\cdot 0 \;=\; x\cdot 1 \;=\; x$$
$$x \nleftrightarrow 1 \;=\; \overline{x}\cdot 1 \vee x\cdot\overline{1} \;=\; \overline{x}\cdot 1 \vee x\cdot 0 \;=\; \overline{x}\cdot 1 \;=\; \overline{x}$$

$$x \leftrightarrow 0 \;=\; x\cdot 0 \vee \overline{x}\cdot\overline{0} \;=\; x\cdot 0 \vee \overline{x}\cdot 1 \;=\; \overline{x}\cdot 1 \;=\; \overline{x}$$
$$x \nleftrightarrow 0 \;=\; x\cdot\overline{0} \vee \overline{x}\cdot 0 \;=\; x\cdot 1 \vee \overline{x}\cdot 0 \;=\; x\cdot 1 \;=\; x$$

$$y = \overline{\overline{x_2 \cdot \left(x_2 \nleftrightarrow x_3\right)} \cdot \overline{\overline{x_3} \cdot \overline{\left(x_2 \nleftrightarrow x_3\right)}}} \vee \left(\overline{\left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)} \nleftrightarrow 1\right)$$
$$y = x_2 \cdot \left(x_2 \nleftrightarrow x_3\right) \vee \overline{x_3} \cdot \left(x_2 \leftrightarrow x_3\right) \vee \overline{\left(x_2 \cdot x_3\right)} \cdot 1$$
$$y = x_2 \cdot \left(\overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}\right) \vee \overline{x_3} \cdot \left(x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}\right) \vee \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$$
$$y = x_2 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$$
$$y = x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$
$$y = \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 10:
Vereinfachen Sie die boole'sche Funktion soweit wie möglich:

$$\boldsymbol{y = [\overline{\overline{x_2 \vee \overline{x_1}} \cdot \overline{x_2}} \vee (x_2 \leftrightarrow x_1) \vee (\overline{x_2 \vee x_1} \vee (1 \nleftrightarrow \overline{x_2}))] \nleftrightarrow 0}$$

(Testat WS 04/05)

$$y = [\overline{\overline{x_2 \vee \overline{x_1}} \cdot \overline{x_2}} \vee (x_2 \leftrightarrow x_1) \vee (\overline{x_2 \vee x_1} \vee (1 \nleftrightarrow \overline{x_2}))] \nleftrightarrow 0$$

$$y = x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_2 \vee (x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}) \vee (\overline{x_2}\,\overline{x_1} \vee (x_2))$$

$$y = x_2 \vee \overline{x_1} \vee \cancel{x_2} \vee \cancel{x_1 x_2} \vee \cancel{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} \vee \cancel{\overline{x_2}\,\overline{x_1}} \vee \cancel{x_2}$$

$$y = x_2 \vee \overline{x_1}$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 11:
Vereinfachen Sie die folgende boole'sche Funktion soweit wie möglich:

$$y = \overline{\left(b \nleftrightarrow \bar{a}\right) \cdot \bar{c} \vee \overline{c \cdot b} \vee \left(\bar{b} \leftrightarrow a\right) \cdot c \vee \overline{c \vee a}} \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$

(Testat WS 11/12)

$$y = \overline{\left(b \nleftrightarrow \bar{a}\right) \cdot \bar{c} \vee \overline{c \cdot b} \vee \left(\bar{b} \leftrightarrow a\right) \cdot c \vee \overline{c \vee a}} \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = \left(\left(b \leftrightarrow \bar{a}\right) \vee c\right) \cdot \left(\bar{c} \vee \bar{b}\right) \cdot \left(\left(\bar{b} \nleftrightarrow a\right) \vee c\right) \cdot \left(c \vee a\right) \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = \left(\left(\bar{a}\, b \vee a\, \bar{b}\right) \vee c\right) \cdot \left(\bar{c} \vee \bar{b}\right) \cdot \left(\left(ba \vee \bar{b}\, \bar{a}\right) \vee c\right) \cdot \left(c \vee a\right) \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = \left(\left(\bar{a}\, b\, \bar{c}\right) \vee \left(\cancel{\bar{a}\, b\, \bar{b}}\right) \vee \left(\bar{a}\, b\, \bar{c}\right) \vee \left(a\, \bar{b}\, \bar{b}\right) \vee \left(\cancel{c\, \bar{c}}\right) \vee \left(c\, \bar{b}\right)\right) \cdot \left(ba \vee \bar{b}\, \bar{a} \vee c\right) \cdot \left(c \vee a\right) \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = \left(\left(c\, \bar{b}\right) \cdot \left(c \vee a\right)\right) \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = \left(c\, \bar{b}\, \cancel{c}\right) \vee \cancel{\left(c\, \bar{b}\, a\right)} \vee \bar{c} \cdot b \cdot a$$
$$y = c\, \bar{b} \vee \bar{c}\, b\, a$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle

Aufgabe 12:
Zeigen Sie die Identität der folgenden Gleichung mit Hilfe schaltalgebraischer Umformungen:

$$\boldsymbol{(0 \nleftrightarrow x) \wedge (x \nleftrightarrow y \nleftrightarrow x \wedge y) \wedge (1 \nleftrightarrow y) = x \wedge y}$$

$$
\begin{aligned}
(0 \nleftrightarrow x) \wedge (x \nleftrightarrow y \nleftrightarrow x \wedge y) \wedge (1 \nleftrightarrow y) &= x \wedge y \\
[(1 \wedge x) \vee (0 \wedge \overline{x})] \wedge [x \nleftrightarrow (x\ y\ \overline{y} \vee (\overline{x}\ y \vee \overline{y}\ y))] \wedge [(0 \wedge y) \vee (1 \wedge \overline{y})] &= x \wedge y \\
x \vee [x \nleftrightarrow (0 \vee \overline{x}\ y \vee 0)] \wedge \overline{y} &= x \wedge y \\
x \wedge y \wedge [\overline{x}\ y \vee (x \vee x\ \overline{y})] &= x \wedge y \\
x \wedge y \wedge (\overline{x}\ y \vee \overline{x}\ y \vee x \vee \cancel{x\ \overline{y}}) &= x \wedge y \\
x \wedge y \wedge \cancel{\overline{x}\ y} \vee \cancel{x} &= x \wedge y \\
x \wedge y &= x \wedge y
\end{aligned}
$$

mirko.bay@htwg-konstanz.de | michael.bernhardt@htwg-konstanz.de | alle Unterlagen auf Moodle