Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden Begriffe

- Relation, reflexiv, (anti)symmetrisch,transitiv
- Ordnungs- und Äquivalenzrelation
- Äquivalenzklasse
- Abbildung, Bild, Urbild
- injektiv, surjektiv, bijektiv
- inverse Abbildung

wiederholen und üben

- zu überprüfen, ob eine Relation vorliegt und welche Eigenschaften diese besitzt;
- zu überprüfen, ob eine Abbildung vorliegt und welche Eigenschaften diese besitzt;
- zu überprüfen, ob zwei Mengen gleichmächtig sind.

Präsenzaufgaben

Verständnisfragen

1. Kann eine Ordnungsrelation gleichzeitig eine Äquivalenzrelation sein?
2. Eine Äquivalenzrelation teilt eine Menge M in disjunkte Äquivalenzklassen ein. Sei umgekehrt eine Einteilung von M in disjunkte Teilmengen gegeben, deren Vereinigung gerade M ergibt. Gibt es eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen genau diese Teilmengen sind?
3. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ und b duzen sich.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ kennt b.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ kennt nicht b.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ ist ein Kind von b.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ ist verwandt mit b.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ hat die gleiche Haarfarbe wie b.
4. Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv?
   - ☐ Kind $\mapsto$ Vater
   - ☐ Stadt in Deutschland $\mapsto$ Postleitzahl
   - ☐ Berg $\mapsto$ Gipfelhöhe

☐ Studierender der HTWG $\mapsto$ Immatrikulationsnummer

☐ Mensch $\mapsto$ Einkommen im Jahr 2019

5. Wieviele injektive Abbildungen von $\{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ gibt es? Wieviele surjektive? Wieviele bijektive?

6. Sei $|Y| < \infty$ und $f : X \to Y$ injektiv. Wie verhalten sich die Mächtigkeiten der Mengen X und Y zueinander?

7. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv?

   ☐ $n \mapsto$ nächstgrößere Primzahl

   ☐ $n \mapsto$ größter Primzahlteiler von n

   ☐ $n \mapsto$ nächstgrößere Zahl in $\mathbb{N}$

   ☐ $n \mapsto$ größte Quadratzahl $\leq n$

8. Beschreiben Sie den Graph einer injektiven Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. einer surjektiven Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

9. Erklären Sie in Ihren eigenen Worten, warum die Mengen $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ (=Menge aller geraden, ganzen Zahlen) gleichmächtig sind, d.h. gleich viele Elemente enthalten.

10. Seien A, B endliche Mengen mit $|A| = |B|$. Ist es möglich, eine injektive Abbildung $A \to B$ zu definieren, die nicht surjektiv ist? Ist es möglich eine surjektive Abbildung $A \to B$ zu definieren, die nicht injektiv ist?

11. Geben Sie jeweils eine Abbildung $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit den folgenden Eigenschaften an:
    (a) injektiv und surjektiv
    (b) weder injektiv noch surjektiv
    (c) injektiv, aber nicht surjektiv
    (d) surjektiv, aber nicht injektiv

Standardfragen zu Relationen

1. Geben Sie jeweils die Pärchen an, die zu der Relation gehören:
   (a) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow x \mid y$. $(2, 3), (2, 4), (2, 8), (2, 17)$
   (b) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow x \leq y$. $(2, 3), (3, 2), (2, 4), (5, 8)$
   (c) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow y = x^2$. $(1, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 6)$

2. Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
   (a) $\mathcal{R}_1 := \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \geq n\big\}$
   (b) $\mathcal{R}_2 := \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \cdot n > 0\big\}$
   (c) $\mathcal{R}_3 := \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m = 2n\big\}$

3. Zeigen Sie, dass die Relation $|$ eine Ordnungsrelation auf der Menge $\{1, 2, 3, 6\}$ ist.
4. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$? Überprüfen Sie die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.
   (a) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a + b$ ist gerade.
   (b) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad 6 \mid a - b$
5. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation:

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b \text{ ist gerade.}$$

Standardfragen zu Abbildungen

1. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv?
   - ☐ $x \mapsto x^4$
   - ☐ $x \mapsto e^{-x^2}$
2. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv?
   - ☐ $n \mapsto \min\left\{p \in \mathbb{P} \,\middle|\, p \geq n\right\}$
   - ☐ $n \mapsto n + 1000$
   - ☐ $n \mapsto n^2$
3. Wieviele bijektive Abbildungen $X \to Y$ für $|X| = n$ gibt es?
4. Welche der folgenden Abbildungen besitzt eine inverse Abbildung? Geben Sie diese gegebenenfalls an.
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n - 5$
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = 5n$
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 3$
5. Sei $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(k) = k + 1,\ g(k) = 2k$ und $h(k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.
   (a) Welche der Abbildungen ist/sind injektiv?
   (b) Welche der Abbildungen ist/sind surjektiv?
   (c) Drücken Sie die Kompositionen $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$,$h \circ g$ und h^2 möglichst einfach aus.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
   (a) $\mathcal{R}_1 := \big\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \leq n+1\big\}$
   (b) $\mathcal{R}_2 := \big\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \cdot n \geq -1\big\}$
   (c) $\mathcal{R}_3 := \big\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m = 2\big\}$
   (9 Punkte)

2. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$? Überprüfen Sie die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.
   (a) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b$ wird von 6 mit Rest 2 geteilt.
   (b) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b$ ist ungerade.
   (c) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot b$ ist gerade.
   (d) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot b$ ist nichtnegativ.
   (8 Punkte)

3. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation: $a \sim b \quad :\Leftrightarrow 10 \mid a - b$. **(3 Punkte)**

4. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ besitzt eine inverse Abbildung? Geben Sie diese gegebenenfalls an.
   (a) $f(n) = 5n + 3$
   (b) $f(n) =$größter echter Teiler von n.
   Überprüfen Sie bitte, ob die Abbildungen jeweils bijektiv sind.
   (10 Punkte)

5. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
   - ☐ $x \mapsto x^3$
   - ☐ $x \mapsto e^x$

   Überprüfen Sie bitte jeweils alle Eigenschaften.
   (10 Punkte)

Abgabe freiwillig möglich bis zum **20.04.2020**.