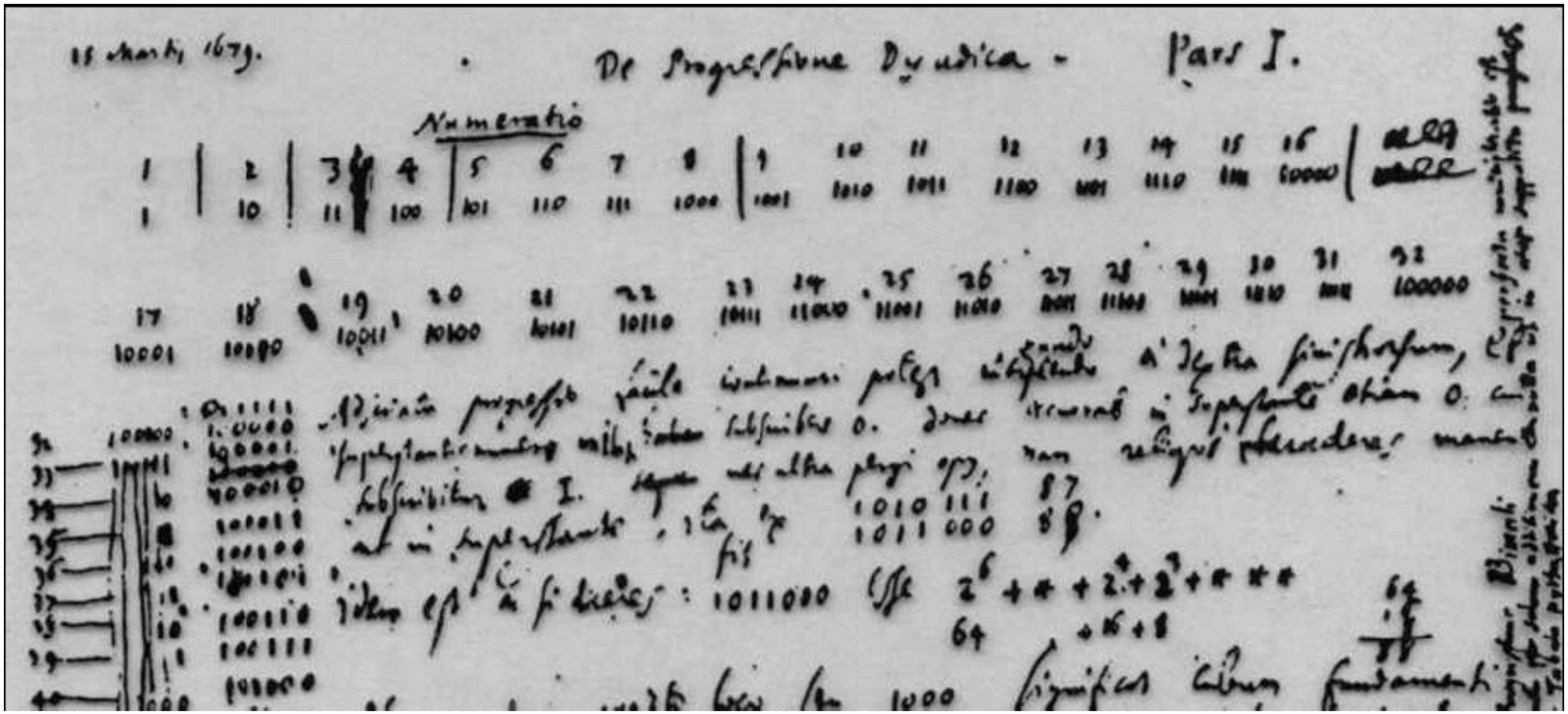
Unterlagen zur Vorlesung

Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Zahlensysteme in der Informatik



Leibniz-Traktat bezüglich Dualzahlen von 1679

Zahlensysteme in der Informatik

Menschen: rechnen gewöhnlich im Dezimalzahlensystem

Rechner: rechnen gewöhnlich im Dualzahlensystem

➩ **eine Konvertierung ist erforderlich**

Daneben werden weitere Zahlensysteme wie Oktalzahlensystem oder Hexadezimalzahlensystem zur kompakteren Darstellung der sehr langen Dualzahlen verwendet.

➩ **es ist notwendig, die Zusammenhänge und mathematischen Grundlagen dieser Zahlensysteme zu verstehen**

Zahlensysteme in der Informatik

b	Zahlensystem	Zahlenbezeichnung
2	Dualsystem	Dualzahl
8	Oktalsystem	Oktalzahl
10	Dezimalsystem	Dezimalzahl
16	Hexadezimalsystem	Hexadezimalzahl

Die Basis für die Zahlendarstellung aller aufgeführten Zahlensysteme bildet das Stellenwertsystem.

Stellenwertsysteme

Zahlendarstellung in Form einer Reihe von Ziffern z_i, wobei der Dezimalpunkt rechts von z_0 platziert sei:

$$z_n\ z_{n-1}\ \ldots\ldots\ z_1\ z_0\ .\ z_{-1}\ z_{-2}\ \ldots z_{-m}$$

Jeder Position $\mathbf{i}$ der Ziffernreihe ist ein Stellenwert zugeordnet, der eine Potenz $\mathbf{b}^i$ der Basis $\mathbf{b}$ des Zahlensystems ist.

Der Wert X_b der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n\, b^n + z_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + z_1\, b + z_0 + z_{-1}\, b^{-1} + \ldots + z_{-m}\, b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

Weiteres Beispiel

STELLENWERTSYSTEM

Stellen

Ziffer

$$\begin{array}{lccccccc} & 2 & 1 & 0 & & -1 & -2 \\ \text{Ziffernfolge:} & 1 & 2 & 3 & , & 4 & 5 \\ \text{Stellenwert:} & 10^2 & 10^1 & 10^0 & & 10^{-1} & 10^{-2} \end{array}$$

$$\text{Zahlenwert} := \underset{\text{über alle Stellen}}{\overset{\text{Summe}}{\sum}} \text{Ziffer} * \text{Stellenwert}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n} z_i * 10^i$$

Also hier ein Beispiel:

$$z = \sum_{i=-2}^{2} z_i * 10^i = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

$$= 100 + 20 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

$$= (123{,}45)_{10}$$

Basis

Die Stellen geben die Position einer Ziffer innerhalb der Stellenwertdarstellung an. Von 0 an nach links vom Komma und von (-1) an nach rechts vom Komma.

Der Stellenwert beschreibt die Wertigkeit einer Stelle: 1, 10, 100,…oder nach dem Komma 01, 0,01,…(Basis hoch Stelle).

Beispiel: Zahlenwerte im Dezimal- und Dualsystem

<u>Beispiel</u>: Dezimalsystem

$$z = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, b^i = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, 10^i \qquad \text{mit } z_i \in \{0,1,2,\ldots 9\}$$

z.B.:

$$1234{,}56 = 1*10^3 + 2*10^2 + 3*10^1 + 4*10^0 + 5*10^{-1} + 6*10^{-2}$$

Als Alphabet bezeichnet man dabei den Zeichenvorrat, den man in diesem System benutzen darf. Beim Dezimalsystem sind es also die Ziffern 0 bis 9.

<u>Beispiel:</u> Dualsystem

$$z = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, 2^i \qquad \text{mit } z_i \in \{0,1\};\ m,\ n \text{ ganze Zahlen}$$

z.B.:

$$(1011{,}01)_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 0*2^{-1} + 1*2^{-2} = (11{,}25)_{10}$$

→ weiteres Beispiel der Umwandlung einer gegebenen Ziffernfolge in einem Zahlensystem der Basis x in eine Dezimalzahl:

geg: $(142{,}5)_7$; Ziffernfolge nach dem Stellenwertsystem der Basis 7.

ges: $(\ldots)_{10}$?

$$Z_{10} = \underline{1} \cdot 7^2 + \underline{4} \cdot 7^1 + \underline{2} \cdot 7^0 + \underline{5} \cdot 7^{-1}$$

Basis 10

$$Z_{10} = 49 + 28 + 2 + \frac{5}{7} = \underline{\left(79\,\tfrac{5}{7}\right)_{10}}$$

Dies ist der dezimale Zahlenwert der Zahl $(142{,}5)_7$.

$$Z_{10} = (79{,}\underbrace{714285\ldots\ldots}_{\text{unendlicher Bruch } \left(\frac{5}{7}\right)})_{10}$$

Oktal- und Hexadezimal-Code

- Auch Oktal- und Hexadezimal-Code sind Stellenwertsysteme
- Die Basis beim Oktalsystem ist { b=8 } und beim Hexadezimalsystem ist { b=16 }.
- Der Ziffernvorrat beim Oktalsystem ist { 0,1,2,3,4,5,6,7 } und beim Hexadezimalsystem {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B,C,D,E,F }.

Dualcode	Oktalziffer
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	2
0 1 1	3
1 0 0	4
1 0 1	5
1 1 0	6
1 1 1	7

Dualcode	Hexadezimalziffer
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	2
0 0 1 1	3
0 1 0 0	4
0 1 0 1	5
0 1 1 0	6
0 1 1 1	7
1 0 0 0	8
1 0 0 1	9
1 0 1 0	A
1 0 1 1	B
1 1 0 0	C
1 1 0 1	D
1 1 1 0	E
1 1 1 1	F

Wieso Zahlen und Buchstaben ??

Beispiele: Umrechnung in das Dezimalsystem

Dual

$$n = (11001)_2 = 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$$
$$= 1*16 + 1*8 + 0*4 + 0*2 + 1*1$$
$$= 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = (25)_{10}$$

Oktal

$$n = (315)_8 = 3*8^2 + 1*8^1 + 5*8^0$$
$$= 3*64 + 1*8 + 5*1$$
$$= 192 + 8 + 5 = (205)_{10}$$

Hexadezimal

$$n = (A34F)_{16} = 10*16^3 + 3*16^2 + 4*16^1 + 15*16^0$$
$$= 10*4096 + 3*256 + 4*16 + 15*1$$
$$= 40960 + 768 + 64 + 15 = (41807)_{10}$$

Dualsystem oder Dualcode

- Die Stellen einer Dualzahl nennt man Binärstellen. Die Anzahl der Binärstellen wird in Bit (binary digit) angegeben.

Maßeinheit		Anzahl von Bytes	KBytes	MBytes
Byte		1		
Kilobyte (KByte)	2^{10}	1024	1	
Megabyte (MByte)	2^{20}	1.048.576	1024	1
Gigabyte (GByte)	2^{30}	1.073.741.824	1.048.576	1024
Terabyte (TByte)	2^{40}	1.099.511.627.776	1.073.741.824	1.048.576
Petabyte (PByte)	2^{50}	1.125.899.906.842.624	1.099.511.627.776	1.073.741.824
Exabyte (EByte)	2^{60}	1.152.921.504.606.846.976	1.125.899.906.842.624	1.099.511.627.776

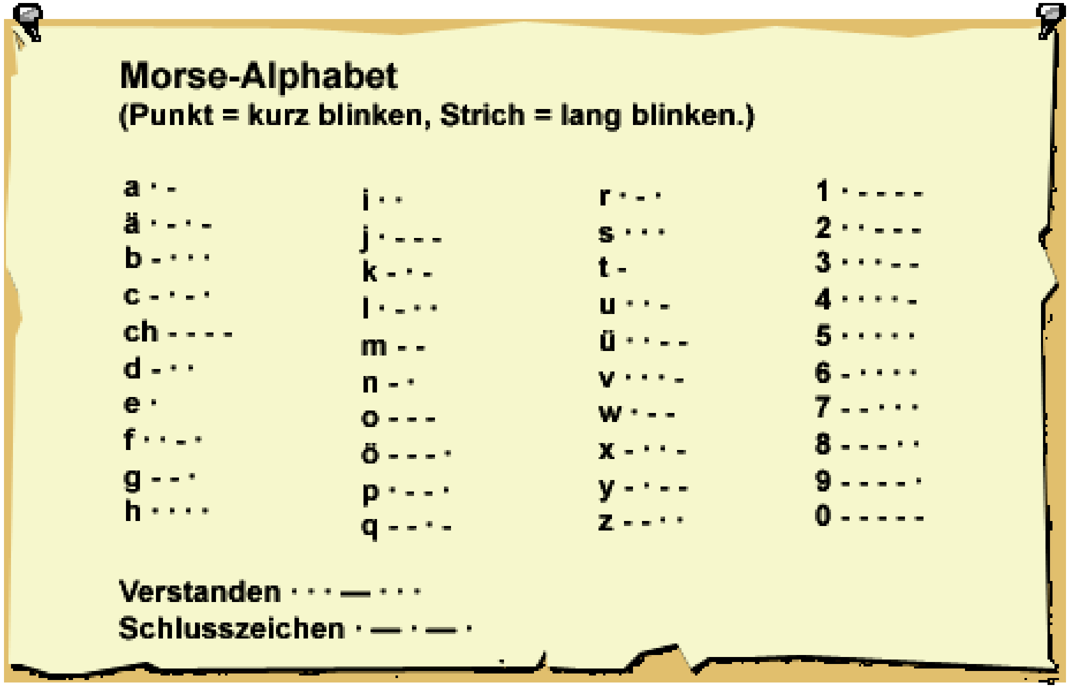
- Bei Dualzahlen fester Länge verwendet man oft die Begriffe:
  - Most significant bit (MSB)
  - Least significant Bit (LSB)

Code als Zuordungsvorschrift

- Codierung ist die ein-eindeutige Abbildung eines endlichen Alphabets A1 in ein anderes endliches Alphabet A2.

- Beispiel: Morse-Code - ternärer Code
  - Alphabet A1 = englische Schrift
  - Alphabet A2 = Punkt, Strich, Pause (ternär)

S O S = ••• ▬▬▬ •••

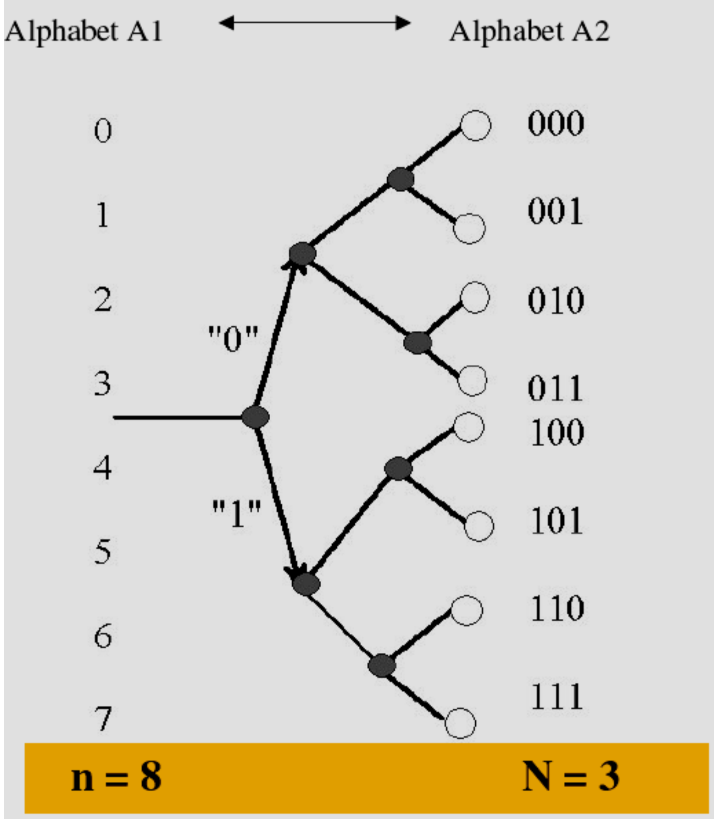


Dualcode

- Unter einem Code versteht man allgemein die eindeutige Zuordnung von einem Zeichenvorrat zu einem anderen. So ordnet der Dualcode der „5“ im Dezimalsystem die „101“ im Dualsystem zu.

1. binärer Code (O, I)
2. Blockcode (gleichlange Codeworte)
3. keine Redundanz (alle Kombinationen ausgeschöpft)
4. keine Fehlersicherheit
5. **N =** sup int [log $_2$ (n)]

   n = 2^N



Aufbauschema des Dualcodes

Beispiel: Dualcode mit 3 Stellen:

dezimal	dual
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1

dezi. Zahlenwert

$\Rightarrow \underbrace{1 \cdot 2^2}_{4} + \underbrace{1 \cdot 2^1}_{2} + \underbrace{1 \cdot 2^0}_{1}$

$= (7)_{10}$

"Stellengewicht" 2^2 2^1 2^0

(i = 2 1 0)

Dualcode: "Die i-te Stelle alterniert mit 2^i"

(z.B.: die Stelle $i = 2$ alterniert mit $2^2 = 4 \Rightarrow \underbrace{4 \times 0 \text{ und } 4 \times 1}$)

(1. Spalte bei dual von links gesehen)

Aufbau-Schema des Codes

Beispiel

- Oktal- und Hexadezimal-Code werden häufig dazu benutzt „lange Binärmuster“ kompakt darzustellen.
  - Oktalcode (Hexadezimal-Code) : jeweils 3 (4) Binärstellen werden zu einer Oktalstelle (Hexadezimalstelle) zusammen gefasst.

Wandlung von $\mathbf{0110100{,}110101_2}$ ins Hexadezimalsystem

$2^4 = 16 \quad \Rightarrow$ **4 Dualstellen → 1 Hexadezimalstelle**

dual $\quad 0110100{,}110101$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{0100}_{4}\,,\,\underbrace{1101}_{D}\,\underbrace{0100}_{4}$$

hexadezimal $\quad 3\;4\;,\;D\;4$

Ergänzen von Nullen zur Auffüllung auf Vierergruppen

Beispiel: Umwandlung binär nach oktal/hexadezimal

BEISPIEL:

Wandlung von 101101001,10101 ins Oktal- und ins Hexadezimalsystem

(1) (2)

(1) $$\underbrace{101}_{5}\underbrace{101}_{5}\underbrace{001}_{1},\underbrace{101}_{5}\underbrace{010}_{2}$$

$$= (551,52)_8$$

(2) $$\underbrace{0001}_{1}\underbrace{0110}_{6}\underbrace{1001}_{9},\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1000}_{8}$$

$$= (169,A8)_{16}$$

Wichtig: ! Immer beim Komma beginnen! Nach links und nach rechts.

Umwandlung zwischen Zahlensystemen - Horner Schema

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis b

Methode: Abwandlung des Horner Schemas

Hierbei müssen der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt betrachtet werden.

Umwandlung des ganzzahligen Anteils:

Eine ganze Zahl $X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i b^i$ kann durch fortgesetztes Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_b = ((\ldots(((y_n\, b + y_{n-1})\, b + y_{n-2})\, b + y_{n-3})\, b \ldots)\, b + y_1)\, b + y_0$$

Horner Schema – ganzzahliger Anteil

Verfahren: Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis $\mathbf{b}$ dividiert.

Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl $\mathbf{X_b}$ in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.

Beispiel:

$1472 = 1 x 10^3 + 4 x 10^2 + 7 x 10^1 + 2 x 10^0$

$= ((1 \text{ x } 10 + 4) \text{ x } 10 + 7) \text{ x } 10 + 2$ Horner Darstellung

Die Basis 10 kommt nur in linearer Form vor. Durch Abspalten der Ziffern und danach Division durch die Basis 10 können alle Ziffern „abgespalten“ werden.

Horner Schema – Beispiel 1

Beispiele dazu:

- Gegeben sei die Zahl $Z = (630)_{10}$
- Gesucht ist die Zahlendarstellung im Dualsystem $(...)_2$

		LSB	
$630 : 2 = 315$	Rest 0		
$315 : 2 = 157$	Rest 1		
$157 : 2 = 78$	Rest 1		
$78 : 2 = 39$	Rest 0		
$39 : 2 = 19$	Rest 1		
$19 : 2 = 9$	Rest 1		
$9 : 2 = 4$	Rest 1		
$4 : 2 = 2$	Rest 0		
$2 : 2 = 1$	Rest 0		
$1 : 2 = 0$	Rest 1		$\rightarrow$ Dualzahl: 1001110110
		MSB	

Horner Schema – Beispiel 2

Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

$15741_{10} : 16 = 983$	Rest 13	(D_{16})
$983_{10} : 16 = 61$	Rest 7	(7_{16})
$61_{10} : 16 = 3$	Rest 13	(D_{16})
$3_{10} : 16 = 0$	Rest 3	(3_{16})

⇨ $15741_{10} = 3D7D_{16}$

Horner Schema - Umwandlung des Nachkommateils

Auch der gebrochene Anteil $\sum_{i=-m}^{-1} z_i b^i$ einer Zahl lässt sich entsprechend schreiben:

$$Y_b = ((\ldots((y_{-m}\, b^{-1} + y_{m+1})\, b^{-1} + y_{-m+2})\, b^{-1} + \ldots + y_{-2})\, b^{-1} + y_{-1})\, b^{-1}$$

Verfahren:

Eine sukzessive Multiplikation des Nachkommateils der Dezimalzahl mit der Basis b des Zielsystems ergibt nacheinander die y_{-i} in der Reihenfolge der höchstwertigsten zur niederwertigsten Nachkommaziffer.

Horner Schema - Umwandlung des Nachkommateils

Beispiel:

$0{,}1472 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4}$

$= ((2 \times 10^{-1} + 7) \times 10^{-1} + 4) \times 10^{-1} + 1) 10^{-1}$ Horner Darstellung

Die Basis 10^{-1} kommt nur in dieser Form vor. Durch Multiplikation mit der Basis 10 können alle Ziffern dann „abgespalten“ werden.

Horner Schema – Beispiel 3

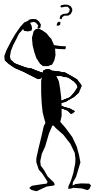
Beispiel dazu:

- Gegeben sei die Zahl Z = $(0{,}630)_{10}$
- Gesucht ist auch die Zahlendarstellung im Dualsystem $(...)_2$

		MSB ↓ LSB	
0,630 x 2 = 1,260	Überlauf 1		; Überlauf streichen
0,260 x 2 = 0,520	Überlauf 0		
0,520 x 2 = 1,040	Überlauf 1		; Überlauf streichen
0,040 x 2 = 0,080	Überlauf 0		
0,080 x 2 = 0,160	Überlauf 0		
0,160 x 2 = 0,320	Überlauf 0		
0,320 x 2 = 0,640	Überlauf 0		
0,640 x 2 = 1,280	Überlauf 1		; Überlauf streichen
0,280 x 2 = 0,560	Überlauf 0		
etc.			

→ Dualcodezahl = 0,101000010......

Aus einem endlichen Dezimalbruch entsteht ein unendlicher Dual- bruch ???



Horner Schema – Beispiel 4

Umwandlung von $0{,}233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:

$$0{,}233 \;*\; 16 \;=\; 3,\underbrace{728}$$

$$z_{-1} = 3$$

$$0{,}728 \;*\; 16 \;=\; 11,\underbrace{648}$$

$$z_{-2} = B$$

$$0{,}648 \;*\; 16 \;=\; 10,\; 368$$

$$z_{-3} = A$$

$$0{,}368 \;*\; 16 \;=\; 5,\; 888$$

$$z_{-4} = 5$$

Abbruch bei genügend hoher Genauigkeit

$\Rightarrow$ $\mathbf{0{,}233_{10} \approx 0{,}3BA5_{16}}$

Umwandlung: Basis b in das Dezimalsystem

Die Werte der einzelnen Stellen der umzuwandelnden Zahl werden in dem Zahlensystem, in das umgewandelt werden soll, dargestellt und nach der Stellenwertgleichung aufsummiert.

Der Wert X_b der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b + z_0 + z_{-1} b^{-1} + \ldots + z_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

Beispiel

Konvertiere $101101{,}1101_2$ ins Dezimalsystem

$101101{,}1101$

$1 * 2^{-4} = 0{,}0625$

$1 * 2^{-2} = 0{,}25$

$1 * 2^{-1} = 0{,}5$

$1 * 2^{0} = 1$

$1 * 2^{2} = 4$

$1 * 2^{3} = 8$

$1 * 2^{5} = 32$

$45{,}8125_{10}$