Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden Begriffe

- Vereinigungsmenge, Durchschnitt, Restmenge, Potenzmenge, kartesisches Produkt,
- Quantoren, Junktoren,
- Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz

wiederholen und üben

- Mengen mit Hilfe der Eigenschaften Ihrer Elemente korrekt zu definieren;
- Vereinigungsmenge, Durchschnitt oder Restmenge zu bilden;
- Intervalle richtig zu schreiben;
- den Wahrheitsgehalt zusammengesetzter Aussagen mit Hilfe einer Wahrheitstafel zu bestimmen;
- Aussagen mit Hilfe von Quantoren und Junktoren zu formalisieren sowie umgekehrt formalisierte Aussagen in Umgangssprache zu übersetzen;
- Summenzeichen zu verwenden.

Präsenzaufgaben

Mengen

1. Schreiben Sie die folgenden Mengen in Mengenschreibweise (entweder, indem Sie alle Elemente der Menge aufzählen, oder, indem Sie die Elemente durch ihre Eigenschaften beschreiben) oder als Intervall:
   (a) die Menge A aller ungeraden natürlichen Zahlen,
   (b) die Menge B aller Primzahlen, die kleiner oder gleich 20 sind,
   (c) die Menge C aller reellen Zahlen, die größer als -1 und kleiner als 3 sind,
   (d) die Menge D aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 2 sind.

   Berechnen Sie die folgenden Mengen:
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $B \setminus C$
   (d) $C \cap D$
2. Gibt es Mengen A, B mit $A \subset B$, $A \neq B$ und $|A| = |B|$?
3. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm für $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$.

4. (*) Sei $A_k := \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, 0 < x < \frac{1}{k}\right\}$ und $B_k = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, 0 < x < k\right\}$. Berechnen Sie die folgenden Mengen:
   (a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
   (b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$
   (c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$
   (d) $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$

Aussagenlogik

1. Kann man von einer Aussage immer entscheiden, ob sie richtig oder falsch ist?
2. Seien A, B beliebige Aussagen. Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden zusammengesetzten Aussagen mit Hilfe einer Wahrheitstafel:
   (a) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
   (b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$
   (c) $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
3. Welche Aussagen sind jeweils hinreichend oder notwendig füreinander:
   A : x ist durch 2 teilbar.
   B : x ist keine Primzahl.
   C : x ist durch 4 teilbar.
4. Entscheiden Sie, ob die Aussage A die Aussage B impliziert oder beide Aussagen äquivalent zueinander sind.
   (a) A: x ist durch 10 teilbar. B: x ist eine Zahl mit einer Ziffer 0 am Ende.
   (b) A: x ist durch 4 teilbar. B: x ist durch 8 teilbar.
5. Richtig oder falsch? Sei A eine beliebige Aussage und $B = A \vee \neg A$.
   - ☐ B ist falsch.
   - ☐ B ist wahr, wenn A falsch ist.
   - ☐ B ist wahr.
   - ☐ B ist wahr, wenn A wahr ist.

Sprachübungen

1. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von All- und/oder Existenzquantor:
   (a) Wir können eine natürliche Zahl finden, die von genau 12 Zahlen geteilt wird.
   (b) Eine natürliche Zahl $n \neq 1$ hat mindestens zwei Teiler.
   (c) Je zwei nicht-parallele Gerade schneiden sich in genau einem Punkt.

   (d) Jede natürliche Zahl größer als 1 ist das Produkt von Primzahlen.
   (e) Eine rationale Zahl besteht aus Zähler und Nenner.
   (f) Einige natürliche Zahlen haben mehr als zwei Teiler.

2. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in Umgangssprache:
   (a) $\exists n \in \mathbb{Z} : \ n^2 > 1000.$
   (b) $\exists p \in \mathbb{P} : \ p \mid 851$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \ n^2$ gerade $: \ 4 \mid n.$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : m - n = 1.$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \ \exists y \in \mathbb{R} : \ 10^y = x.$

3. Es sei
   $A : n$ ist gerade.
   $B : n$ ist ungerade.
   Übersetzen Sie den Ausdruck $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ in Umgangssrache.

4. Negieren Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Es gibt eine gerade Primzahl > 2.
   (b) Jede natürliche Zahl hat mindestens zwei Teiler.
   (c) Jede Primzahl ist ungerade.
   (d) Man kann 1 durch jede natürliche Zahl teilen.
   (e) Es gibt ganze Zahlen n, m, so dass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

5. Welche Aussagen ist richtig, welche falsch? Bei falschen Aussagen geben Sie bitte ein Gegenbeispiel an.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0.$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0.$
   (c) $\forall \Delta ABC$ gleichseitig $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{\text{Höhe}}{\text{Grundseite}} = x.$
   (d) $\exists x \in \mathbb{R} \ \forall \Delta ABC$ gleichseitig $: \frac{\text{Höhe}}{\text{Grundseite}} = x.$

Summenzeichen

1. Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:
   (a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

2. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   (a) $\sum_{k=1}^{3}(2 + 3k)$
   (b) $\sum_{k=0}^{3} 2^k$
   (c) $\sum_{k=-2}^{1} k^2$

3. Schreiben Sie ohne Summenzeichen für $n = 3$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Schreiben Sie die folgenden Mengen in Mengenschreibweise (aufzählend oder beschreibend). Bestimmen Sie unter den folgenden Mengen die Paare disjunkter Mengen, d.h. Mengen A, B, so dass $A \cap B = \emptyset$:

    1. Menge der ungeraden natürlichen Zahlen;
    2. Menge der geraden natürlichen Zahlen;
    3. Menge der positiven Quadratzahlen;
    4. Menge der Primzahlen;
    5. Menge der durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen.

    (10 Punkte)

2. Seien A, B beliebige Aussagen. Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden zusammengesetzten Aussagen mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

    $$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

    (6 Punkte)

3. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in Umgangssprache:

    (a) $\forall p \in \mathbb{P},\ p > 2 : p + 2$ ist ungerade.

    (b) $\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT(m,n) = 1 :\ q = \frac{m}{n}}$.

    (4 Punkte)

4. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von All- und/oder Existenzquantor:

    (a) Für ein geeignetes x ist $\ln(x) > 10$.

    (b) Jede natürliche gerade Zahl größer als 2 ist die Summe von zwei Primzahlen.

    (4 Punkte)

5. Welche Aussage ist richtig, welche falsch? Bei falschen Aussagen geben Sie bitte ein Gegenbeispiel an.

    (a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1.$

    (b) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1.$

    (10 Punkte)

6. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

    (a) $\sum_{k=1}^{3} k^n$ für $n = 1, 2, 3, 4$

    (b) $\sum_{k=1}^{5} 20$

    (6 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **30.3.2020**.