Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden **Begriffe** bzw. **Sätze** wiederholen:

- Satz von Fermat
- eulersche phi-Funktion
- (abelsche) Gruppe,
- Ordnung von Gruppe/ Elementen,
- Untergruppe

Sie sollen üben

- den Wert der eulerschen Phi-Funktion berechnen;
- zu überprüfen, ob es sich bei einem gegebenen Beispiel um eine Gruppe handelt;
- Untergruppen einer Gruppe zu bestimmen sowie die Ordnung von Gruppen bzw. Elementen zu berechnen.

Präsenzaufgaben

Verständnisfragen

1. Erklären Sie, wie Sie von $\phi(n)$ für $n \in \mathbb{P}$ (Primzahl) bzw. $n \in \mathbb{N}$ berechnen.
2. Berechnen Sie $\phi(5)$, $\phi(6)$, $\phi(7)$ und $\phi(97)$.
3. Die Primfaktorzerlegung von 8800 ist $2^5 \cdot 5^2 \cdot 11$. Berechnen Sie $\phi(8800)$.
4. Warum kann es kein $n \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\phi(n) = 14$?
5. Was müssen Sie berechnen, um die letzten 2 Ziffern von 89^{43} zu bestimmen? Geben Sie nur die Rechenschritte an, ohne zu rechnen. Denken Sie an den Satz von Euler.
6. Welche der folgenden Strukturen besitzen ein neutrales Element? Bestimmen Sie es:
   (a) $(\mathbb{N}, +)$
   (b) $(\mathbb{N}, \cdot)$
   (c) $(\mathbb{N}, *)$ mit $a * b := 2a + b$ für $a, b \in \mathbb{N}$
   (d) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $a * b := |a + b|$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.
7. Zeigt die folgende Verknüpfungstabelle auf der Menge $\{e, a, b, c, d\}$ eine Gruppe?

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	a	d	e
c	c	d	e	a	b
d	d	b	c	e	a

Standardaufgaben

1. Berechnen Sie
   (a) $\phi(101)$
   (b) $\phi(142)$
   (c) $\phi(169)$
   (d) $\phi(1024)$
2. Für welche n gilt $n = 2\phi(n)$?
3. Berechnen Sie die letzten beiden Ziffern von 89^{43}. Verwenden Sie den Satz von Euler.
4. Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen? Falls ein Beispiel keine Gruppe ist, geben Sie kurz an, welches Gruppengesetz verletzt wird.
   - ☐ $(\mathbb{Z}, +)$
   - ☐ $(\mathbb{N}, +)$
   - ☐ $(2\mathbb{Z}, +)$
   - ☐ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}, \cdot)$
   - ☐ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}_8, +)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$
   - ☐ $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$
5. Bestimmen Sie die inversen Elemente von 3 in den folgenden Gruppen:
   (a) $(\mathbb{Z}_5, +)$
   (b) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$
   (c) $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$
6. Zeigen Sie, dass es in jeder Gruppe ein Element der Ordnung 1 gibt.
7. Zeigen Sie, dass es in jeder Gruppe genau ein Element der Ordnung 1 gibt.
8. Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_6$ auf. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ keine Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.

9. Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente in
   (a) $(S_3, \circ)$,
   (b) $(\mathbb{Z}_6, +)$,
   (c) $(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$,
10. Welche Kardinalität können die Untergruppen folgender Gruppen haben:
   (a) $(\mathbb{Z}_7, +)$
   (b) $(\mathbb{Z}_6, +)$
   (c) $(\mathbb{Z}_8, +)$
   (d) $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n \in \mathbb{Z}$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Zeigen Sie die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade} : \phi(2n) = \phi(n)$$

(10 Punkte)

2. Bestimmen Sie den Rest von 11^{1213} bei Division durch 26, indem Sie die Eulersche ϕ-Funktion und den Satz von Euler verwenden.
(10 Punkte)

3. Stellen Sie die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_8$ auf. Überprüfen Sie, ob es sich bei $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ bzw. $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ um eine Gruppe handelt.
(15 Punkte)

4. Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente in S_4 (der Gruppe aller bijektiven Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$). Bitte geben Sie die jeweilige Rechnung an.
(15 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **11.05.2020**.