Mathematik I

Einführung in die Matrizenrechnung

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

Zeitplan Vorlesung

		Datum	Bemerkung	Inhalt
Grund-lagen			Selbststudium	Grundlagen: Mengen
			Selbststudium	Grundlagen: Relationen
			Selbststudium	Grundlagen: Abbildungen
Zahlen-theorie	**1**	**22.04.**	**Einmalig Mi.**	Wiederholung & Zusammenfassung Selbststudium
	2	27.04.		Zahlentheorie I
	3	28.04.		Zahlentheorie II
Algebra	4	04.05.		Gruppen
	5	11.05.		Ringe, Körper
	6	12.05.		Kryptographie
	7	18.05.		Vektorräume
Lineare Algebra	8	25.05.		Lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus
	9	26.05.		Lineare Gleichungssysteme: Lösungstheorie
	--	01.06.	Pfingstmontag	--
	10	**08.06.**		**Matrizen I: Definition, Rechenregeln**
	11	09.06.		Matrizen II: Inverse, Determinanten

Lernziele

- **Begriffe kennen:**
  - ✓ Matrix: Einheitsmatrix, symmetrische Matrix, Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix, reguläre Matrix
- Rechenregeln für Matrizen beherrschen

Wiederholung: Lineares Gleichungssystem, Rang und lineare Unabhängigkeit

Kahoot - Fragen

1) Vektoren u, v, w : $w = 2u - v \iff 2u - v - w = 0$

$\implies u, v, w$ sind linear abhängig.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Zeilenstufenform $\quad rg(A) = 2 = \#$ Nicht-Nullzeilen

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{I + II}{\leadsto} A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A) = 1 =$ max. Anzahl l. u. Spalten (oder Zeilen)

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\underline{II + 2}}{\leadsto}$ $\leftarrow$ kein Gauß - Schritt

Wiederholung

5) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\underline{rg(A) = 3} = rg(A|b) = \#$ Unbekannte

$\Rightarrow$ es existiert genau eine Lösung

6) $rg(A) = rg(A|b) \Rightarrow$ es existiert eine Lsg.

a) $rg(A) = rg(A|b) = \#$ Unbekannte

$\Rightarrow \exists!$ Lösung

b) $rg(A) = rg(A|b) < \#$ Unbekannte

$\Rightarrow$ unendl. viele Lsg.

$\dim \mathbb{L} = \#$ Unbekannte $- rg(A)$

Matrix - Beispiel

Lineares Gleichungssystem

$$3x_1 + 1 \cdot x_2 + 3x_3 = 10$$
$$-x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = 0$$

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 3, \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Dimension der Matrix

(2×3) - Matrix

\# Zeilen \# Spalten

$A = (a_{ij})_{ij}$

Zeilenindex

Spaltenindex

$a(i,j)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 3$

1. Zeile 3. Spalte

Matrix: Definition

Eine $m \times n$ −Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in m Zeilen und n Spalten.
Die **Elemente** oder **Komponenten** einer Matrix werden durch Doppelindizes gekennzeichnet:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet a_{ij} das Element von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & \pi \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{32} = \sqrt{2}$$

Rechnen mit Matrizen: Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Zeile wird zu 1. Spalte usw.

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

„Zeilen mit Spalten vertauschen"

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad (3 \times 2)$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad (2 \times 3)$$

$$\boxed{(B^t)^t = B}$$

beim Programmieren: B'

Rechnen mit Matrizen: Transponieren

Eine $(m \times n)$ −Matrix A wird transponiert, indem man Zeilen mit Spalten vertauscht. Die transponierte Matrix von A bezeichnet man als A^t.

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix A^t hat dann die Dimension $(n \times m)$.

Spezielle Matrizen

- Eine Matrix, deren Einträge unterhalb der Diagonalen alle Null sind, heißt **obere Dreiecksmatrix**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn die Anzahl ihrer Zeilen gleich die Anzahl ihrer Spalten ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

- Eine Matrix heißt **Diagonalmatrix**, wenn sie quadratisch ist und alle Einträge bis auf diejenigen auf der Diagonalen Null sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix heißt **Einheitsmatrix**, wenn sie eine Diagonalmatrix ist und alle ihre Einträge gleich Eins sind.

$$\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn sie quadratisch ist und ihre Zeilen gleich ihrer Spalten sind, d.h.

$$\boxed{A^t = A.} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^t = A$$

Rechnen mit Matrizen: Addieren/ Subtrahieren

Bsp.:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1-1 & 3+2 \\ -1+3 & 0+5 & 2+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \checkmark =$$

neutrales Element der Addition:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{NULLMATRIX}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

inverses Element der Addition:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{-A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen: Addieren/ Subtrahieren

Zwei $(m \times n)$ −Matrizen A, B werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man ihre Elemente miteinander addiert (bzw. subtrahiert) werden.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Damit man Matrizen addieren kann, müssen sie dieselbe Zeilen- und Spaltenanzahl besitzen!

Es gilt:

$$A + B = B + A$$ kommutativ

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$ assoziativ

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Rechnen mit Matrizen: Multiplikation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} \boxed{3\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 2} & \boxed{14} \\ \boxed{4} & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

„Zeile · Spalte"

$$(2 \times \boxed{3)\cdot(3} \times 2) = (2 \times 2)$$

=

Spaltenanzahl von A

=

Zeilenanzahl von B

Rechnen mit Matrizen: Multiplikation

Eine $(m \times \boxed{n})$ −Matrix A multipliziert man mit einer $(\boxed{n} \times k)$ −Matrix B, indem man die Skalarprodukte von jeder Zeile von A mit den Spalten von B bildet. Das Produkt ist eine $(m \times k)$-Matrix $A \cdot B$, deren Eintrag in Zeile i und Spalte j gerade das Skalarprodukt der Zeile i von A mit Spalte j von B ist.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} = a_{m1} \cdot b_{m1} + a_{m2} \cdot b_{m2} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{mn} & \dots & \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$ assoziativ.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$ distributiv

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Die Anzahl der Spalten von A muss gleich der Anzahl der Zeilen von B sein!

Die Matrizenmultiplikation ist in der Regel nicht kommunikativ: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Beispiele

Aufgaben:

1. Welche Produkte für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sind definiert? AB, BA, A^tB, AB^t.

$A \cdot B: \quad (3 \times 3) \cdot (2 \times 3)$ ↯

$B \cdot A: \quad (2 \times \boxed{3) \cdot (3} \times 3) = 2 \times 3$

$A^t \cdot B: \quad (3 \times 3) \cdot (2 \times 3)$ ↯

$A \cdot B^t: \quad (3 \times \boxed{3) \cdot (3} \times 2) = 3 \times 2$ ✓

Beispiele

Aufgaben:

2. Berechnen Sie das Produkt von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) \\ 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz von Nullprodukt gilt nicht für Matrizen!

$$B A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -45 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Beispiele

Aufgaben:

3. Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ und $B \cdot A$ von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Inverse einer Matrix

Gibt es zu jeder Matrix eine inverse Matrix (bzgl. Der Multiplikation)?

<u>Multiplikation von Matrizen</u>

- neutrales Element der Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{Einheitsmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2 \times \underline{3}) \cdot (\underline{3} \times 3) = (\underline{2 \times 3})$$

- inverses Element der Multiplikation: geht nur für quadrat. Matrizen

gesucht X: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X$ (2×2)-Matrix

Inverse einer Matrix - Definition

Sei A eine quadratische $n \times n$ −Matrix. Wenn es eine Matrix X gibt, so dass

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$ Einheitsmatrix

gilt, dann heißt X das **Inverse von A** und man schreibt A^{-1}.

Wenn eine Matrix A eine Inverse besitzt, dann heißt A **invertierbar** oder **regulär**, andernfalls **singulär**.

Wann ist eine Matrix invertierbar, d.h. wann existiert das Inverse einer Matrix?