Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden Begriffe

- lineare Abbildung, Darstellungsmatrix
- Kern, Bild einer Abbildung (Wdhl.!)
- Dimensionssatz

wiederholen und üben

- zu überprüfen, ob eine Abbildung linear ist;
- Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bezüglich einer vorgegebenen Basis zu bestimmen;
- Bild und Kern einer linearen Abbildung zu berechnen und deren Dimension anzugeben.

Verständnisfragen

1. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?
   (a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max_k x_k - \min_k x_k$ (größter minus kleinster Eintrag in einem Vektor).
   Beispiel: sei $x = (1, 2, 3, 4)$*, dann ist* $\max_k x_k = 4$ *und* $\min_k x_k = 1$ *und damit* $f(x) = 4 - 1 = 3$.
   (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_n - x_1$.
   Beispiel: sei $x = (1, 2, 3, 4, 5)$*, dann ist* $f(x) = 5 - 1 = 4$.
   (c) $f : \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = median(x)$ (wenn man die Einträge der Größe nach sortiert, ist der Median genau gleich dem mittleren Eintrag).
   Beispiel: sei $x = (2, -1, 0, 4, 3)$*, wir sortieren der Größe nach:* $-1, 0, 2, 3, 4$*, dann ist der Median* $= 2$*, also* $f(x) = 2$.
   (d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_n + (x_n - x_{n-1})$ (=Extrapolation eines Vektoreintrags)
   Beispiel: sei $x = (1, 4, 5, 10)$*, dann ist* $f(x) = 10 + (10 - 5) = 15$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir wissen, dass gilt:
   $$f((1, 1, 0)) = -1, \quad f((-1, 1, 1) = 1, \quad f((1, -1, -1)) = 1.$$
   Welche Aussage ist richtig?
   ☐ f muss linear sein.
   ☐ f kann linear sein.
   ☐ f kann nicht linear sein.

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 3.$$
   Ist es möglich, dass f linear ist?

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Wir wissen, dass
$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.$$
Können Sie dann die folgenden Funktionswerte berechnen?
$$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right),\quad f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right),\quad f\left(\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right),\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Standardaufgaben

1. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Für welche Wahl von a, b, c ist die Matrix A invertierbar. Berechnen Sie entsprechend das Inverse A^{-1}.*(Wiederholung)*

2. Sei
$$M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}.$$
   (a) Berechnen Sie
   $$\det(M), \det(N), \det(MN), \det(M)\det(N), \det(M^t), \det(M+N) - (\det(M) + \det(N)).$$
   (*Wiederholung*)

   (b) Ist det eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ (von der Menge der 2×2-Matrizen nach $\mathbb{R}$)? Überprüfen Sie die Linearität mit Hilfe von Aufgabenteil a).

3. Sei $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, x\right\}$. Für welche x ist diese Menge eine Basis von $\mathbb{R}^2$? (*Wiederholung*)

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1^2\\x_2\end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, ob f linear ist.

5. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W gilt:
$$f(0) = 0.$$

6. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = (1, 1)$, $f(e_3) = (2, 2)$. Geben Sie die Darstellungsmatrix dieser Abbildung an.

7. Es seien
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\0\\2x_1 - x_2\end{pmatrix},\quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_3\\x_2 - x_3\\x_1 + x_2\\2x_1 + 3x_3\end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $g \circ f$.

8. Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Dimension von Kern und Bild.

9. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Überprüfen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 13x_2 \\ 11x_1 \\ -4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$
linear ist. Geben Sie gegebenenfalls die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis an. **(10 Punkte)**

2. Es sei die folgende lineare Abbildung
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimmen Sie den Kern sowie das Bild von f und die jeweiligen Dimensionen. **(10 Punkte)**

3. Es sei die lineare Abbildung
$$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
gegeben.
   (a) Berechnen Sie $f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Kern von f_A liegt.
   (c) Überprüfen Sie, ob f_A injektiv ist.
   (d) Bestimmen Sie die Dimension von Kern und Bild von f_A.

   (15 Punkte)

4. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Die Darstellungsmatrix f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ lautet
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Rechnen Sie nach, dass es sich bei den Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.
   (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

   (15 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **22.06.2020** bis zu Beginn der Vorlesung 8:00.