Mathematik I

Lösungstheorie von LGS

Lineares Gleichungssystem

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

Zeitplan Vorlesung

		Datum	Bemerkung	Inhalt
Grund-lagen			Selbststudium	Grundlagen: Mengen
			Selbststudium	Grundlagen: Relationen
			Selbststudium	Grundlagen: Abbildungen
Zahlen-theorie	**1**	**22.04.**	**Einmalig Mi.**	Wiederholung & Zusammenfassung Selbststudium
	2	27.04.		Zahlentheorie I
	3	28.04.		Zahlentheorie II
Algebra	4	04.05.		Gruppen
	5	11.05.		Ringe, Körper
	6	12.05.		Kryptographie
	7	18.05.		Vektorräume
Lineare Algebra	8	25.05.		Lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus
	9	**26.05.**		**Lineare Gleichungssysteme: Lösungstheorie**
	10	01.06.	Pfingstmontag	--
	11	08.06.		Matrizen
	12	09.06.		Lineare Abbildungen

Lernziele

- **Begriffe kennen:**
  - ✓ Rang
  - ✓ Lösungsraum/ Lösungsmenge
  - ✓ Dimension des Lösungsraums
- **Rang einer Matrix** mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnen können
- **Lösbarkeit** eines linearen Gleichungssystem und Anzahl der Lösungen mit Hilfe des Rangs der Matrix **bestimmen können**

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Beispiel: 2 Gleichungen, 2 Unbekannte, $a, b \in \mathbb{R}$

$x - y = 1 \iff y = 1 \cdot x - 1$ Geradengleichung

$2x - ay = b \iff y = \dfrac{2x - b}{a} = \dfrac{2}{a}x - \dfrac{b}{a}$

Lösung ist Schnittpunkt der Geraden.

Welche Möglichkeiten gibt es?

1) kein Schnittpunkt. $\iff$ $a = 2$, $b \neq 2$ ⇐ damit y-Achsenabschnitt verschieden

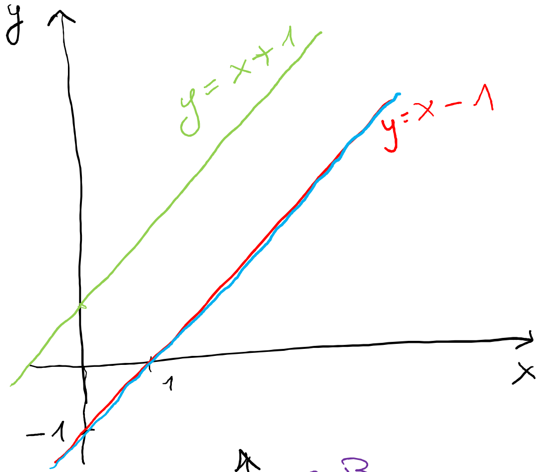
also keine Lösung

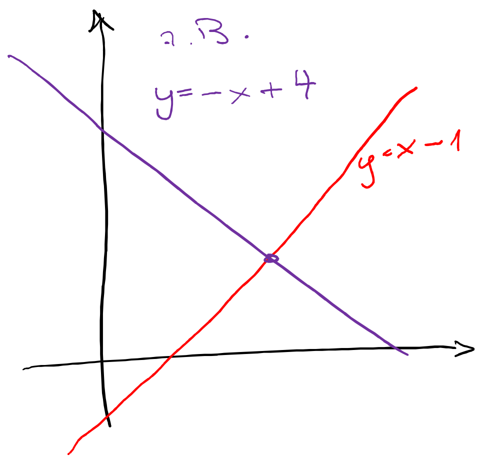
2) unendlich viele Schnittpunkte $\iff$ $\boxed{a = 2,\ b = 2}$

also unendlich viele Lösungen

3) genau einen Schnittpunkt $\iff$ $a \neq 2$, b beliebig

also eine Lösung





$$x - y = 1$$
$$2x - ay = b$$

Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -a & b \end{array}\right) \xrightarrow{2\,\mathrm{I} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2+a & 2-b \end{array}\right)$$

keine Lösung $a = 2,\ b \neq 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2-b}_{\neq 0} \end{array}\right)$$

Nullzeile von A

unendl. viele: $a = b = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nullzeile von A|b

genau eine Lsg $a \neq 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \underbrace{-2+a}_{\neq 0} & 2-b \end{array}\right)$$

Lösbarkeit und Rang – Möglichkeit 1

Beispiel (letzte Vorlesung):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Wann ist ein solches Gleichungssystem lösbar?

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

A hat 3 Nicht-Nullzeilen

A|b hat 3 Nicht-Nullzeilen

+ 3 Unbekannte

$\Rightarrow$ genau eine Lösung

Lösbarkeit und Rang – Möglichkeit 2

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 0 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

A hat $\underline{2}$ Nicht-Nullzeilen

A|b hat $\underline{3}$ Nicht-Nullzeilen

aus $\underline{\text{III}}$: $0 \cdot x_3 = -2$ ↯

keine Lösung

Lösbarkeit und Rang – Möglichkeit 3

Beispiel:

Rang

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 0 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow rg(A) = \#$ Nicht-Nullzeilen

$rg(A|b) = \#$ Nicht-Nullzeilen von $A|b$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \text{Nullzeile von } A|b$$

$rg(A) = 2 = rg(A|b) < 3$

$\Longrightarrow$ unendlich viele Lösungen.

aus III: x_3 beliebig

in II: $x_2 = -4 - 2x_3$

in I: $x_1 = -6 - x_3 - (-4 - 2x_3)$

$x_1 = -2 + x_3$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 + x_3 \\ -4 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe: Rang

Geben Sie den Rang von der Koeffizientenmatrix sowie von der erweiterten Koeffizientenmatrix des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufen-form

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Rang von A: $rg(A) = \underline{\underline{3}}$

Rang von A|b: $rg(A|b) = \underline{\underline{3}}$

$rg(A) = rg(A|b) = \underline{\underline{3}} = \#$ Unbekannte

$\Rightarrow$ genau 1 Lsg.

Lösbarkeit eines LGS

Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen und mit n Unbekannten gilt:

1) $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $Rang(A) = Rang(A|b)$ $\quad rg(A) = rg(A|b)$
   1) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $Rang(A) = Rang(A|b) = n.$ $= \#$ Unbekannte
   2) $Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen genau dann, wenn $Rang(A) = Rang(A|b) \neq n.$ $= \#$ Unbekannte
      $< n$
2) $Ax = b$ ist nicht lösbar genau dann, wenn $Rang(A) \neq Rang(A|b)$

Bsp.:

1.)2)
$$\begin{array}{ccc} A & & b \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$rg(A) = 1$
$rg(A|b) = 1$

1.)1)
$$\begin{array}{ccc} A & & b \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \underbrace{-2+a}_{\neq 0} & \underbrace{2-b}_{\neq 0} \end{array}\right)$$
$rg(A) = 2$
$rg(A|b) = 2$

2.)
$$\begin{array}{c} A \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2-b}_{\neq 0} \end{array}\right)$$
$rg(A) = 1$
$rg(A|b) = 2$

Rang und lineare Unabhängigkeit

Übung 7 - Abgabe

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = (4,1,1,0,-2),\ v_2 = (0,1,4,-1,2),\ v_3 = (4,3,9,-2,2),\ v_4 = (1,1,1,1,1),\ v_5 = (0,-2,-8,2,-4)$$

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5 = 0 \leftarrow \text{Nullvektor}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{4} & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

5 Unbekannte

$rg(A) = 3$

= max. Anzahl an linear unabh. Spalten

$I - 4II$, $I - 4III$, $I + 2V$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & -8 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -32 & -3 & 32 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 4II - III \\ II - 4IV \\ \rightsquigarrow \\ II + V \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 7III - 9IV \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang einer Matrix - Definition

Sei A eine Matrix aus m Zeilen und n Spalten. Die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen) von A bezeichnet man als den **Rang von $\boldsymbol{A}$.** Man schreibt: $rg(A)$.

Bemerkungen:

- Es gilt immer: $rg(A) \leq \min(n, m)$.
- Anders gesagt: Der Rang einer Matrix ist also gleich der Dimension des Raums, der von den Spalten (oder Zeilen) der Matrix aufgespannt wird: $rg(A) = \dim span(v_1, v_2, \dots, v_n)$ falls $v_1, v_2, \dots, v_n$ die Spalten der Matrix bezeichnen.
- Man berechnet den Rang meistens mit Hilfe des Gauß-Algorithmus: Der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform ist gleich der Anzahl von Nicht-Nullzeilen. Nullzeilen sind Zeilen, in denen nur Nullen vorkommen.

Lösungsmenge

Wie hängt die Lösungsmenge vom Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix ab?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg(A|b) = 3$

$\leadsto \dim \mathbb{L} = \#\text{Unbekannte} - rg(A)$

$= \#\text{Nullzeilen}$

Lösung: aus V: $0 \cdot x_5 = 0 \Rightarrow$ x_5 beliebig

in III: $-9x_4 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$

in II: $-4x_2 - 8x_3 + 8x_5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_3 + 2x_5$

und x_3 beliebig

in I: $4x_1 = -4x_3 \Leftrightarrow x_1 = -x_3$

2 frei wählbare Variablen $\longrightarrow$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -2x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \; x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

Lösungsmenge

Die Anzahl der frei wählbaren Variablen heißt **Dimension** der Lösungsmenge: $\dim(L)$

Ist ein lineares Gleichungssystem lösbar, dann ist die **Dimension** $\dim(L)$ der Lösungsmenge immer gleich der Anzahl der Unbekannten n minus den Rang $Rang(A)$ der Koeffizientenmatrix A:

$$\dim(L) = n - Rang(A)$$

Ein lineares Gleichungssystem ist also genau dann **eindeutig lösbar**, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl der Unbekannten sind: $Rang(A) = Rang(A|b) = n$

$\Rightarrow \dim \mathbb{L} = 0$

Beachte: Der Rang der Koeffizientenmatrix ist höchstens $Rang(A) \leq \min(m, n)$. Wenn es also weniger Gleichungen als Unbekannte gibt, dann kann es keine eindeutige Lösung geben.

Beispiel: Lösbarkeit eines LGS

Beispiel : Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende LGS lösbar? Geben Sie in diesem Fall auch die Dimension des Lösungsraums an.

für $t = -\frac{1}{2}$

$\dim \mathbb{L} = 3 - 2 = 1$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12t$$
$$2x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 12t + 7$$
$$x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 7t + 8$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} - 2\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I} - \mathrm{II}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & -8 & -5 & -7 \\ 0 & -16 & -10 & -2t-16 \end{array}\right)$$

$$\underset{2\mathrm{II} - \mathrm{III}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & -8 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2+4t \end{array}\right)$$

A b

$rg(A) = 2$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow$ $rg(A|b) = 2$ $\Leftrightarrow$ $t = -\frac{1}{2}$