

# **Tutorium Hardware- und Systemgrundlagen**

## **Gruppe 1**

Raum F109 | Mittwoch, 11.30 Uhr

**Mirko Bay**

[[mirko.bay@htwg-konstanz.de](mailto:mirko.bay@htwg-konstanz.de)]

## **Gruppe 2**

Raum F110 | Mittwoch, 11.30 Uhr

**Michael Bernhardt**

[[michael.bernhardt@htwg-konstanz.de](mailto:michael.bernhardt@htwg-konstanz.de)]

# Zahlensysteme I

**Dual-, Oktal-, Dezimal-,  
Hexadezimalsystem**

Betrag + Vorzeichen  
Einer- / Zweierkomplement

IEEE-P 754-Floating-Point-Standard  
BCD-Zahl

# Zahlensysteme I: Mögliche Aufgabentypen

## von Basis 10 in Basis n

- Horner Schema (Voraus. Ausgangs-Basis 10)

Beispiel:  $(42)_{10}$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{array}{rcl}
 42 : 2 = 21 & \text{Rest} & 0 \\
 21 : 2 = 10 & \text{Rest} & 1 \\
 10 : 2 = 5 & \text{Rest} & 0 \\
 5 : 2 = 2 & \text{Rest} & 1 \\
 2 : 2 = 1 & \text{Rest} & 0 \\
 1 : 2 = 0 & \text{Rest} & 1
 \end{array}
 \quad \uparrow
 \quad = (101\ 010)_2$$

Beispiel:  $(0,42)_{10}$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{array}{rcl}
 0,42 \cdot 2 = 0,84 & & \\
 0,84 \cdot 2 = 1,68 & & \\
 0,68 \cdot 2 = 1,36 & & \\
 0,36 \cdot 2 = 0,72 & & \\
 0,72 \cdot 2 = 1,44 & & \\
 0,44 \cdot 2 = 0,88 & &
 \end{array}
 \quad \downarrow
 \quad = (0,011\ 010)_2$$

Bei genügend hoher Genauigkeit abbrechen!

Beispiel:  $(0,\bar{4})_{10} = 4/9$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{array}{rcl}
 4/9 \cdot 2 = 8/9 \rightarrow 0\ 8/9 & & \\
 8/9 \cdot 2 = 16/9 \rightarrow 1\ 7/9 & & \\
 7/9 \cdot 2 = 14/9 \rightarrow 1\ 5/9 & & \\
 5/9 \cdot 2 = 10/9 \rightarrow 1\ 1/9 & & \\
 1/9 \cdot 2 = 2/9 \rightarrow 0\ 2/9 & & \\
 2/9 \cdot 2 = 4/9 \rightarrow 0\ 4/9 & & \\
 4/9 \cdot 2 = 8/9 \rightarrow \text{⚡} & &
 \end{array}
 \quad \downarrow
 \quad = (0,011\ 100)_2$$

## von Basis n in Basis n (über Basis 10)

- Stellenwert berechnen und addieren
- dann weiter mit Horner Schema

Beispiel:  $(42)_7$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{aligned}
 (42)_7 &= 4 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 \\
 &= 4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \\
 &= 28 + 2 \\
 &= (30)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 30 : 2 = 15 & \text{Rest} & 0 \\
 15 : 2 = 7 & \text{Rest} & 1 \\
 7 : 2 = 3 & \text{Rest} & 1 \\
 3 : 2 = 1 & \text{Rest} & 1 \\
 1 : 2 = 0 & \text{Rest} & 1
 \end{array}
 \quad \uparrow
 \quad = (11\ 110)_2$$

## von Basis n in Basis 8 / 16

- Erst Dezimalzahl berechnen, dann mit Horner ins Dualsystem, dann auflösen in Oktal/Hexa

$$\begin{aligned}
 (1120)_3 &= 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \\
 &= 27 + 9 + 6 + 0 \\
 &= (42)_{10}
 \end{aligned}$$

$$(42)_{10} = (101\ 010)_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (5 & 2) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{0010} & \text{1010} \end{array} \\ \begin{array}{cc} (2 & A) \end{array} \end{array}$$

## von Basis 8 / 16 in Basis 2 (und umgekehrt!)

- untereinander schreiben
- in 3er / 4er Pakete zusammenfassen

Beispiel:  $(3D3, A2)_{16}$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & D & 3 & , & A & 2 \\
 0011 & 1101 & 0011 & , & 1010 & 0010
 \end{array}$$

$$(3D3, A2)_{16} = (0011\ 1101\ 0011\ ,\ 1010\ 0010)_2$$

Beispiel:  $(7312, 67)_8$  als Dualzahl (Basis 2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 7 & 3 & 1 & 2 & , & 6 & 7 \\
 111 & 011 & 001 & 010 & , & 110 & 111
 \end{array}$$

$$(7312, 67)_8 = (111\ 011\ 001\ 010\ ,\ 110\ 111)_2$$

- wichtig: Perioden müssen immer als Bruch geschrieben werden, da sonst Genauigkeitsverlust!
- auf gute Struktur achten, das hilft gerade bei den Dualzahlen viel!

## Aufgabe 1:

a)  $(247)_8$  ins Dezimalsystem

b)  $(159)_{10}$  in Zahl zur Basis 4

$$\begin{aligned} \text{a) } (247)_8 &= 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 \\ &= 2 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 \\ &= 128 + 32 + 7 \\ &= (167)_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \text{b) } 159 : 4 = 39 & \text{Rest } 3 & & \\ 39 : 4 = 9 & \text{Rest } 3 & & \\ 9 : 4 = 2 & \text{Rest } 1 & & \\ 2 : 4 = 0 & \text{Rest } 2 & \uparrow & = (2133)_4 \end{array}$$

## Aufgabe 2:

a)  $(D59FA)_{16}$  ins Dualsystem

b)  $(1\ 0110\ ,\ 01)_2$  ins Dezimalsystem

Bei Hexadezimal 4,  
bei Oktal 3 Binärstellen je Ziffer

$$\begin{array}{cccccc} \text{a)} & ( & D & 5 & 9 & F & A & )_{16} \\ & & (1101 & 0101 & 1001 & 1111 & 1010)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \overset{4}{1} \cdot \overset{3}{2^4} + \overset{2}{0} \cdot \overset{1}{2^3} + \overset{0}{1} \cdot \overset{-1}{2^2} + \overset{0}{1} \cdot \overset{-2}{2^1} + \overset{0}{0} \cdot \overset{-3}{2^0} + \overset{0}{0} \cdot \overset{-4}{2^{-1}} + \overset{1}{1} \cdot \overset{-5}{2^{-2}} \\ = 16 + 4 + 2 + 0,25 \\ = (22,25)_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5 \\ 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25 \\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 \end{array}$$



## Aufgabe 4:

### $(666)_{10}$ als Dualzahl (mit Horner Schema)

666 : 2 = 333	Rest	0
333 : 2 = 166	Rest	1
166 : 2 = 83	Rest	0
83 : 2 = 41	Rest	1
41 : 2 = 20	Rest	1
20 : 2 = 10	Rest	0
10 : 2 = 5	Rest	0
5 : 2 = 2	Rest	1
2 : 2 = 1	Rest	0
1 : 2 = 0	Rest	1

$(666)_{10} = (10\ 1001\ 1010)_2$

Beim Vorkomma-Anteil  
die Zahl immer **von unten**  
**nach oben** betrachten!

## Aufgabe 5:

### $(-27)_{12}$ als Oktalzahl

(Nachklausur WS 06/07)

$$\begin{aligned} -(27)_{12} &= 2 \cdot 12^1 + 7 \cdot 12^0 \\ &= 24 + 7 \\ &= (31)_{10} \\ &= 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 \\ &= (-37)_8 \end{aligned}$$

Horner Schema:

$$\begin{array}{rcl} 31 : 8 = 3 & \text{Rest } 7 & \blacktriangle \\ 3 : 8 = 0 & \text{Rest } 3 & | \end{array}$$

Das Minuszeichen wird  
am Ende einfach wieder  
ranginghängt



## Aufgabe 6:

### $(\text{DDDD}, \text{DDD})_{16}$ als Oktalzahl

(Testat WS 13/14)

Vorne (oder hinten)  
angehängte Nullen  
verändern den Wert der  
Zahl nicht!

$$\begin{array}{rcl}
 (\text{D} & \text{D} & \text{D} & \text{D} , & \text{D} & \text{D} & \text{D})_{16} \\
 (1101 & 1101 & 1101 & 1101, & 1101 & 1101 & 1101)_2 \\
 \hline
 ( & \text{00} & 1101 & 1101 & 1101 & 1101 & , & 1101 & 1101 & 1101 )_2 \\
 \hline
 ( & 1 & 5 & 6 & 7 & 3 & 5 & , & 6 & 7 & 3 & 5 )_8
 \end{array}$$

$$= (156\ 735\ ,\ 6735)_8$$

Auflösen der Dualzahl  
immer vom Komma aus!

# Aufgabe 7:

## $(-53,2)_{10}$ als Zahl zur Basis 7

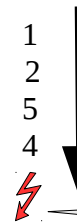
(Testat WS 13/14)

mit Horner Schema: Vor- und Nachkomma-Anteil getrennt berechnen!

$$\begin{array}{rcl} 53 : 7 = 7 & \text{Rest } 4 & \\ 7 : 7 = 1 & \text{Rest } 0 & \\ 1 : 7 = 0 & \text{Rest } 1 & \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} 0,2 \cdot 7 = 1,4 & 1 & \\ 0,4 \cdot 7 = 2,8 & 2 & \\ 0,8 \cdot 7 = 5,6 & 5 & \\ 0,6 \cdot 7 = 4,2 & 4 & \\ 0,2 \cdot 7 = 1,4 & & \end{array}$$



$$= (-104, \overline{1254})_7$$

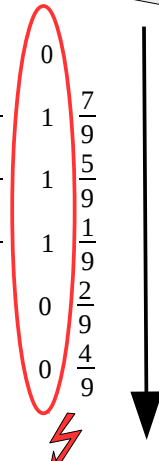
**Vorsicht: Wiederholung!**  
Dies bedeutet dass es sich um eine **Periode** handelt!

## Aufgabe 8:

### Wandeln Sie den unendlichen Dezimalbruch $(0,\overline{4})_{10}$ in einen unendlichen Dualbruch um!

(Testat WS 10/11)

$$\begin{array}{rcl}
 0,\overline{4} & = & \frac{4}{9} \\
 \frac{4}{9} \cdot 2 & = & \frac{8}{9} \\
 \frac{8}{9} \cdot 2 & = & \frac{16}{9} \\
 \frac{16}{9} \cdot 2 & = & \frac{32}{9} \\
 \frac{32}{9} \cdot 2 & = & \frac{64}{9} \\
 \frac{64}{9} \cdot 2 & = & \frac{128}{9} \\
 \frac{128}{9} \cdot 2 & = & \frac{256}{9} \\
 \frac{256}{9} \cdot 2 & = & \frac{512}{9} \\
 \frac{512}{9} \cdot 2 & = & \frac{1024}{9} \\
 \frac{1024}{9} \cdot 2 & = & \frac{2048}{9}
 \end{array}$$



Eine **Periodenzahl**  $x$   
in der **Basis**  $n$   
entspricht als Bruch  
immer  $\frac{x}{n-1}$

$= (0,\overline{011\ 100})_2$

## Aufgabe 9: (110 120)<sub>3</sub> als Hexadezimalzahl

$$\begin{aligned}
 {}^{543210} \\
 (110\ 120)_3 &= 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \\
 &= 1 \cdot 243 + 1 \cdot 81 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \\
 &= 243 + 81 + 9 + 6 \\
 &= (339)_{10}
 \end{aligned}$$

weiter mit Horner Schema:

339 : 2 = 169	Rest 1
169 : 2 = 84	Rest 1
84 : 2 = 41	Rest 0
41 : 2 = 20	Rest 0
20 : 2 = 10	Rest 1
10 : 2 = 5	Rest 0
5 : 2 = 2	Rest 1
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 = 0	Rest 1

Das **Horner Schema**  
benötigt als **Ausgangs-Basis**  
immer das **Dezimalsystem**

$$\begin{aligned}
 &(1\ 0101\ 0011)_2 \\
 &= (0001\ 0101\ 0011)_2 \\
 &= (1\ 5\ 3)_{16}
 \end{aligned}$$

Mit Nullen auffüllen  
(immer so, dass der Wert  
nicht verändert wird)

$$(110\ 120)_3 = (339)_{10} = (1\ 0101\ 0011)_2 = (153)_{16}$$

## Aufgabe 10:

Addieren Sie die beiden Hexadezimal-Zahlen  $(21A5,3C)_{16}$  und  $(BE04,8)_{16}$  und die Oktalzahl  $(57231,05)_8$  zusammen.

(Testat WS 06/07)

$(21A5,3C)_{16} =$	2	1	A	5	,	3	C
	0010	0001	1010	0101	,	0011	1100
$(BE04,8)_{16} =$	B	E	0	4	,	8	
	1011	1110	0000	0100	,	1000	
$(57231,05)_8 =$		5	7	2	3	1	,
		101	111	010	011	001	,
						000	101

0000	0010	0001	1010	0101	,	0011	1100
0000	1011	1110	0000	0100	,	1000	0000 +
0000	0101	1110	1001	1001	,	0001	0100 +
1	1111	1111	111	1 1		111	1
0001	0011	1110	0100	0010	,	1101	0000 =
1	3	E	4	2	,	D	0

**= (13E42 , D)<sub>16</sub>**

Addition von Dualzahlen:

- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 0    Übertrag 1
- 1 + 1 + 1 = 1    Übertrag 1

## Aufgabe 11:

### $(1100\ 1100\ 1101)_2$ als Dezimalzahl

$$\begin{array}{cccccccccccc} 11 & 10 & 9 & 8 & & 7 & 6 & 5 & 4 & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ (1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 1) &_2 \end{array} = 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 2048 + 1024 + 128 + 64 + 8 + 4 + 1$$

$$\begin{array}{r} 2048 \\ + 1024 \\ + 128 \\ + 64 \\ + 8 \\ + 4 \\ + 1 \\ \hline 3277 \end{array} = (3277)_{10}$$

## Aufgabe 12:

### Finden Sie die Basen $r$ und $s$ so, dass gilt $12_r = 111_s$ !

(Klausur WS 07/08)

$$\begin{aligned}
 1 \cdot r^1 + 2 \cdot r^0 &= 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s^1 + 1 \cdot s^0 \\
 1 \cdot r + 2 \cdot 1 &= s^2 + 1 \cdot s + 1 \\
 r + 2 &= s^2 + s + 1
 \end{aligned}$$

Zuerst weitmöglichst auflösen,  
dann einsetzen von Zahlen in  
den größeren (komplexeren) Term

$$\begin{aligned}
 5 + 2 &= 2^2 + 2 + 1 \\
 7 &= 4 + 2 + 1 \\
 7 &= 7 \\
 \mathbf{r = 5} \quad \mathbf{s = 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 + 2 &= 3^2 + 3 + 1 \\
 13 &= 9 + 3 + 1 \\
 13 &= 13 \\
 \mathbf{r = 11} \quad \mathbf{s = 3}
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 13:

**$\left(\frac{3}{5}\right)_{10}$  [drei fünftel] als Hexadezimalzahl, mit 4 Stellen nach dem Komma!**

(Klausur WS 06/07)

$$\left(\frac{3}{5}\right)_{10} = \left(\frac{6}{10}\right)_{10} = 0,6$$

$$0,6 \cdot 2 = 1,2$$

$$0,2 \cdot 2 = 0,4$$

$$0,4 \cdot 2 = 0,8$$

$$0,8 \cdot 2 = 1,6$$

$0,6 \cdot 2 =$  

„Umweg“ über das Dualsystem,  
weil dieses einfacher zu rechnen ist!

$$\Rightarrow (0,6)_{10} = (0,\overline{1001})_2$$

$$\begin{array}{cccc} \text{0000} & , & \overline{1001} & \overline{1001} & \overline{1001} & \overline{1001} \\ 0 & , & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$= (0,\overline{9999})_{16}$$



**Aufgabe 14:**  
**Geben Sie  $(0,\overline{5})_{10} = (0,5555555555\dots)_{10}$  als Zahl zur Basis 5 an**  
**(keine Näherungslösung).**  
*(Klausur WS 11/12)*

$$\begin{array}{rcl}
 0,\overline{5} & = & \frac{5}{9} \\
 \frac{5}{9} \cdot 5 & = & \frac{25}{9} = 2 \frac{7}{9} \\
 \frac{7}{9} \cdot 5 & = & \frac{35}{9} = 3 \frac{8}{9} \\
 \frac{8}{9} \cdot 5 & = & \frac{40}{9} = 4 \frac{4}{9} \\
 \frac{4}{9} \cdot 5 & = & \frac{20}{9} = 2 \frac{2}{9}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \downarrow \\
 \downarrow \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2}{9} \cdot 5 & = & \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9} \\
 \frac{1}{9} \cdot 5 & = & \frac{5}{9} = 0 \frac{5}{9} \\
 \frac{5}{9} \cdot 5 & = & \frac{25}{9} = 2 \frac{7}{9}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \downarrow \\
 \downarrow
 \end{array}$$

**$= (0,233210)_5$**

## Aufgabe 15:

a)  $(9CF4, BE)_{16}$  als Oktalzahl

b) Den unendlichen Dezimalbruch  $(0, \overline{1})_{10}$   
in einen unendlichen Dualbruch  
(Testat SS 07)

a)  $9 \quad C \quad F \quad 4, \quad B \quad E$   $\longrightarrow$   $001 \ 001 \ 110 \ 011 \ 110 \ 100, 101 \ 111 \ 100$   $\longrightarrow (116 \ 364, 574)_8$   
 $1001 \quad 1100 \quad 1111 \quad 0100, \quad 1011 \quad 1110$   $\longrightarrow$   $1 \ 1 \ 6 \ 3 \ 6 \ 4, 5 \ 7 \ 4$

b)  $(0, \overline{1})_{10} = 1/9$   
 $\begin{array}{l} \textcolor{red}{1}/9 \cdot 2 = 2/9 \ 0 \ 2/9 \\ 2/9 \cdot 2 = 4/9 \ 0 \ 4/9 \\ 4/9 \cdot 2 = 8/9 \ 0 \ 8/9 \\ 8/9 \cdot 2 = 16/9 \ 1 \ 7/9 \end{array}$   $\downarrow$   
 $\begin{array}{l} 7/9 \cdot 2 = 14/9 \ 1 \ 5/9 \\ 5/9 \cdot 2 = 10/9 \ 1 \ 1/9 \\ \textcolor{red}{1}/9 \cdot 2 = \textcolor{red}{2}/9 \end{array}$   $\downarrow$   
 $= (0, \overline{000 \ 111})_2$

## Aufgabe 16:

### Stellen Sie die angegebenen Zahlen im jeweils anderen Zahlensystem dar:

*(Testat WS 02/03)*

Dual	Dezimal	Oktal	Hexadezimal
	1435,625		
	0,3		

Mit 8 Stellen nach dem Komma!

Dual	Dezimal	Oktal	Hexadezimal
101 1001 1011,101	1435,625	2633,5	59B,A
0,0100 1101	0,3	0,23146	0,4C