Unterlagen zur Vorlesung

Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Darstellungen von Schaltfunktionen:

Min- und Maxterme

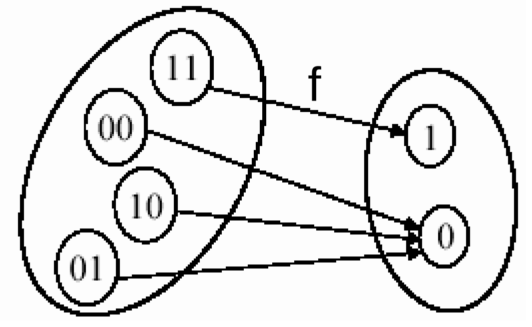
Disjunktive und konjunktive Normalformen

Belegungen und Funktionswerte

- Eine Wertzuweisung an die unabhängigen Eingangsvariablen heißt Belegung.
  - Beispiel: $(x_3, x_2, x_1) = (0, 1, 1) = X_3$

- Wir behandeln nur vollständige Schaltfunktionen, d.h. als Funktionswerte f(X) treten nur 0 oder 1 auf.

- Belegungen, denen f $\left\{\begin{matrix}\text{den Wert 0}\\ \text{den Wert 1}\end{matrix}\right\}$ zuordnet, heißen $\left\{\begin{matrix}\text{Nullstellen}\\ \text{Einsstellen}\end{matrix}\right\}$ von f.



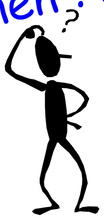
Idee der Normalformen

Eine boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Fällt mir dazu ein Beispiel ein ?

Ja, siehe im Skript, zum Thema Tautologie.

Aber gibt es auch ein eindeutiges Formelschema für Schaltfunktionen ??



Eine Standarddarstellung boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem $(\wedge, \vee, \overline{\ \ })$ ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

Idee der Normalformen für Schaltfunktionen

Im Folgenden werden wir ableiten, wie sich eine Normalform bilden lässt. Dabei kann jede Schaltfunktion entweder als disjunktive Normalform (DNF) oder als konjunktive Normalform (KNF) dargestellt werden. Beide Formen sind jeweils möglich und funktional äquivalent.

- Die DNF ist eine Oder-Verknüpfung (Disjunktion) von sog. Mintermen. Minterme bilden also die „Bausteine" einer DNF. Wie viele Minterme für eine bestimmte Funktion benötigt werden, ist individuell verschieden und hängt von der gegebenen Funktion ab.

- Die KNF ist eine Und-Verknüpfung (Konjunktion) von sog. Maxtermen. Maxterme bilden also die „Bausteine" einer KNF. Wie viele Maxterme für eine bestimmte Funktion benötigt werden, ist individuell verschieden und hängt von der gegebenen Funktion ab.

Minterme

Ein Minterm m_i $(x_1,x_2,...x_n)$ ist eine Funktion von n Variablen, deren Wahrheitstabelle eine 1 in Zeile i, $0 \le i \le 2^n-1$, und eine 0 in allen anderen Zeilen hat.

- Für ein gegebenes n existieren 2^n Minterme

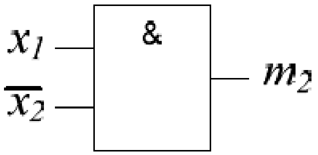
$n=2$

$(i)_{10}$	x_1	x_2	m_0	m_1	m_2	m_3
0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	1	0
3	1	1	0	0	0	1

Minterm

$$m_2 = x_1 \bullet \overline{x}_2$$

Realisierung als Gatterbaustein



Hier wurde der Punkt statt dem kleinen Dach als UND-Operator genommen

Struktur der Minterme

- Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4$$

- Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2$$

$$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Ein Minterm ist eine Funktion von allen n Variablen, die genau für eine einzige Belegung den Wert 1 annimmt, sonst immer 0 ist.

„Summe“ (ODER-Verknüpfung) von Mintermen

- Jede Funktion $f(X)$ von n Variablen, deren Wahrheitstabelle 1 in den Zeilen a, b,..., k hat und 0 sonst, lässt sich als Summe von Mintermen darstellen:

$$f(X) = m_a(X) \vee m_b(X) \vee \ldots \vee m_k(X)$$

  – Dabei überdeckt jeder Minterm genau eine 1 in der Wahrheitstabelle von $f(X)$.

Beispiel zur Struktur einer Disjunktiven Normalform

Beispiele:

$$f(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c$$

ist in DNF.

Hier wurde der Punkt statt dem kleinen Dach als UND-Operator sogar weggelassen. Ist einfacher ;-)

$$f(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b} \vee c\,a\,b \vee a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$$

ist nicht in DNF, denn:

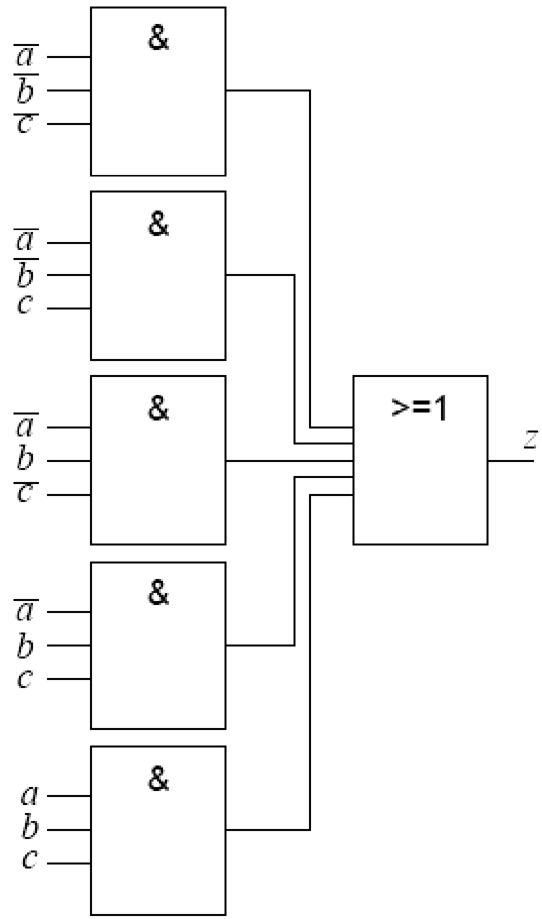
- $a\,\overline{b}$ enthält nicht alle Variable
- $a\,b\,c$ und $c\,a\,b$ sind äquivalent
- $a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$ ist keine reine Konjunktion

„Summe“ von Mintermen (Disjunktive Normalform)

- Funktion $z(a,b,c)$

$(i)_{10}$	a	b	c	z
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

- Korrespondierende Schaltung



- Summe von Mintermen

$$z(a,b,c) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_7 =$$
$$= \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee \overline{a}bc \vee abc$$

Hier wurde der UND-Punkt wieder weggelassen. Ist einfacher ;-)

Maxterme

Ein Maxterm $M_i\,(x_1,x_2,...x_n)$ ist eine Funktion von n Variablen, deren Wahrheitstabelle eine 0 in Zeile i, $0 \leq i \leq 2^n-1$, und eine 1 in allen anderen Zeilen hat.

- Für ein gegebenes n existieren 2^n Maxterme

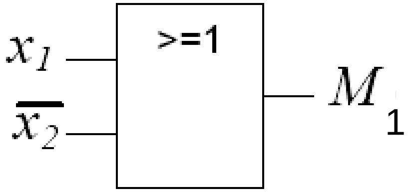
$n=2$

$(i)_{10}$	x_1	x_2	M_0	M_1	M_2	M_3
0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
2	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	1	0

Maxterm

$$M_1 = x_1 \vee \overline{x}_2$$

Realisierung als Gatterbaustein



„Produkt“ (UND-Verknüpfung) von Maxtermen

- Jede Funktion $f(X)$ von n Variablen, deren Wahrheitstabelle 0 in den Zeilen a, b,..., k hat und 1 sonst, lässt sich als Produkt von Maxtermen darstellen:

$$f(X) = M_a(X) \cdot M_b(X) \cdot \ldots \cdot M_k(X)$$

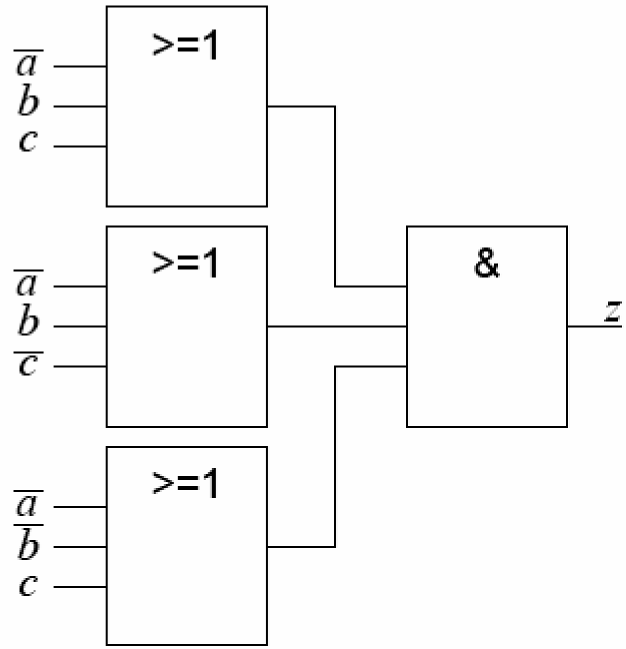
  – Dabei überdeckt jeder Maxterm genau eine 0 in der Wahrheitstabelle von $f(X)$.

„Produkt“ von Maxtermen (Konjunktive Normalform)

- Funktion $z(a,b,c)$

$(i)_{10}$	a	b	c	z
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

- Korrespondierende Schaltung



- Produkt von Maxtermen

$$z(a,b,c) = M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 =$$
$$= (\overline{a} \vee b \vee c) \cdot (\overline{a} \vee b \vee \overline{c}) \cdot (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)$$

Beispiel: DNF und KNF

Nr.	a b c	y	Minterme	Maxterme
0	0 0 0	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$	
1	1 0 0	0		$\bar{a} \vee b \vee c$
2	0 1 0	0		$a \vee \bar{b} \vee c$
3	1 1 0	1	$a\ b\ \bar{c}$	
4	0 0 1	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ c$	
5	1 0 1	0		$\bar{a} \vee b \vee \bar{c}$
6	0 1 1	0		$a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$
7	1 1 1	1	$a\ b\ c$	

DNF: $y = (\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}) \vee (a\ b\ \bar{c}) \vee (\bar{a}\ \bar{b}\ c) \vee (a\ b\ c)$

KNF: $y = (\bar{a} \vee b \vee c)\ (a \vee \bar{b} \vee c)\ (\bar{a} \vee b \vee \bar{c})\ (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

Bildung der DNF und KNF aus der Funktionstabelle

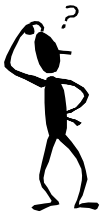
- Minterm entspricht Zeile der Funktionstabelle mit Funktionswert 1
  - DNF = disjunktive Verknüpfung aller Minterme
    - Alle Eingangsvariablen in Zeile mit Funktionswert **1** mit $\wedge$ verknüpfen
    - Eingangsvariablen mit dem Wert 0 negieren

- Maxterm entspricht Zeile der Funktionstabelle mit Funktionswert 0
  - KNF = konjunktive Verknüpfung aller Maxterme
    - Alle Eingangsvariablen in Zeile mit Funktionswert **0** mit $\vee$ verknüpfen
    - Eingangsvariablen mit dem Wert 1 negieren

Beispiel: DNF und KNF

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Versuchen Sie mal:
Wie würde die DNF und KNF für Farmer´s Dilemma aussehen ??



Spezielle DNF und KNF - Darstellung

Verkürzte Schreibweise: nur die Indizes (Binärkodierungen der (c, b, a) - Belegung) der 1- oder 0-Stellen der Funktion

Voraussetzung: Eindeutige Reihenfolge der Variablen.

Beispiel (Reihenfolge der drei Variablen $\mathbf{c, b, a}$)

$y = \mathrm{MINt}(0, 3, 4, 7)$ Minterme --> Einsstellen

$y = \mathrm{MAXt}(1, 2, 5, 6)$ Maxterme --> Nullstellen

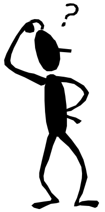
MINt (0,3,4,7) bedeutet also, dass die vier Minterme mit den dezimalen Nummern 0, 3, 4 und 7 die DNF bilden.
Also $(3)_{10}$ bedeutet: $(011)_2$ und damit der Minterm $x_3x_2x_1$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Jede beliebige vollständige Schaltfunktion f(x) lässt sich als Disjunktion aller Einsstellen-Minterme (DNF) und als Konjunktion aller Nullstellen-Maxterme (KNF) darstellen.

- Aus der DNF oder der KNF lässt sich direkt eine Implementierung der Schaltfunktion angeben. Die Logikschaltung bildet die Struktur der Formel (DNF, KNF) 1:1 auf die Bauteile ab.

Wie sieht denn die direkte Implementierung von f(c,b,a) = MAXt (1, 2, 5, 6) aus ??



Lösung zum Beispiel

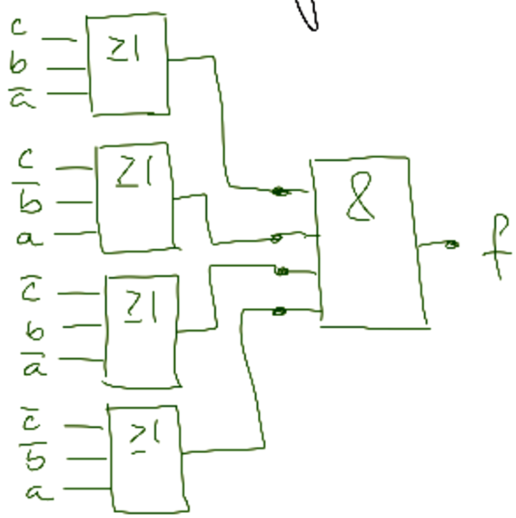
Beispiel: $MAX_t(1,2,5,6)_{10} = f(c,b,a)$; $\underline{\text{Nullstellen}}$ (wegen MAX)

$\Rightarrow \mathbb{N}(f) = \{001, 010, 101, 110\}_2$

$\Rightarrow f(c,b,a) = (c \vee b \vee \bar{a}) \cdot (c \vee \bar{b} \vee a) \cdot (\bar{c} \vee b \vee \bar{a}) \cdot (\bar{c} \vee \bar{b} \vee a)$

$= M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 \cdot M_6$

$\Rightarrow$ Direkte Implementierung:



Realisierung von Schaltfunktionen: die Gatterebene

- Welche Gatterarten benötigt man, um beliebige kombinatorische Schaltungen realisieren zu können ?

- Da jede Funktion in Minterm-Normalform (oder Maxterm-Normalform) darstellbar ist, reicht die Gattermenge {AND, OR, NOT} offenbar aus:
  - Die Gattermenge {AND, OR, NOT} ist logisch vollständig.

- Aus praktischen Gründen ist man manchmal daran interessiert, Schaltungen mit sehr wenigen oder gar nur einer Gatterart zu realisieren.

- Der Nachweis der logischen Vollständigkeit einer Gattermenge *S* kann dadurch erbracht werden, dass man zeigt, wie die Gatter einer bereits bekannten vollständigen Gattermenge mit den Elementen aus *S* realisiert werden können. *(siehe Übung)*