Mathematatik I

Lineare Abbildungen & Matrizen

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

Zeitplan Vorlesung

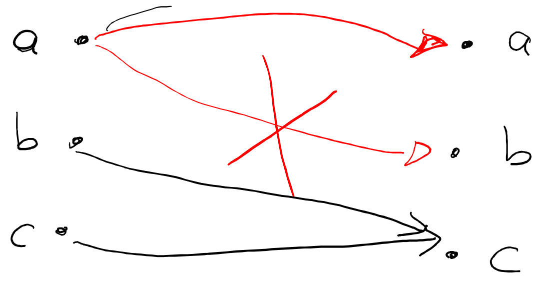
		Datum	Bemerkung	Inhalt
Lineare Algebra	**12**	**15.06.**		**Lineare Abbildungen**
	13	22.06.		Eigenwerte und komplexe Zahlen
	14	23.06.		Eigenwerte
	15	29.06.		Lineare Algebra: Anwendung
	16	06.07.		~~Graphentheorie~~
	17	07.07.		~~Graphentheorie: Anwendung~~
	18	13.07.		Wiederholung

Lernziele

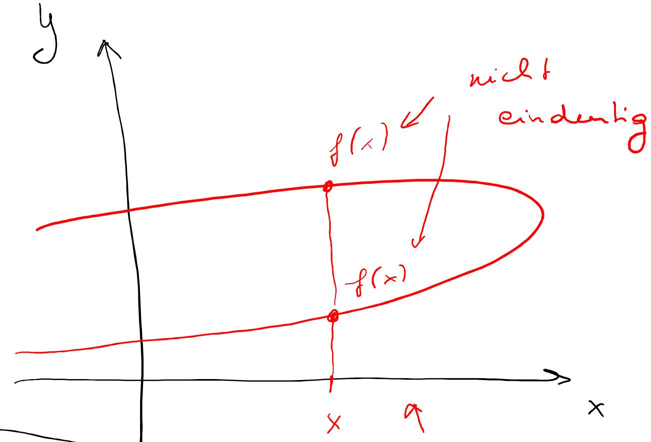
- **Begriffe kennen:**
  - ✓ Lineare Abbildung
  - ✓ Darstellungsmatrix
  - ✓ Kern & Bild einer Abbildung (Wdhl.)
  - ✓ Dimensionssatz
- nachweisen können, ob eine Abbildung linear ist
- Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bzgl. einer vorgegebenen Basis bestimmen können
- Bild und Kern einer linearen Abbildung berechnen und deren Dimension angeben können

Wiederholung

Was ist eine Abbildung?

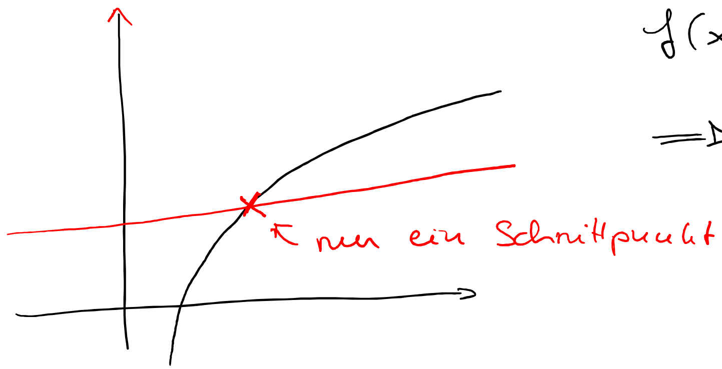


Zuordnung muss eindeutig sein!



keine Abbildung

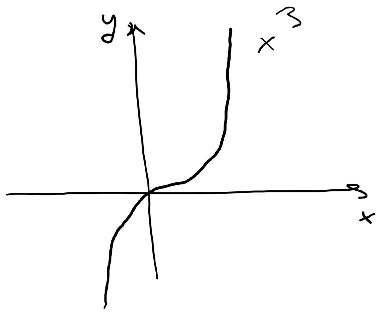
injektiv



$f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x = y$

surjektiv



zu jedem $y \in Y \ \exists x \in X:$

$f(x) = y$

Wiederholung

Abbildung zwischen Gruppen

$\rightsquigarrow$ HOMOMORPHISMUS
(strukturerhaltende Abbildung)

$$f: (\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$$

$$n \longmapsto n \bmod 2$$

$$5 \longmapsto 5 \bmod 2$$, also $f(5) = 1 \bmod 2$

$$\boxed{f(n +_{\mathbb{Z}_6} m) = f(n) +_{\mathbb{Z}_2} f(m)}$$

$f: (G, \circ) \to (H, *)$

$f(g \circ h) = f(g) * f(h)$

Homomorphismus

$$f(2+3) = f(2) + f(3)$$

$$1 \bmod 2 = 0 \bmod 2 + 1 \bmod 2 \quad \checkmark$$

Lineare Abbildung - Definition

$\mathbb{R}$

Seien V, W zwei K −Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt **linear** (oder Vektorraum-Homomorphismus), falls für alle $v_1, v_2 \in V, \lambda, \mu \in K$ gilt:

$$\boxed{f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)}$$

Ist eine lineare Abbildung $f: V \to W$ bijektiv, spricht man von einem **Isomorphimus** und schreibt $V \cong W$.

Beispiele: 1) Identität: $id: V \to V$, $x \mapsto x$ ist linear.

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^2$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $f(\lambda x + \mu y) =$

$\lambda f(x) + \mu f(y) =$

Beispiele für lineare Abbildungen

$$f(\lambda x + \mu y) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_2 - \mu y_2 \end{pmatrix}$$

$\parallel$ ✓

$$\lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 + \mu y_1 + \mu y_2 \\ \lambda x_1 - \lambda x_2 + \mu y_1 - \mu y_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

also ist f linear.

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2}$$

$\Rightarrow$ NICHT LINEAR

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{z.B. } \lambda = -1,\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}: f(\lambda x) = f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$$

$$\neq (-1) \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

muss gelten, falls f linear wäre

Lineare Abbildung - Matrix

Jede reelle $(n \times m) -$ Matrix A erklärt eine lineare Abbildung $f_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_A(v) = Av$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2 \times 3)$$

$$f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung – Kern & Bild

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V, W.

Wir bezeichnen die Menge

$$\ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

als **Kern** von f und

$$Bild(f) = \{w \in W | \exists v \in V\colon f(v) = w\} = f(V)$$

im (f) für image von f.

als **Bild** von f.

Es gilt: Der Kern einer linearen Abbildung $f: V \to W$ ist ein Untervektorraum von V und das Bild ein Untervektorraum von W.

Beispiele

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f_A(v) = Av \qquad v \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Bild}(f_A) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3 : Av = x \}$$

$$= f_A(\mathbb{R}^3)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underline{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}} x_1 + \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} x_2 + \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} x_3 \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

linear unabhängig

$\dim(\text{Bild}\, f_A) = 2$

$= \text{rg}(A)$

Dimensionssatz

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei (endlichdimensionalen) Vektorräumen V, W.

Es gilt:

$$\dim(V) = \dim \ker(f) + \dim Bild(f)$$

Sei A $(m \times n)$ –Matrix mit Spaltenvektoren $v_1, \dots v_n$. Es gilt:

$$Bild(f_A) = span\ (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \dim Bild(f_A) = \dim span\ (v_1, \dots, v_n) = rg(A)$$

$f_A(v) = Av$

$$\boxed{ker(f_A) = n - rg(A)}$$

$\dim \mathbb{L} = n - rg(A)$

$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $rg(A) = 2$, $\ker f_A = 3 - 2 = 1$

$Bild\, f_A = 2$

Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

$$\ker f_A = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix} x \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\dim(\ker f_A) = 1 = \underset{\text{Anzahl Unbekannte}}{3} - \underset{rg(A)}{2}$$

$$\text{Bild } f_A = \text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \dim \text{Bild } f_A = rg(A) = 2$$

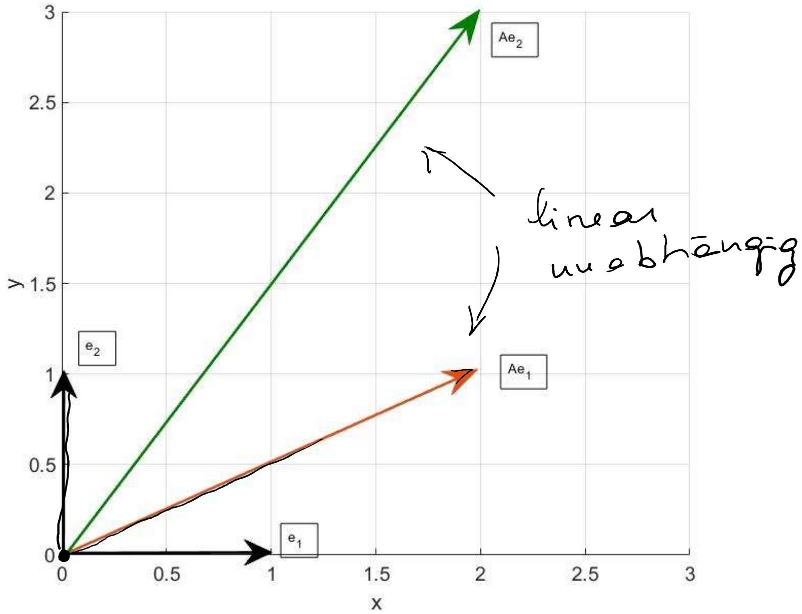
Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 1 \qquad f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matrixtransformationen in der Ebene

$$f_A \cancel{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av$$

dim Bild f_A = 2

dim ker f_A = 0



Beispiel:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 1. Spalte der Matrix

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ 2. Spalte der Matrix

$$\ker f_A = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = 0 \} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (MATRIX IST INVERTIERBAR)

Matrixtransformationen in der Ebene

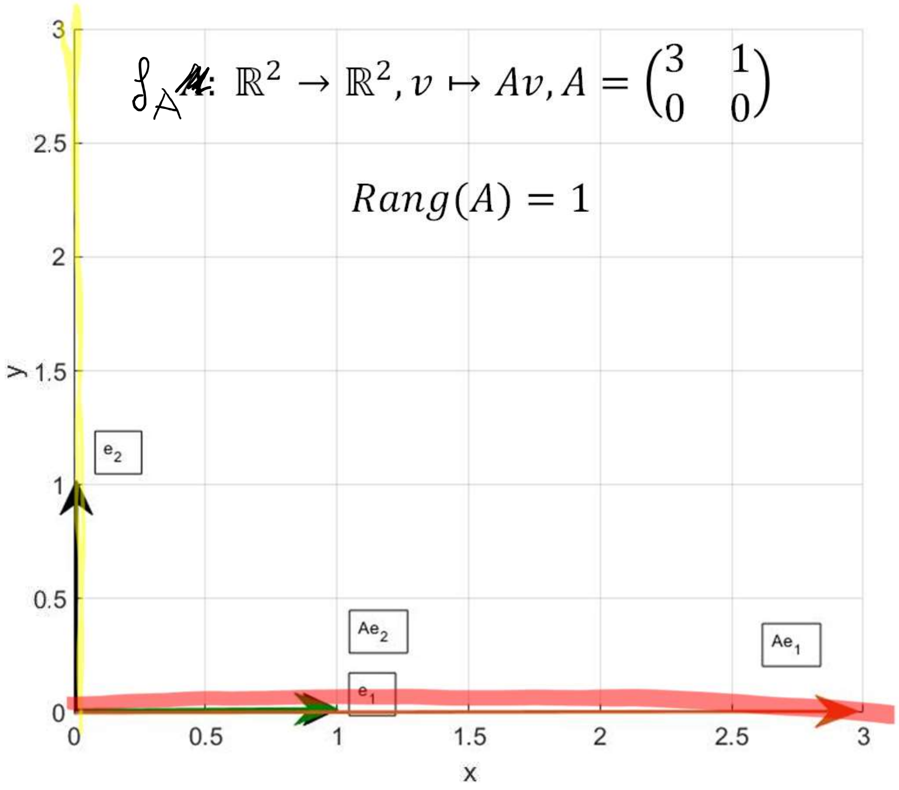
Beispiel:

$$f_A \cancel{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rang(A) = 1$$

dim Bild f_A = 1

dim ker(f_A) = 1

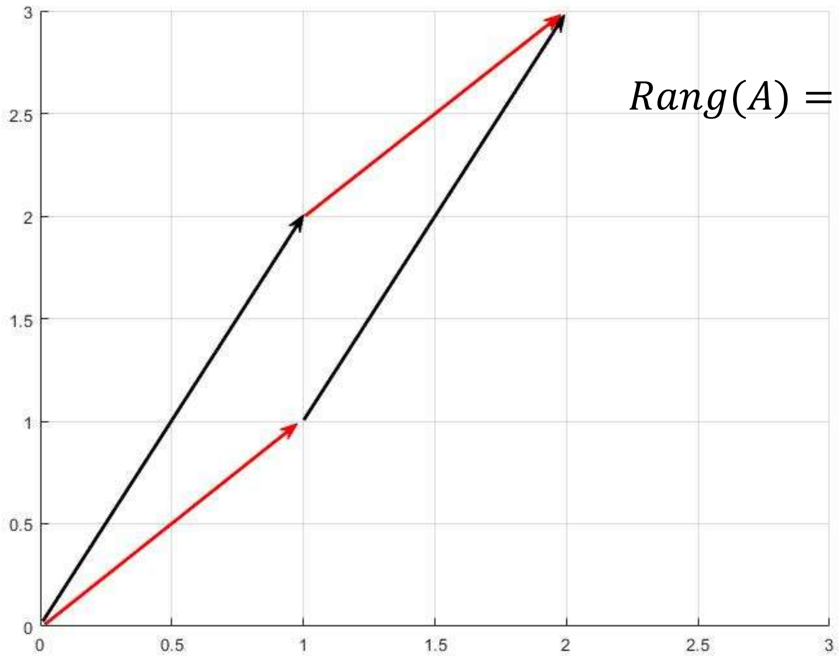


Aus zwei linear unabhängigen Vektoren werden linear abhängige Vektoren→
Die Spalten der Matrix sind linear abhängige Vektoren.

Matrixtransformationen in der Ebene

Beispiel:

$$A:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$Rang(A) = 2$$

Aus zwei linear unabhängigen Vektoren werden linear unabhängige Vektoren
→
Die Spalten der Matrix sind zwei linear unabhängige Vektoren.

Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3

Sei V ein Vektorraum mit geordneter Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$, W ein Vektorraum mit der Standardbasis und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$A = [f(v_1) \ldots f(v_n)]$$

die Matrix, deren i-te Spalte das Bild des i-ten Basisvektors ist, die **Darstellungsmatrix** von f.

Es gilt dann

$$f(v) = Av, v \in V$$

Darstellungsmatrix

Beispiel

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Darstellungsmatrix

$$\left.\begin{array}{l} f\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{e_1}\Bigg) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{1. Spalte} \\ f\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{e_2}\Bigg) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{2. Spalte} \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$