1 Grundlagen

1.1 Mengen & Aussagen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz einige mathematische Schreibweisen einführen, die Ihnen in den Mathematik-Vorlesungen begegnen werden. Sie erlauben es, lange Aussagen sehr kurz und knapp zu schreiben. Insbesondere sollten Sie die folgenden Begriffe kennenlernen:

- Menge, Mächtigkeit (einer Menge), Teilmenge, Restmenge, Produktmenge, Potenzmenge;
- Durchschnitt, Vereinigung;
- Aussage;
- Disjunktion, Konjunktion, Äquivalenz, Implikation, Negation;
- Existenz- und Allquantor

und an Beispielen lernen, wie man

- Mengen definiert (durch Beschreibung oder Aufzählung);
- Mengenoperationen durchführt;
- Mengen – insbesondere Zahlenmengen – korrekt schreibt;
- mathematische Aussagen mit Hilfe von Symbolen (Quantoren, Junktoren) formalisiert.

1.1.1 Grundlegende Definitionen der Mengentheorie

Definition 1.1

Eine Zusammenfassung von wohl unterscheidbaren Objekten heißt **Menge**. Die Objekte m einer Menge M heißen **Elemente**, und man schreibt $m \in M$.
Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißen **Mächtigkeit** (oder Kardinalität) der Menge M, und man schreibt $|M|$.

Mengen können entweder durch

Aufzählung aller Elemente wie in

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

definiert werden oder durch

die Eigenschaften ihrer Elemente wie bei

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Wir schreiben Mengen immer mit geschweiften Klammern! Mengen mit unendlich vielen Elementen definiert man am besten mit Hilfe der Eigenschaften ihrer Elemente. Beispielsweise

$M := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \neq 3 \right\}$

lies: M besteht aus jeder natürlichen Zahl n mit der Eigenschaft, dass n nicht gleich 3 ist.

Mengen können alles Mögliche als Elemente enthalten, nicht nur Zahlen. Es ist aber entscheidend, dass die Elemente *wohl unterscheidbar* sind, d.h., dass wir entscheiden können, welche Elemente genau in der Menge enthalten sind. Es ist möglich, dass Sie eine Menge mit Hilfe einer Eigenschaft definieren, die aber die Elemente nicht eindeutig festlegt; eine solche Definition ist nicht zulässig!
Es ist weiter nicht erlaubt, dass eine Menge sich selbst als Menge enthält, um zu vermeiden, dass auch widersprüchliche Aussagen bewiesen werden können! Man denke an die Russellsche Mengenantinomie, am besten dargestellt durch das Gedankenspiel des Barbiers, der sich nicht selbst rasiert, aber alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Eine wichtige Menge, die ein eigenes Symbol verdient, ist die **leere Menge**, die kein Element enthält. Wir bezeichnen sie mit $\emptyset$ oder mit den leeren Klammern $\{\,\}$.

Beispiel 1.2

1. die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
2. $M := \{Hannes, Jonas, Mia, Josephine\}$
3. $M := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \,\text{ist nur durch sich selbst und 1 teilbar} \right\}$
4. $M := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 1 \right\}$

Das letzte Beispiel bezeichnet ein **Intervall** und wird auch wie folgt geschrieben:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x \leq b\right\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b] &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \leq b\right\} && \text{(nach unten) halboffenes Intervall} \\
[a,b) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x < b\right\} && \text{(nach oben) halboffenes Intervall} \\
(a,b) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\} && \text{offenes Intervall}
\end{aligned}
$$

Wir lernen in Abschnitt 1.1.2 Teilmengen der reellen Zahlen kennen, beispielsweise ist jede natürliche Zahl auch eine ganze Zahl und damit ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen:

Definition 1.3

Die Menge M ist eine **Teilmenge** der Menge N, wenn jedes Element aus M auch Element in N ist. Man schreibt:

$$M \subset N \quad :\Leftrightarrow x \in M \Rightarrow x \in N.$$

Beispiel 1.4

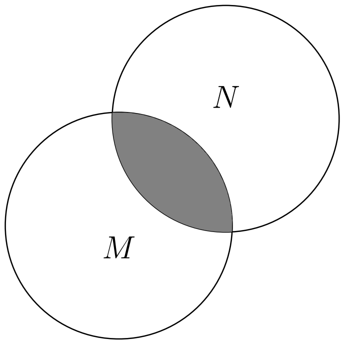
1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
2. $\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \text{ ist gerade}\right\} \subset \mathbb{N}$

Wir wollen noch weitere wichtige Mengenoperationen kurz einführen:

Definition 1.5

Eine Menge K heißt **Durchschnitt** der Mengen M und N, falls jedes Element $k \in K$ sowohl Element in M als auch Element in N ist. Man schreibt:

$$K := M \cap N \quad :\Leftrightarrow \quad x \in K \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N.$$

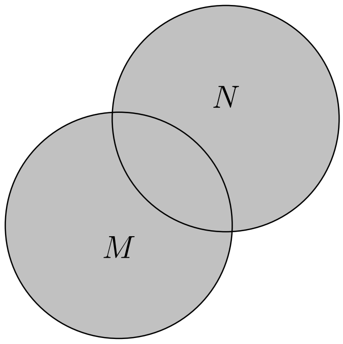


Wenn beispielsweise beim Lösen von Gleichungen eine Fallunterscheidung gemacht werden muss, ist die Lösung von jedem Fall immer der Durchschnitt der Bedingung des betrachteten Falls mit der Lösungsmenge des Falls.

Definition 1.6

Eine Menge K heißt **Vereinigung** der Mengen M und N, falls jedes Element $k \in K$ ein Element in M oder ein Element in N ist. Man schreibt:

$$K := M \cup N \quad :\Leftrightarrow \quad x \in K \Leftrightarrow x \in M \vee x \in N$$

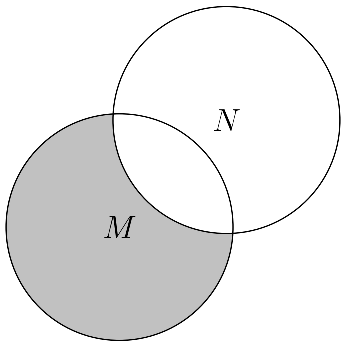


Wenn beispielsweise beim Lösen von Gleichungen eine Fallunterscheidung gemacht werden muss, ist die Lösung der Gleichung immer die Vereinigung der Lösungsmengen von allen betrachteten Fällen.

Definition 1.7

Eine Menge K heißt **Restmenge** der Menge M ohne die Menge N, falls jedes Element $k \in K$ ein Element in M, aber kein Element in N ist. Man schreibt:

$$K := M \setminus N \quad :\Leftrightarrow \quad x \in K \;\Leftrightarrow\; x \in M \;\wedge\; x \notin N$$



Die Restmenge wird beispielsweise benötigt, um die Definitionsmenge von gebrochen rationalen Funktionen anzugeben:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$$

Definition 1.8

Sei M eine Menge. Die Menge

$$\mathcal{P}(M) = \left\{ A \;\middle|\; A \subset M \right\}$$

aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** von M.
Die Potenzmenge einer Menge M enthält immer die leere Menge sowie die Menge M selbst: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$.

Definition 1.9

Seien M,N Mengen. Die Menge

$$M \times N = \Big\{ (m, n) \;\Big|\; m \in M,\; n \in N \Big\}$$

aller geordneten Pärchen von Zahlen in M bzw. N heißt die **Produktmenge** von M und N.
Allgemeiner: Seien $M_1, \dots, M_n$, $n \in \mathbb{N}$ Mengen. Dann heißt die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \Big\{ (m_1, \dots, m_n) \;\Big|\; m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots n \Big\}$$

die Produktmenge der Mengen $M_1, \dots M_n$.

Das bekannteste Beispiel für eine Produktmenge ist wahrscheinlich die reelle Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Big\{ (x, y) \;\Big|\, x, y \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Beispiel 1.10

1. Die Vereinigung der Intervalle $M = [0, 1]$ und $N = [0, 2]$ ist das Intervall $M \cup N = [0, 2]$.
2. Der Durchschnitt der Mengen $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{-3, 2, 7, 10\}$ ist die Menge $M \cap N = \{2\}$.
3. Die irrationalen Zahlen sind eine Restmenge der reellen ohne die rationalen Zahlen: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. Bei Bruchgleichungen muss man häufig die Zahlen ausschließen, die dazu führen, dass der Nenner verschwindet:

   $$\frac{1}{x - 1} = 0$$

   ist nur definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, d.h. x kann jeden beliebigen Wert außer 1 annehmen.
5. Die Potenzmenge der Menge $M = \{0, 1\}$ lautet $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Man beachte, dass die Menge M 2 Elemente hat, die Menge $\mathcal{P}(M) = 2^2$ Elemente. Allgemein kann man sich relativ leicht mit Hilfe des binomischen

Lehrsatzes überlegen, dass eine Potenzmenge 2^n Elemente besitzt, wenn $|M| = n$ ist.

1.1.2 Zahlenmengen

In diesem Abschnitt wollen wir an die grundlegenden Zahlenmengen erinnern, mit denen Sie in den Mathematik-Vorlesungen hantieren müssen: Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen sind die folgenden:

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind durch das Abzählen definiert. Dafür ist es wichtig, dass die natürlichen Zahlen eine feste Reihenfolge haben. Die kleinste natürliche Zahl ist die Eins (in manchen Lehrbüchern auch die Null). Und jede natürliche Zahl n besitzt genau einen Nachfolger, eine nächstgrößere natürliche Zahl, nämlich gerade die Zahl $n + 1$. Wir bezeichnen mit

$$\boxed{\mathbb{N} := \{1; 2; 3; \dots\} \quad \text{natürliche Zahlen}}$$

Bemerkung 1.1. *Es gibt* ***keine*** *größte natürliche Zahl. Das folgt direkt aus der Definition der natürlichen Zahlen: Wäre n die größte natürliche Zahl, hätte auch sie einen Nachfolger, die Zahl $n + 1$, und diese Zahl wäre größer. Insbesondere ist ∞* ***keine*** *natürliche Zahl, sondern die Angabe einer Anzahl: Es gibt beispielsweise unendlich viele natürliche Zahlen.*

Man schreibt $n \in \mathbb{N}$, wenn eine Zahl n eine natürliche Zahl ist, also in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten ist. Besondere, sehr wichtige natürliche Zahlen sind die **Primzahlen**. Primzahlen sind genau diejenigen Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Die ersten Primzahlen lauten 2,3,5,7,11,13,.... Die Menge der Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$.
Man kann natürliche Zahlen miteinander addieren und erhält wieder eine natürliche Zahl; dies ist für die Subtraktion nicht unbedingt der Fall:

$$3 + 5 = 8$$
$$3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$$

Wir erhalten eine negative Zahl, die in der Menge der ganzen Zahlen enthalten ist.

Ganze Zahlen

Ganze Zahlen enthalten die natürlichen Zahlen, man schreibt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, und zusätzlich die Null sowie das Negative aller natürlichen Zahlen:

$$\boxed{\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \left\{-n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} = \{\ldots; -3; -2 - 1; 0; 1; 2; 3; \ldots\} \quad \text{ganze Zahlen}}$$

In den ganzen Zahlen kann man deswegen beliebig addieren und subtrahieren und verbleibt immer in den ganzen Zahlen. Man kann ganze Zahlen natürlich auch miteinander multiplizieren und erhält wieder eine ganze Zahl. Das ist nicht unbedingt der Fall, wenn man zwei ganze Zahlen dividiert:

$$\begin{aligned} -3 \cdot 5 &= -15 \\ -3 : 5 &= -\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Bruch, und das ist eine rationale Zahl.

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen enthalten wiederum die natürlichen und die ganzen Zahlen:$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, aber zusätzlich noch alle Brüche aus ganzen Zahlen:

$$\boxed{\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\; q \neq 0\right\} \quad \text{rationale Zahlen}}$$

In den rationalen Zahlen kann man addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Jede rationale Zahlen besitzt entweder

1. eine Dezimalzahldarstellung mit **endlich vielen** Nachkommastellen, z.B.

   $$\frac{1}{8} = 0,125$$

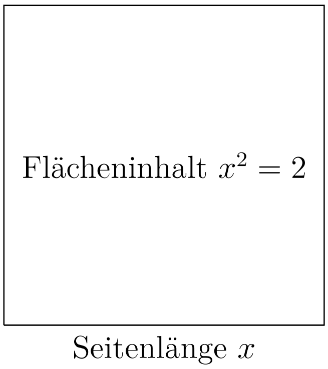
   oder

2. eine **periodische** Dezimalzahldarstellung, z.B.

   $$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}.$$

Reelle Zahlen

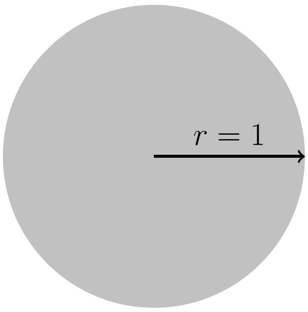
Nicht alle Zahlen lassen sich als Bruch ausdrücken. Wenn man ein Quadrat mit Flächeninhalt 2 zeichnen möchte, welche Seitenlänge muss es dann besitzen?



Die Antwort folgt aus der Gleichung

$$x^2 = 2, \quad x \text{ Seitenlänge.}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist **keine** rationale Zahl.
Die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ bezeichnen wir als $x = \sqrt{2}$, die Quadratwurzel von 2. Sie ist eine **irrationale Zahl**.
Ein weiteres Beispiel für eine irrationale Zahl ist die folgende:



Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $r = 1$ ist π. Man kann zeigen, dass π keine rationale Zahl ist: Schreibt man π als Dezimalzahl, wiederholen sich die Ziffern hinter dem Komma nicht periodisch und man benötigt (theoretisch) unendlich viele Nachkommastellen. In unseren Beispielen genügt meist die Näherung $\pi \approx 3,14$, in Computerprogrammen ist π in der Regel in einer ausreichenden Genauigkeit gespeichert.

Wir können festhalten: Jede irrationale Zahl besitzt eine Dezimalzahldarstellung mit **unendlich vielen, nicht-periodischen** Nachkommastellen, z.B.

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095.$$

Die Menge der rationalen und irrationalen Zahlen bilden die Menge der reellen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet und enthält die rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Wenn wir es mit irrationalen Zahlen zu tun haben, bietet es sich häufig an, sie als **gerundete Dezimalzahl** zu schreiben. Soll man auf n Nachkommastellen runden und

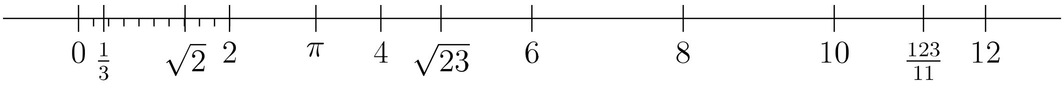
1. ist die $(n+1)$-te Nachkommastelle ≥ 5, erhöht man die n-te Nachkommastelle um 1;
2. ist die $(n+1)$-te Nachkommastelle < 5, bleibt die n-te Nachkommastelle unverändert.

Beispiel 1.11

1. Runden Sie π auf 3 Nachkommastellen:
   Der Taschenrechner liefert $\pi \approx 3,14159265359$. Die 4. Nachkommastelle ist 5, also müssen wir die 3. Nachkommastelle um 1 erhöhen und erhalten $\pi \approx 3,142$.
2. Runden Sie $\sqrt{5}$ auf 1 Nachkommastellen:
   Der Taschenrechner liefert $\sqrt{5} \approx 2,2360679775$. Die 2. Nachkommastelle ist 3, also bleibt die 1. Nachkommastelle bestehen und wir schreiben gerundet $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Was sind nun die reellen Zahlen?
Sie werden meist als Zahlenstrahl dargestellt, als eine Gerade, also als eine unendlich lange, durchgezogene Linie, da es „keine Lücken zwischen zwei Zahlen" gibt. In der Mathematik sagt man, dass die Menge der reellen Zahlen **vollständig** ist.[1]

[1] Was heißt das genau? Stellen Sie sich folgendes vor: Wir teilen die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in zwei Mengen, A und B, ein, so dass sie vereinigt alle rationalen Zahlen enthalten, also $\mathbb{Q} = A \cup B$. Alle Zahlen in der Menge A sind echt kleiner als alle Zahlen in der Menge B: $a < b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann definiert dieser sogenannte Schnitt genau eine reelle Zahl x, nämlich in der Regel die oberste Schranke der Menge A, wenn man A als offene Menge konstruiert. Umgekehrt kann man zu jeder beliebigen reellen Zahl x solche zwei Mengen A und B finden, die sie definieren. Solch ein Mengenpaar bezeichnet man als *Dedekindschen Schnitt*. Mit ihnen kann man zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen **vollständig** ist, also, dass der Zahlenstrahl keine Lücken hat, sondern man ihn sich tatsächlich als durchgezogene, unendlich lange Linie vorstellen kann.


0
1/3
√2
2
π
4
√23
6
8
10
123/11
12

1.1.3 Aussagenlogik

Im obigen Abschnitt haben wir stillschweigend von Symbolen gebraucht gemacht, ohne dass wir diese eingeführt haben. Das soll an dieser Stelle kurz nachgeholt werden:

1.1.4 Aussagen

Die Grundlagen der Aussagenlogik werden in den Veranstaltungen der Informatik oder auch Elektrotechnik behandelt, so dass wir uns hier nur auf einige wenige Begriffe beschränken wollen. Die Mathematik besteht normalerweise nicht aus Meinungen oder Ausrufen, sondern aus Aussagen. Das sind Sätze, die wahr oder falsch sein können.

Definition 1.12

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Aussagen sind z.B.

1. $\pi \in \mathbb{N}$
2. $32 + 1 = 33$
3. Alle durch 4 teilbaren Zahlen sind gerade.
4. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Keine Aussagen sind z.B.

1. $3 + 3$
2. Hallo!

Aussagen lassen sich mit Hilfe von **Junktoren** wie „und“ oder „oder“ miteinander verknüpfen. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage bestimmt sich allein aus dem Wahrheitswert der elementaren Aussagen. Den Wahrheitswert von verknüpften Aussagen kann man sich an Schaltkreisen veranschaulichen: Wenn Strom fließt, ist die zusammengesetzte Aussage wahr.

Definition 1.13

1. Die **Negation** $\neg A$ verneint eine Aussage A und dreht damit den Wahrheitswert um, d.h.:
   Die Negation einer Aussage ist wahr genau dann, wenn die Aussage falsch ist.
   Die Negation einer Aussage ist falsch genau dann, wenn die Aussage wahr ist.
2. Die **Konjunktion** (UND-Verknüpfung) $A \wedge B$ von zwei Aussagen A, B ist wahr genau dann, wenn beide Aussagen wahr sind. Die Konjunktion von zwei Aussagen ist falsch genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen falsch ist. Die UND-Verknüpfung entspricht einer Reihenschaltung im elektrischen Schaltkreis.
3. Die **Disjunktion** (ODER-Verknüpfung) $A \vee B$ von zwei Aussagen A, B ist wahr genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Die Disjunktion von zwei Aussagen ist falsch genau dann, wenn beide Aussagen falsch sind.
   Die ODER-Verknüpfung entspricht einer Parallelschaltung im elektrischen Schaltkreis.

Definition 1.14

Eine Aussage B **folgt** aus einer Aussage A (oder: A impliziert B)

$$A \Rightarrow B$$

falls gilt: Immer, wenn A wahr ist, ist auch B wahr. Man sagt, dass B **notwendige Bedingung** von A ist, und A ist **hinreichende Bedingung** für B.

Wichtig: B kann wahr sein, auch wenn A falsch ist!

Beispiel 1.15

Das Verschwinden der 1. Ableitung in einem Punkt ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwerts, d.h.:
In einem Punkt x hat eine differenzierbare Funktion f einen Extremwert (Hoch- oder Tiefpunkt). $\Rightarrow$ Die 1. Ableitung der Funktion f ist in x gleich Null.
Die 1. Ableitung kann in x aber gleich Null sein, ohne dass die Funktion dort einen Extremwert hat. Die Bedingung ist also nicht hinreichend für einen Extremwert.

Der Folgerungspfeil $\Rightarrow$ darf nur verwendet werden, wenn man weiß, dass die Aussage rechts des Pfeils aus der Aussage links des Pfeils *folgt*! Ist eine Aussage notwendig und hinreichend für eine zweite Aussage, spricht man davon, dass Aussagen äquivalent sind. Äquivalente Aussagen lassen sich durcheinander ersetzen, ohne dass sich dadurch der Wahrheitswert ändert. Äquivalenzen tauchen beim Rechnen bei allen Term- oder Gleichungsumformungen auf.

Definition 1.16

Eine Aussage A ist **äquivalent** zu einer Aussage B

$$A \Leftrightarrow B$$

falls gilt: Genau dann, wenn A wahr ist, ist auch B wahr.
A ist **hinreichend und notwendig** für B.
B ist hinreichend und notwendig für A.

Äquivalenzumformungen einer Gleichung sind solche Umformungen, die den Wahrheitswert der Gleichung nicht verändern. Im Beispiel der Gleichungen bedeutet dies, dass die Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen nicht verändert wird. Man darf also getrost den Äquivalenzpfeil $\Leftrightarrow$ verwenden, um dies zu verdeutlichen:

1. Addition/ Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten.
2. Multiplikation mit einem Term ($\neq 0$!!) auf beiden Seiten.
3. Beide Seiten zur Potenz erheben: $\lg(5) = \lg(x) \Leftrightarrow 10^{\lg(5)} = 10^{\lg(x)} \Leftrightarrow 5 = x$.
4. Beide Seiten logarithmieren: $e^x = 23 \Leftrightarrow x = \ln 23$.
5. Potenzieren oder Wurzelziehen mit **un**geraden Exponenten: $(x+1)^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow (x+1) = 2^3$.

Bemerkung 1.2. ***Vorsicht:*** *Das Potenzieren mit* ***geraden Exponenten*** *ist keine Äquivalenzumformung, denn*

$$x^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; x = 4 \quad \textit{oder} \quad x = -4.$$

Beispiel 1.17

$$
\begin{aligned}
2e^x - e^{-2x} &= 0 \\
e^x \left(2 - e^{-3x}\right) &= 0 \quad \text{Teilen durch } e^x \text{ erlaubt, da } e^x > 0 \\
2 - e^{-3x} &= 0 \quad \text{Addition von } e^{-3x} \text{ auf beiden Seiten} \\
2 &= e^{-3x} \quad \text{Anwenden von ln auf beiden Seiten} \\
\ln 2 &= -3x \quad \text{Teilen durch } -3 \text{ auf beiden Seiten} \\
-\frac{\ln 2}{3} &= x
\end{aligned}
$$

1.1.5 Wahrheitstafeln

Wir berechnen den Wahrheitswert von verknüpften Aussagen mit Hilfe von Wahrheitstafeln. In der Regel bezeichnen wir den Wahrheitswert „falsch“ mit 0, den Wahrheitswert „richtig“ mit 1.

Beispiel 1.18

1.

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Tabelle 1.1 Wahrheitstafel $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \vee B)$.

Da die Wahrheitswerte der zusammengesetzten $A \Rightarrow B$ mit den Wahrheitswert $\neg A \vee B$ für alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten von A, B übereinstimmen, sind die beiden Aussagen äquivalent. Es gilt

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B$$

2.

A	B	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \not B$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

Tabelle 1.2 Wahrheitstafel $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Wiederum können wir aus der Wahrheitstafel schließen, dass

$$\neg(A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg B$$

gilt. Diese Äquivalenz ist sehr wichtig, wenn man zeigen möchte, dass eine Folgerung falsch ist. In diesem Fall kann man zeigen, dass A und gleichzeitig $\neg B$ richtig sind.

1.1.6 Etwas Prädikatenlogik

Die Mathematik kann nicht mit Hilfe der Aussagenlogik formalisiert werden. Ansonsten ließen sich alle mathematischen Aussagen durch rein mechanische Anwendung von Regeln (d.h. durch einen Algorithmus) wie in den Wahrheitstafeln beweisen oder widerlegen.
Zur Formulierung mathematischer Aussagen benötigt man die Prädikatenlogik erster Stufe. Eine typische Aussage A wie beispielsweise „A=x ist schwarz." hängt von dem ab, was wir für x einsetzen. Wir können sie schreiben als

$$A(x) = x \text{ ist schwarz.}$$

Die Aussage wird ein Prädikat, d.h. eine Eigenschaft, mit einer freien Variable x, für die wir unterschiedliche Objekte einsetzen können. In der modernen Logik spricht man auch von einer Aussage*funktion*, da ein Prädikat tatsächlich als eine Funktion (s. Definition in Abschnitt 1.3) definiert werden kann, die als Argumente verschiedene Objekte x aus irgendeiner Menge „akzeptiert" und als Wert einen Wahrheitswert (0 oder 1) zurückgibt. Damit hat ein Prädikat (oder eine Aussagefunktion) nur dann einen Wahrheitswert, wenn für x ein konkretes Objekt eingesetzt wird (z.B „die Computermaus von Frau XY") oder wenn das x mit Hilfe von Quantoren gebunden wird. Auf jeden Fall müssen wir festlegen, auf welche Objekte x oder welches Objekt x sich die Aussage beziehen soll, um den Wahrheitswert angeben zu können. Beispielsweise wie folgt: Sei M die Menge aller Gegenstände in Konstanz, dann formulieren wir:

$$\exists x \in M : A(x).$$

Das Zeichen $\exists$ ist ein **Quantor**, genauer der **Existenzquantor**, und liest sich als „es gibt ein". Er legt nicht fest, wie viele es genau gibt, es können alle Elemente (einer Menge), aber auch nur ein einziges existieren. Wir werden auch den Quantor $\exists!$ verwenden, um auszudrücken, dass genau ein Objekt existiert.
Neben dem Existenzquantor gibt es auch den **Allquantor** $\forall$, der sich als „für alle" liest.
Neben einstelligen Prädikaten wie $A(x)$ gibt es natürlich auch mehrstellige Prädikte, die verschiedene Variablen besitzen, z.B.

$$A(x, y) : x + y \text{ ist eine gerade Zahl.}$$

Wir steigen nicht viel tiefer in die Logik ein. Für unsere Veranstaltung sind nur zweierlei Dinge wichtig:

1. **Wenn wir mehrere Quantoren hintereinander verwenden, ist die Reihenfolge für den Wahrheitswert der Aussage entscheidend**: Die Aussage
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$$
liest sich als „Zu jeder von Null verschiedenen reellen Zahl x existiert eine reelle Zahl y (die von x abhängt!!), so dass $x \cdot y = 1$ ist." Diese Aussage ist wahr, denn wir können zu jedem x die Zahl $y = \frac{1}{x}$ definieren, so dass gilt $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Dahingegen liest sich die Aussage mit vertauschten Quantoren
$$\exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = 1$$
als „Es gibt eine reelle Zahl (dieselbe für alle x!!), so dass für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen x gilt: $x \cdot y = 1$." Diese Aussage ist falsch. Um zu zeigen, dass sie falsch ist, genügt es zu jedem y ein x zu finden, so dass $x \cdot y \neq 1$. Das ist aber leicht, denn für jedes $x \neq \frac{1}{y}$ ist dies wahr. Dieses Beispiel führt uns zu der Frage, wie man quantifizierte Aussagen verneint:

2. Sei $A(n)$ die Aussagefunktion $n < 10$. Die Aussage
$$\exists n \in \mathbb{N} : n < 10$$
liest sich als „Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner als 10 ist." Wenn wir diese Aussage verneinen, wird daraus: „Es stimmt nicht, dass es eine natürliche Zahl gibt, die kleiner als 10 ist", das bedeutet: „Alle natürlichen Zahlen sind größer als oder gleich 10." Die verneinte Aussage wird also zu:
$$\begin{aligned} \neg\,(\exists n \in \mathbb{N}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : \neg A(n) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 10. \end{aligned}$$
Ein zweites Beispiel mit einem Allquantor: Sei $A(n)$ die Aussagefunktion „n+3 ist gerade". Die Aussage
$$\forall n \in \mathbb{N} : n + 3 \text{ ist gerade}$$
liest sich als „Jede natürliche Zahl wird, wenn man drei addiert, eine gerade Zahl." Wenn wir die Aussage verneinen erhalten wir:
$$\begin{aligned} \neg\,(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : n + 3 \text{ ist ungerade}. \end{aligned}$$

Als Faustformel kann man sich merken: **Bei Vertauschung der Verneinung $\neg$ mit einem Quantor wird aus einem All- ein Existenzquantor und aus einem Existenz- ein Allquantor.**
Liegt eine zweistellige Aussagefunktion vor, gilt diese Regel ebenfalls: Sei $A(x, y)$ die Aussagefunktion $x \leq y$. Wir bilden die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y,$$

die sich als „Es existiert eine reelle Zahl, die kleiner als oder gleich jede beliebige reelle Zahl ist." liest. Die Verneinung lautet dann „Es stimmt nicht, dass es eine reelle Zahl gibt,...". Dies ist wiederum gleichbedeutend dazu, dass sich zu jeder beliebigen reellen Zahl eine reelle Zahl finden läßt, die kleiner ist. In Formeln wird das zu:

$$\begin{aligned} \neg\left(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : A(x, y)\right) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \neg\left(\forall y \in \mathbb{R} : A(x, y)\right) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : \neg A(x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y. \end{aligned}$$

Wenn wir also zeigen wollen, dass die Aussage $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : A(x, y)$ falsch ist, müssen wir zeigen, dass die Verneingung wahr ist. Wir zeigen also, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $x > y$ ist. Das ist leicht, indem wir $y = x - 1$ wählen. Es gibt somit keine kleinste reelle Zahl.

1.2 Relationen

In diesem Abschnitt lernen Sie die Begriffe

- Relation, reflexiv, transitiv, (anti)symmetrisch;
- Äquivalenz- und Ordnungsrelation;
- Äquivalenzklasse;
- Partition

kennen und sehen an Beispielen, wie man

- die Definitionen überprüfen kann, insbesondere, ob eine Relation vorliegt und wenn ja, welche Eigenschaften diese besitzt;
- überprüft, ob eine Äquivalenz- oder Ordnungsrelation vorliegt;
- die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation bestimmt.

Der Begriff *Relation* ist lateinischen Ursprungs und bedeutet so viel wie *Beziehung*. Das Besondere an einer Beziehung ist, dass sie *zwischen* verschiedenen Objekten besteht. *Kindsein von*, *älter sein als*, *befreundet sein mit* sind Beispiele für Beziehungen, die zwischen Menschen bestehen können. Dieser Kern des Begriffs Beziehung wird in der folgenden Definition formalisiert:

Definition 1.19

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset X^k$ heißt **k-stellige Relation** auf X.

Bemerkung 1.3. *1. Mit $X^k = X \times \cdots \times X$ bezeichnen wir die Produktmenge von X. Sie besteht aus den geordneten k-Tupeln $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in X$ für alle $i = 1, \ldots, k$.*

2. Wir beschäftigen uns vor allem mit zweistelligen oder binären Relationen $\mathcal{R} \subset X^2$. Wenn für ein Pärchen $(x, y) \in \mathcal{R}$ gilt, schreibt man auch kürzer $x\mathcal{R}y$ oder $x \sim_{\mathcal{R}} y$.

3. In manchen Lehrbüchern wird erlaubt, dass eine Relation eine Teilmenge der Produktmenge unterschiedlicher Mengen ist, also $\mathcal{R} \subset X_1 \times \ldots X_k$ mit X_i nichtleere Menge für $i = 1, \ldots, k$.

Beispiel 1.20

1. Sei X die Menge aller Einwohner Deutschlands. Auf der Menge X definieren

wir die folgende Relation $\mathcal{R} \subset X \times X$:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ ist das Kind von } y.$$

2. Wir definieren eine Relation $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

$$(n, m) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad n \text{ ist ein (positives) Vielfaches von } m.$$

3. Sei X die Menge der Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir definieren eine Relation $||$ auf der Menge X:

$$(g, h) \in || \quad :\Leftrightarrow \quad g \text{ ist parallel zu } h.$$

Betrachtet man die obigen Beispiele stellt man fest, dass Relationen unterschiedliche Eigenschaften besitzen, die wir im folgenden formalisieren wollen. Beispielsweise kann kein Mensch x Kind von sich selbst sein, aber für eine Gerade gilt durchaus, dass jede Gerade parallel zu sich selbst ist.

Definition 1.21

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$ auf X heißt **reflexiv**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$(x, x) \in \mathcal{R}.$$

1. Die Relation

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ ist das Kind von } y.$$

ist nicht reflexiv, denn kein Einwohner Deutschlands ist das Kind von sich selbst.

2. Die Relation

$$(n, m) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad n \text{ ist ein Vielfaches von } m.$$

ist reflexiv, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n = 1 \cdot n$, also $(n, n) \in \mathcal{R}$.

3. Die Relation

$$(g, h) \in || \quad :\Leftrightarrow \quad g \text{ ist parallel zu } h.$$

ist reflexiv, denn jede Gerade ist parallel zu sich selbst: Für jede Gerade g in der Ebene gilt: $g \parallel g$.

Definition 1.22

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$ auf X heißt **symmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$ auf X heißt **antisymmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \land (y, x) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

1. Die Relation
$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ ist das Kind von } y.$$
ist nicht symmetrisch, denn sei x das Kind von y, dann ist y sicherlich nicht das Kind von x. Die Relation ist auch nicht antisymmetrisch.

2. Die Relation
$$(n, m) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad n \text{ ist ein Vielfaches von } m.$$
ist antisymmetrisch, denn sei $(n, m) \in \mathcal{R}$ und $(m, n) \in \mathcal{R}$, dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, so dass $n = k_1 m$ und $m = k_2 n$. Setzen wir m aus der 2. Gleichung in die 1. Gleichung ein, erhalten wir $n = k_1 k_2 n$. Damit folgt $k_1 = k_2 = 1$ und somit $n = m$.

3. Die Relation
$$(g, h) \in \parallel \quad :\Leftrightarrow \quad g \text{ ist parallel zu } h.$$
ist symmetrisch, denn für jede beliebiges Geradenpaar g, h gilt: Wenn g parallel zu h ist, dann ist auch h parallel zu g.

Definition 1.23

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$ auf X heißt **transitiv**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \land (y, z) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in \mathcal{R}.$$

1. Die Relation
$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ ist das Kind von } y.$$
ist nicht transitiv, denn sei x das Kind von y und y das Kind von z, dann ist x nicht das Kind von z, sondern das Enkelkind.

2. Die Relation

$$(n, m) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad n \text{ ist ein Vielfaches von } m.$$

   ist transitiv, denn sei $(m, n) \in \mathcal{R}$ und $(n, o) \in \mathcal{R}$, dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, so dass $m = k_1 n$ und $n = k_2 o$. Setzen wir n aus der 2. Gleichung in die 1. Gleichung ein, erhalten wir $m = k_1 k_2 o$. Damit folgt, dass m ein Vielfaches von o ist, also $(m, o) \in \mathcal{R}$.

3. Die Relation

$$(g, h) \in || \quad :\Leftrightarrow \quad g \text{ ist parallel zu } h.$$

   ist transitiv, denn für jede beliebige Geraden g, h, i gilt: Wenn g parallel zu h ist und h parallel zu i, dann ist auch g parallel zu i.

Die Menge der reellen Zahlen hat eine sehr wichtige Eigenschaft: Für jedes reelle Zahlenpaar $x, y \in \mathbb{R}$ ist entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$. Aufgrund dieser Eigenschaft kÃ¶nnen wir reelle Zahlen auch auf dem Zahlenstrahl anordnen. Sie besitzen eine Ordnung. Was macht eine Ordnung aus? Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

Beispiel 1.24

Wir definieren die folgende Relation auf $\mathbb{R}$:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y.$$

Diese Relation ist reflexiv, denn für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq x$. Die Relation ist antisymmetrisch, denn für jedes Zahlenpaar $x, y \in \mathbb{R}$, für das $x \leq y$ und $y \leq x$ gilt, folgt $x = y$. Die Relation ist auch transitiv, denn für alle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$, für die $x \leq y$ und $y \leq z$ gilt, folgt $x \leq z$.

Wir nennen im Folgenden jede Relation, die diese drei Eigenschaften besitzt, eine Ordnungsrelation:

Definition 1.25

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heißt **Ordnungsrelation**.

Eine Ordnungsrelation $\mathcal{R} \subset X^2$ erlaubt in der Regel nicht, je zwei $x, y \in X$ miteinander zu vergleichen:

Beispiel 1.26

Sei $M = \{0, 1\}$. Dann definiert $\subset$ eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Sie erlaubt aber nicht, je zwei Teilmengen miteinander zu vergleichen, z.B. $\{0\} \not\subset \{1\}$ und $\{1\} \not\subset \{0\}$

Für die Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ gilt hingegen, dass für je zwei $x, y \in X$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Eine solche Ordnungsrelation nennt man **total** (oder linear). Eine totale Ordnungsrelation erlaubt es, alle Elemente der Größe nach anzuordnen.
Neben der Ordnungsrelation wollen wir die Äquivalenzrelation kennenlernen, die in der Mathematik eine herausragende Rolle spielt.

Definition 1.27

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X^2$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelation**.

Beispiel 1.28

Sei X die Menge aller Studierender der HTWG. Wir definieren die folgende Relation auf X:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ studiert denselben Studiengang wie } y.$$

Diese Relation ist reflexiv, denn jeder studiert denselben Studiengang wie er selbst; sie ist symmetrisch, denn, wenn x dasselbe studiert wie y, studiert natürlich auch y dasselbe wie x; und sie ist transitiv, denn wenn x und y sowie y und z dasselbe studieren, studieren auch x und z dasselbe.
Eine Äquivalenzrelation erlaubt nun das Folgende: Wenn wir jetzt einen Studierenden x_1 herausgreifen und alle Studierende y suchen, die dasselbe studieren, erhalten wir eine Teilmenge X_1 von X. Nehmen wir nun einen zweiten Studierenden x_2, der etwas anderes studiert, und suchen wieder alle Studierenden y, die dasselbe wie x_2 studieren, erhalten wir eine zweite Teilmenge X_2 von X. In dieser Teilmenge sind nur Studenten enthalten, die nicht in X_1 sind: beide Teilmengen sind disjunkt: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Wir können nun so fortfahren und erhalten auf diese Weise eine **Zerlegung** der Menge X in disjunkte Teilmengen $X_1, \ldots, X_k$, und in jeder Menge sind Studierende eines Studiengangs zusammengefasst. Die Teilmengen werden als **Äquivalenzklassen** bezeichnet. Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge X liefert auf natürliche Art und Weise eine Zerlegung der Menge X in disjunkte Teilmengen. In gewisser Weise liefert eine Äquivalenzrelation eine Kategorisierung oder Strukturierung der Menge.

Definition 1.29

Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{R} \subset X^2$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann heißt zu jedem $x \in X$ die Menge

$$[x]_{\mathcal{R}} := \left\{ y \in X \,\middle|\, (x,y) \in \mathcal{R} \right\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x.

Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich X, und je zwei Äquivalenzklassen sind disjunkt. Man sagt, dass die Äquivalenzklassen eine **Zerlegung** (oder Partition) von X bilden.
Eine der Äquivalenzrelationen, mit denen wir uns viel in diesem Semester beschäftigen werden, ist die Kongruenzrelation:

Beispiel 1.30

Es sei die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$ definiert:

$$a \equiv_2 b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}: \; a - b = 2k.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn:

reflexiv? Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a - a = 0 = 2 \cdot 0$, also $a \equiv_2 a$.

symmetrisch? Gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$ $a - b = 2k$, dann ist (Multiplikation mit (-1)): $b - a = 2(-k)$. Also ist $b \equiv_2 a$.

transitiv? Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 2k$ und $b - c = 2k'$ für $k, k' \in \mathbb{Z}$, dann folgt durch Addition beider Gleichungen $a - b + b - c = 2k + 2k'$, also $a - c = 2(k + k')$. Damit ist $a \equiv_2 c$.

Die Äquivalenzklassen sehen wie folgt aus:

$$[0] = \left\{ a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z}: \; a - 0 = 2k \right\} = \left\{ 2k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$
$$[1] = \left\{ a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z}: \; a - 1 = 2k \right\} = \left\{ 2k + 1 \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$

Die Äquivalenzrelation $\equiv_2$ zerlegt also die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen in zwei Teilmengen: die ungeraden und die geraden Zahlen.

1.3 Abbildungen

In diesem Abschnitt sollen Sie die folgenden Begriffe

- Abbildung, injektiv, surjektiv, bijektiv;
- Verknüpfung/ Komposition von Abbildungen;
- Inverse Abbildung;
- Bild, Urbild;
- gleichmächtige Mengen

kennenlernen und an Beispielen sehen, wie man

- Eigenschaften einer Abbildung nachweist;
- Bild, Urbild und inverse Abbildung von einer Abbildung berechnet
- beweist, dass zwei Mengen gleichmächtig sind

Sie kennen sicherlich bereits den Begriff einer Funktion wie bspw. $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Die wesentliche Eigenschaft einer Funktion ist, dass jedem x nur genau ein $y = f(x)$ zugeordnet wird. Die Zuordnung ist eindeutig. Wir verallgemeinern den aus der Schule bekannten Begriff und lassen als Definitions- und Wertebereich beliebige Mengen zu:

Definition 1.31

Seien X, Y Mengen. Dann heißt eine Vorschrift $f : X \to Y$, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt **Abbildung** oder **Funktion**. Man schreibt $y = f(x)$ und nennt y das **Bild** von x; x ein **Urbild** von y.
Die Menge X wird als **Definitionsbereich**, die Menge Y als **Wertebereich** bezeichnet. Die Menge $f(X) \subset Y$ heißt das **Bild** von X unter f.
Die Menge $G_f = \left\{(x, f(x)) \;\middle|\; x \in X\right\}$ heißt **Graph** der Funktion.

Bemerkung 1.4. *1. In manchen Lehrbüchern verwendet man den Begriff Funktion ausschließlich für eine Abbildung auf den reellen Zahlen. Ich verwende Abbildung und Funktion als Synonyme.*

2. Achtung: Das Bild $y = f(x)$ von x ist eindeutig, deswegen das Bild; hingegen ist das Element x, so dass $y = f(x)$, möglicherweise nicht eindeutig, deswegen ist x nur ein Urbild von y.

3. *Genaugenommen ist eine Abbildung durch ein Tripel aus Definitionsbereich, Wertebereich und Vorschrift definiert: (X, Y, f). Zwei Abbildungen sind nur gleich, wenn sie in Definitions-, Wertebereich und Vorschrift übereinstimmen. Es ist deswegen immer wichtig, nicht nur die Vorschrift f anzugeben, sondern auch die Mengen, die f aufeinander abbildet.*

Beispiel 1.32

1. Sei X die Menge aller Studierenden der HTWG. Die Vorschrift $f : X \to \mathbb{N}$, die jedem Studierenden seine Immatrikulationsnummer zuordnet, ist eine Abbildung.
2. Sei X die Menge aller Studierenden der HTWG und Y die Menge der angebotenen Studiengänge an der HTWG. Die Vorschrift $f : X \to Y$, die jedem Studierenden den Studiengang zuordnet, in dem er immatrikuliert ist, ist eine Abbildung, falls die Immatrikulation in zwei verschiedene Studiengänge verboten ist.
3. Die Zuordnung $f : X \to X$, $x \mapsto x$ ist eine Funktion, heißt **Identität** und wird häufig mit id_X bezeichnet.
4. Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist natürlich eine Abbildung.
5. Wieviele Abbildungen $f : M \to M$ gibt es auf der Menge $M = \{0, 1\}$? Entweder wird 0 auf 1 oder 0 abgebildet und 1 wird auf 1 oder 0 abgebildet. Damit erhalten wir die Abbildungen $f_{11}(0) = f_{12}(0) = 0$ und $f_{11}(1) = 0$ bzw. $f_{12}(1) = 1$ und $f_{21}(0) = f_{22}(0) = 1$ sowie $f_{21}(1) = 0$ bzw. $f_{22}(1) = 1$, also 4 verschiedene Abbildungen. Die Anzahl der Abbildungen entspricht gerade der Anzahl 2^2, zwei Zahlen auf zwei Stellen mit Wiederholung anzuordnen, die Ihnen aus der Kombinatorik bekannt sein sollte: 00,01,10,11.
   Entsprechend gibt es 3^2 Abbildungen von einer zwei- in eine dreielementige Menge.
6. Sei M eine endliche Menge. Wir ordnen jeder Teilmenge $A \subset M$ die Anzahl $|A|$ seiner Elemente zu. Damit erhalten wir eine Funktion $f : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $A \mapsto |A|$. Dabei bezeichne $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von M.

Wenn Definitions- und Wertebereich von zwei Abbildungen „zueinander passen“, können wir sie hintereinander ausführen.

Definition 1.33

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y' \to Z$ Funktionen, so dass $f(X) \subset Y'$. Dann wird durch

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

eine Funktion definiert.
Man nennt $g \circ f$ die **Komposition** von f und g und liest „g nach f“.

Bemerkung 1.5. *Bei der Komposition von Funktionen ist die Reihenfolge wichtig. In der Regel definieren $f \circ g$ und $g \circ f$ unterschiedliche Funktionen – auch wenn sie beide definiert sind.*

Beispiel 1.34

1. Seien $f : \{a, b\} \to \{0, 1\}$, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ und $g : \{0, 1\} \to \{1, 2\}$, $g(n) = n+1$, dann ist $g \circ f$ eine Funktion mit $g(f(a)) = 1$ und $g(f(b)) = 1$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x) = x + 2$ und $g(x) = \ln(x^2 + 1)$, dann ist $(g \circ f)(x) = g(x+2) = \ln((x+2)^2+1)$. Umgekehrt ist $(f \circ g)(x) = f(\ln(x^2 + 1)) = \ln(x^2 + 1) + 2$.

Definition 1.35

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Beispiel 1.36

1. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ injektiv? Wir vermuten, dass f nicht injektiv ist, da jedes $y > 0$ zwei Urbilder besitzt, nämlich $\pm\sqrt{y}$. Wir zeigen diese Vermutung wie folgt: Wir wählen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$. Es ist $x_1 \neq x_2$, aber $f(x_1) = f(x_2) = 4$. Somit ist die Aussage, dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ widerlegt. Schränken wir die Funktion auf $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ ein, erhalten wir eine injektive Funktion: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.

2. Wieviele injektive Funktionen $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ gibt es? Damit eine Funktion f injektiv ist, muss jeder Wert ein eindeutiges Urbild besitzen. Ist $f(0) = 0$, muss also notwendigerweise $f(1) = 1$ gelten, damit f injektiv ist. Ist $f(0) = 1$, muss also notwendigerweise $f(1) = 0$ gelten. Somit gibt

es genau zwei verschiedene injektive Funktionen von $\{0,1\} \to \{0,1\}$.

Bemerkung 1.6. *Man kann jede Funktion wie folgt injektiv machen: Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $X \times X$ wie folgt:*

$$x_1 \equiv x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Dadurch erhalten wir eine Zerlegung von X in Äquivalenzklassen

$$[x] := \left\{ \tilde{x} \in X \;\middle|\; f(x) = f(\tilde{x}) \right\}.$$

In jeder Äquivalenzklasse können wir einen Repräsentanten $x \in [x]$ wählen. Wenn wir nun den Definitionsbereich auf die Menge der Repräsentanten beschränken, erhalten wir eine injektive Funktion.

Definition 1.37

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : \; f(x) = y.$$

Bemerkung 1.7. *Man kann jede Funktion $f : X \to Y$ surjektiv machen, indem man den Wertebereich Y entsprechend auf das Bild $f(X)$ einschränkt.*

Beispiel 1.38

Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ surjektiv? Nein, denn für $y < 0$ existiert kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $y = x^2$, denn $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Grenzen wir den Wertebereich aber auf $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ ein, dann wird die Funktion surjektiv: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist surjektiv.

Definition 1.39

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv.

Beispiel 1.40

1. Wie wir in den obigen Beispielen gesehen haben, ist die Normalparabel eingeschränkt auf nichtnegative reelle Zahlen bijektiv: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.
2. Ist die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ bijektiv? Wir überprüfen Injektivität und Surjektivität:
   injektiv? Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $f(n) = 2n = 2m = f(m)$, dann folgt daraus nach Division mit 2 $n = m$ und somit die Injektivität.

surjektiv? Sei $m \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $m = 2n = f(n)$ ist. Die Funktion ist somit nicht surjektiv.
Wir schränken die Funktion auf den Wertebereich $2\mathbb{N}$ der geraden Zahlen ein und erhalten eine bijektive Funktion.

3. Sei X die Menge aller Studierenden der HTWG. Die Vorschrift $f : X \to \mathbb{N}$, die jedem Studierenden seine Immatrikulationsnummer zuordnet, ist eine Abbildung. Diese Abbildung ist natürlich bijektiv, wenn man den Wertebereich auf die aktuell vergegebenen Immatrikulationsnummern beschränkt. Insbesondere sollte sie injektiv sein, da es nicht vorkommen sollte, dass zwei verschiedenen Studierende dieselbe Immatrikulationsnummer besitzen.

Bijektive Funktionen sind aus dem folgenden Grund in Anwendungen so wichtig:

Beweis 1.8. *Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann existiert eine Funktion $g : Y \to X$, so dass gilt:*

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

*Die Funktion g heißt **inverse Funktion** oder **Umkehrfunktion** und wird mit f^{-1} bezeichnet.*

Konkret am Beispiel der Immatrikulationsnummer bedeutet dies, dass wir – wenn wir das Bild kennen – eindeutig wieder zum Urbild zurückkommen. Wenn man die Immatrikulationsnummer kennt, kann man diese eindeutig einem Studierenden zuordnen, und umgekehrt. Durch die Anwendung bijektiver Funktionen gehen also keine Informationen verloren!

Beispiel 1.41

1. Wir haben oben gesehen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ bijektiv ist. Sie besitzt somit eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, nämlich die Quadratwurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Wir rechnen leicht nach, dass

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

gilt (Betragsstriche können wir uns sparen, da $x \geq 0$ ist.)

2. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch $n \mapsto \frac{n}{2}$ definiert.

Eine wichtige Anwendung bijektiver Funktionen ist die folgende:

Beweis 1.9. *Seien A, B zwei Mengen.*
Es existiert genau dann eine bijektive Funktion $f : A \to B$, wenn A und B dieselbe

Anzahl an Elementen besitzen, d.h. $|A| = |B|$.
Man nennt die Mengen A, B *in diesem Fall* ***gleichmächtig***.

Bemerkung 1.10. *Strenggenommen wird der Begriff der Mächtigkeit mit Hilfe bijektiver Funktionen definiert: Man sagt, dass eine Menge* A $n \in \mathbb{N}$ *Elemente besitzt, falls eine bijektive Abbildung* $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *existiert. Diese Definition formalisiert unsere Vorstellung vom Zählen: Wenn wir zählen, ordnen wir jedem unterscheidbaren Objekt eine natürliche Zahl in aufsteigender Reihenfolge zu. Genau dies ist eine Bijektion, die der endlichen Menge, deren Elemente wir zählen wollen, die Zahlen* $1, 2, \ldots$ *zuordnet und uns mit Hilfe dieser Bijektion die Anzahl an Elementen liefert.*
Ich habe diesen Begriff in Abschnitt1.1 etwas unsauber eingeführt und auf Ihre Anschauung vertraut.
Durch diese Definition wird auch deutlich, dass es unterschiedliche „Unendlich" in der Mathematik gibt, was erst einmal – abgesehen davon, dass schon der Begriff der Unendlichkeit an sich schwierig genug zu begreifen ist – nicht leicht zu veranschaulichen ist. Beispielsweise besitzen die Mengen $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{R}$ *jeweils unendlich viele Elemente, aber sie sind nicht gleichmächtig! Die Menge der reellen Zahlen besitzt mehr Elemente. Um die Unterschiede von Mengen wie* $\mathbb{N}$*, deren Elemente sich abzählen lassen, zu Mengen wie* $\mathbb{R}$*, die sich nicht abzählen lassen, zu quantifizieren, benötigt man Bijektionen.*

Beispiel 1.42

1. *Behauptung: Die Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *ist gleichmächtig zu der Menge der geraden natürlichen Zahlen* $2\mathbb{N}$. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, n \mapsto 2n$. Wir haben bereits gezeigt, dass es sich um eine bijektive Funktion handelt. Somit ist die Behauptung bewiesen.

2. *Behauptung: Die Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *ist gleichmächtig zu der Menge der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$. Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$
Diese Abbildung ist bijektiv: Die Injektivität sieht man direkt. Die Surjektivität ergibt sich wie folgt: Sei $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, dann existiert ein n, so dass $m = \frac{n}{2}$, nämlich $n = 2m \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq 0$, dann existiert ein n, so dass $m = -\frac{n-1}{2}$, nämlich $n = 1 - 2m$. Da $m \leq 0$ ist, ist $n \geq 1$ und somit $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung ist damit bewiesen.

3. *Behauptung: Die Menge* $(-1, 1)$ *ist gleichmächtig zu der Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

Wir definieren
$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$$
und zeigen, dass es sich um eine bijektive Funktion handelt.
injektiv? Seien $x_1, x_2 \in (-1,1)$ beliebig, dann müssen wir zeigen, dass aus $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1 = x_2$ folgt:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\frac{x_1}{1-x_1^2} &= \frac{x_2}{1-x_2^2} \\
x_1(1-x_2^2) &= x_2(1-x_1^2) && \Big| \text{auflösen nach } x_1 \\
0 &= -x_2x_1^2 - x_1(1-x_2^2) + x_2 && \Big| \text{abc-Formel: } a = -x_2,\ b = -(1-x_2^2), c = x_2 \\
x_1 &= \frac{(1-x_2^2) \pm \sqrt{(1-x_2^2)^2 + 4x_2^2}}{-2x_2}
\end{aligned}$$

Wir schließen hier $x_2 = 0$ aus! Ist $x_2 = 0$, folgt direkt $x_1 = 0$ und somit die gewünschte Behauptung.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(1-x_2^2) \pm \sqrt{(1+x_2^2)^2}}{-2x_2} \\
x_1 &= \frac{1-x_2^2 \pm 1 + x_2^2}{-2x_2} \\
x_1 &= -\frac{1}{x_2}, \text{ oder } x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

Die Lösung $x_1 = x_2$ ist die gewünschte. Für die zweite Möglichkeit $x_1 = -\frac{1}{x_2}$ sieht man relativ leicht, dass $x_1 \notin (-1,1)$ für $x_2 \in (-1,1)$. Somit scheidet diese Möglichkeit aus, da wir $x_1, x_2 \in (-1,1)$ vorausgesetzt haben. Die Funktion ist also injektiv.
surjektiv? Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $x \in (-1,1)$ existiert, so dass $y = f(x)$. Wir lösen also die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x}{1-x^2} \\
y(1-x^2) &= x && \Big| \text{nach } x \text{ auflösen} \\
0 &= yx^2 + x - y && \Big| \text{abc-Formel: } a = y, b = 1, c = -y.
\end{aligned}$$