

Auf diesem Übungsblatt sollen Sie die folgenden **Begriffe** bzw. **Sätze** wiederholen:

- lineares Gleichungssystem
- (erweiterte) Koeffizientenmatrix
- Rang

Sie sollen üben

- Gauß-Algorithmus zum Lösen eines LGS und zum Berechnen des Rangs einer Matrix anzuwenden,
- zu bestimmen, wie viele Lösungen ein LGS hat, ohne die Lösung auszurechnen

Verständnisfragen

1. Haben reelle lineare Gleichungssysteme mit zwei verschiedenen Lösungen immer unendlich viele Lösungen?
2. Wenn ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit n Unbekannten und n Gleichungen für **ein** $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, ist es dann auch für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar?
3. Folgt aus $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist?
4. (a) Ein lineares Gleichungssystem besitzt dieselbe Anzahl an Gleichungen wie an Unbekannten oder mehr Gleichungen als Unbekannte: Was können Sie daraus über die Anzahl an Lösungen oder die Dimension des Lösungsraums schlußfolgern?
(b) Ein lineares Gleichungssystem besitzt weniger Gleichungen als Unbekannte: Was können Sie in diesem Fall über die Anzahl der Lösung(en) und die Dimension des Lösungsraums sagen?

Standardaufgaben

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & + & 5x_4 & = & 1 \\ & & & x_2 & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & & & x_3 & + & 4x_4 & = & 8 \end{array}$$

2. Es ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie geometrisch (also mit Hilfe einer Zeichnung), dass das LGS keine Lösung besitzt.

3. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, so dass das folgende lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -3x_2 & & & = 6 \\ x_1 & & +3x_3 & & = -3 \\ 2x_1 & +kx_2 & +(3-k)x_3 & & = 1 \end{array}$$

4. Geben Sie mit Hilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix an, wie viele Lösungen die folgenden Gleichungssysteme besitzen.

a)

$$\begin{array}{l} x - 3y = -1 \\ 4x + 3y = 11 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} 4x - 5y = 14 \\ 2x + 3y = -4 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}x + y = 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = \frac{15}{4} \end{array}$$

5. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 4x + ky = 4 \end{array}$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 9 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}$$

Jeder Rechenschritt muss nachvollziehbar sein!

(10 Punkte)

2. Geben Sie jeweils – wenn möglich – ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen an, das

- (a) keine,
- (b) genau eine,
- (c) genau zwei,
- (d) unendlich viele

Lösungen besitzt.

Begründen Sie Ihre Wahl bzw. warum ein solches Gleichungssystem nicht existieren kann – entweder durch eine Rechnung oder eine Skizze mit kurzer Erklärung.

(12 Punkte)

3. Betrachten Sie das folgende von $b \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & b \end{array}$$

Entscheiden Sie für welche b das lineare Gleichungssystem lösbar ist und geben Sie in diesem Fall die Lösung an.

(14 Punkte)

4. Ein Apotheker hat aus den Bestandteilen Fett, Kamille und Zink eine Hautsalbe gemischt, die 32g wiegt. Leider kennt er die genauen Mengen der einzelnen Zutaten nicht mehr. Er erinnert sich aber, dass das Fett viermal so viel wie die Kamille. Seinem Helfer fällt ein, dass er das Zink nach der Kamille abgewogen hat und ein Gewichtsstück von 2 Gramm zusätzlich auf die Waage legen musste. Welche Mengen an Fett, Kamille und Zink sind in der Hautsalbe verarbeitet?

Formulieren Sie die Fragestellung als lineares Gleichungssystem und lösen Sie es mit dem Gauß-Algorithmus. Jeder Rechenschritt muss nachvollziehbar sein.

(14 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **08.06.2020** bis zu Beginn der Vorlesung 8:00.