Unterlagen zur Vorlesung

Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Boolesche Funktionen

Gegeben: Tupel von binären Variablen $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Definition:

Eine (n-stellige) **Boolesche Funktion** ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Man nennt diese Funktionen auch Schaltfunktionen

Beispiele Boolescher Funktionen

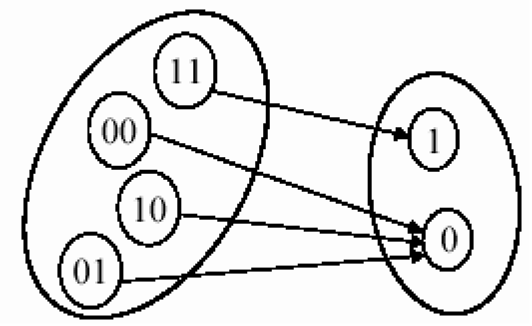
Negation: eine einstellige Boolesche Funktion

$$f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

die jedem Operanden aus dem Definitionsbereich $\{0,1\}$ einen Funktionswert aus dem Wertebereich $\{ 0,1 \}$ zuordnet.

$\wedge$ und $\vee$: zweistellige Boolesche Funktionen:

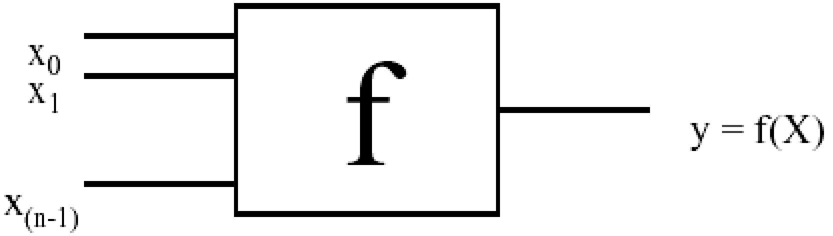
$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$



Definition von Schaltfunktionen

Binäre Funktionen binärer Variablen

$$\mathbf{f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}}$$



n unabhängige Eingangsvariablen: $x_i \in \{0,1\} \quad i = 0, \ldots, n-1$

$\mathbf{2^n}$ spezielle Eingangsbelegungen: $B_i \in \{0,1\}^n \quad i = 0, \ldots, 2^n-1$

1 abhängige Ausgangsvariable: $y \in \{0,1\}$

n Eingangsvariablen $\Rightarrow$ $\mathbf{2^{2^n}}$ Funktionen

Darstellung von Schaltfunktionen

- durch eine Funktionstabelle
- durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)

Beispiel: Funktionstabelle symbolische Form

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

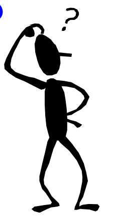
$$f = a \wedge b$$

Wichtige Schaltfunktionen

Folgende Schaltfunktionen haben eine besonders wichtige Bedeutung in der Digitaltechnik:

- UND-Funktion (Konjunktion, AND)
- ODER-Funktion (Disjunktion, OR)
- NAND-Funktion
- NOR-Funktion
- Antivalenz-Funktion (exklusives ODER, EXOR)
- Äquivalenzfunktion (EXNOR)

Wie lauten die Funktionstabellen zu diesen Funktionen ??
Gibt es Symbole für diese Grundfunktionen ?
Wo kommt das in einem Computer vor ?



Wichtige Schaltfunktionen

UND

x_2	x_1	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ODER

x_2	x_1	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NAND

x_2	x_1	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

x_2	x_1	f_8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Antivalenz

x_2	x_1	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Äquivalenz

x_2	x_1	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wichtige Schaltfunktionen

Wichtige Schaltfunktionen in <u>Funktions-Schreibweise</u>
(statt Tabelle):

$f_1 = x_2 \wedge x_1$ UND-Fktn

$f_7 = x_2 \vee x_1$ ODER-Fktn

$f_{14} = \overline{x_2 \wedge x_1}$ NAND-Fktn

$f_8 = \overline{x_2 \vee x_1}$ NOR-Fktn

$f_6 = x_2 \nleftrightarrow x_1$ Antivalenz-Fktn; x_2 antivalent x_1

$f_9 = x_2 \leftrightarrow x_1$ Äquivalenz-Fktn; x_2 äquivalent x_1

Die Nummern der einzelnen Funktionen haben historische Gründe, siehe Folie "16 mögliche Schaltfunktionen von 2 Variablen". Muss man nicht kennen!

Die Antivalenzfunktion

<u>Elementare Grundregeln für die Antivalenz-Funktion</u>

$$\boxed{y = x_2 \nLeftrightarrow x_1 \equiv \bar{x}_2 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \bar{x}_1}$$ (Definition)

<u>Regeln:</u>

$0 \nLeftrightarrow x = x \qquad 1 \nLeftrightarrow x = \bar{x}$

$x \nLeftrightarrow x = 0 \qquad x \nLeftrightarrow \bar{x} = 1$

$0 \nLeftrightarrow 0 = 0 \qquad 0 \nLeftrightarrow 1 = 1$

- <u>Kurzer Nachweis</u> (durch Einsetzen in die Definit.-Gleichung)

- $\underset{x_2}{1} \nLeftrightarrow \underset{x_1}{x} \Rightarrow \bar{1} \wedge x \vee 1 \wedge \bar{x} = 0 \wedge x \vee 1 \wedge \bar{x} = \bar{x}$ ✓

- $\overset{x_2}{x} \nLeftrightarrow \overset{x_1}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} \wedge \bar{x} \vee x \wedge x = \bar{x} \vee x = 1$ ✓

Die Äquivalenzfunktion

Elementare Grundregeln für die Äquivalenz-Funktion

$$\boxed{y = x_2 \leftrightarrow x_1 = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \vee x_2 \wedge x_1}$$ (Definition)

Regeln:

$0 \leftrightarrow x = \overline{x}$ $\quad\quad$ $1 \leftrightarrow x = x$

$x \leftrightarrow x = 1$ $\quad\quad$ $x \leftrightarrow \overline{x} = 0$

$0 \leftrightarrow 0 = 1$ $\quad\quad$ $0 \leftrightarrow 1 = 0$

Nachweis durch Einsetzen in die Definitionsgleichung:

- $0 \leftrightarrow x = \overline{0} \wedge \overline{x} \vee 0 \wedge x = 1 \wedge \overline{x} \vee 0 = 1 \wedge \overline{x} = \overline{x}$

x_2 $\quad$ x_1

- $x \leftrightarrow \overline{x} = \overline{x} \wedge x \vee x \wedge \overline{x} = 0 \vee 0 = 0$

Beispiel zur Antivalenzfunktion

Beispielaufgabe:

gegeben: $y = a \not\Leftrightarrow (b \not\Leftrightarrow (a \wedge b))$; vereinfache, soweit es geht!

Start: (mit der Klammer)

- $b \not\Leftrightarrow (a \wedge b) \overset{\text{Definitionsgleichung}}{=} \underbrace{\bar{b} \wedge (a \wedge b)}_{=0} \vee b \wedge \overline{(a \wedge b)} = b \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = b \wedge \bar{a}$

- $a \not\Leftrightarrow (b \wedge \bar{a}) = \bar{a} \wedge (b \wedge \bar{a}) \vee a \wedge \overline{(b \wedge \bar{a})}$

$$= \bar{a} \wedge b \vee a \wedge (\bar{b} \vee a)$$

$$= \bar{a} \wedge b \vee a \wedge \bar{b} \vee a = a \vee \bar{a} \wedge b$$

Absorpt.

weiter ausdistribuieren $= (\underbrace{a \vee \bar{a}}_{1}) \wedge (a \vee b) = \underline{\underline{a \vee b}}$

16 mögliche Schaltfunktionen von 2 Variablen

		verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
f_0	0000	konstant 0	0	
f_1	0001	x_1 und x_0	$x_1 \wedge x_0$	Konjunktion
f_2	0010	nicht x_0 aber x_1	$x_1 \wedge \overline{x_0}$	Inhibition
f_3	0011	identisch x_1	x_1	Identität
f_4	0100	nicht x_1, aber x_0	$\overline{x_1} \wedge x_0$	Inhibition
f_5	0101	identisch x_0	x_0	Identität
f_6	0110	x_1 ungleich x_0	$x_1 \not\leftrightarrow x_0$	Antivalenz
f_7	0111	x_1 oder x_0	$x_1 \vee x_0$	Disjunktion
f_8	1000	nicht (x_1 oder x_0)	$x_1 \overline{\vee} x_0$	NOR-Funktion
f_9	1001	x_1 gleich x_0	$x_1 \leftrightarrow x_0$	Äquivalenz
f_{10}	1010	nicht x_0	$\overline{x_0}$	Negation
f_{11}	1011	wenn x_0, dann x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	Implikation
f_{12}	1100	nicht x_1	$\overline{x_1}$	Negation
f_{13}	1101	wenn x_1, dann x_0	$x_1 \rightarrow x_0$	Implikation
f_{14}	1110	nicht (x_1 und x_0)	$x_1 \overline{\wedge} x_0$	NAND-Funktion
f_{15}	1111	konstant 1	1	Tautologie

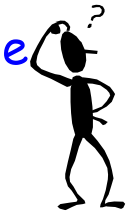
Beispiel: Farmer´s Dilemma

Der Bauer, Wolf. Zieqe und ein Kohlkopf befinden sich auf einer Flußseite. Der Bauer besitzt ein Boot, welches ihn selbst sowie einen weiteren Gegenstand trägt. Er möchte nun mit allen Gütern auf die andere Seite des Flusses gelangen. Unglücklicherweise frißt der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf, wenn er diese unbeaufsichtigt läßt. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß die Überfahrt keine Zeit benötigt, der Bauer also entweder am linken oder am rechten Ufer ist.

Damit nun der Bauer nicht versehentlich Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohl allein läßt, soll ein Warnsystem aufgebaut werden, welches in diesen Fällen Alarm auslöst.

Die Buchstaben $\mathbf{f}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$, und $\mathbf{k}$ bezeichnen Farmer, Wolf, Ziege und den Kohlkopf. Ist der Wert einer solchen Variablen $\mathbf{0}$ $(\mathbf{1})$, dann befindet sich der entsprechende Gegenstand auf der linken (rechten) Flußseite.

Wie sieht die Funktionstabelle für die Alarmfunktion a aus ?

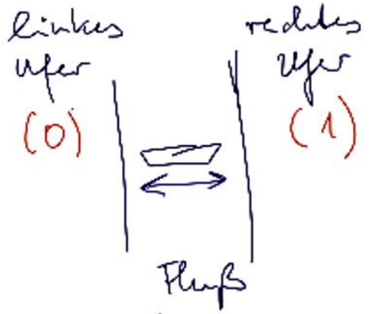


Beispiel: Farmer´s Dilemma

Erstellen Sie die <u>Funktionstabelle</u> für das Beispiel "Farmers Dilemma":

f	w	z	K	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	⋮
0	0	1	0	⋮
		⋮		?
		⋮		⋮
1	1	1	0	
1	1	1	1	0

bedeutet: alle befinden sich am rechten Ufer (ist ok)



Überquerung wird <u>nicht</u> betrachtet.

Tautologie

Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

Gleichbedeutend:

Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$$
$$f_2(a,b) = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$$

Ist f_1 identisch mit f_2 oder

Ist $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) \leftrightarrow (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$ eine Tautologie?

Tautologie

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

a b	$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$	$(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$	$x \leftrightarrow y$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Tautologie

mittels algebraischer Umformung:

$$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = [(a \wedge b) \vee \overline{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \overline{b}]$$

(Distributivgesetz)

$$= [(a \vee \overline{a}) \wedge (b \vee \overline{a})] \wedge [(a \vee \overline{b}) \wedge (b \vee \overline{b})]$$

(Distributivgesetz)

$$= [1 \wedge (b \vee \overline{a})] \wedge [(a \vee \overline{b}) \wedge 1]$$

(Inverses Element)

$$= (b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee \overline{b})$$

(Neutrales Element)

$$= (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$$

(Kommutativgesetz)

Realisierung von Schaltfunktionen: die Gatterebene

- Abstrahierung von der internen Realisierung der Verknüpfungsbausteine
- Beschränkung auf das logische Verhalten
  - Abbildung logischer Funktionen auf Schaltungen ohne tiefergehende elektrotechnische Kenntnisse
- Verknüpfungsbausteine werden durch Schaltsymbole dargestellt.

Kombinatorische Schaltungen - Gatterbausteine

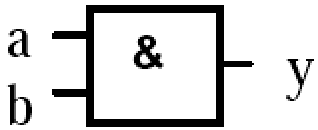
Eine logische Schaltung mit n Eingängen $X = (x_1,x_2,...,x_n)$ und m Ausgängen, $m \geq 1$, welche die Funktionen $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots ,f_m(X))$ realisieren, heißt kombinatorische Schaltung oder Schaltnetz, wenn $F(X)$ zu jedem Zeitpunkt ausschließlich durch X bestimmt ist.

– Jede Änderung der Eingänge wirkt sich sofort auf die Ausgänge aus.

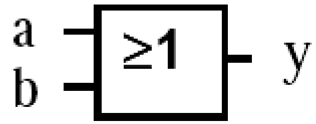
– Eine kombinatorische Schaltung hat keine "Informationsspeicher„, d.h. sie kann sich die Werte früherer Eingänge nicht merken.

– Jede kombinatorische Schaltung kann durch technische Bausteine (Gatter) realisiert werden.

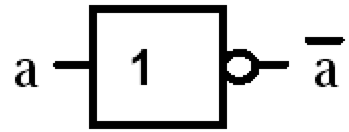
Beispiele für Schaltsymbole (DIN 40900 Teil 12)



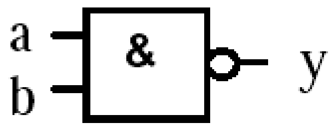
UND-Verküpfung



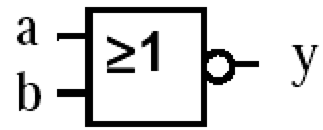
ODER-Verknüpfung



Negation



NAND-Verknüpfung

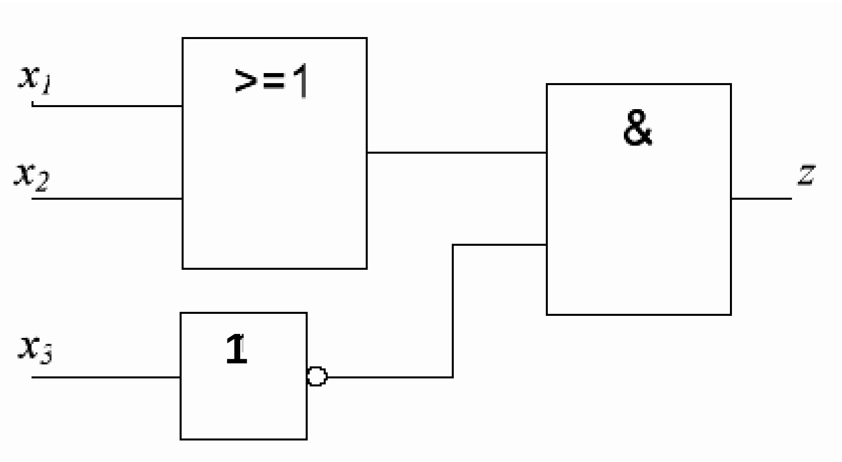


NOR-Verknüpfung

Verknüpfungsbausteine dieser Art werden **Gatter** genannt.

Schaltbild - Darstellung

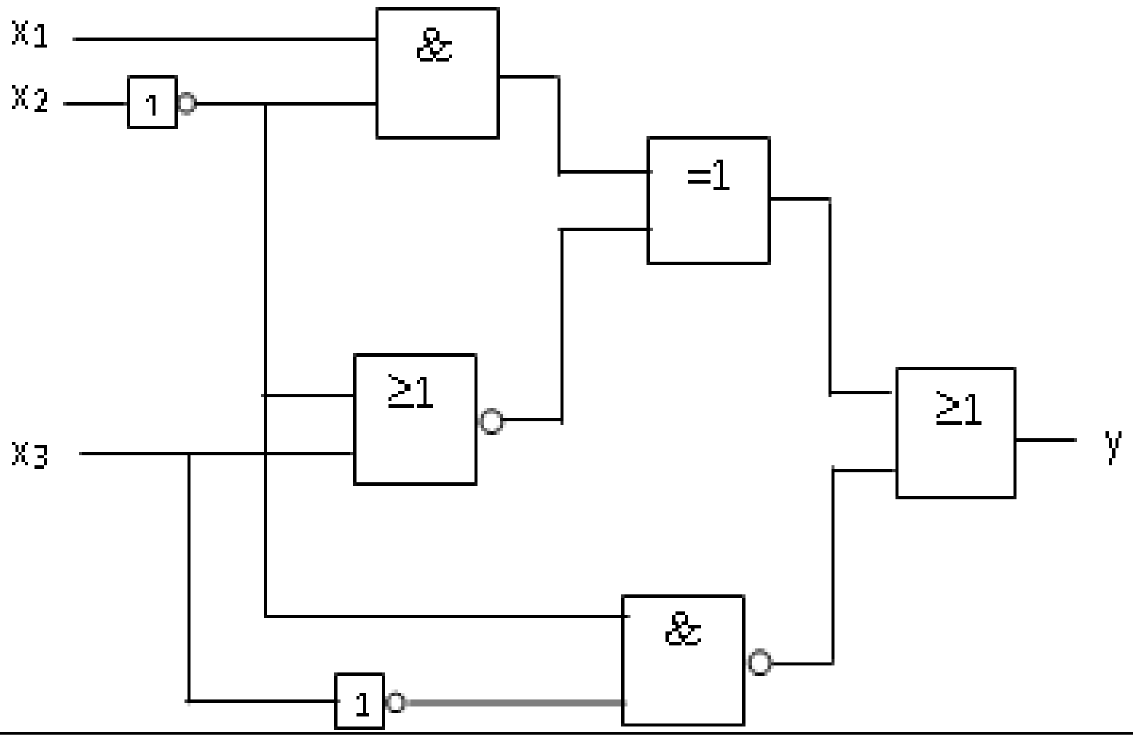
- Ein Schaltbild ist eine graphische Darstellung einer Schaltfunktion
  - jede Schaltung definiert eindeutig eine Schaltfunktion; aber eine Schaltfunktion kann i. A. durch viele (logisch äquivalente) Schaltungen dargestellt werden



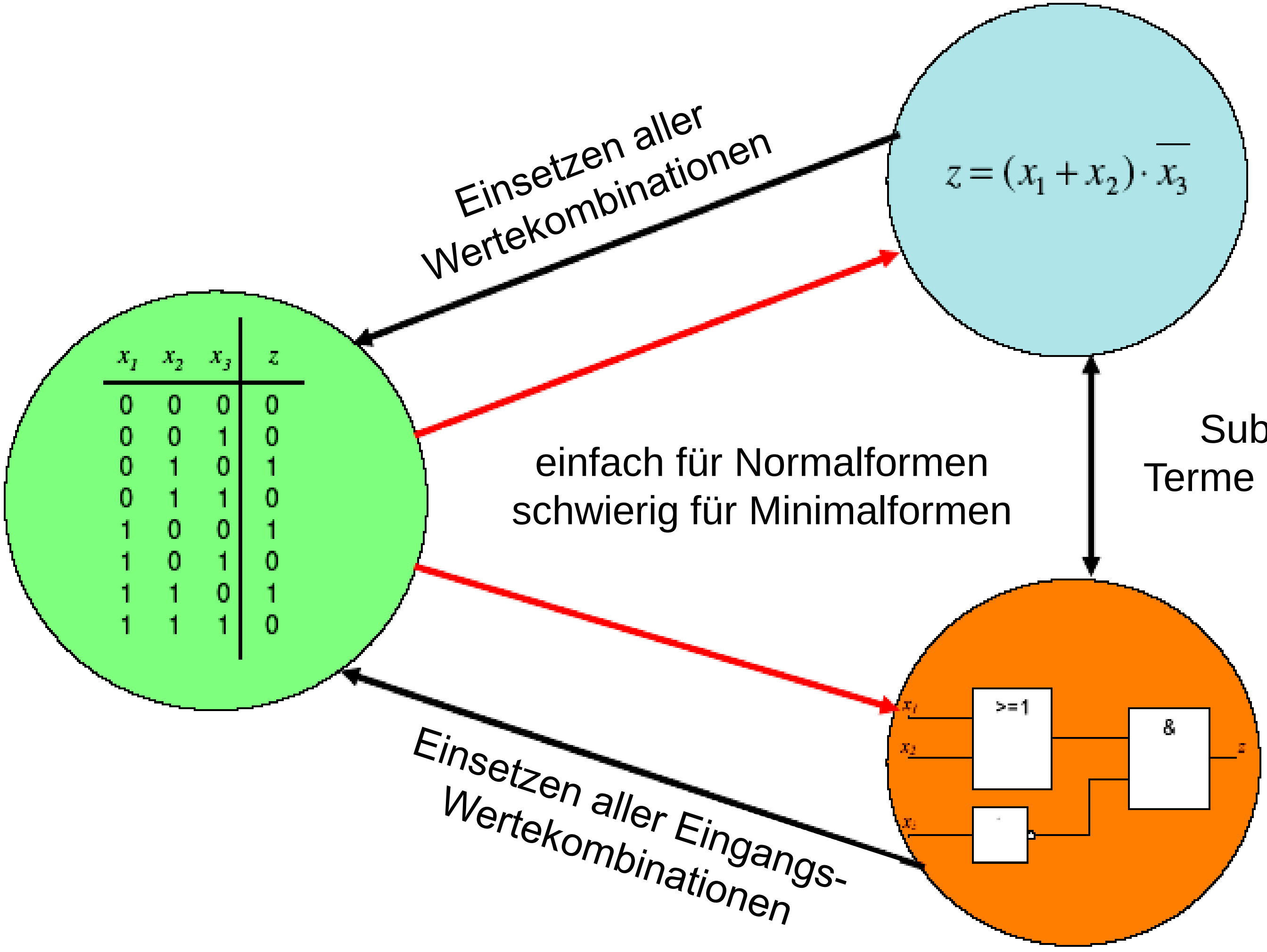
$z = (x_1$ **ODER** $x_2)$ UND $\overline{x_3}$

Extraktion der Schaltfunktion aus dem Schaltnetz

- Welche Schaltfunktion ist hier realisiert. „Extrahieren“ Sie die Schaltfunktion y aus dem gegebenen Schaltnetz. Nutzen Sie die 1:1-Beziehung zwischen der Struktur des Schaltnetzes und der Struktur der Formel für y.



Darstellungsweisen Boolescher Funktionen



x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Extraktion der Schaltfunktion aus dem Schaltnetz - Lösung

<u>Lösung</u> für die Aufgabe:

"Schaltfunktion aus dem Schaltnetz extrahieren"

$$\boxed{y = x_1 \wedge \overline{x}_2 \Leftrightarrow \overline{(\overline{x}_2 \vee x_3)} \vee \overline{\overline{x}_2 \wedge x_3}}$$