①

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot B = 3 \times 1 \quad 1 \times 3$

$B \cdot A = 1 \times 3 \quad 3 \times 1$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 \times 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

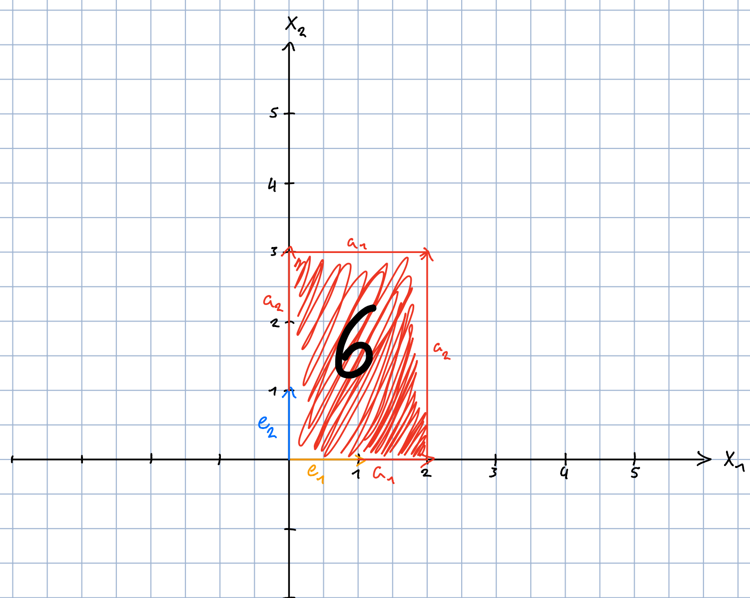
$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 3 \\ & & 1 \times 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 13 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix} \right\}$$

②

2. (a) Zeichnen Sie die Standardbasisvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ in ein xy-Koordinatensystem ein.

(b) Finden Sie eine reelle (2×2)-Matrix A, so dass $Ae_1 = 2e_1$ und $Ae_2 = 3e_2$ ist. Zeichnen Sie die Bilder Ae_1 und Ae_2 in Ihr xy-Koordinatensystem ein.

(c) Schraffieren Sie die Fläche in Ihrem Koordinatensystem, dessen Flächeninhalt genau gleich der Determinante $\det(A)$ ist.



$$A = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} ; \quad e_1 = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} ; \quad e_2 = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot e_1 = 2 \cdot e_1 \iff \boxed{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot e_2 = 3 \cdot e_2 \iff \boxed{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow A = \underset{2 \times 2}{\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \end{array} \hspace{-2em} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} ; \quad \det(A) = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

(3)

3. Berechnen Sie die Determinante von den folgenden Matrizen

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{sarrus}} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 7 \end{array}$$

$$\det(A) = [1 \cdot 5 \cdot 9] + [2 \cdot 1 \cdot 2] + [3 \cdot 2 \cdot 7]$$

$$- [2 \cdot 5 \cdot 3] - [7 \cdot 1 \cdot 1] - [9 \cdot 2 \cdot 2]$$

$$= \underline{\underline{18}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{sarrus}} \begin{array}{ccccc} x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{array}$$

$$\det(B) = [x \cdot x \cdot x] + [1] + [1]$$

$$- [1 \cdot x \cdot 1] - [1 \cdot 1 \cdot x] - [x \cdot 1 \cdot 1]$$

$$= \underline{\underline{x^3 - 3 \cdot x + 2}}$$

4

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, ob die folgende Matrix invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 5 \cdot \mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{II} = \mathrm{II}_b \\ 2 \cdot \mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{III} = \mathrm{III}_b \end{array}$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{E}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}_b \\ \mathrm{III}_b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}_b \\ \mathrm{III}_b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{III}_b = \mathrm{I}_b \\ \mathrm{II}_b - \mathrm{III}_b = \mathrm{II}_c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}_b \\ \mathrm{II}_c \\ \mathrm{III}_b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \mathrm{II}_c - \mathrm{I}_b = \mathrm{I}_c$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}_c \\ \mathrm{II}_c \\ \mathrm{III}_b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} | :(-3) \\ | : 3 \\ | : -2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{E} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = E$$