Präsenzaufgaben

Verständnisfragen

1. Kann eine Ordnungsrelation gleichzeitig eine Äquivalenzrelation sein?
   Nein, denn eine Ordnungsrelation ist antisymmetrisch, während eine Äquivalenzrelation symmetrisch ist.

2. Eine Äquivalenzrelation teilt eine Menge M in disjunkte Äquivalenzklassen ein. Sei umgekehrt eine Einteilung von M in disjunkte Teilmengen gegeben, deren Vereinigung gerade M ergibt. Gibt es eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen genau diese Teilmengen sind?
   Sei $A_i, i \in \mathbb{N}$ die Teilmengen, so dass $\bigcup_i A_i = M$. Dann lässt sich wie folgt eine Äquivalenzrelation definieren:

   $$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists i : x, y \in A_i \text{ beide Elemente liegen in derselben Teilmenge.}$$

   Diese Relation ist reflexiv, denn selbstverständlich liegt x in derselben Teilmenge wie x. Sie ist symmetrisch, denn wenn x, y in derselben Teilmenge liegen, tun dies auch y, x. Schlußendlich ist sie transitiv, denn wenn $x, y \in A_i$ für einen Index i sowie $y, z \in A_i$, dann gilt natürlich auch $x, z \in A_i$.

3. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ und b duzen sich. Nein, nicht unbedingt transitiv: Wenn sich a, b duzen und b, c duzen, dann müssen sich nicht unbedingt auch a, c duzen (z.B. duzt ein Lehrer einen Schüler, der Schüler seine Mutter, aber der Lehrer nicht unbedingt die Mutter des Schülers).
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ kennt b. Nein, nicht unbedingt symmetrisch und transitiv: Wenn a b kennt, muss nicht unbedingt b a kennen – man denke an berühmte Personen. Auch muss nicht gelten, dass a c kennt, wenn a b kennt und b c. Denn man kennt nicht alle Bekannten von Bekannten.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ kennt nicht b. s. 2., nicht unbedingt symmetrisch.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ ist ein Kind von b. Nein, denn nicht reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ ist verwandt mit b. Ja, Äquivalenzrelation.
   - ☐ $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a$ hat die gleiche Haarfarbe wie b. Ja, Äquivalenzrelation.

4. Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv?
   - ☐ Kind $\mapsto$ Vater, nein, denn ein Vater kann mehrere Kinder besitzen.
   - ☐ Stadt in Deutschland $\mapsto$ Postleitzahl, ja, denn einer Postleitzahl lässt sich eindeutig die entsprechende Stadt zuordnen.
   - ☐ Berg $\mapsto$ Gipfelhöhe, nein, denn es kann mehrere Berge geben, die dieselbe Gipfelhöhe besitzen (wenn die Höhe gerundet wird).
   - ☐ Studierender der HTWG $\mapsto$ Immatrikulationsnummer, ja, denn jede Immatrikulationsnummer lässt eindeutig auf den Studierenden zurückschließen.

- ☐ Mensch $\mapsto$ Einkommen im Jahr 2019, nein, denn es kann mehrere Menschen mit demselben Einkommen geben (wenn dieses gerundet wird)

5. Wieviele injektive Abbildungen von $\{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ gibt es?
   Für a gibt es 3 mögliche Bilder, a, b oder c. Damit die Abbildung injektiv ist, muss das Bild von b verschieden sein, d.h. b hat noch 2 mögliche Bilder, c nur noch 1 Möglichkeit. Somit gibt es $3! = 6$ injektive Abbildungen $\{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$.
   Wieviele surjektive? Für eine surjektive Abbildung müssen alle drei Elemente des Wertebereichs „getroffen“ werden Da der Definitionsbereich nur drei Elemente besitzt, entspricht dies gerade der Anzahl injektiver Abbildungen, da jedes Element nur ein Bild besitzt.
   Wieviele bijektive? Damit gibt es auch genau 6 bijektive Abbildungen.

6. Sei $|Y| < \infty$ und $f : X \to Y$ injektiv. Wie verhalten sich die Mächtigkeiten der Mengen X und Y zueinander?
   Wir können die Abbildung f surjektiv machen, indem wir den Wertebereich auf ihr Bild $f(X)$ beschränken: die Abbildung $f : X \to f(X) \subset Y$ ist damit bijektiv. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dann X und $f(X)$ gleichmächtig sind: $|X| = |f(X)|$. Da $f(X) \subset Y$, muss damit Y mehr oder gleich viele Elemente wie X besitzen: $|X| \leq |Y|$.
   Man kann auch argumentieren, dass jedes Element $y \in Y$ wegen der Injektivität höchstens ein Urbild in x besitzt. Damit hat Y mindestens so viele Elemente wie X.
   Für endliche Mengen ist äquivalent: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

7. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv? *Ich bezeichne jede Abbildung im folgenden mit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   - ☐ $n \mapsto$ nächstgrößere Primzahl: nicht injektiv, z.B. $f(14) = f(15) = 17$, aber $14 \neq 15$.
   - ☐ $n \mapsto$ größter Primzahlteiler von n: nicht injektiv, z.B. $f(14) = f(7) = 7$, aber $7 \neq 14$.
   - ☐ $n \mapsto$ nächstgrößere Zahl in $\mathbb{N}$: injektiv, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = n + 1 = m + 1 = f(m) \;\Rightarrow\; n = m$.
   - ☐ $n \mapsto$ größte Quadratzahl $\leq n$: nicht injektiv, denn z.B. $f(4) = f(5) = 4$, aber $4 \neq 5$.

8. Beschreiben Sie den Graph einer injektiven Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. einer surjektiven Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Der Graph einer injektiven Abbildung wird höchstens einmal von jeder beliebigen Horizontalen geschnitten (denn zu jedem y auf der y-Achse darf man höchstens ein x finden, so dass $f(x) = y$). Der Graph einer surjektiven Abbildung wird mindestens einmal von jeder beliebigen Horizontalen geschnitten (denn zu jedem y auf der y-Achse muss man mindestens ein x auf der x-Achse finden, so dass $f(x) = y$.)

9. Erklären Sie in Ihren eigenen Worten, warum die Mengen $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ (=Menge aller geraden, ganzen Zahlen) gleichmächtig sind, d.h. gleich viele Elemente enthalten.
   Jeder ganzen Zahl kann man eindeutig ihr Doppeltes zuordnen. Diese Zuordnung ist eine bijektive Abbildung: $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$: Injektiv, denn

$$f(n) = 2n = 2m = f(m) \Rightarrow n = m.$$

Surjektiv, denn sei $k \in 2\mathbb{Z}$, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $k = 2n$, also $f(n) = k$. Also sind die Mengen $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ gleichmächtig.

10. Seien A, B endliche Mengen mit $|A| = |B|$. Ist es möglich, eine injektive Abbildung $A \to B$ zu definieren, die nicht surjektiv ist? Nein, alle Elemente aus A haben wegen der Injektivität paarweise voneinander verschiedene Bilder, d.h.$|A| = |f(A)|$, da $f(A) \subset B$ und $|A| = |B|$, muss also $f(A) = B$ gelten: die Abbildung ist surjektiv.
    Ist es möglich eine surjektive Abbildung $A \to B$ zu definieren, die nicht injektiv ist? Wenn $f : A \to B$ surjektiv ist, ist immer $|f(A)| = |B| \leq |A|$. Wenn f nicht injektiv wäre, gäbe es mindestens zwei Elemente $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, so dass $f(a_1) = f(a_2)$. Dann wäre aber $|f(A)| < |A|$. Es ist aber $|A| = |B|$, also muss f injektiv sein.

11. Geben Sie jeweils eine Abbildung $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit den folgenden Eigenschaften an:
    (a) injektiv und surjektiv: z.B. die Identität $f(i) = i$ für i=1,2,3,4,5.
    (b) weder injektiv noch surjektiv: z.B. $f(i) = 1$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
    (c) injektiv, aber nicht surjektiv: s. vorherige Aufgabe, das geht nicht. Sei f injektiv, aber nicht surjektiv, dann gibt es ein $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, so dass $f(j) \neq i$ für alle $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Dann muss es aber $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ geben, so dass $f(k) = f(j)$. Das ist ein Widerspruch zur Injektivität.
    (d) surjektiv, aber nicht injektiv: s. vorherige Aufgabe, das geht nicht: Sei f surjektiv, aber nicht injektiv, dann gibt es $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j \neq k$, so dass $f(j) = f(k)$. Dann kann das Bild von f höchstens 4 Elemente besitzen: $|(f\,\{1, 2, 3, 4, 5\}| \leq 4$, dies ist wiederum ein Widerspruch zur Surjektivität.

Standardfragen zu Relationen

1. Geben Sie jeweils die Pärchen an, die zu der Relation gehören:
    (a) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow x \mid y$. $(2, 3), (2, 4), (2, 8), (2, 17)$: $(2, 4), (2, 8) \in \mathcal{R}$.
    (b) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow x \leq y$. $(2, 3), (3, 2), (2, 4), (5, 8)$: $(2, 3), (2, 4), (5, 8) \in \mathcal{R}$.
    (c) $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow y = x^2$. $(1, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 6)$: $(1, 1), (2, 4) \in \mathcal{R}$.

2. Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
    (a) $\mathcal{R}_1 := \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \geq n\big\}$:
    Reflexiv? Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \geq m$.
    Symmetrisch? Nein, denn z.B. $3 \geq 2$, aber $2 \not\geq 3$. Die Relation ist antisymmetrisch: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq n$ und $n \geq m$ folgt $n = m$.
    Transitiv? Für alle $k, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: Ist $k \geq m$ und $m \geq n$, dann ist $k \geq m \geq n$, also $k \geq n$.
    (b) $\mathcal{R}_2 := \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m \cdot n > 0\big\}$:
    Reflexiv? Nein, denn $0^2 = 0$. Da die Relation aber sinnvollerweise auf $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert ist, ist die Relation auf $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ auch reflexiv, denn $m^2 > 0$ für alle $m \neq 0$.

Symmetrisch? Ja, denn die Multiplikation ist kommutativ (d.h. Reihenfolge der Faktoren lässt sich vertauschen).
Transitiv? Für alle $k, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: Ist $k \cdot m > 0$ und $m \cdot n > 0$, dann besitzen k und m sowie m und n dasselbe Vorzeichen, also auch k und n und somit ist $k \cdot n > 0$.

(c) $\mathcal{R}_3 := \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = 2n\}$
Reflexiv? Nein, denn $1 \neq 2$, aber $1 \in \mathbb{Z}$.
Symmetrisch? Nein, denn sei $m = 2$ und $n = 1$, dann ist $2 = 2 \cdot 1$, aber $1 \neq 2 \cdot 2$.
Transitiv? Nein, denn für $m, n, k \neq 0$ gilt: ist $m = 2n$ und $n = 2k$, dann ist $m = 4k \neq 2k$.

3. Zeigen Sie, dass die Relation | eine Ordnungsrelation auf der Menge $\{1, 2, 3, 6\}$ ist.
Wir überprüfen die Eigenschaften einer Ordnungsrelation:
Reflexiv? Ja, denn jede Zahl ist Teiler von sich selbst.
Antisymmetrisch? Ist $m \mid n$ und $n \mid m$, dann gibt es ganze Zahlen a_1, a_2 so dass: $n = a_1 \cdot m$ und $m = a_2 \cdot n$, also $n = a_1 \cdot a_2 \cdot n$ und damit ist $a_1 \cdot a_2 = 1$. Da a_1, a_2 ganze Zahlen sind, muss $a_1 = a_2 = 1$ oder -1 gelten und somit $n = m$ oder $n = -m$. Da aber nur positive Zahlen in der Menge enthalten sind, ist $n = m$.
Transitiv? Ist $m \mid n$ und $n \mid k$, dann gibt es ganze Zahlen a_1, a_2 so dass: $n = a_1 \cdot m$ und $k = a_2 \cdot n$, also ist $k = a_1 \cdot a_2 m$ und somit ist $m \mid k$. Auf dieser endlichen Menge kann man auch die einzigen zwei Möglichkeiten für Transitivität durchprobieren: $1 \mid 2$ und $2 \mid 6$, daraus folgt $1 \mid 6$. Weiter: $1 \mid 3$ und $3 \mid 6$, also $1 \mid 6$.

4. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$? Überprüfen Sie die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

(a) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a + b$ ist gerade.
Reflexiv? Für alle $a \in \mathbb{Z}$: $2a$ ist gerade.
Symmetrisch? Ja, denn die Addition ist kommutativ (Summanden lassen sich vertauschen).
Transitiv? Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig: Ist $a+b$ gerade und $b+c$ gerade, dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $a+b = 2k_1$ und $b+c = 2k_2$, also ist $a+c = 2k_1 - b + 2k_2 - b = 2(k_1 + k_2 - b)$. Die Summe $k_1 + k_2 - b$ ist eine ganze Zahl, also ist $a + c$ gerade.
Anderes mögliches Argument: Wenn die Summe zweier Zahlen gerade ist, dann sind entweder beide Zahlen ungerade oder gerade. Seien a, b bspw. gerade (oder ungerade), dann muss auch c gerade (oder ungerade) sein und somit sind alle drei Zahlen gerade (oder ungerade) und $a + c$ auch.

(b) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad 6 \mid a - b$
Reflexiv? Für alle $a \in \mathbb{Z}$: $6 \mid 0$.
Symmetrisch? Für $a, b \in \mathbb{Z}$: ist $6 \mid a - b$, dann ist auch $6 \mid b - a$, denn $b - a = -(a - b)$.
Transitiv? Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$: ist $6 \mid a - b$ und $6 \mid b - c$, dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 6k_1$ und $b - c = 6k_2$. Dann folgt $a - c = 6k_1 + b + 6k_2 - b$, also $a - c = 6(k_1 + k_2)$. Damit ist $6 \mid a - c$.

Beide Relationen sind also Äquivalenzrelationen.

5. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$:

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b \text{ ist gerade.}$$

Ist $a - b$ gerade, dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 2k$. Wenn wir also die Äquivalenzklasse für eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bestimmen wollen, müssen wir alle Zahlen $b \in \mathbb{Z}$ suchen, so dass $a - b = 2k$. Das sind gerade alle Zahlen $b \in \mathbb{Z}$, so dass $b = a - 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Ist a eine gerade Zahl, enthält die Äquivalenzklasse somit alle geraden Zahlen. Ist a eine ungerade Zahl, enthält ihre Äquivalenzklasse alle ungeraden Zahlen. Die Äquivalenzrelation besitzt somit nur zwei Äquivalenzklassen:

$$[0] = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[1] = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Standardfragen zu Abbildungen

1. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv?
   - ☐ $x \mapsto x^4$,nein, denn $f(2) = f(-2) = 16$, aber $2 \neq -2$.
   - ☐ $x \mapsto e^{-x^2}$, nein, denn $f(1) = f(-1) = e^{-1}$, aber $1 \neq -1$.
2. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv?
   - ☐ $n \mapsto \min\{p \in \mathbb{P} \mid p \geq n\}$, nein, denn es werden nur alle Primzahlen „getroffen“, nicht alle natürlichen Zahlen.
   - ☐ $n \mapsto n + 1000$, nein, denn zu $1 \in \mathbb{N}$ gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $1 = n + 1000$.
   - ☐ $n \mapsto n^2$, nein, denn zu $2 \in \mathbb{N}$ gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $2 = n^2$.
3. Wieviele bijektive Abbildungen $X \to Y$ für $|X| = n$ gibt es? Ist $|Y| \neq |X|$, gibt es gar keine bijektive Abbildung. Ist $|X| = |Y| = n$, dann gibt es für das erste Element $x_1 \in X$ n mögliche Bilder in Y, für das zweite Element x_2 nur noch $n - 1$, da die Abbildung injektiv sein soll, usw. Somit gibt es $n!$ verschiedene bijektive Abbildungen.
4. Welche der folgenden Abbildungen besitzt eine inverse Abbildung? Geben Sie diese gegebenenfalls an.
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n - 5$. Die Abbildung ist injektiv, denn für $n, m \in \mathbb{Z}$ folgt aus $n - 5 = m - 5$ direkt $n = m$. Die Abbildung ist surjektiv, denn zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ gibt es $n \in \mathbb{Z}$, so dass $m = n - 5$, nämlich $n = m + 5$. Die inverse Abbildung lautet entsprechend $f^{-1}(n) = n + 5$, denn $f^{-1}(f(n)) = n - 5 + 5 = n$ und $f(f^{-1}(n)) = n + 5 - 5 = n$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = 5n$. Die Abbildung ist injektiv, denn für $n, m \in \mathbb{Z}$ folgt aus $5n = 5m$ direkt $n = m$. Die Abbildung ist aber nicht surjektiv, denn für $3 \in \mathbb{Z}$ gibt es kein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $3 = 5n$. Es gibt also keine inverse Abbildung.
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 3$. Die Abbildung ist injektiv, denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ folgt aus $5x + 3 = 5x_2 + 3$ direkt $x_1 = x_2$. Die Abbildung ist surjektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $y = 5x + 3$, nämlich $x = \frac{1}{5}(y - 3)$. Die inverse Abbildung lautet entsprechend $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x - 3)$.
5. Sei $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k + 1$, $g(k) = 2k$ und $h(k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.*Die Gaußklammer* $\lceil\ \rceil$ *rundet das Argument auf die nächstgrößere ganze Zahl.*

(a) Welche der Abbildungen ist/sind injektiv? Die Abbildungen $f(k) = k+1$ und $g(k) = 2k$ sind injektiv. Die Abbildung h ist nicht injektiv, denn $h(1) = h(2) = 1$.

(b) Welche der Abbildungen ist/sind surjektiv? Die Abbildung $f(k) = k+1$ ist surjektiv. Die Abbildung $g(k) = 2k$ ist nicht surjektiv, denn die ungeraden Zahlen werden nicht von g „getroffen". Die Abbildung h ist surjektiv, denn sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$, so dass $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Entweder ist $k = 2n$ oder $k = 2n-1$ zu wählen.

(c) Drücken Sie die Kompositionen $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$,$h \circ g$ und h^2 möglichst einfach aus.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(k) &= f(2k) = 2k+1 \\
(g \circ f)(k) &= g(k+1) = 2k+2 \\
(g \circ h)(k) &= g\left(\lceil \frac{k}{2} \rceil\right) = 2\left(\lceil \frac{k}{2} \rceil\right) = \begin{cases} k+1, & k \text{ ungerade} \\ k, & k \text{ gerade} \end{cases} \\
(h \circ g)(k) &= \lceil \frac{2k}{2} \rceil = k \\
(h^2)(k) &= \lceil \frac{\lceil \frac{k}{2} \rceil}{2} \rceil = \begin{cases} \frac{k}{4}, & k \text{ Vielfaches von } 4 \\ \frac{k+1}{4}, & k = 4k' - 1 \\ \frac{k+2}{4}, & k = 2k' \\ \frac{k+3}{4}, & k = 4k' - 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

   (a) $\mathcal{R}_1 := \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n+1\}$
   Reflexiv? Ja, denn $n \leq n+1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
   Symmetrisch? Nein, denn für $m = 1$ und $n = 3$ ist $1 \leq 4$, aber nicht $3 \leq 2$.
   Transitiv? Nein, denn es sei $k = 3$,$m = 2$ und $n = 1$, dann ist $k \leq m+1$ und $m \leq n+1$, aber nicht $k = 3 \leq 2 = n+1$.

   (b) $\mathcal{R}_2 := \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \cdot n \geq -1\}$
   Reflexiv? Ja, denn $m^2 \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.
   Symmetrisch? Ja, denn Multiplikation ist kommutativ.
   Transitiv? Nein, denn für $k = 1$, $m = -1$ und $n = -2$ ist $k \cdot m = -1 \geq -1$ und $m \cdot n = (-1)(-2) \geq -1$, aber $k \cdot n = -2 \ngeq -1$.

   (c) $\mathcal{R}_3 := \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = 2\}$
   Reflexiv? Nein, denn für $m \neq 2$ gilt: $(m,m) \notin \mathcal{R}_3$.
   Symmetrisch? Nein, denn für $m = 2$ und $n \neq 2$ ist $(m,n) \in \mathcal{R}_3$, aber nicht (n,m).
   Transitiv? Ja, denn für $(m,n) \in \mathcal{R}_3$ und $(n,k) \in \mathcal{R}_3$, ist auch $(m,k) \in \mathcal{R}_3$ (denn die Relation hängt nicht vom zweiten Argument ab.

   (9 Punkte)

2. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$? Überprüfen Sie die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

   (a) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b$ wird von 6 mit Rest 2 geteilt.
   Wenn $a - b$ mit Rest 2 durch 6 geteilt wird, findet man immer $k \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 6k + 2$. Damit ist also $a = b + 6k + 2$.
   Reflexiv? Nein, denn $6 \mid 0$ (ohne Rest).
   Symmetrisch? Nein, denn für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: Ist $a - b = 6k + 2$, dann ist $b - a = -6k - 2 = -6(k+1) + 4$. Also lässt sich $b - a$ durch 6 mit Rest 4 teilen. (Nach Definition ist der Rest immer positiv und kleiner als 6.)
   Transitiv? Nein, denn ist $a - b = 6k_1 + 2$ und $b - c = 6k_2 + 2$, dann ist $a - c = 6k_1 + 2 + b + 6k_2 + 2 - b = 6(k_1 + k_2) + 4$, also wird $a - c$ von 6 mit Rest 4 geteilt.

   (b) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b$ ist ungerade.
   Reflexiv? Nein, denn $a - a = 0$ ist nicht ungerade.
   Symmetrisch? Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, wenn $a - b$ ungerade ist, dann ist auch $b - a = -(a - b)$ ungerade.
   Transitiv? Nein, ist $a = 2$, und $b = 3$ und $c = 4$, dann ist $a - b = -1$ ungerade und $b - c = -1$ ungerade, aber $a - c = -2$ ist gerade.

   (c) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot b$ ist gerade.
   Reflexiv? Nein, denn 1^2 ist ungerade.
   Symmetrisch? Ja, denn Multiplikation ist kommutativ.
   Transitiv? Nein, denn sei $a = 1$,$b = 2$ und $c = 3$, dann ist $ab = 2$ gerade und $bc = 6$ gerade, aber $ac = 3$ ist ungerade.

   (d) $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot b$ ist nichtnegativ.
   Reflexiv? Ja, denn $a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

Symmetrisch? Ja, denn Multiplikation ist kommutativ.
Transitiv? Ja, denn wenn $ab \geq 0$ und $bc \geq 0$ bedeutet dies, dass a und b (bzw. b und c) entweder beide nichtnegativ oder nichtpositiv sind. Daraus folgt, dass a,b und c entweder alle nichtnegativ oder nichtpositiv sind, und damit $ac \geq 0$.

(8 Punkte)

3. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation: $a \sim b \quad :\Leftrightarrow 10 \mid a - b$.
Wir überlegen zuerst, dass gilt:

$$10 \mid a - b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}: \; a - b = 10k.$$

Jede Zahl b, die äquivalent zu a ist, können wir also schreiben als $b = a + 10k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit erhalten wir die Äquivalenzklasse

$$[a] = \left\{a + 10k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Starten wir nun mit $a = 0$ zur Berechnung der konkreten Äquivalenzklassen, erhalten wir:

$$[0] = \left\{10k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\dots, -20, -10, 0, 10, 20, \dots\}$$

Weiter geht es mit der Äquivalenzklasse von 1:

$$[1] = \left\{1 + 10k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\dots, -29, -19, -9, 0, 11, 21, 31 \dots\}$$

Weiter geht es mit der Äquivalenzklasse von 2:

$$[2] = \left\{2 + 10k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\dots, -28, -18, -8, 0, 12, 22, 32 \dots\}$$

Usw. Insgesamt gibt es zehn Äquivalenzklassen für $a = 0, 1, \dots, 9$, da $a = 10$ dann bereits in der Äquivalenzklasse von 0 enthalten ist. **(3 Punkte)**

4. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ besitzt eine inverse Abbildung? Geben Sie diese gegebenenfalls an.
   (a) $f(n) = 5n + 3$: Injektiv (denn aus $5n + 3 = 5m + 3$ folgt immer $n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$) und nicht surjektiv (denn zu $m = 1$ gibt es kein $n \in \mathbb{Z}$ so dass $1 = 5n + 3$ ist – n müsste $-\frac{2}{5}$ sein). Also gibt es keine inverse Abbildung.
   (b) $f(n)$ =größter echter Teiler von n: nicht injektiv, denn $f(14) = f(21) = 7$, surjektiv, denn zu $m \in \mathbb{Z}$ gibt es immer $n \in \mathbb{Z}$, so dass m der größte echte Teiler von n ist, z.B. $n = 2m$. Die Abbildung ist nicht bijektiv, also gibt es keine inverse Abbildung.

Überprüfen Sie bitte, ob die Abbildungen jeweils bijektiv sind.
(10 Punkte)

5. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
   - ☐ $x \mapsto x^3$: injektiv, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$ (das Ziehen von ungeraden Wurzeln ist eine Äquivalenzumformung). surjektiv, denn zu $y \in \mathbb{R}$ gibt es x, so dass $y = x^3$, nämlich $-\sqrt[3]{|y|}$ für $y < 0$ und $\sqrt[3]{|y|}$ für $y \geq 0$. Also ist die Abbildung bijektiv.

- ☐ $x \mapsto e^x$: injektiv, denn aus $f(x_1) = e^{x_1} = e^{x_2} = f(x_2)$ folgt durch Anwendung des natürlichen Logarithmus $x_1 = x_2$. Nicht surjektiv, denn $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$: für $y < 0$ gibt es somit kein $x \in \mathbb{R}$ so dass $e^x = y$. Damit ist e^x auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv.

Überprüfen Sie bitte jeweils alle Eigenschaften.
(10 Punkte)