# Mathematik I

## Lösen von linearen Gleichungssystemen

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

# Zeitplan Vorlesung

| | | Datum | Bemerkung | Inhalt |
|---|---|---|---|---|
| **Grund-lagen** | | | Selbststudium | Grundlagen: Mengen |
| | | | Selbststudium | Grundlagen: Relationen |
| | | | Selbststudium | Grundlagen: Abbildungen |
| **Zahlen-theorie** | **1** | **22.04.** | **Einmalig Mi.** | Wiederholung & Zusammenfassung Selbststudium |
| | 2 | 27.04. | | Zahlentheorie I |
| | 3 | 28.04. | | Zahlentheorie II |
| **Algebra** | 4 | 04.05. | | Gruppen |
| | 5 | 11.05. | | Ringe, Körper |
| | 6 | 12.05. | | Kryptographie |
| | 7 | 18.05. | | Vektorräume |
| **Lineare Algebra** | **8** | **25.05.** | | **Lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus** |
| | 9 | 26.05. | | Lineare Gleichungssysteme: Lösungstheorie |
| | 10 | 01.06. | Pfingstmontag | -- |
| | 11 | 08.06. | | Matrizen |
| | 12 | 09.06. | | Lineare Abbildungen |

# Lernziele

- **Begriffe kennen:**
  - ✓ Lineares Gleichungssystem (homogen/inhomogen)
  - ✓ (erweiterte) Koeffizientenmatrix
- Ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen können und die Lösung als Lösungsmenge aufzuschreiben

# Wiederholung

Kahoot - Fragen

~~1.) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$~~

5.) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ : da $w = 2 \cdot u + 2v$,
deshalb sind $u, v, w$
linear abhängig

6.) Basis von $\mathbb{R}^3$ : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

3 beliebige, linear unabhängige Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = Standardbasis, aber nur eine von vielen möglichen Basen!

# Wiederholung: Linearkombination

Stellen Sie den Vektor $w$ als Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, v_3$ dar:

$$w = (2,1,1); v_1 = (1,5,1);\ v_2 = (0,9,1); v_3 = (3,-3,1).$$

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 \\ 1 &= 5 \cdot \lambda_1 + 9 \cdot \lambda_2 + (-3) \lambda_3 \\ 1 &= 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 \end{aligned}\right\}$$

3 lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

# Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = (4,1,1,0,-2), v_2 = (0,1,4,-1,2), v_3 = (4,3,9,-2,2), v_4 = (1,1,1,1,1), v_5 = (0,-2,-8,2,-4)$$

$(-2)\,v_2 = v_5$ $\rightsquigarrow$ also sind Vektoren linear abhängig

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ einzige Lösung, dann sind $v_1, v_2, \ldots$ l. u.

$\Rightarrow$ 5 lineare Gleichungen mit 5 Unbekannten

# Lineare Gleichungssysteme – Definition

Ein **lineares Gleichungssystem** mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten ist gegeben durch

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\mathrm{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\
(m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

1. Gleichung = 1. Zeile

$a_{ij}$ Koeffizienten

m-te Gleichung = m-te Zeile

Die **Lösungsmenge** $\boldsymbol{L}$ des linearen Gleichungssystems besteht aus allen Vektoren

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

$\mathbb{L} = \{ x^* \mid x^* \text{ löst LGS} \}$

die das lineare Gleichungssystem lösen.

# Weitere Definitionen…

Die **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems schreibt man oft als **Matrix** mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten:

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{\#\text{ Unbekannte}} . \Big\}\ \text{Anzahl Gleichungen}$$

A heißt Koeffizienten-matrix.

Die rechte Seite der Gleichung schreibt man als Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ist $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, heißt das Gleichungssystem **homogen**, sonst **inhomogen**.

# Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = (\underline{4},\underline{1},1,\underline{0},\underline{-2}), v_2 = (\underline{0},\underline{1},4,-\underline{1},2), v_3 = (\underline{4},\underline{3},9,-2,2), v_4 = (\underline{1},\underline{1},1,1,1), v_5 = (\underline{0},\underline{-2},-8,2,-4)$$

$$0 = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5 \qquad \text{LGS}$$

Unbekannte.

ausschreiben:

$$\begin{aligned}
0 &= x_1 \cdot 4 + x_2 \cdot 0 + 4 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\
0 &= x_1 \cdot 1 + 1 \cdot x_2 + 3\, x_3 + 1 \cdot x_4 + (-2)\, x_5 \\
0 &= x_1 \cdot 1 + 4 \cdot x_2 + 9\, x_3 + 1 \cdot x_4 + (-8)\, x_5 \\
0 &= 0 \cdot x_1 + (-1)\, x_2 + (-2)\, x_3 + 1 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 \\
0 &= -2\, x_1 + 2\, x_2 + 2\, x_3 + 1 \cdot x_4 + (-4)\, x_5
\end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

„rechte Seite“

# Lineare Gleichungssysteme - Beispiel

*Ein Hotel hat 140 Betten sowie insgesamt 82 Einzel- und Doppelzimmer. Wie viele Einzel- beziehungsweise Doppelzimmer gibt es jeweils?*

Lösung:

Gesucht: $x$ = # Einzelzimmer, $y$ = # Doppelzimmer } 2 Unbekannte

Gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + y = 82 \\ \mathrm{II} & x + 2y = 140 \end{array}\right\} \text{2 Gleichungen}$$

Lösen: eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die 2. Gleichung einsetzen:

$$x + y = 82 \Longleftrightarrow x = 82 - y$$

einsetzen in II

$$82 - y + 2y = 140 \Longleftrightarrow y = 140 - 82 = \underline{\underline{58}}$$

$$x = 82 - 58 = \underline{\underline{24}}$$

Antwort: ....

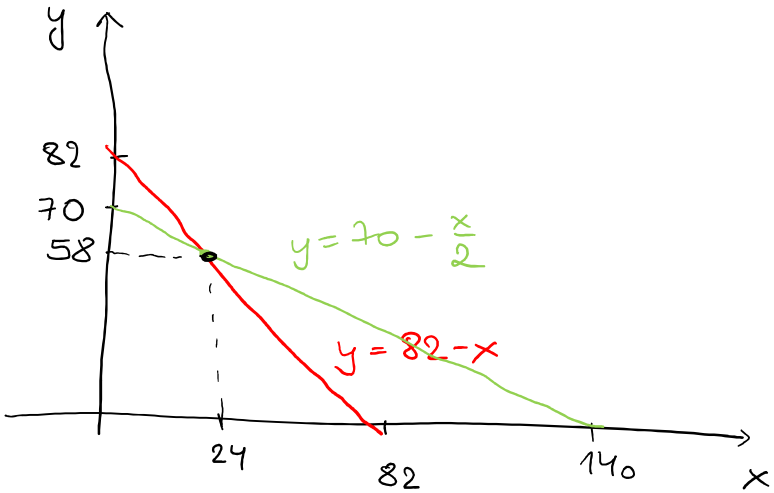
# Lineare Gleichungssysteme - Beispiel

*Ein Hotel hat 140 Betten sowie insgesamt 82 Einzel- und Doppelzimmer. Wie viele Einzel- beziehungsweise Doppelzimmer gibt es jeweils?*

Lösung:

$x + y = 82$, $x + 2y = 140$ sind Geradengleichungen

**Graphische Lösung:**




+ Lösung ist der Schnittpunkt von 2 Geraden:

$x + y = 82$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 82 - x}$

$x + 2y = 140$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 70 - \frac{x}{2}}$

# Lineare Gleichungssysteme - Zeilenstufenform

Was macht man, wenn man mehr als 2 Unbekannte hat?

**Beispiel:**

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\
\mathrm{II} & \quad x_2 + 2x_3 = -4 \\
\mathrm{III} & \qquad 2x_3 = -2
\end{array}
$$

Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Zeilenstufenform oder Staffelform

Lösung: III nach $x_3$ auflösen: $x_3 = -1$

in II einsetzen: $x_2 - 2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = -2$

in I einsetzen: $x_1 - 2 - 1 = -6 \Leftrightarrow x_1 = -3$

Lösung: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

# Gauß-Algorithmus

**Ziel:** Die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS in die Zeilenstufenform zu bringen, da man dann die Lösung leicht ausrechnen/ablesen kann.

1. Wähle eine Zeile $k$, deren erster Koeffizient $a_{1k}$ ungleich Null ist, und vertausche sie mit der ersten Zeile.

* Multipliziere die erste Zeile, so dass der erste Koeffizient gleich 1 ist (optional).

2. Addiere Vielfaches der ersten Zeile auf die übrigen Zeilen, so dass in der ersten Spalte der übrigen Zeilen nur noch Nullen stehen.
3. Die erste Zeile und die erste Spalte werden unverändert gelassen. Mit dieser verkleinerten Matrix verfährt man erneut wie in 1. und 2. , usw.
4. Wir erhalten eine Matrix in Staffelform.

# Gauß-Algorithmus – Beispiel 1

Berechnen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{- 2x_4} &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-6} & 6 & 2 & -2 & 2 \\ -9 & 8 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -15 & 14 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3\,I - 2\,II \\ I - 2\,III \\ 5\,I - 2\,IV \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

sollte $\neq 0$ sein, sonst Zeilen vertauschen!

1. Schritt: Vielfaches der 1. Zeile auf 2./3./4. Zeile addieren, um in der 1. Spalte Nullen zu erzeugen.

# Gauß-Algorithmus – Beispiel 1

# Gauß-Algorithmus – Beispiel 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - III \\ II - IV \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\neq 0$ sonst Zeilen vertauschen

Gauß-Algorithmus ist zu Ende

**2. Schritt**: Vielfaches der 2. Zeile auf (Vielfaches) der 3./4. Zeile addieren, um Nullen zu erzeugen

aus $\underline{IV}$: $0 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_4$ beliebig

in $\underline{III}$ einsetzen: $0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_3$ beliebig

in $\underline{II}$ einsetzen: $2\underline{x_2} - 2x_4 = 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2 + 2x_4}{2} = \underline{1 + x_4}$

in $\underline{I}$ einsetzen: $-6x_1 = 2 + 2x_4 - 2x_3 - 6x_2$

$$-6x_1 = 2 + 2x_4 - 2x_3 - 6 - 6x_4$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x_4 + x_3 + 2) \\ 1 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-4x_4 - 2x_3 - 4}{-6} = \frac{1}{3}(2x_4 + x_3 + 2)$$