Verständnisfragen

1. Überprüfen Sie, ob es sich bei der Menge der reellen (2×3)-Matrizen zusammen
   (a) mit der Addition bzw.
   (b) mit der Multiplikation

   um eine Gruppe handelt.
   Lösung: Die Menge der (2×3)-Matrizen ist zusammen mit der Addition eine Gruppe: die Addition ist assoziativ $((A + B) + C = A + (B + C))$, das neutrale Element ist die Nullmatrix und das inverse Element zu einer Matrix A ist $-A$.
   Die Multiplikation ist auf der Menge der (2×3)-Matrizen nicht definiert: man kann keine (2×3)-Matrix mit einer zweiten (2×3)-Matrix multiplizieren.

2. Überprüfen Sie, ob es sich bei der Menge der reellen quadratischen (2×2)-Matrizen zusammen
   (a) mit der Addition bzw.
   (b) mit der Multiplikation

   um eine Gruppe handelt. Handelt es sich um einen Körper?
   Lösung: s. Aufgabe 1)a): Die Menge der quadratischen (2×2)-Matrizen ist eine Gruppe bzgl. der Addition.
   Die Multiplikation ist für (2×2)-Matrizen wohl definiert. Sie ist assoziativ $(A(BC) = (AB)C)$. Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ein inverses Element zu einer Matrix existiert nur, wenn diese Matrix invertierbar ist, d.h. wenn ihr Rang 2 ist. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt beispielsweise kein inverses Element. Es liegt also keine Gruppe vor. Entsprechend handelt es sich auch nicht um einen Körper.

3. Berechnen Sie die transponierten Matrizen der folgenden Matrizen:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$
   Lösung:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$
   (a) Kann eine Matrix gleich ihrer transponierten sein? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür an. *ja, s. oben, jede symmetrische Matrix.*
   (b) Kann für eine Matrix A gelten $A^t = -A$? *ja, z.B.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Solche Matrizen heißen schiefsymmetrisch.*

Standardaufgaben

1. Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden 5 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir bestimmen jeweils die Dimension der Matrizen: A (3×3), B (3×4), C (3×2), D (4×1), E (1×4). Die möglichen Produkte sind AB, AC, BD, DE, ED.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DE = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}$$

$$ED = -57$$

2. Besetzen Sie, wenn möglich, die freien Stellen der folgenden Matrizen so, dass eine Matrix vom Rang 0, 1, 2 beziehungsweise 3 entsteht.

$$\begin{pmatrix} & 2 & \\ 0 & & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & \\ 0 & & 3 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Eine Matrix hat nur dann Rang Null, wenn alle ihre Einträge Null sind.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \; \mathrm{rg(A)} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \; \mathrm{rg(A)} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \; \mathrm{rg(A)} = 3$$

Für die zweite Matrix ist es nicht möglich, die freien Stellen so zu besetzen, dass die Matrix Rang 0 oder Rang 1 besitzt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 2$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 3$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   (a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$: $\det = 8 - 18 = -10$, also invertierbar.

   (b) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$: nicht quadratisch, also nicht invertierbar.

   (c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $\det = 4 - 4 = 0$, also nicht invertierbar.

   (d) $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\det = 0 - 9 = -9$, also invertierbar.

   (e) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 0.2 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$: $\det = 20$, also invertierbar.

4. Berechnen Sie die Determinante der folgenden beiden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Es ist

$$\det\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right) = 5^3 + 2^4 - 3 \cdot 2^2 \cdot 5 = 81$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\right) = a^3 + 2 \cdot b^3 - 3ab^2$$

5. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Produkte AB und BA!

(b) Überprüfen Sie, ob A invertierbar ist. Sie brauchen die Inverse ggf. *nicht* zu berechnen.

Lösung:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 10 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Determinante von A: $\det(A) = 11$, damit ist A invertierbar.

6. Anfangs teilten sich die drei Unternehmen A, B und C den Markt für ein bestimmtes Gut. Das Unternehmen A hatte einen Marktanteil von 30% des Marktes, B hat 50% und C hat 20%. Im Laufe des Jahres ergaben sich die folgenden Änderungen:

   - A behält 80% seiner Kunden, verliert 5% der Kunden an B und 15% der Kunden an C.
   - B behält 60% seiner Kunden, verliert 20% der Kunden an A und 20% der Kunden an C.
   - C behält 85% seiner Kunden, verliert 5% der Kunden an A und 10% der Kunden an B.

   Welchen Marktanteil hat jedes der Unternehmen am Ende des Jahres?

   Lösung: Wir bezeichnen die Marktanteile mit x_A, x_B bzw. x_C und überlegen uns, dass sich der neue Marktanteil von A berechnet als:

   $$0.8 \cdot x_A + 0.6 x_B + 0.05 x_C$$

   Entsprechendes gilt für die anderen beiden Marktanteile. Wir können die neuen Marktanteile somit bequem durch eine Matrixmultiplikation berechnen:

   $$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.6 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.335 \\ 0.315 \end{pmatrix}.$$

   Das Unternehmen A hat somit einen Marktanteil von 35%, Unternehmen B von 33.5% und Unternehmen C von 31.5%.

7. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem unter Verwendung der Inversen der Koeffizientenmatrix:

   $$\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

   Lösung:
   Die Inverse berechnet sich als:

   $$\frac{1}{25 \cdot 8 - 10 \cdot 15} \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem also wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Berechnen Sie alle möglichen Produkte der beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = 13.$$

(10 Punkte, je 5 Punkte)

2. (a) Zeichnen Sie die Standardbasisvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ in ein xy-Koordinatensystem ein.

   (b) Finden Sie eine reelle (2×2)-Matrix A, so dass $Ae_1 = 2e_1$ und $Ae_2 = 3e_2$ ist. Zeichnen Sie die Bilder Ae_1 und Ae_2 in Ihr xy-Koordinatensystem ein.

   (c) Schraffieren Sie die Fläche in Ihrem Koordinatensystem, dessen Flächeninhalt genau gleich der Determinante $\det(A)$ ist.

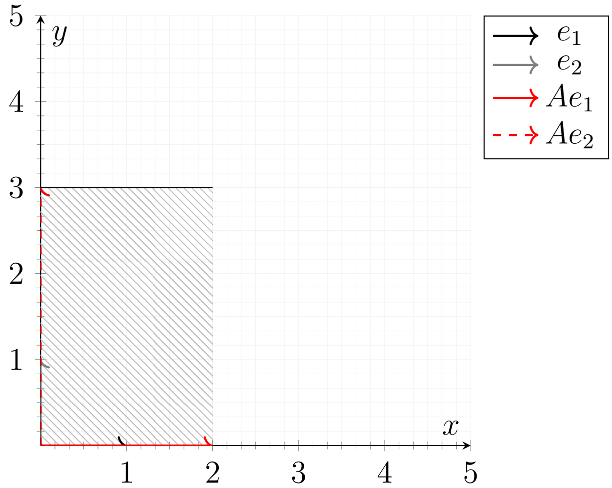
   (10 Punkte)

Lösung:

a) s. Zeichnung. **(2 Punkte)**

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **(4 Punkte)**

c) s. Zeichnung. **(4 Punkte)**



3. Berechnen Sie die Determinante von den folgenden Matrizen

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

Lösung:

a) $\det(A) = 18$

b) $\det(B) = x^3 - 3x + 2.$

(jeweils 5 Punkte)

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, ob die folgende Matrix invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Big| \; II - \frac{5}{3}I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Big| \; III - \frac{2}{3}I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Also hat die Matrix A Rang 3: rg(A) = 3 - und damit vollen Rang (Rang= Anzahl Zeilen=Anzahl Spalten). Damit ist die Matrix invertierbar. **Anwendung Gauss-Algorithmus 6 Punkte (3 Punkte pro Gauss-Schritt= jeweils 1 Punkt pro Zeileneintrag); 4 Punkte Schlußfolgerung Invertierbarkeit**