Verständnisfragen

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Korrigieren Sie falsche Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel für eine falsche Aussage an.

   - ☐ Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie dieselbe Richtung besitzen. Ihre Länge kann unterschiedlich sein. *richtig*
   - ☐ Die Vektoren v, w sind genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn $v + w \in \mathbb{R}^2$ ist. *falsch, für alle Vektoren in $\mathbb{R}^2$ ist die Summe wieder in $\mathbb{R}^2$, das ist gerade die Eigenschaft eines Vektorraums. Gegenbeispiel: $v = (1, 0)$, $w = (2, 0)$, keine Basis, aber $v + w \in \mathbb{R}^2$*
   - ☐ Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ hat nur eine Basis, nämlich $\{e_1, e_2\}$ mit $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. *falsch, je zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$*
   - ☐ In jedem Vektorraum gibt es eine linear unabhängige Menge, die aus genau einem Vektor besteht. *Ein einzelner Vektor v ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$. Für jeden Vektorraum $V \neq \{0\}$ ist die Aussage damit richtig.*
   - ☐ Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn v und w ungleich dem Nullvektor sind. *Falsch, s. Gegenbeispiel zur zweiten Aussage.*
   - ☐ Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda v + \mu w = 0$ folgt, dass $\lambda = \mu = 0$ ist. *Richtig, das ist gerade die Definition der linearen Unabhängigkeit.*

2. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist dünnbesetzt, d.h. fast alle Einträge sind Null. Geben Sie in einem kurzen Satz an, was dies in den folgenden Anwendungen bedeutet:

   (a) x enthält den täglichen Zahlungseingang eines Unternehmens während n Tage; *an fast keinem Tag besitzt das Unternehmen einen positiven Zahlungseingang*

   (b) x enthält die Materialkosten für ein Projekt, d.h. die Kosten für n benötigte Materialien; *für die meisten Materialien entstehen keine Kosten*

   (c) x stellt ein einfarbiges Bild aus n Pixeln dar, jeder Eintrag von x enthält die Helligkeit eines Pixels;*das Bild ist fast überall schwarz.*

   (d) x enthält den täglichen Regenfall an einem Ort während n Tage. *es regnet an fast keinem Tag.*

3. Zeichnen Sie in ein xy-Koordinatensystem drei linear unabhängige Vektoren. *Das geht nicht, denn es gibt keine drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$.*

4. Zeichnen Sie in ein xy-Koordinatensystem zwei linear abhängige Vektoren. *z.B.* $v = (1, 0)$, $w = (2, 0)$*, zwei Vektoren, die dieselbe Richtung besitzen.*

5. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^{100}$ stellt die Altersverteilung in einer Bevölkerung dar. Der Eintrag x_i enthält die Anzahl der Personen, die $i - 1$ Jahre alt sind, für $i = 1, \ldots, 100$. Es ist niemand in dieser Bevölkerung über 99 Jahre alt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung

   (a) die Gesamtanzahl an Personen in der Bevölkerung; $= \sum_{i=1}^{100} x_i$

(b) die Gesamtanzahl an Personen in der Bevölkerung, die 65 Jahre oder älter sind;= $\sum_{i=66}^{100} x_i$

(c) das Durchschnittsalter der Bevölkerung. $= \frac{\sum_{i=1}^{100}(i-1)\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{100} x_i}$

Standardaufgaben

1. Überprüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Paare von Vektoren linear unabhängig oder kollinear sind.
   (a) $u = (1, 3),\ v = (4, 12)$; *linear abhängig, denn* $v = 4u$
   (b) $x = (12, 4),\ y = (2, 6)$; *linear unabhängig, denn aus* $\lambda x = \mu y$ *folgt* $\lambda = \mu = 0$.
   (c) $r = (1, 4),\ s = (1, 6)$. *linear unabhängig, denn aus* $\lambda x = \mu y$ *folgt* $\lambda = \mu = 0$.

2. Welche der folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind Linearkombinationen der Vektoren $(1, 0, 1)$ und $(1, 2, 3)$?
   ☐ $(1, 1, 1)$*nein*
   ☐ $(0, 1, 1)$*ja,* $-\frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 2, 3)$
   ☐ $(0, 1, 2)$*nein*
   ☐ $(0, 1, 3)$*nein*

3. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren
$$u = (1, 1, 1),\ v = (1, 1, 2),\ w = (3, 3, 5)$$
linear abhängig sind.
Lösung: Es ist $1 \cdot u + 2 \cdot v - w = 0$. Also sind die Vektoren linear abhängig.

4. Sind die Vektoren $v = (a, a + 1)$ und $w = (a, 2a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.
Lösung: Wir lösen das lineare Gleichungssystem:
$$\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$$
Also
$$\lambda_1 a + \lambda_2 a = 0, \quad \lambda_1(a + 1) + \lambda_2 2a = 0.$$
Aus der ersten Gleichung folgt $a(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$, also $a = 0$ oder $\lambda_1 = -\lambda_2$. Wenn $a = 0$ ist, dann ist der Vektor w der Nullvektor und damit sind die Vektoren linear abhängig.
$\lambda_1 = -\lambda_2$ in die zweite Gleichung eingesetzt erhalten wir:
$$\begin{aligned} -\lambda_2(a + 1) + \lambda_2 2a &= 0 \\ \lambda_2 a - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2(a - 1) &= 0 \end{aligned}$$
Also ist entweder $\lambda_2 = 0$ oder $a = 1$. Für $\lambda_2 = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit der Vektoren. Für $a = 1$ ist $v = w$ und die Vektoren sind linear abhängig.
Die Vektoren v, w sind also für alle $a \neq 0, 1$ linear unabhängig.

5. Finden Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, so dass alle Vektoren in der folgenden Teilmenge

$$U = \{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

als Linearkombination von v und w dargestellt werden können.
Lösung: $v = (1, 1, 0)$ und $w = (0, 0, 1)$, dann kann ein beliebiger Vektor (x, x, y) als $x \cdot v + y \cdot w$ dargestellt werden.

6. Ist die folgende Menge eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

Lösung: Wir wissen, dass die Dimension vom $\mathbb{R}^3$ drei ist. Es genügt also die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren zu zeigen. Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt direkt $\lambda_3 = 0$, eingesetzt in die zweite Gleichung ist $\lambda_2 = 0$, eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Die drei Vektoren sind also linear unabhängig und bilden damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

7. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweiligen Vektorräumen?
   (a) $\{(1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (c) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\} \subset \mathbb{R}^2$.

   Lösung: Wir müssen jeweils die Untervektorraum-Eigenschaften überprüfen: Aus $u, v \in U$ muss $u + v \in U$ folgen. Aus $u \in U$, $\lambda \in K$ muss $\lambda u \in U$ folgen.

   (a) Es gibt nur ein Element im Untervektorraum: $u = (1, 1, 1)$. Die Summe $u + u = (2, 2, 2)$ liegt nicht in der Menge, also liegt kein Untervektorraum vor. Man kann sich merken, dass jeder Untervektorraum den Nullvektor enthalten muss!
   (b) Sei $U = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Seien $(x_1, x_2, 0), (y_1, y_2, 0) \in U$ beliebige Elemente in U, dann ist $(x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in U$, denn die Summe zweier reeller Zahlen ist auch wieder eine reelle Zahl. Sei $(x_1, x_2, 0) \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $\lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in U$, denn $\lambda x_1, \lambda x_2 \in \mathbb{R}$. Es handelt sich bei der Menge U also um einen Untervektorraum.
   (c) Sei $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\}$. Wir vermuten, dass es sich um keinen Untervektorraum handelt, da der Nullvektor nicht in U enthalten ist und es sich bei U um alle Vektoren der Länge 2 handelt. Wir wählen einfach zwei Vektoren aus U aus und rechnen nach, dass ihre Summe nicht in U enthalten ist:

   $$(2, 0) \in U,\ (-2, 0) \in U \quad \Rightarrow \quad (2, 0) + (-2, 0) = (0, 0) \notin U.$$

   Also ist U tatsächlich kein Untervektorraum.

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Sind die folgenden Mengen Untervektorräume?

   (a) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = 2x_3\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (b) $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^4$.

   Überprüfen Sie rechnerisch die Eigenschaften eines Untervektorraums.
   Lösung:

   (a) Sei $U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = 2x_3\right\}$. Wir wählen $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$ beliebig. Es gilt $x_1 = x_2 = 2x_3$ und $y_1 = y_2 = 2y_3$. Beide Gleichungen lassen sich addieren und somit gilt:

   $$(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \;\Rightarrow\; (x_1+y_1) = (x_2+y_2) = 2(x_3+y_3)$$

   Sei $(x_1, x_2, x_3) \in U$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt $x_1 = x_2 = 2x_3$. Diese Gleichung kann man mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren und erhält: $\lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda 2x_3$. Somit gilt also:

   $$\lambda(x_1 + x_2 + x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in U, \text{ denn } \lambda x_1 = \lambda x_2 = 2\lambda x_3.$$

   (b) Sei $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1\right\}$. Wir wählen $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$ beliebig. Es gilt $x_1+x_2 = 1$ und $y_1+y_2 = 1$. Dann ist aber $(x_1+y_1)+(x_2+y_2) = 2 \neq 1$. Und somit ist die Menge nicht abgeschlossen bezüglich der Addition. Konkretes Gegenbeispiel: $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$ liegen in U, aber $(1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$ liegt nicht in U.

   (20 Punkte: je 10 Punkte: bei a) jeweils 5 Punkte für jede Eigenschaft (Abgeschlossenheit Addition, Abgeschlossenheit Skalarmultiplikation))

2. Stellen Sie den Vektor w als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

   $$w = (2, 1, 1),\; v_1 = (1, 5, 1),\; v_2 = (0, 9, 1),\; v_3 = (3, -3, 1).$$

   Lösung: Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = w$$

   Dabei stellen wir fest, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind (die drei Gleichungen reduzieren sich auf zwei). Wir können w bspw. darstellen als $w = 2v_1 - v_2$. Allgemein kann man λ_3 beliebig wählen und es gilt:

   $$w = (2 - 3\lambda_3)v_1 + (2\lambda_3 - 1)v_2 + \lambda_3 v_3, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

   (5 Punkte: Es genügt, eine Linearkombination anzugeben (mit Rechnung))

3. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$ in $\mathbb{R}^5$.

   (a) Bestimmen Sie alle Teilmengen V von $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, die linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Basen von $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_5)$ aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 und stellen Sie die Vektoren jeweils als Linearkombination bezüglich dieser Basis her.

Lösung:

(a) Zunächst ist jeder einzelne Vektor linear unabhängig. Nun untersuchen alle Mengen aus zwei Vektoren. Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ mögliche Teilmengen aus zwei Vektoren. Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie Vielfaches voneinander sind. Man erkennt relativ schnell, dass dies nur für v_2 und v_5 der Fall ist: $v_2 = -2v_5$. Alle übrigen neun Vektorpaare sind linear unabhängig zueinander: $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}$.
Nun schauen wir uns alle Mengen aus drei Vektoren an. Es gibt $\binom{5}{3} = 10$ mögliche Teilmengen aus drei Vektoren. Es ist $v_1 = v_3 - 2v_2$. Also sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Auf diese Weise überprüft man alle Tripel von Vektoren und erhält, dass

$$\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3, v_4, v_5\}$$

linear abhängig sind.
Nun schauen wir uns alle Mengen mit vier Vektoren an: Da v_1 linear abhängig von v_2, v_3 sowie von v_3, v_5 ist und v_2 linear abhängig von v_5, finden wir keine vier Vektoren, die linear unabhängig sind. Also auch keine linear unabhängige Menge aus 5 Vektoren.

(b) Wie wir in (a) festgestellt haben, hat die Menge $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5)$ Dimension 3. Damit bilden alle Mengen aus drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis, also:

$$\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3, v_4, v_5\}$$

Bzgl, Basis 1: $v_3 = v_1 + 2v_2$, $v_5 = -2v_2$.
Bzgl. Basis 2: $v_2 = \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_1$, $v_5 = v_1 - v_3$.
Bzgl. Basis 3: $v_2 = -\frac{1}{2}v_5$, $v_3 = v_1 - v_5$.
Bzgl. Basis 4: $v_1 = v_3 - 2v_2$, $v_5 = -2v_2$.
Bzgl. Basis 5: $v_1 = v_3 + v_5$, $v_2 = -\frac{1}{2}v_5$.

(20 Punkte: 15 Punkte Teilaufgabe a): jeweils anteilige Punkte für alle gefundenen Teilmengen, 5 Pkte Teilaufgabe b))

4. Seien v_1, v_2, v_3 beliebige Vektoren in einem reellen Vektorraum und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$av_1 - bv_2,\ cv_2 - av_3, bv_3 - cv_1$$

linear abhängig sind.
Lösung:
Wir stellen das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1(av_1 - bv_2) + \lambda_2(cv_2 - av_3) + \lambda_3(bv_3 - cv_1) = 0$$

auf. Wir sortieren nach Vektoren:

$$v_1(a\lambda_1 - c\lambda_3) + v_2(c\lambda_2 - b\lambda_1) + v_3(b\lambda_3 - a\lambda_2) = 0$$

Man erkennt, dass man $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = b$ und $\lambda_3 = a$ wählen kann und alle Summanden werden zu Null. Somit sind die Vektoren linear abhängig. **(5 Punkte)**