



# **Tutorium Hardware- und Systemgrundlagen**

**Gruppe 1**  
Raum F109

**Gruppe 2**  
Raum F110

**Mirko Bay**  
[mirko.bay@htwg-konstanz.de]

**Michael Bernhardt**  
[michael.bernhardt@htwg-konstanz.de]

# Boole'sche Algebra II

Schaltalgebra  
Huntington'sche Axiome

## **Schaltfunktionen & Schaltnetze Funktionstabellen**

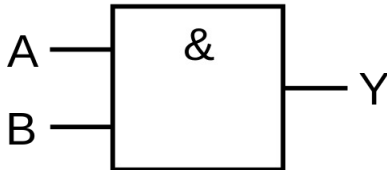
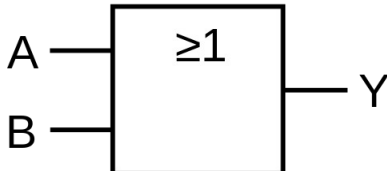
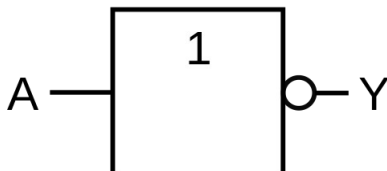
Aussagenlogik  
Strukturbäume

Min- / Max-Terme  
Disjunktive / Konjunktive Normalform

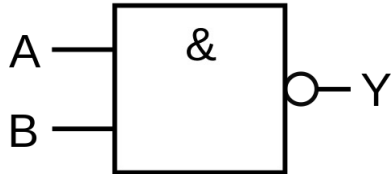
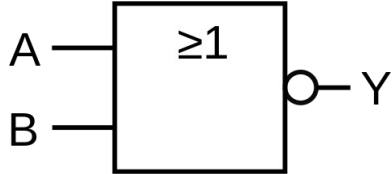
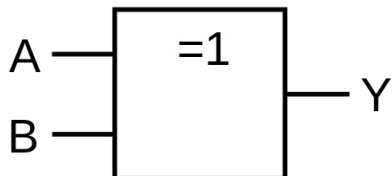
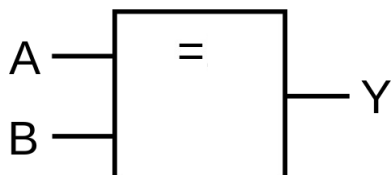
Shannonscher Entwicklungssatz ( & Binärbäume)  
Multiplexer-Bausteine

# Logik-Gatter

[ [de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter](http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter) ]

<b>UND</b>	<i>AND</i>		<div>UND</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_1</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_1$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
$x_2$	$x_1$	$f_1$																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
<b>ODER</b>	<i>OR</i>		<div>ODER</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_7</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_7$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
$x_2$	$x_1$	$f_7$																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
<b>NEGATION</b>	<i>NOT</i>																	



NICHT UND	NAND		<div>NAND</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_{14}</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_{14}$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$x_2$	$x_1$	$f_{14}$																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
NICHT ODER	NOR		<div>NOR</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_8</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_8$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
$x_2$	$x_1$	$f_8$																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
ANTIVALENZ	XOR		<div>Antivalenz</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_6</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_6$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$x_2$	$x_1$	$f_6$																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
ÄQUIVALENZ	XNOR		<div>Äquivalenz</div> <table><tr><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>f_9</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	$x_2$	$x_1$	$f_9$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
$x_2$	$x_1$	$f_9$																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																

## Aufgabe 1:

### Gegeben sei die folgende boole'sche Funktion:

$$y = \overline{\overline{x_2 \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3)} \cdot \overline{x_3} \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3)} \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \leftrightarrow 1)$$

**Formen Sie die gegebene Funktion y durch Anwendung boole'scher Operationen derart um, dass die Funktion y nur durch ein einziges Gatter realisiert werden kann.**

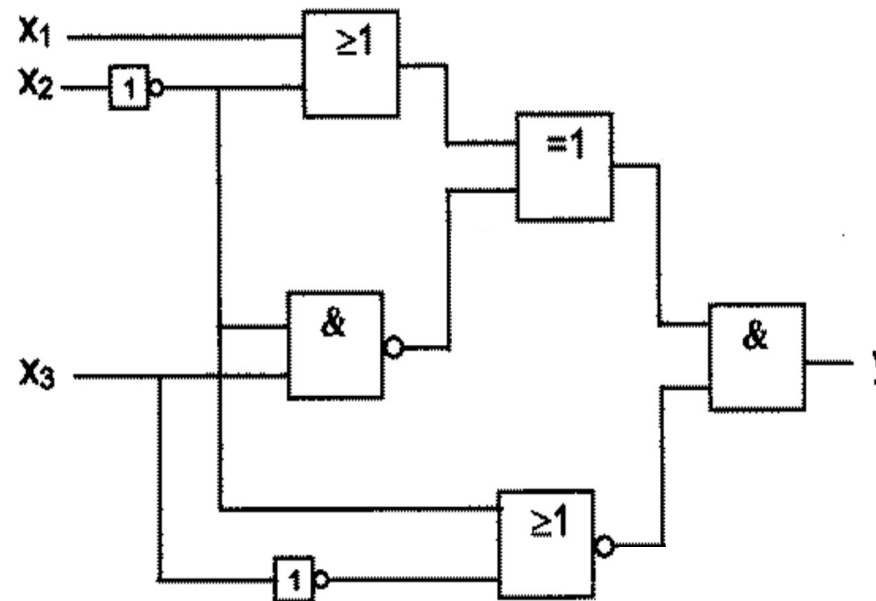
**Zeichnen Sie das resultierende Gatter mit seinen Eingangsvariablen.**

(Testat SS 07)

$$\begin{aligned} y &= \overline{\overline{x_2 \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3)} \cdot \overline{x_3} \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3)} \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \leftrightarrow 1) \\ y &= x_2 \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3) \vee \overline{x_3} \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) \cdot 1 \\ y &= x_2 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \vee \overline{x_3} \cdot (x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ y &= x_2 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ y &= x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \\ y &= \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2:

Gegeben ist das folgende Schaltnetz:



Stellen Sie die Schaltfunktion  $y = f(x_3, x_2, x_1)$  als boole'schen Ausdruck so dar, dass die Struktur des boole'schen Ausdrucks die Struktur der gezeigten Schaltung wiedergibt.

(Testat WS 03/04)

$$y = [(x_1 \vee \overline{x_2}) \leftrightarrow (\overline{x_2} \wedge x_3)] \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

### Aufgabe 3:

**Zeigen Sie durch schaltalgebraische Umformungen, dass die Schaltfunktion  $Z = f(c, b, a)$  durch ein einziges Gatter realisiert werden kann. Formen Sie dazu den Ausdruck  $Z$  solange um, bis er die geeignete Form hat.**

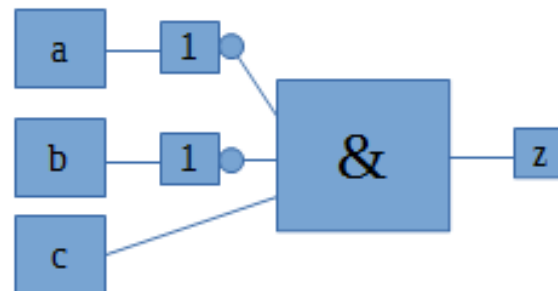
$$Z = [((a \leftrightarrow b) \vee c) \nleftrightarrow b] \cdot c$$

**Zeichnen Sie das Gatter und geben Sie die entsprechenden Eingangsvariablen an.**

*(Testat SS 07 WDH)*

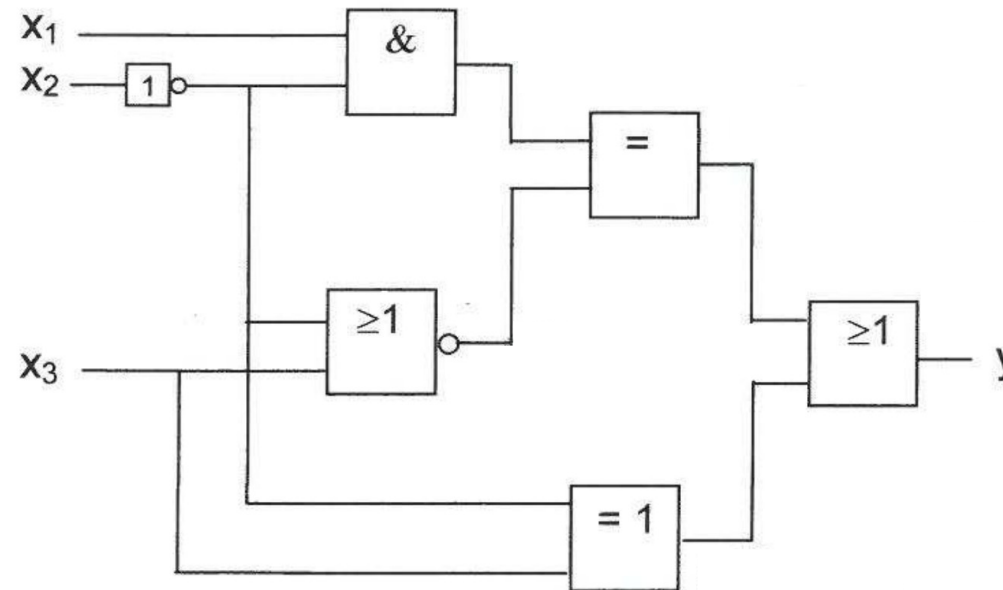
$$\begin{aligned}
 z &= [((a \cdot b \vee \bar{a} \cdot \bar{b}) \vee c) \leftrightarrow b] \cdot c \\
 z &= [(((a \cdot b \vee c) \vee (\bar{a} \cdot \bar{b} \vee c))) \cdot b \vee ((a \cdot b \vee c) \vee (\bar{a} \cdot \bar{b} \vee c)) \cdot \bar{b}] \cdot c \\
 z &= [b \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c} \vee \bar{b} \cdot \bar{c}) \vee b \cdot (\bar{a} \cdot c \vee b \cdot \bar{c})] \vee [\bar{a} \cdot \bar{b} \vee \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \vee \bar{b} \cdot c] \\
 z &= [\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee b \cdot \bar{c} \vee b \cdot \bar{c} \vee \bar{a} \cdot \bar{b}] \cdot c \\
 z &= [b \cdot \bar{c} \vee \bar{a} \cdot \bar{b}] \cdot c \\
 z &= \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \\
 z &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c
 \end{aligned}$$

**Gatter:**





**Aufgabe 4:**  
**Gegeben ist das folgende Schaltnetz:**



- a) Geben Sie die Funktionstabelle für  $y = f(x_3, x_2, x_1)$  an.
- b) Geben Sie die Schaltfunktion (boole'scher Ausdruck) an, die durch dieses Schaltnetz implementiert wird.

(Testat WS 10/11)

$$y = [(x_1 \wedge \overline{x_2}) \leftrightarrow (\overline{x_2} \vee x_3)] \vee (\overline{x_2} \nleftrightarrow x_3)$$

$$1 = (x_1 \wedge \overline{x_2})$$

$$2 = (\overline{x_2} \vee x_3)$$

$$3 = \leftrightarrow$$

$$4 = (\overline{x_2} \nleftrightarrow x_3)$$

$$5 = \vee$$

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$\overline{x_2}$	①	②	③	④	⑤
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

**Aufgabe 5:**  
**Gegeben sei folgende boole'sche Funktion:**

$$y = [ \overline{\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \vee (x_2 \leftrightarrow x_1) \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee (1 \leftrightarrow \overline{x_2})) ] \leftrightarrow 0$$

**Diese Funktion soll durch Anwendung boole'scher Operationen so umgeformt werden, dass y mit einem einzigen Gatterbaustein realisiert werden kann.**

**Ermitteln Sie, um welchen Gatterbaustein es sich handelt und mit welchen Variablen die Eingänge dieses Gatters beschaltet werden müssen.**

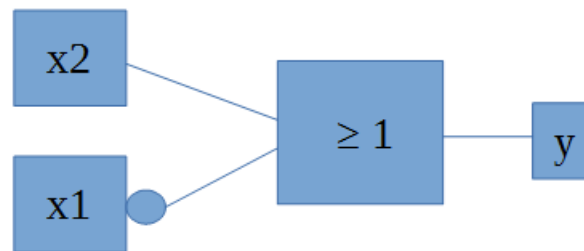
*(Klausur WS 04/05)*

$$y = [\overline{\overline{x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \vee (x_2 \leftrightarrow x_1) \vee (\overline{x_2 \vee x_1} \vee (1 \leftrightarrow \overline{x_2}))}] \leftrightarrow 0$$

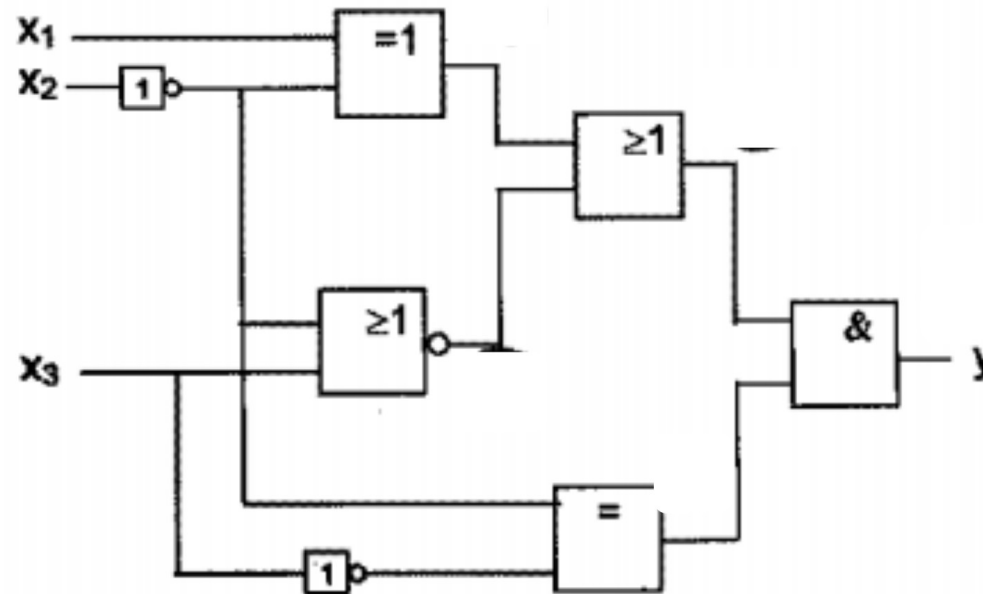
$$y = x_2 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_2 \cdot \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$y = x_2 \vee \overline{x_1}$$

**Gatter:**



**Aufgabe 6:**  
**Gegeben ist das folgende Schaltnetz:**



**a ) Stellen Sie die Schaltfunktion  $y = f(x_3, x_2, x_1)$  als boole'schen Ausdruck so dar, dass die Struktur des boole'schen Ausdrucks die Struktur der gezeigten Schaltung wieder gibt.**

**b) Stellen Sie die Funktionstabelle für  $y = f(x_3, x_2, x_1)$  auf.**

*(Testat SS 04)*

$$y = [(x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \vee (\overline{\overline{x_2} \vee x_3})] \wedge (\overline{x_2} \leftrightarrow \overline{x_3})$$

$$1 = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2})$$

$$2 = (\overline{\overline{x_2} \vee x_3})$$

$$3 = \vee$$

$$4 = (\overline{x_2} \leftrightarrow \overline{x_3})$$

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$\overline{x_2}$	①	②	③	$\overline{x_3}$	④	y
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1

**Aufgabe 7:**  
**Gegeben sei die folgende boole'sche Funktion:**

$$y = \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot (x_2 \nleftrightarrow x_1)} \vee x_2 \cdot (x_3 \leftrightarrow x_1)$$

**Diese Funktion soll durch ein einziges UND-Gatter realisiert werden.**

**Ermitteln Sie durch Anwendung boole'scher Operationen, mit welchen Eingangsvariablen das UND-Gatter beschaltet werden muss.**

*(Testat SS 02)*

$$\begin{aligned}y &= \overline{\overline{x_3 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_1)} \vee x_2 \cdot (x_3 \cdot x_1 \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\y &= \overline{\overline{x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1} \vee \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1}} \vee x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \vee \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot \overline{x_1}} \\y &= \overline{\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot x_1} \vee \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1}}} \\y &= x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1}\end{aligned}$$

**Gatter:**

