



Tutorium Hardware- und Systemgrundlagen

Gruppe 1
Raum F109

Gruppe 2
Raum F110

Mirko Bay
[mirko.bay@htwg-konstanz.de]

Michael Bernhardt
[michael.bernhardt@htwg-konstanz.de]

Boole'sche Algebra IV

Schaltalgebra
Huntington'sche Axiome

Schaltfunktionen & Schaltnetze
Funktionstabellen

Aussagenlogik
Strukturbäume

Min- / Max-Terme
Disjunktive / Konjunktive Normalform

Shannonscher Entwicklungssatz (& Binärbäume)
Multiplexer-Bausteine

Normalformen von Funktionen

Jede Schaltfunktion kann als disjunktive Normalform (DNF) oder konjunktive Normalform dargestellt werden! Beide Formen sind jeweils möglich und funktional äquivalent.

- ▶ DNF: Min-Terme (nur eine 1 in Funktionstabelle)
- ▶ KNF: Max-Terme (nur eine 0 in Funktionstabelle)

Disjunktive Normalform

= Eins-Stellen-Menge = Min-Terme

Die DNF ist **ODER-Verknüpfung von Min-Termen**. Ein Min-Term ist eine Funktion von n Variablen, wo **Funktionstabelle eine 1 in der Zeile** hat.

In der Funktionstabelle wird (wie gewohnt) die **0 negiert**, die einzelnen **Terme in sich** sind **UND-Verknüpft**, diese Min-Terme werden dann durch ODER verknüpft.

Konjunktive Normalform

= Null-Stellen-Menge = Max-Terme

Die KNF ist **UND-Verknüpfung von Max-Termen**. Ein Max-Term ist eine Funktion von n Variablen, wo **Funktionstabelle eine 0 in der Zeile** hat.

In der Funktionstabelle wird die **1 negiert**, die einzelnen Terme in sich sind ODER-Verknüpft, diese Max-Terme werden dann durch UND verknüpft!

Beispiel:

Die Variablen werden i.d.R.
in absteigender Reihenfolge
notiert

i = Zeilenindex

i ₁₀	c	b	a	y	Min-Terme (DNF)	Max-Terme (KNF)
0	0	0	0	1	$\bar{c} \bar{b} \bar{a}$	
1	0	0	1	0		$c \vee b \vee \bar{a}$
2	0	1	0	0		$c \vee \bar{b} \vee a$
3	0	1	1	1	$\bar{c} b a$	
4	1	0	0	1	$c \bar{b} \bar{a}$	
5	1	0	1	0		$\bar{c} \vee b \vee \bar{a}$
6	1	1	0	0		$\bar{c} \vee \bar{b} \vee a$
7	1	1	1	0		$\bar{c} \vee \bar{b} \vee \bar{a}$

Kurzschreibweise für
die beiden Formen:

Man nimmt einfach nur den
Zeilenindex und kann somit
direkt auf die
KNF [N(f)] / DNF [E(f)]
schließen!

Disjunktive Normalform:

$$y_{DNF} = \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \vee \bar{c} \cdot b \cdot a \vee c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \rightarrow E(y) = \{000, 011, 100\} \rightarrow E(y) = \{0, 3, 4\}$$

Konjunktive Normalform:

$$f_{KNF} = (c \vee b \vee \bar{a}) \cdot (c \vee \bar{b} \vee a) \cdot (\bar{c} \vee b \vee \bar{a}) \cdot (\bar{c} \vee \bar{b} \vee a) \cdot (\bar{c} \vee \bar{b} \vee \bar{a})$$

$$\rightarrow N(f) = \{001, 010, 101, 110, 111\} \rightarrow N(f) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

Aufgabe 1:

Die Eins-Stellen der vollständigen Schaltfunktion $g = f(c, b, a)$ lauten:

$$E(f) = \{ 001, 010, 100, 111 \}$$

Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktion g an.

(Testat WS 06/07)

$$E(f) = \{ 001, 010, 100, 111 \}_2 = E(f) = \{ 1, 2, 4, 7 \}_{10}$$

hieraus folgt die Null – Stellen – Menge :

$$N(f) = \{ 0, 3, 5, 6 \}_{10} = \{ 000, 011, 101, 110 \}_2$$

$$f_{KNF} = (c \vee b \vee a) \cdot (c \vee \bar{b} \vee \bar{a}) \cdot (\bar{c} \vee b \vee \bar{a}) \cdot (\bar{c} \vee \bar{b} \vee a)$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktion $f(w, x, y, z)$:

$$f(w, x, y, z) = \bar{y} \cdot (x \cdot z \vee \bar{z}) \vee w \cdot x \cdot (y \vee \bar{y} \cdot z) \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$$

(Klausur WS 02/03)

[Lösung auf nächster Seite]

Vereinfachen der Funktion soweit wie möglich:

$$f(w, x, y, z) = \bar{y} \cdot (x \cdot z \vee \bar{z}) \vee w \cdot x \cdot (y \vee \bar{y} \cdot z) \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$$

$$f(w, x, y, z) = (x \cdot \bar{y} \cdot z) \vee (\bar{y} \cdot \bar{z}) \vee (w \cdot x \cdot y) \vee (w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z) \vee (\bar{x} \cdot y \cdot z)$$

Erweitern der Funktion um die fehlenden Variablen: (für jeden unvollständigen Term alle Möglichkeiten!)

$$f_{DNF} = (\bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z) \vee (\bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z) \vee (\bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \vee (\bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \vee (\bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}) \vee (\bar{w} \cdot x \cdot y \cdot \bar{z}) \vee (w \cdot x \cdot y \cdot \bar{z}) \vee (w \cdot x \cdot y \cdot z) \vee (w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z) \vee (w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z) \vee (\bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z)$$

Die DNF als Binärzahlen interpretieren:

$$E(f) = \{0101, 1100, 1000, 0000, 0100, 1111, 1110, 1101, 1011, 0011\}$$

$$E(f) = \{5, 12, 8, 0, 4, 15, 14, 13, 11, 3\}$$

Daraus die KNF ableiten:

$$N(f) = \{1, 2, 10, 6, 7, 9\}$$

$$N(f) = \{0001, 0010, 1010, 0110, 0111, 1001\}$$

$$f_{KNF} = (w \vee x \vee y \vee \bar{z}) \cdot (w \vee x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{w} \vee x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (w \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \cdot (w \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{w} \vee x \vee y \vee \bar{z})$$

Wird gestrichen, da doppelt vorhanden!

i_{10}	w	x	y	z	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Oder Lösung über Funktionstabelle:

Auch hier zuerst vereinfachen des Terms und erweitern der fehlenden Variablen
(rot ist gegeben, gelb wurde erweitert).

Eintragen des Funktionswert f
(1 wenn Term in DNF, ansonsten 0)

Raus schreiben der KNF (Null-Stellen aus Tabelle
(1 wird negiert, 0 bleibt / Terme sind in sich ODER verknüpft)

Aufgabe 3:

Ein mobiler Roboter hat drei Sensoren (s_2, s_1, s_0), die drohende Kollisionen (bei $s_i = 1$) mit Hindernissen erkennen. Der Roboter darf weiterfahren, wenn mindestens zwei Sensoren keine Kollisionen melden.

Geben Sie die Schaltfunktion $y = f(s_2, s_1, s_0)$ in disjunktiver Normalform an.

(Klausur WS 11/12)

i_{10}	s_2	s_1	s_0	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Wenn ein Sensor $s = 1$, dann Kollision.

Wenn $y = 1$, dann weiterfahren

Eins-Stellen-Menge = $E(y) = \{000, 001, 010, 100\} = \{0, 1, 2, 4\}$

Daraus folgt die DNF

$$y_{DNF} = \overline{s_2} \overline{s_1} \overline{s_0} \vee \overline{s_2} \overline{s_1} s_0 \vee \overline{s_2} s_1 \overline{s_0} \vee s_2 \overline{s_1} \overline{s_0}$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die disjunktive Normalform (DNF) der Funktion $z = f(x_3, x_2, x_1)$:

$$Z = \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \vee x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_1$$

Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktion z an.

(Testat SS 07)

*Interpretieren der gegebenen DNF als Binärzahlen ,
bei DNF wird die 0 negiert :*

$$E(z) = \{000, 010, 011, 110\}$$

$$E(z) = \{0, 2, 3, 6\}$$

$$N(z) = \{1, 4, 5, 7\}$$

$$N(z) = \{001, 100, 101, 111\}$$

bilden der KNF aus den Binärzahlen (1 wird negiert)

$$z_{KNF} = (x_3 \vee x_2 \vee \overline{x}_1) \cdot (\overline{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \cdot (\overline{x}_3 \vee x_2 \vee \overline{x}_1) \cdot (\overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1)$$

Oder über eine Funktionstabelle lösen !

Aufgabe 5:

Geben Sie die konjunktive Normalform der folgenden Schaltfunktion an:

$$f(c, b, a) = \bar{b} \cdot a \vee c \cdot \bar{b} \vee \bar{c} \leftrightarrow \bar{a}$$

Klausur WS 13/14 (Nachklausur)

Zuerst vereinfachen der Funktion:

$$f = a \cdot \bar{b} \vee \bar{b} \cdot c \vee a \cdot \bar{c} \vee \bar{a} \cdot c$$

Dannerweitern der Terme mit allen möglichen Kombinationen:

$$f = a \cdot \bar{b} \cdot c \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Interpretieren der Terme als Binärzahlen (und streichen der doppelten Terme):

$$E(f) = \{101, 100, \cancel{101}, 001, 110, \cancel{100}, 011, \cancel{001}\}$$

$$E(f) = \{5, 4, 1, 6, 3\}$$

$$N(f) = \{0, 2, 7\}$$

$$N(f) = \{000, 010, 111\}$$

$$f_{KNF} = (a \vee b \vee c) \cdot (a \vee \bar{b} \vee c) \cdot (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$$

Aufgabe 6:

Geben Sie die Schaltfunktion $y = f(x_2, x_1, x_0)$ an, die genau dann 1 ist, wenn die durch die Belegung (x_2, x_1, x_0) dargestellte Zahl ohne Rest durch 3 teilbar ist. Stellen Sie f in disjunktiver Normalform (DNF) dar.

Klausur WS 13/14 (Nachklausur)

i_{10}	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Nur die Zahlen 3 und 6 sind im Intervall $[0,7]$ durch 3 ohne Rest teilbar:

$$E(y) = \{3, 6\}$$

$$E(y) = \{011, 110\}$$

$$y_{DNF} = \overline{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 x_1 \overline{x}_0$$

Aufgabe 7:

Geben Sie die konjunktive Normalform der Schaltfunktion $f(c, b, a) = \bar{c} \vee b \cdot \bar{a}$ an.

Klausur WS 11/12

i_{10}	c	b	a	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Erweitern der Funktion um vollständige DNF zu erhalten :

Entweder über das Erweitern der Terme oder einer Funktionstabelle :
 (rot ist gegeben , gelb wurde erweitert !)

Erklärung Weg über Funktionstabelle :

Die vorhandenen Teil – Terme der DNF erhalten in der Funktionstabelle eine 1
 d . h . es werden alle Zeilen die \bar{c} enthalten (Zeilen 0 – 4) mit 1 markiert und
 so auch die Zeilen die $b \cdot \bar{a}$ (Zeilen 2 und 6) enthalten

Null – Stellen (KNF) ablesen :

$$N(f) = \{ 4, 5, 7 \}$$

$$N(f) = \{ 100, 101, 111 \}$$

$$f_{KNF} = (\bar{c} \vee b \vee a) \cdot (\bar{c} \vee b \vee \bar{a}) \cdot (\bar{c} \vee \bar{b} \vee \bar{a})$$