Mathematatik I

Matrizenrechnung II: Inversen & Determinanten

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

Zeitplan Vorlesung

		Datum	Bemerkung	Inhalt
Grund-lagen			Selbststudium	Grundlagen: Mengen
			Selbststudium	Grundlagen: Relationen
			Selbststudium	Grundlagen: Abbildungen
Zahlen-theorie	**1**	**22.04.**	**Einmalig Mi.**	Wiederholung & Zusammenfassung Selbststudium
	2	27.04.		Zahlentheorie I
	3	28.04.		Zahlentheorie II
Algebra	4	04.05.		Gruppen
	5	11.05.		Ringe, Körper
	6	12.05.		Kryptographie
	7	18.05.		Vektorräume
Lineare Algebra	8	25.05.		Lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus
	9	26.05.		Lineare Gleichungssysteme: Lösungstheorie
	--	01.06.	Pfingstmontag	--
	10	08.06.		Matrizen I: Definition, Rechenregeln
	11	**09.06.**		**Matrizen II: Inverse, Determinanten**

Wiederholung

Kahoot - Fragen

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (3×2)

$A^t \cdot A$: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = (2 \times 2)$

$A^t = (2 \times 3)$

$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Transponierte

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$

Wiederholung

4)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Diagonalmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Einheitsmatrix

Inverse einer Matrix

Gibt es zu jeder Matrix eine inverse Matrix (bzgl. Der Multiplikation)?

Inverse einer Matrix - Definition

= inverse Element der Multiplikation

Sei A eine quadratische $(n \times n)$-Matrix. Wenn es eine Matrix X gibt, so dass

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$

E Einheitsmatrix

gilt, dann heißt X das **Inverse von A** und man schreibt A^{-1}.

Wenn eine Matrix A eine Inverse besitzt, dann heißt A **invertierbar** oder **regulär**, andernfalls **singulär**.

Wann ist eine Matrix invertierbar, d.h. wann existiert das Inverse einer Matrix?

Inverse einer Matrix – Beispiel $(2x2)$ –Matrix

Besitzt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ein Inverses?

Gesucht ist eine Matrix $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$, so dass

$$AX = E \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}} \right) = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 = 1$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

$$\boxed{2x_3 = 0}$$
$$3x_3 + x_4 = 1$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ und } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\iff x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \text{ also } \boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

Inverses

Inverse einer $(2x2)$ -Matrix

Beispiel der vorletzten Vorlesung:

Inverses: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Ax = b \quad | \cdot A^{-1}$$
$$x = A^{-1} b$$

$$x_1 + x_2 = 82$$
$$x_1 + 2x_2 = 140$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Inverses ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_2 = -1, \quad x_1 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 = 1, \quad x_3 = -1$

Inverse einer Matrix – Beispiel $(2x2)$ –Matrix

Zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: Gesucht inverse Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array}\right)$$

$c \cdot \text{I} - a \cdot \text{II}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ 0 & bc-ad & c \end{array}\right)$$

eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\boxed{bc - ad \neq 0}$ $\Leftrightarrow$ A invertierbar

Determinante einer $(2x2)$ −Matrix

Die Größe, die entscheidet, ob eine Matrix invertierbar ist, nennt man $\boxed{\text{Determinante.}}$ Die Determinante einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

berechnet sich als $\det(A) = ad - bc$.
Es gilt allgemein, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante nicht null ist.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

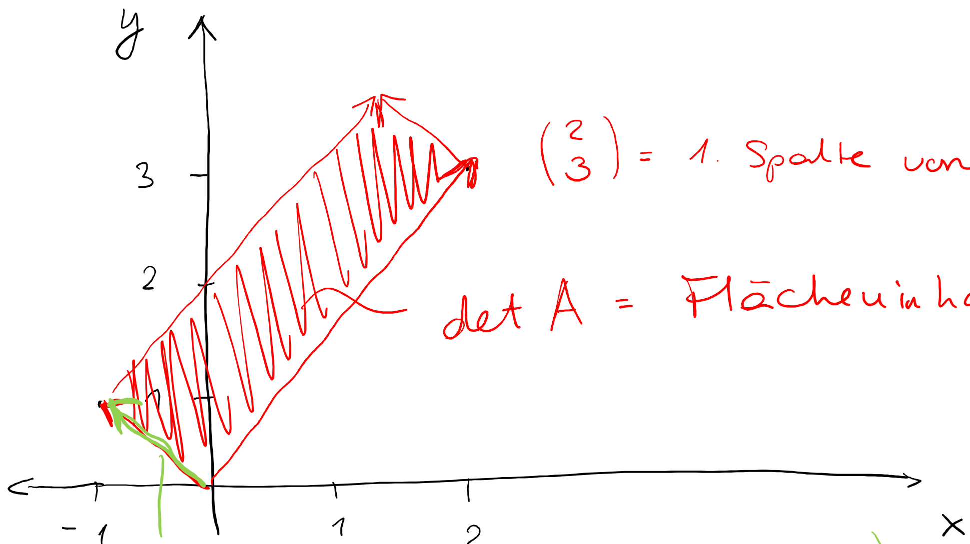
Es gilt dann: $A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\det(A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Geometrische Interpretation der Determinante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = ad - bc$$



$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ = 1. Spalte von A

$\det A$ = Flächeninhalt

2. Spaltenvektor von $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$$

Kriterium für Invertierbarkeit

Eine quadratische $(n \times n)$ −Matrix A ist invertierbar.

$\Leftrightarrow$ $Ax = b$ besitzt für jede beliebige rechte Seite b eine eindeutige Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$.

$\Leftrightarrow$ Die Matrix A hat vollen Rang, also $\mathrm{Rang}(A) = n$ $(= Anzahl\ Zeilen = Anzahl\ Spalten)$.

$\Leftrightarrow$ Die Determinante ist ungleich Null: $\det(A) \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ Alle Spalten (oder Zeilen) von A sind linear unabhängig zueinander.

Determinante einer $(n \times n)$ −Matrix

Was passiert mit der Determinante, wenn wir einen Gauß-Schritt „machen"?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{II}]{} A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 1 = 2 \qquad \det(A') = 2$$

Determinante ändert sich nicht, wenn wir Zeilen miteinander addieren.

$$\xrightarrow[\boxed{\frac{1}{2}}\mathrm{I}]{} A' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = 1 = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot \det(A)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{I},\,\mathrm{II}\ \text{vertauschen}]{} A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A') = -2 = (-1) \det A$$

Rechenregeln für Determinanten

- Entsteht B durch Vertauschen von zwei Zeilen von A ist: $\det(B) = -\det(A)$.
- Entsteht B durch Addition von einer Zeile auf eine andere Zeile von A ist: $\det(B) = \det(A)$
- Ensteht B durch Multiplikation einer Zeile von A mit λ ist: $\det(B) = \lambda\det(A)$
- Die Determinante $\det(A)$ einer Dreiecksmatrix A ist das Produkt der Diagonaleinträge.
- Multiplikationssatz: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Wir können also die Determinante einer Matrix A berechnen, indem wir Sie mittels des Gauß-Algorithmus in eine Dreiecksmatrix A' umformen.

Beispiel

Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 3 \cdot \left(-\frac{7}{15}\right) \cdot \underbrace{\frac{130}{7}}_{\det A'} = -26$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{\det(A)} \xrightarrow{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{II}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{3}\det(A)} \xrightarrow{\mathrm{I} + \mathrm{II}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{3}\det A}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{7} \cdot 5\, \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \cdot \left(-\frac{3}{7} \cdot 5\right) \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} + \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -\frac{75}{7} \\ 0 & 0 & 7 - \frac{75}{7} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) \det A = \det A'$$

$$\det A' = 1 \cdot (-5) \cdot \left(\frac{-26}{7}\right)$$

Speziell: Determinante einer (3x3)-Matrix

Die Determinante einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

berechnet sich als

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Determinante einer (3x3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 5 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-3) \cdot 5$$
$$- 0 \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 7 (-3) \cdot 2$$
$$= 7 - 75 + 42 = -26$$