2

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>LGS:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad 2 &= x_1 + 3x_3 \\ \mathrm{II}: \quad 1 &= 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 \\ \mathrm{III}: \quad 1 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{II}: \\ \mathrm{I}: \\ \mathrm{III}: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[5\mathrm{III} - \mathrm{II}]{\mathrm{I} - \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\mathrm{III} - (-4)\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_3 = k$$

in I: $-1 \cdot x_2 + 2 \cdot k = 1 \quad | -2k \quad \cdot(-1)$

$$x_2 = -1 + 2k$$

in II: $5 \cdot x_1 + 9 \cdot (-1 + 2k) - 3 \cdot k = 1$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 9 + 18k - 3k &= 1 \quad && | +9 \quad -15k \\ 5x_1 &= 10 - 15k \quad && | :5 \\ x_1 &= 2 - 3k \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 - 3k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1 + 2k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k = 2$: $\quad (2 - 3 \cdot 2) \cdot v_1 + (-1 + 2 \cdot 2) \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$

$$\Longleftrightarrow (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(3)

$v_1 = (4,1,1,0,-2)$, $v_2 = (0,1,4,-1,2)$, $v_3 = (4,3,9,-2,2)$
$v_4 = (1,1,1,1,1)$, $v_5 = (0,-2,-8,2,-4)$

a)

$v_1 \rightarrow v_2 \Rightarrow$ nicht kollinear	$v_2 \rightarrow v_3 \Rightarrow$ nicht kollinear	$v_3 \rightarrow v_4 \Rightarrow$ nicht kollinear
$v_1 \rightarrow v_3 \Rightarrow$ nicht kollinear	$v_2 \rightarrow v_4 \Rightarrow$ nicht kollinear	$v_3 \rightarrow v_5 \Rightarrow$ nicht kollinear
$v_1 \rightarrow v_4 \Rightarrow$ nicht kollinear	$\boxed{v_2 \rightarrow v_5 \Rightarrow \text{kollinear}}$	
$v_1 \rightarrow v_5 \Rightarrow$ nicht kollinear		

$v_4 \rightarrow v_5 \Rightarrow$ nicht kollinear

nicht kollinear: nicht linear abhängig voneinander, da sie kein vielfaches voneinander sind.

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_1 = 4 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + (-2) \cdot e_5$$

$$v_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 + (-1) \cdot e_4 + 2 \cdot e_5$$

$$v_3 = 4 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3 + (-2) \cdot e_4 + 2 \cdot e_5$$

$$v_4 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4 + 1 \cdot e_5$$

$$v_5 = 0 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2 + (-8) \cdot e_3 + 2 \cdot e_4 + (-4) \cdot e_5$$

1

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$

alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ mit $\boxed{x_1 + x_2 = 1}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim = 4

z.B: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ $x_1 + x_2 = 2 \neq 1$ → kein Untervektorraum!

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1 = x_2 = 2x_3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim = 3

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim = 1

z.B: addition: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ ✓

skalar: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

Nullvektor? → $0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

Es handelt sich um einen Untervektorraum

(4) $av_1 - bv_2,\ cv_2 - av_3, bv_3 - cv_1$

$a \neq b \neq c$

$a = 1; \quad b = 2; \quad c = 3$

v_1, v_2, v_3 seien beliebige Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$av_1 - bv_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cv_2 - av_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$bv_3 - cv_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS:

$$\begin{array}{rrrcl} -5 & 8 & 1 & = & 0 \\ -2 & 3 & 4 & = & 0 \\ 1 & 1 & 1 & = & 0 \end{array}$$