Unterlagen zur Vorlesung

Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Schaltalgebra - Weitere Sätze

Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

Assoziativgesetze:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

Idempotenzgesetze:

$$a \wedge a = a$$
$$a \vee a = a$$

Absorptionsgesetze:

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

DeMorgan-Gesetze:

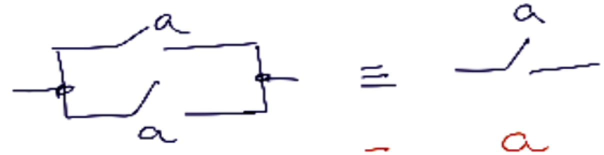
$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$
$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

Visualisierung-zum „Verständnis“ der Gesetze

Zur "Einsicht": Visualisierungen der Gesetze

- **Idempotenzgesetz:**

$a \wedge a = a$



$a \vee a = a$

- **Absorptionsgesetz:**

$a \wedge (a \vee b) = a$

$a \vee (a \wedge b) = a$

Das Gebilde auf der linken Seite verhält sich genau wie der Schalter rechts d.h. die beiden Strukturen sind äquivalent (gleich).

Zum Verständnis des Absorptionsgesetzes

Wichtig: Das "a", das in den Gesetzen vorkommt, muss nicht nur für eine Variable stehen, "a" kann auch ein ganzer Ausdruck sein.

Beispiel: $b \wedge c \vee (b \wedge c \wedge a)$ sei gegeben

Hier findet man die Struktur des Absorptionsgesetzes auch wieder:

$$\underbrace{\underset{a}{b \wedge c}}\vee(\underset{a}{b \wedge c} \wedge \underset{b}{a})$$

$\xrightarrow{\text{entspricht}}$ hier die Abbildung des gegebenen Ausdrucks in die Absorptionsgesetz-Struktur

Damit:

$$b \wedge c \vee (b \wedge c \wedge a) = b \wedge c$$

Das Gesetz von de Morgan gilt auch für mehrere Variable:

z.B.:

- $\overline{a \wedge b \wedge c \wedge d} = \bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}$
- $\overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee b$

Schaltalgebra

- Zum “Beweis” (man muss sagen, eher Einsicht) dieser Sätze ist es nützlich, sich der Interpretation der Mengenalgebra oder des Schaltermodells zu bedienen, da man dann das Gesetz so besser veranschaulichen kann.
- Die Aussagen eines Gesetzes sind in jeder Interpretationsform gültig. Also eine Boolesche Regel, wie das Absorptionsgesetz, gilt in der Schaltalgebra genauso wie in der Mengenlehre, dem anschaulichen Schaltermodell oder der Aussagenlogik.
- Gerade das primitive Schaltermodell eines Ausdrucks lässt die Vereinfachung oft anschaulich visualisieren.

Das versuche ich jetzt mal für das Assoziativ- und das Absorptionsgesetz.

Schaltalgebra-Interpretationsmöglichkeiten

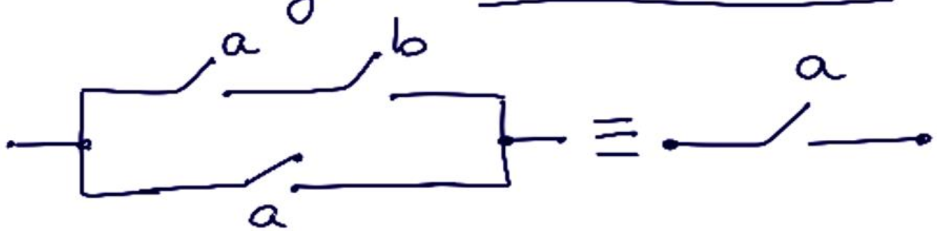
Verschiedene Interpretationen eines booleschen Ausdrucks können das Verständnis fördern.

- Absorptionsgesetz: $\boxed{a \vee (a \wedge b) = a}$

- Abbildung in die Mengenlehre (Venn-Diagramm):

$$A \cup (A \cap B) = A$$

- Abbildung als Schaltermodell:



$\wedge$: Reihenschaltg
$\vee$: parallelschaltung

Elementare Regeln für Boolesche Ausdrücke

- Elementare Regeln für Boolesche Ausdrücke sind die
  - Regeln für die Verknüpfung von Konstanten
  - Regeln für die Verknüpfung eines Elements

Elementare Regeln

Konstanten	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
	$0 \vee 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
	$1 \vee 1 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$
	$0 \vee 1 = 1$	$0 \wedge 1 = 0$

Variablen	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 0 = 0$
	$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 1 = a$
	$a \vee a = a$	$a \wedge \overline{a} = 0$
	$a \vee \overline{a} = 1$	$a \wedge a = a$

Beispiel: Beweis des Satzes von de Morgan

Zu zeigen: $(\overline{a} \vee \overline{b})$ das Komplementelement von $(a \wedge b)$

Zu zeigen: Komplementgesetze $(x \vee \overline{x} = 1)$ und $(x \wedge \overline{x} = 0)$
sind erfüllt

Mit $x = a \wedge b$ gilt:

- $$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \vee \overline{b}) = (a \vee \overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (b \vee \overline{a} \vee \overline{b}) = (1 \vee \overline{b}) \wedge (1 \vee \overline{a}) = 1 \wedge 1 = 1$$
- $$(a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) = (a \wedge b \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b \wedge \overline{b}) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$

q.e.d.

Beispiele für die ersten Versuche…

- Beispiele für Umformungen von boolschen Formen:

  TIPP: Versuchen Sie sich selber an der Lösung!
  (Lösungen siehe weitere Folien)

(1) $z = ((((a \vee 0) \wedge (b \vee 1)) \vee \bar{a}) \wedge 1) \vee (\bar{b} \wedge 0)$

(2) $y = (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \overline{\bar{b} \vee (\bar{a} \wedge a)}$

(3) $y = a \wedge c \wedge d \vee b \wedge c \wedge \bar{d} \vee b \wedge c \wedge d \vee \bar{a} \wedge c \wedge d$

(4) $v = x \vee x \wedge y \wedge z \vee y \wedge z \wedge \bar{x} \vee q \wedge x \vee \bar{q} \wedge x \vee \bar{x} \wedge y$

(5) $z = (b \vee c) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) \wedge (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$

- Vereinfachen Sie die Ausdrücke (1) .. (5) soweit es möglich ist. Verwenden Sie die vorgestellten Regeln aus dem Skript.

Beispiele für die ersten Versuche…

Versuchen Sie sich an der Lösung der Aufgaben 1 bis 5

Schauen Sie sich dazu die Regeln an (Folien 19, 20 und 24), die Sie anwenden müssen, um die gegebenen Ausdrücke zu vereinfachen.

Lösung für Beispielaufgabe 1

Beispiele für Umformungen

(1) $z = ((((a \vee 0) \wedge (b \vee 1)) \vee \bar{a}) \wedge 1) \vee (\bar{b} \wedge 0)$

- Vereinfache z soweit wie möglich!

  - $a \vee 0 = a$
  - $b \vee 1 = 1$
  - $\bar{b} \wedge 0 = 0$

  Anwendung der Grundregeln, oben eingesetzt:

- Damit:

  $z = ((a \wedge 1) \vee \bar{a}) \vee 0$

  - $a \wedge 1 = a$

- Damit:

  $z = \underbrace{(a \vee \bar{a})}_{=1} \vee 0 = 1 \vee 0 = \underline{\underline{1}}$

Lösung für Beispielaufgabe 2

Beispielaufgabe 2

$$y = (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \overline{\bar{b} \vee (\bar{a} \wedge a)}$$; Vereinfache!

- $\bar{a} \wedge a = 0$
- $\bar{b} \vee 0 = \bar{b}$
- $\bar{\bar{b}} = b$

Anwendung der Grundregeln, oben eingesetzt

$$y = (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee b$$

$$y = b \vee (b \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge a \wedge c)$$

Anwendung des Kommutativgesetzes (Umstellen nach b)

Jetzt Anwendung des Absorptionsgesetzes:

- $b \vee (b \wedge \bar{a}) = b$
- $b \vee (b \wedge a \wedge c) = b$

Also: $y = b$

Lösung für Beispielaufgabe 3

③ $y = \underbrace{a \wedge c \wedge d}\vee b \wedge c \wedge \bar{d} \vee b \wedge c \wedge d \vee \underbrace{\bar{a} \wedge c \wedge d}$

$c \wedge d \wedge (a \vee \bar{a})$ $\qquad$ $b \wedge c \wedge (\bar{d} \vee d)$

(Ausklammern gemeinsamer Variable)

$- \; a \vee \bar{a} = 1 \qquad \bar{d} \vee d = 1 \Rightarrow$ eingesetzt oben

$$y = \underbrace{c \wedge d \wedge 1}_{= c \wedge d} \vee \underbrace{b \wedge c \wedge 1}_{= b \wedge c}$$

$$y = c \wedge d \vee b \wedge c = \underline{\underline{c \wedge (d \vee b)}}$$

(ausklammern gemeinsamer Variable)

Lösung für Beispielaufgabe 4

(4) $v = x \lor x \land y \land z \lor \underbrace{y \land z \land \bar{x}}_{2} \lor \underbrace{q \land x \lor \bar{q} \land x}_{x \land (q \lor \bar{q})} \lor \underbrace{\bar{x} \land y}_{1}$

$x \land (q \lor \bar{q})$

$x \land 1 = x$

– Absorptionsregel:

- $x \lor x \land y \land z = x$ [Regel: $a \lor (a \land b) = a$]
- $\underbrace{\bar{x} \land y}_{1} \lor \underbrace{\bar{x} \land y \land z}_{2}$, Term 2 umgestellt (Kommutativgesetz)

$= \bar{x} \land y$ (Absorption)

Also:

$v = \underbrace{x \lor x}_{= x} \lor \bar{x} \land y = x \lor \bar{x} \land y$ (jetzt ausdistribuieren)

$v = \underbrace{(x \lor \bar{x})}_{= 1} \land (x \lor y) = \underline{\underline{x \lor y}}$

Lösung für Beispielaufgabe 5

5 $\quad y = \underbrace{(b \vee c) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b)}_{\text{ausdistribuieren}} \wedge (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$

$$\Rightarrow y = \left(b \wedge \bar{d} \vee b \wedge \bar{c} \vee \underbrace{b \wedge b}_{=b} \vee c \wedge \bar{d} \vee \underbrace{c \wedge \bar{c}}_{=0} \vee c \wedge b\right) \wedge (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$$

Absorptionsregel $[a \vee (a \wedge b) = a]$

$$\Rightarrow y = (b \vee \underbrace{c \wedge \bar{d}}_{\text{als einen Ausdruck betrachten}}) \wedge (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$$; geht wieder aus-distribuieren

$$y = b \wedge d \vee b \wedge \bar{c} \vee \underbrace{b \wedge b}_{=b} \vee b \wedge a \vee \underbrace{c \wedge \bar{d} \wedge d}_{=0} \vee \underbrace{c \wedge \bar{d} \wedge \bar{c}}_{=0} \vee c \wedge \bar{d} \wedge b \vee c \wedge \bar{d} \wedge a$$

$$y = b \vee b \wedge d \vee b \wedge \bar{c} \vee b \wedge a \vee b \wedge c \wedge \bar{d} \vee c \wedge \bar{d} \wedge a$$

Absorption

$$\underline{\underline{y = b \vee a \wedge c \wedge \bar{d}}}$$

Weitere Regeln zur Schaltalgebra

Ferner muss man beim Umformen boolescher Ausdrücke die Bindungsregel beachten:

- Ohne Klammern hat die UND-Verknüpfung Vorrang vor der ODER-Verknüpfung.

Beispiel zur Bindungsregel

Bindungsregel: Ohne Klammern hat die UND-Verknüpfung Vorrang vor der ODER-Verknüpfung.

Beispiele:

- Schaltalgebra: $a \wedge b \vee c = (a \wedge b) \vee c$
  $\neq a \wedge (b \vee c)$ ϟ

- Normale Algebra: $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c$
  $\neq a \cdot (b + c)$ ϟ

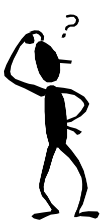
(auch hier gilt diese Bindungsregel)

$\cdot$ = Multiplikation
$+$ = Addition

Satz von Shannon

- Die oben erwähnten De Morganschen Gesetze sind Sonderformen des sog. Shannonschen Satzes:
- Die Negation (Komplement) eines schaltalgebraischen Ausdrucks, der nur Variablen, die 3 Operatoren { **UND, ODER, NICHT** } und Konstante enthält, gewinnt man durch Komplementierung aller Variablen und Konstanten sowie durch Vertauschen der Operatoren **UND** und **ODER** Eventuelle Klammern werden beibehalten.

Bitte ein Beispiel zur Anwendung des Shannonschen Satzes.



Satz von Shannon - Beispiel

Beispiel zum Satz von Shannon:

gegeben: $F = (a \wedge b) \vee [c \wedge (\bar{a} \vee (b \wedge \bar{d}))]$

gesucht: $\bar{F}$ (das Komplement von F)

nach dem Shannonschen Satz ergibt sich:

$$\bar{F} = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge [\bar{c} \vee (a \wedge (\bar{b} \vee d))]$$

TIPP: Versuchen Sie das Ergebnis mit der Regel von de Morgan mal selbst abzuleiten!

$$\bar{F} = \overline{(a \wedge b) \vee [c \wedge (\bar{a} \vee (b \wedge \bar{d}))]}$$

$$\bar{F} = \overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{[c \wedge (\bar{a} \vee (b \wedge \bar{d}))]}$$

$$\vdots$$

Satz von Shannon - Fehlermöglichkeiten

"Beliebte" Fehlermöglichkeiten:

gegeben: $y = \bar{a} \wedge b \wedge c \vee d$ jetzt Satz von Shannon anwenden

$\bar{y} = a \vee \bar{b} \vee \bar{c} \wedge \bar{d}$ ↯ leider falsch!

$\Rightarrow$ die ursprüngliche Bindung muss erhalten bleiben

deshalb: am Besten Klammern setzen!

$$y = (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee d$$

$$\bar{y} = (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge \bar{d} \quad ✓$$

Siehe auch beim Beispiel: $F = a \wedge b \vee c(\bar{a} \vee (b \wedge \bar{d}))$

Hier bräuchte man auch keine Klammern (wegen Bindungsregel)

Aber: $\bar{F} = \bar{a} \vee \bar{b} \wedge \bar{c}(a \wedge (\bar{b} \vee d))$ ↯ falsch!

Satz von Shannon - Übungsbeispiel

<u>Übungsaufgabe</u> zum Satz von Shannon:

gegeben: $\boxed{F = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge \overline{x_4}}$

- <u>Aufgabe</u>: Berechnen Sie das Komplement von F. Nutzen Sie dafür den Satz v. Shannon.

$\overline{F} = ?$

Dualität

Es existiert eine Symmetrie zwischen AND und OR bzw. 0 und 1
(siehe Axiome und Theoreme).

- Genügt ein Boolescher Ausdruck *E* der Schaltalgebra, erhält man den dualen Ausdruck E^d durch Austausch von

  AND ↔ OR

  0 ↔ 1

  Allerdings: Man muss in *E bei jeder Operation Klammern setzen, da AND und OR* verschiedene Operatorprioritäten haben.

- Dualitätstheorem:

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow E_1^d = E_2^d$$

Dualitätsregel - Beispiel

<u>Beispiel zur Dualitätsregel</u>

gegeben: $E = (((\bar{a} \vee 0) \wedge (b \wedge 1)) \vee c) \wedge \bar{d}$

gesucht: E^d

$$E^d = (((\bar{a} \wedge 1) \vee (b \vee 0)) \wedge c) \vee \bar{d}$$

Beachte den Unterschied zwischen der Dualität und dem Satz von Shannon für das Komplement!

⇒ Hier werden nur Operatoren und Konstanten getauscht.

Satz von Shannon – Übungsbeispiel - Lösung

Lösung zur übungsaufgabe (Satz von Shannon)

$$\overline{F} = \overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge X_3 \wedge X_4$$