Verständnisfragen

1. Überprüfen Sie, ob es sich bei der Menge der reellen (2×3)-Matrizen zusammen
   (a) mit der Addition bzw.
   (b) mit der Multiplikation
   um eine Gruppe handelt.
2. Überprüfen Sie, ob es sich bei der Menge der reellen quadratischen (2×2)-Matrizen zusammen
   (a) mit der Addition bzw.
   (b) mit der Multiplikation
   um eine Gruppe handelt. Handelt es sich um einen Körper?
3. Berechnen Sie die transponierten Matrizen der folgenden Matrizen:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$
   (a) Kann eine Matrix gleich ihrer transponierten sein? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür an.
   (b) Kann für eine Matrix A gelten $A^t = -A$?

Standardaufgaben

1. Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden 5 Matrizen:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$
   $$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$
2. Besetzen Sie, wenn möglich, die freien Stellen der folgenden Matrizen so, dass eine Matrix vom Rang 0, 1, 2 beziehungsweise 3 entsteht.
   $$\begin{pmatrix} & 2 & \\ 0 & & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & \\ 0 & & 3 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 0.2 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Berechnen Sie die Determinante der folgenden beiden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

5. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Produkte AB und BA!

   (b) Überprüfen Sie, ob A invertierbar ist. Sie brauchen die Inverse ggf. *nicht* zu berechnen.

6. Anfangs teilten sich die drei Unternehmen A, B und C den Markt für ein bestimmtes Gut. Das Unternehmen A hatte einen Marktanteil von 30% des Marktes, B hat 50% und C hat 20%. Im Laufe des Jahres ergaben sich die folgenden Änderungen:

   - A behält 80% seiner Kunden, verliert 5% der Kunden an B und 15% der Kunden an C.
   - B behält 60% seiner Kunden, verliert 20% der Kunden an A und 20% der Kunden an C.
   - C behält 85% seiner Kunden, verliert 5% der Kunden an A und 10% der Kunden an B.

   Welchen Marktanteil hat jedes der Unternehmen am Ende des Jahres?

7. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem unter Verwendung der Inversen der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben: Abgabe

1. Berechnen Sie alle möglichen Produkte der beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

2. (a) Zeichnen Sie die Standardbasisvektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ in ein xy-Koordinatensystem ein.

   (b) Finden Sie eine reelle (2×2)-Matrix A, so dass $Ae_1 = 2e_1$ und $Ae_2 = 3e_2$ ist. Zeichnen Sie die Bilder Ae_1 und Ae_2 in Ihr xy-Koordinatensystem ein.

   (c) Schraffieren Sie die Fläche in Ihrem Koordinatensystem, dessen Flächeninhalt genau gleich der Determinante $\det(A)$ ist.

(10 Punkte)

3. Berechnen Sie die Determinante von den folgenden Matrizen

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, ob die folgende Matrix invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Abgabe möglich bis zu Beginn der Vorlesung am **15.06.2020** bis zu Beginn der Vorlesung 8:00.