Mathematik I

Vektorraum

Prof. Dr. Doris Bohnet

Sommersemester 2020

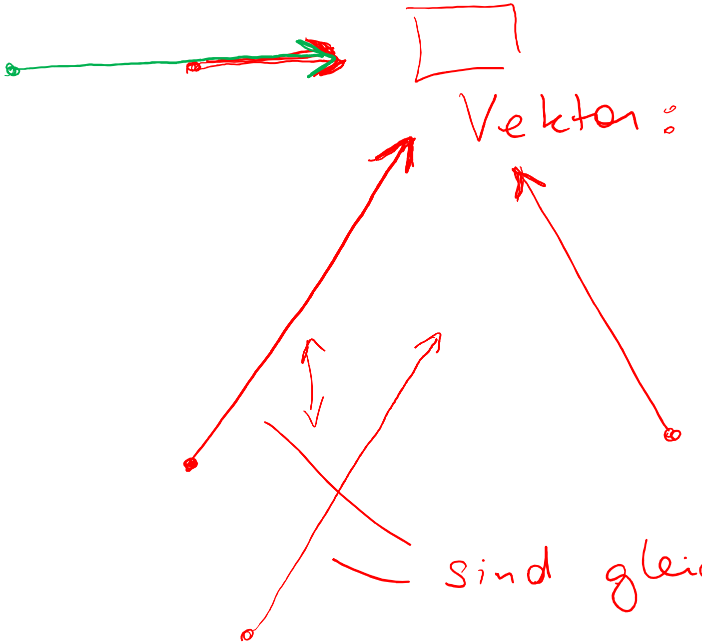
Lernziele

- **Begriffe bzw. Aussagen kennen:**
  - ✓ Vektor, Länge eines Vektors
  - ✓ (Unter-)Vektorraum
  - ✓ Lineare Unabhängigkeit
  - ✓ Basis
  - ✓ Dimension

- Mit Vektoren rechnen können (addieren und Skalarmultiplikation)
- Nachweisen können, dass etwas ein Vektorraum (bzw. Untervektorraum) ist
- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren nachrechnen können bzw. nachrechnen, ob eine Familie von Vektoren eine Basis bilden

Vektoren

Was ist ein Vektor?



Vektor: – Richtung
– Länge

sind gleich, Startpunkt ist egal

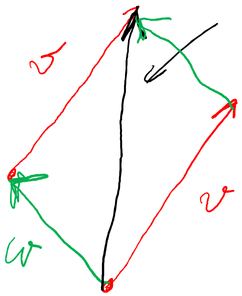
Definition Vektor

Ein Vektor v ist durch seine **Richtung** und seine **Länge** eindeutig definiert.

Man kann einen Vektor deswegen als Pfeil zeichnen. Der Anfangspunkt des Pfeils spielt für einen Vektor keine Rolle!

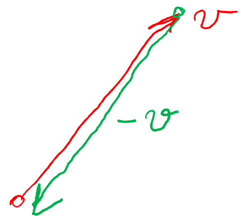
Rechnen mit Vektoren

1.)

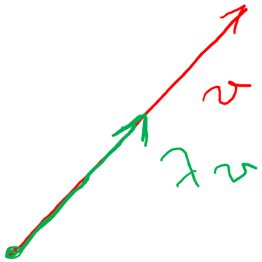


$w + v = v + w$

- Vektoren kann man <u>addieren</u> und erhält wieder einen Vektor.
- Addition ist <u>kommutativ</u>.
- Nullvektor ist das neutrale Element.



2.)



$\lambda v, \ \underbrace{\lambda \in \mathbb{R}}_{\text{Skalar}}$

- Vektoren kann man mit <u>Skalaren</u> (= reelle Zahlen) multiplizieren

Vektorraum

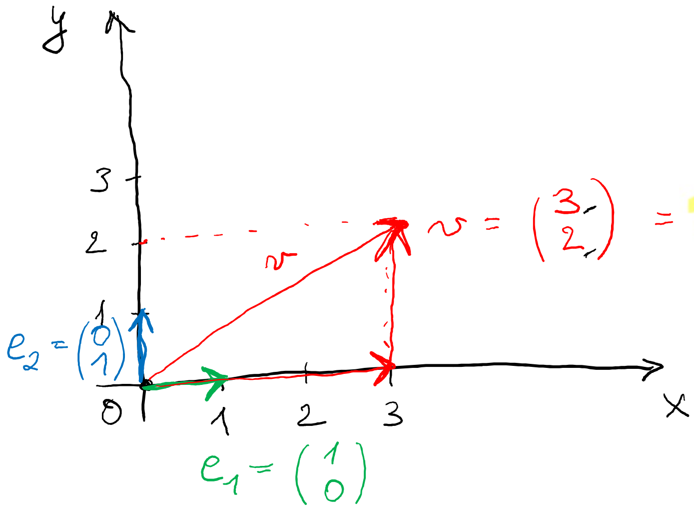
Sei K ein Körper. (in der Regel: $\mathbb{R}$)
Eine Menge V zusammen mit einer Addition $+: V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot: K \times V \to V$
heißt **K-Vektorraum,** falls gilt: $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$
$\mathbb{R}$-Vektorraum

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (Addition ist kommutativ)
(V2) Die Skalarmultiplikation ist mit der Addition verträglich:

- Sie ist assoziativ: $\lambda, \mu \in K, v \in V$: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
- Es ist: $v \in V$: $\underline{1} \cdot v = \underline{v}$
- Es gelten die Distributivgesetze: $\lambda, \mu \in K, v, w \in V$: $\underline{\lambda \cdot (v + w)} = \lambda v + \lambda w, (\underline{\lambda + \mu})v = \lambda v + \mu v$

Beispiel: Vektoren in der Ebene: $\mathbb{R}^2$

Darstellung von Vektoren



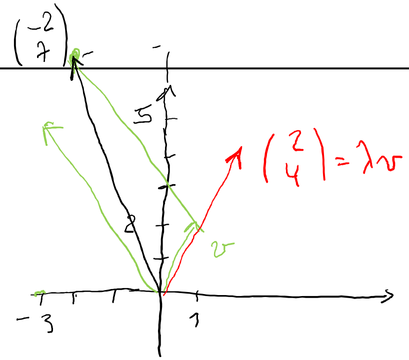
$v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \boxed{\underline{3}\cdot e_1 + \underline{2}\cdot e_2}$ → Linearkombination von Basisvektoren

Basisvektoren

Koordinaten in x und y-Richtung

→ Jeden Vektor kann man als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Rechenregeln für Vektoren



Addition von Vektoren:

Vektoren werden komponentenweise addiert:

Bsp: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}: \; v + w = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Skalarmultiplikation (Skalar: hier=eine reelle Zahl):

Vektoren werden komponentenweise mit einer Zahl multipliziert, d.h. skaliert.

Bsp: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \lambda = 2: \; \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors

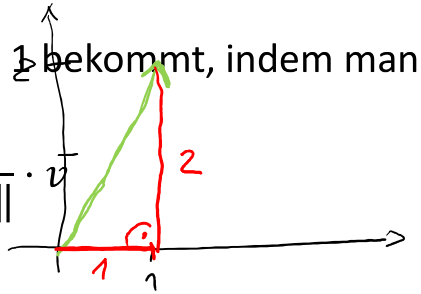
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}, v = (v_1, \dots, v_n)$$

Häufig normiert man einen Vektor, so dass er die Länge 1 bekommt, indem man ihn durch seine eigene Länge teilt:

Bsp: $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v$$



Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**.

Linearkombination & Span

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, zwei Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

v als Linearkombination von e_1 und e_2:

$$v = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

<u>Definition</u>: • Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Skalare, dann heißt

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

<u>Linearkombination</u> von $v_1, \dots, v_n$.

• $\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ v \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \}$
$= \{$ Menge aller möglichen Linearkombinationen $\}$

Bsp: $\operatorname{Span}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Aufgabe: Linearkombination

Stellen Sie den Vektor $w = (6,2,1)$ als Linearkombination von

$$v_1 = (1,0,1), v_2 = (7,3,1), v_3 = (2,5,8)$$

dar.

$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Rechnung: Gesucht: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 6 & = & x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ \text{II} & 2 & = & 3x_2 + 5x_3 \\ \text{III} & 1 & = & x_1 + x_2 + 8x_3 \end{array}$$

I − III und 2 II + III

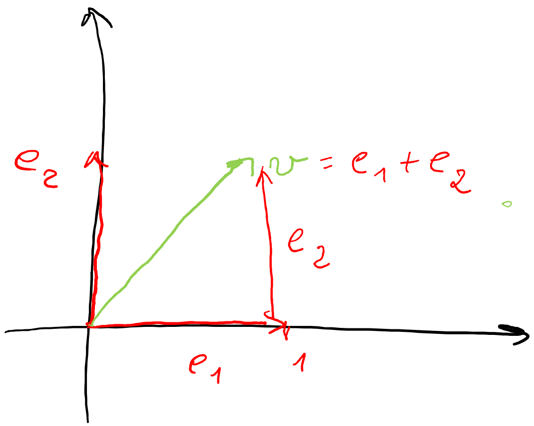
$x_3 = -\frac{1}{16}, \quad x_2 = \frac{37}{48}$

$x_1 = \frac{35}{48}$

Linear unabhängige Vektoren

$$\operatorname{span}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\rightsquigarrow \operatorname{span}(e_1, e_2, v) = \mathbb{R}^2$$

unnötig
$\rightsquigarrow$ es gibt einen Vektor zu viel!

$\Rightarrow$ Der Vektor v ist <u>linear abhängig</u> von e_1 und e_2, d.h.

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \boxed{\lambda_1 v + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 = \mathcal{O}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$\Rightarrow$ Die <u>drei</u> Vektoren v, e_1, e_2 sind linear abhängig.

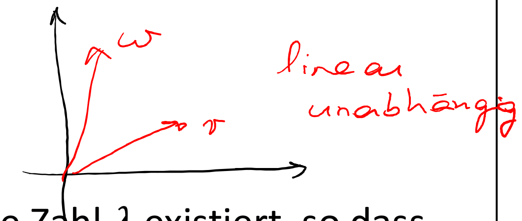
Definition: Linear unabhängige Vektoren

Zwei Vektoren v, w heißen **linear unabhängig**, wenn sie nicht Vielfaches voneinander sind, d.h.

$a \cdot v = b \cdot w \Rightarrow a = b = 0$

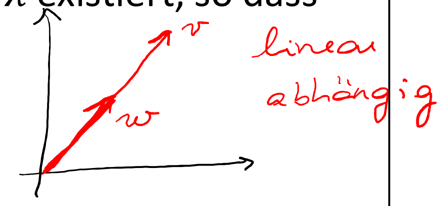
$$\lambda \cdot v = \mu \cdot w \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

μ „mü"



Entsprechend heißen zwei Vektoren v, w **linear abhängig** (oder kollinear), wenn eine Zahl λ existiert, so dass

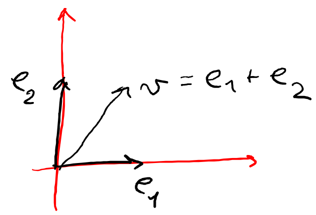
$$v = \lambda \cdot w$$



Allgemein: n Vektoren $v_1, v_2, \ldots v_n$ heißen linear unabhängig, falls

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

d.h. kein Vektor lässt sich als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen.

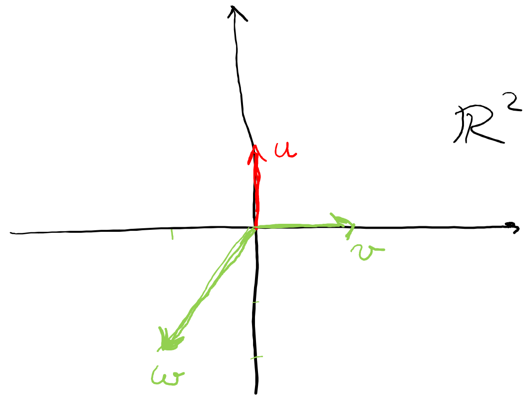


Beispiel: Linear unabhängige Vektoren

Ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig zu den beiden Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$u = \frac{1}{2}(v + w)$$

$\Rightarrow$ also linear abhängig.

gesucht: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, so dass

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0,$$

dann sind u, v, w linear abhängig.

Aufgabe – linear unabhängige Vektoren

Sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = (\underline{1},2,3), v_2 = (\underline{4},5,6), v_3 = (\underline{7},8,9)$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 4 + \lambda_3 \cdot 7 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 5 + \lambda_3 8 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 6 + \lambda_3 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3 Gleichungen + 3 Unbekannte

→ Lineares Gleichungssystem lösen

wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Basis & Dimension eines Vektorraums

Sei V ein Vektorraum.

Eine Menge von Vektoren $v_1, v_2, \ldots$ heißt Basis, falls gilt:

1. $span(v_1, v_2, \ldots) = V$ d. h. Vektorraum wird von $v_1, v_2, \ldots$ aufgespannt.
2. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Die Anzahl an Vektoren in einer Basis heißt die **Dimension des Vektorraums**.

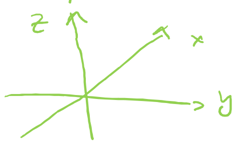
Beispiel

$\mathbb{R}^2$

Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dimension von $\mathbb{R}^2$: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$\mathbb{R}^3$



Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Untervektorraum

Sei V ein K −Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum, falls gilt:

(UV1) U ist abgeschlossen bzgl. der Addition: $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
(UV2) U ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation: $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$

Beispiel Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$.