Unterlagen zur Vorlesung

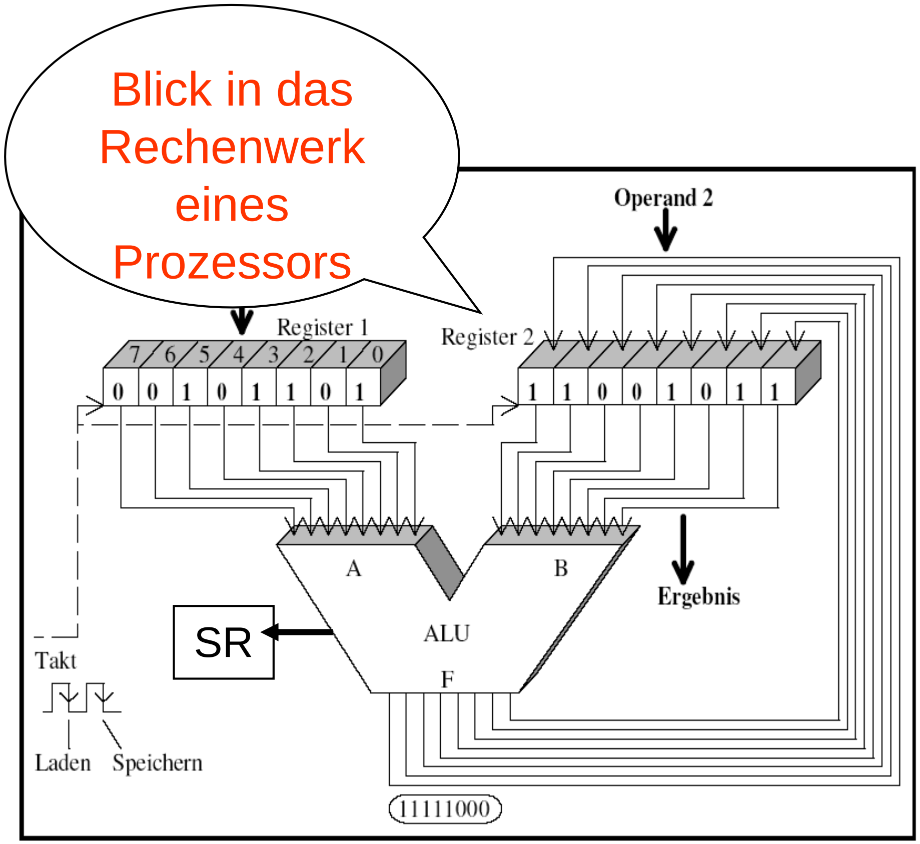
Hardware und Systemgrundlagen

Prof. Dr. Jürgen Neuschwander

Boolesche Algebra

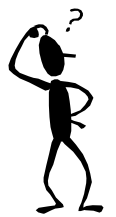
Interpretationen der Booleschen Algebra

Motivation



Wie können Rechnerbausteine, deren Verhalten und Funktionen formal beschrieben werden ??

Wie können diese Bausteine entworfen werden ??



➔Geeignete Beschreibung durch sog. <u>Schaltfunktionen</u>

Motivation

Schaltfunktionen <u>beschreiben</u> Schaltnetze

Schaltnetze <u>realisieren</u> Schaltfunktionen

Schaltnetze:

- rein kombinatorische logische Schaltungen
- kein Speicherverhalten
- logische Funktionen

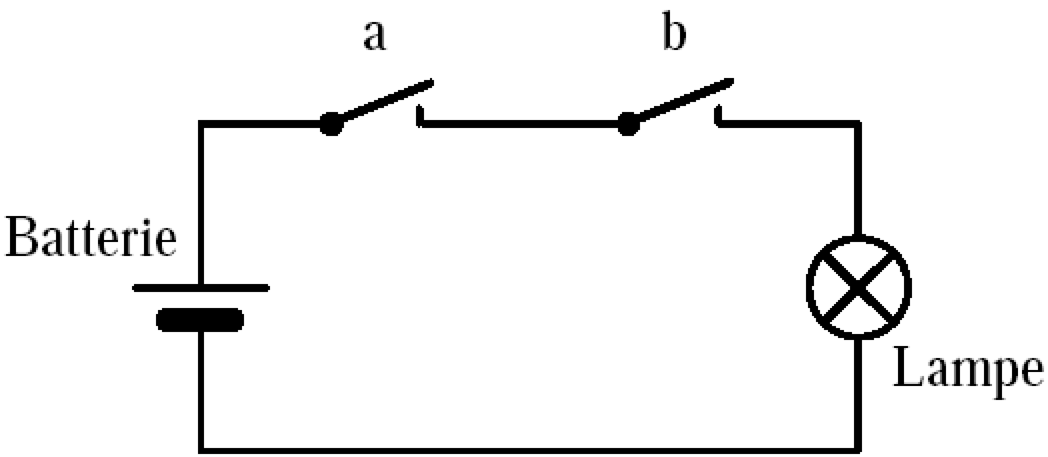
Beispiel: Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug

„Motor aus“ und „Tür auf“ und „Licht an“ $\Longrightarrow$ Alarm

Veranschaulichung von logischen Verknüpfungen

Zur Veranschaulichung (Interpretation) der Schaltfunktionen können einfache Schaltermodelle für die logischen Verknüpfungen betrachtet werden.

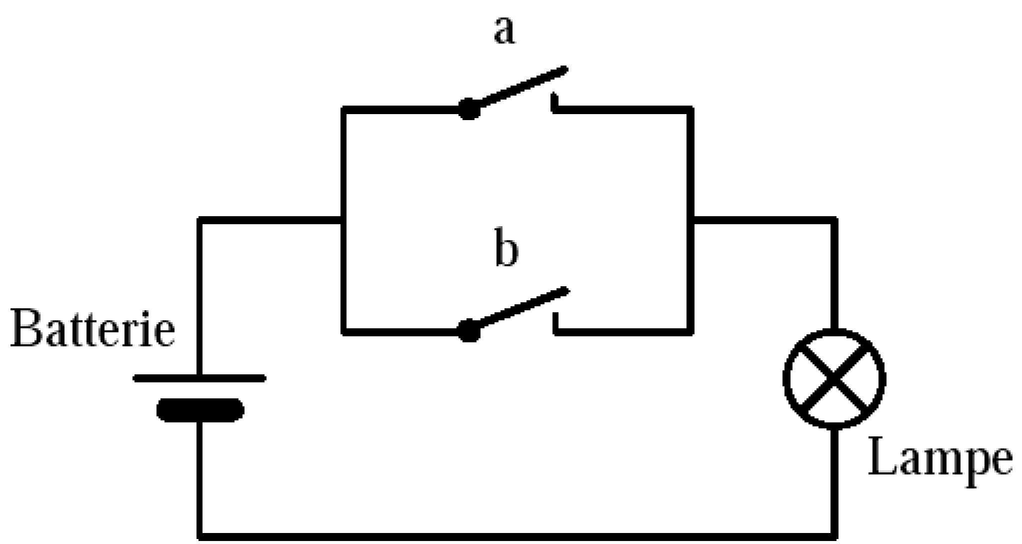
UND-Verknüpfung:



Die Lampe brennt (Funktionswert 1) nur, wenn beide Schalter geschlossen sind (a UND b gleich 1), sonst bleibt die Lampe dunkel (Funktionswert 0).

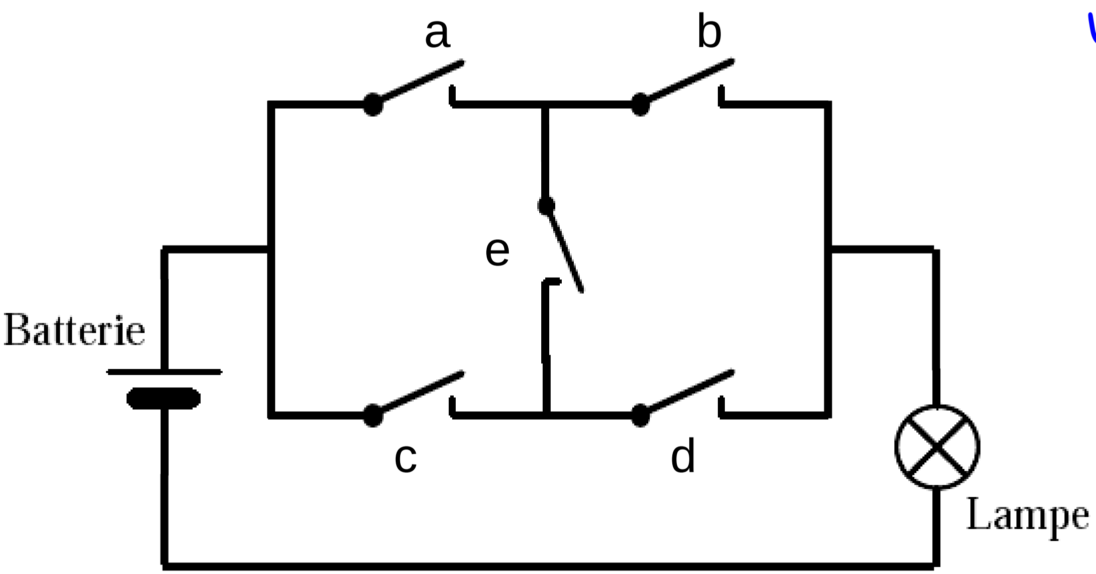
Veranschaulichung von logischen Verknüpfungen

ODER-Verknüpfung:



Die Lampe brennt, wenn einer der beiden Schalter geschlossen ist.

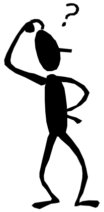
Fragestellung



Unter welchen Bedingungen brennt die Lampe ?

Wie lassen sich diese Bedingungen formal beschreiben ?

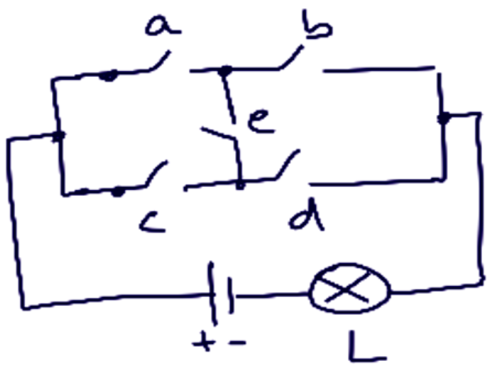
Wie beschreibt man die Variablen a bis e ?



Fragestellung - Lösungsmöglichkeit

Lampe $L = \begin{cases} 0 & \text{(aus)} \\ 1 & \text{(brennt)} \end{cases}$ Schalter $a = \begin{cases} 0 & \text{(offen)} \\ 1 & \text{(geschlossen)} \end{cases}$

⇒ binäre Variable (zweiwertig)



Wann brennt die Lampe?
oder: Welche Schalterkombinationen führen dazu, dass L = 1 ist?

L = 1, wenn (a=1) und (b=1) oder (c=1) und (d=1) oder (a=1) und (e=1) und (d=1) oder (c=1) und (e=1) und (b=1) oder (a=1) und (b=1) und (e=1) und (d=1) oder .....

Daraus wird dann:

$$\boxed{L = (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (a \wedge e \wedge d) \vee (c \wedge e \wedge b) \vee \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

noch viele Kombin.

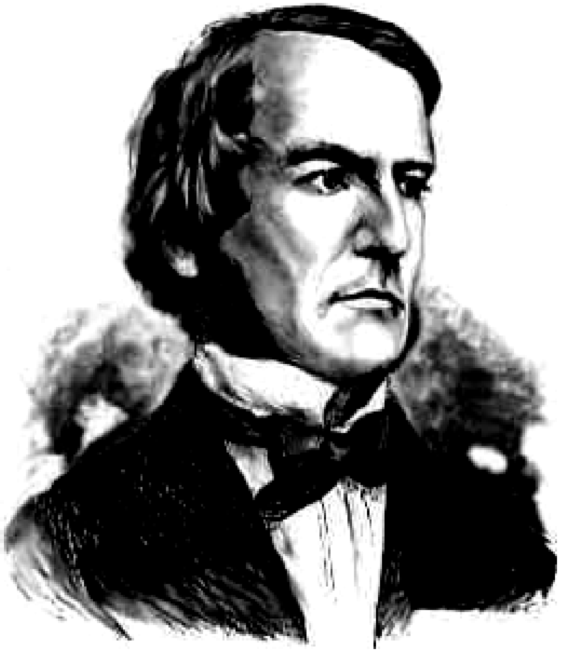
Formale Grundlagen

Zur Untersuchung und Beschreibung der Eigenschaften und des Verhaltens von logischen Funktionen ist die **Boolesche Algebra** hervorragend geeignet.

Entwickelt wurde sie von dem Mathematiker **George Boole** (1815 –1864) als Algebra der Logik.

George Boole

- Englischer Mathematiker und Logiker.
- Mit 16 Jahren Lehrer. Später eröffnete er eine eigene Schule
- Boole konnte jedoch nicht an einer Universität studieren, da er das Einkommen aus seiner Schule für seine Eltern benötigte.
- Im Jahre 1849 erhielt Boole einen Mathematik-Lehrstuhl am Queens-College in Cork (Irland). Dort lehrte er als außergewöhnlicher und hingebungsvoller Lehrer für den Rest seines Lebens
- 1854 publizierte Boole: *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*: Beschreibung der Logik auf neue Weise mit nur einer Algebra (**Algebra der Logik**), die so die Logik mit der Mathematik verband.



Formalisierung der Grundlagen

- George Boole (1815-1864)
    - Anwendung von algebraischen Methoden auf die Aussagenlogik
    - ‘0’ und ‘1’ als Logikwerte für “falsch” und “wahr”
    - Variablen, die den Wahrheitswert von Aussagen abbilden
- Edward V. Huntington (1874-1952)
    - Axiomatisierung der Booleschen Algebra (1904)
- Claude Shannon (1916-2001)
    - Anwendung der Booleschen Algebra auf die Analyse und den Entwurf von digitalen (elektromechanischen) Schaltungen

Boolesche Algebra

Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge $\mathbf{V} = \{a,b,c,...\}$, auf der zwei zweistellige Operationen $\oplus$ und $\otimes$ derart erklärt sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus $\mathbf{V}$ wieder Elemente aus $\mathbf{V}$ entstehen **(Abgeschlossenheit).**

Abgeschlossenheit: Für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$
$$a \oplus b \in V$$

Weiterhin müssen die vier **Huntingtonschen Axiome** gelten.

Verknüpfungsgebilde: $\mathbf{BA = [\, V, \oplus, \otimes \,]}$

Huntingtonsche Axiome

H1. Kommutativgesetze $a \otimes b = b \otimes a$

$a \oplus b = b \oplus a$

H2. Distributivgesetze $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

H3. Neutrale Elemente: Es existieren zwei Elemente $\mathbf{e}, \mathbf{n} \in V$, so daß gilt:

$a \otimes \mathbf{e} = a$ ($\mathbf{e}$ wird Einselement genannt)

$a \oplus \mathbf{n} = a$ ($\mathbf{n}$ wird Nullelement genannt)

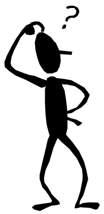
H4. Inverse Elemente: Für alle $a \in V$ existiert ein Element $\bar{a}$,so daß gilt:

$a \otimes \bar{a} = \mathbf{n}$

$a \oplus \bar{a} = \mathbf{e}$

Huntingtonsche Axiome

Kann man die Huntingtonschen Axiome auch auf die „normale Algebra“ anwenden ?



- Wir werden jetzt spezielle Interpretationen der Booleschen Algebra kennen lernen:
  - Mengenlehre
  - Schaltalgebra
  - Aussagenlogik

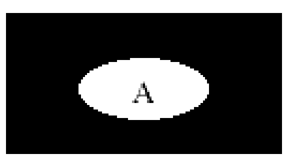
- Dies hat den Vorteil, das man beim Bearbeiten von Aufgaben sich immer die Interpretation aussuchen kann, mit der man die gestellte Aufgabe am besten lösen kann, da alle Varianten äquivalent zueinander sind.

Eine Interpretation: Die Mengenalgebra

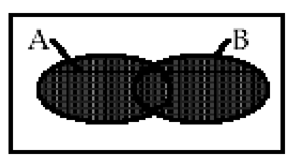
Die Zuordnung von Elementen der Mengenalgebra zu Symbolen der axiomatischen Definition einer Booleschen Algebra erfolgt nach folgender Korrespondenztabelle:

Boolesche Algebra	**Mengenalgebra**	
V	$\wp(T)$	Potenzmenge einer Grundmenge
$\oplus$	$\cup$	Vereinigung
$\otimes$	$\cap$	Durchschnitt
n	$\varnothing$	Leere Menge
e	T	Grundmenge
$\overline{a}$	$\overline{A}$	Komplementmenge von A

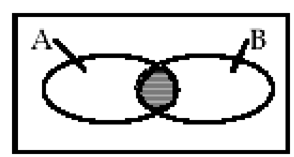
Veranschaulichung der Operatoren durch **Venn-Diagramme**:



$\overline{A}$



$A \cup B$



$A \cap B$

Erstes einfaches Beispiel

Grundmenge: $T = \{x,y,z\}$

$\Rightarrow$ Potenzmenge:

$$\wp(T)=\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},T\}$$

Operatoren:

mit z.B. $A=\{x,y\}$ und $B=\{x,z\}$ ergibt sich:

$A \cup B=\{x,y,z\}$ $\qquad$ $A \cap B=\{x\}$

Wegen $A \cup B \in \wp(T)$ und $A \cap B \in \wp(T)$ für alle $A,B \in \wp(T)$ ist die Abgeschlossenheit erfüllt.

Huntingtonschen Axiome in der Mengenalgebra

Die Huntingtonschen Axiome lassen sich wie folgt übertragen:

H1.
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

H2.
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

H3.
$$A \cap T = A$$
$$A \cup \varnothing = A$$

H4.
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$
$$A \cup \overline{A} = T$$

Eine weitere Interpretation: Die Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	Schaltalgebra
V	$\{0,1\}$
$\oplus$	$\vee$
$\otimes$	$\wedge$
$\mathbf{n}$	0
$\mathbf{e}$	1
$\bar{a}$	$\bar{a}$

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$

$a \,\&\, b$ für $a \wedge b$

oder a • b oder einfach a b

Schaltalgebra - Variable und Verknüpfungen

Schaltalgebra: $SA = [\ \{0,1\},\ \wedge\ ,\ \vee]$

Konjunktion Disjunktion

Variablen, die in der Schaltalgebra vorkommen, sind binäre Variable, d.h. sie können nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

UND-Verknüpfung

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ODER-Verknüpfung

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Komplement

Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

H1. $a \vee b = b \vee a$ — Kommutativgesetz

$a \wedge b = b \wedge a$

H2. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — Distributivgesetz

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

H3. $a \vee 0 = a$ — Neutrale Elemente

$a \wedge 1 = a$

H4. $a \wedge \overline{a} = 0$ — Inverse Elemente

$a \vee \overline{a} = 1$