

由系统阶跃响应辨识传递函数的 Matlab 实现方法

典型二阶系统传递函数为：

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2 \zeta T s + 1}$$

工业生产过程中，大多数系统的阶跃响应曲线是临界阻尼或过阻尼的，即  $\zeta \geq 1$ 。只要求出  $T$  和  $\zeta$  就能确定系统的传递函数。

$G(s)$  可以分解为：

$$G(s) = \frac{1}{T^2 (s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

其中，

$$\omega_1 = \frac{1}{T} [\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}]$$
$$\omega_2 = \frac{1}{T} [\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}]$$

$\omega_1$ 、 $\omega_2$  都是实数且均大于零。

则有：

$$T = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}, \quad \zeta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$$

传递函数进一步化为：

$$G(s) = \frac{\omega_1 \omega_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

因此，辨识传递函数就转化为求解  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 。

当输入为单位阶跃函数时，对上式进行拉普拉斯反变换，得

系统时域下的单位阶跃响应为：

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_1 t} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_2 t},$$

$$\text{即 } 1 - y(t) = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_1 t} - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_2 t}$$

令  $\omega_1 = k\omega_2$  ( $k > 1$ )，得

$$\begin{aligned} 1 - y(t) &= \frac{k}{k-1} e^{-\omega_2 t} - \frac{1}{k-1} e^{-k\omega_2 t} \\ &= \frac{k}{k-1} e^{-\omega_2 t} \left[ 1 - \frac{1}{k} e^{-(k-1)\omega_2 t} \right] \end{aligned}$$

对上式两边取以  $e$  为底的对数得

$$\ln[1 - y(t)] = \ln \frac{k}{k-1} - \omega_2 t + \ln \left[ 1 - \frac{1}{k} e^{-(k-1)\omega_2 t} \right]$$

当  $t \rightarrow \infty$  时， $\ln \left[ 1 - \frac{1}{k} e^{-(k-1)\omega_2 t} \right] \rightarrow 0$ ，则上式化简为

$$\ln[1 - y(t)] = \ln \frac{k}{k-1} - \omega_2 t, \text{ 该式的形式满足直线方程}$$

$$y^*(t) = at + b$$

其中， $y^*(t) = \ln[1 - y(t)]$ ， $a = -\omega_2$ ， $b = \ln \frac{k}{k-1}$  ( $k > 1$ )

通过最小二乘算法实现直线的拟合，得到  $a$ ， $b$  的值，即可得

到  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  的值，进而可得系统的传递函数。

## Matlab 程序代码

### %identification.m

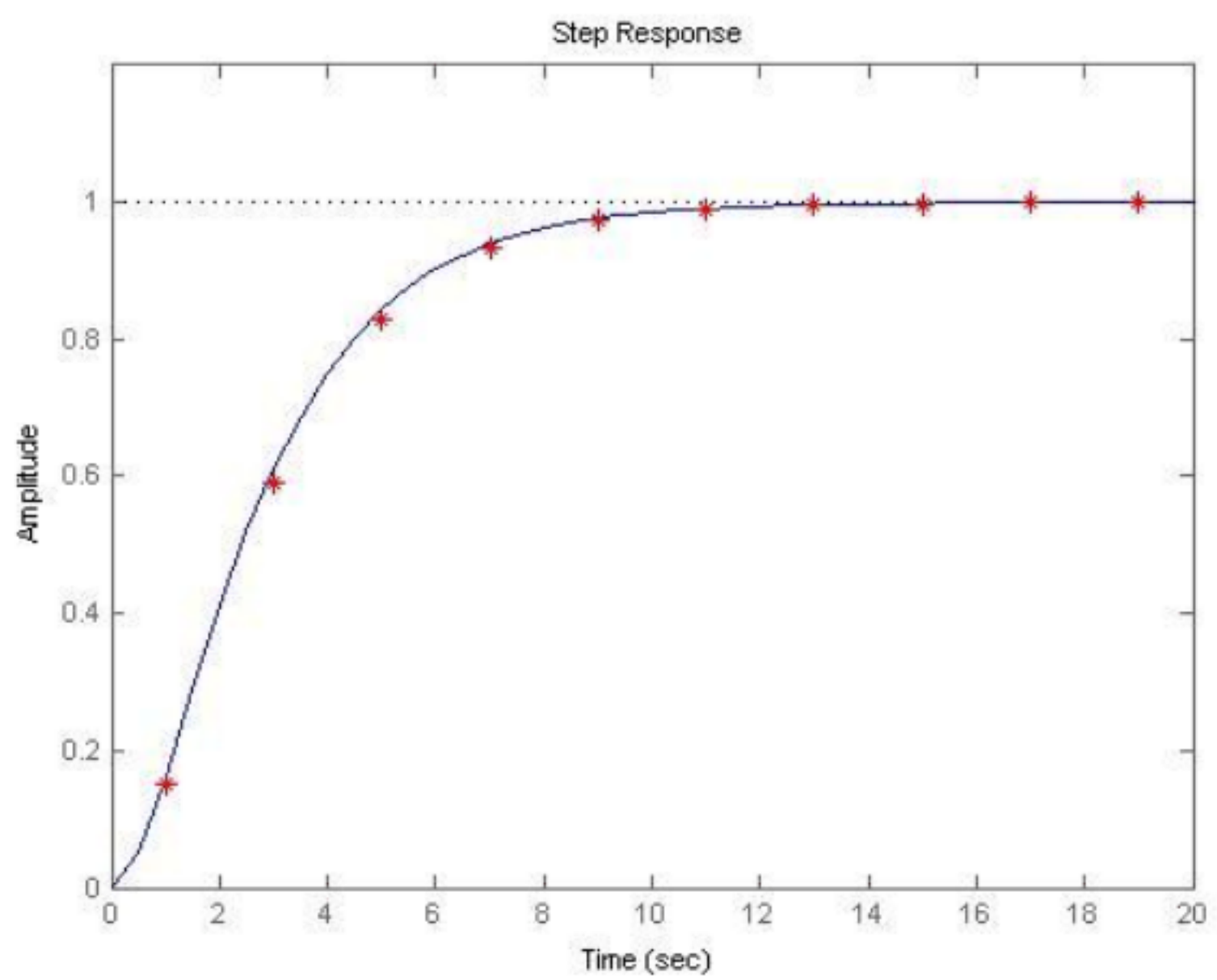
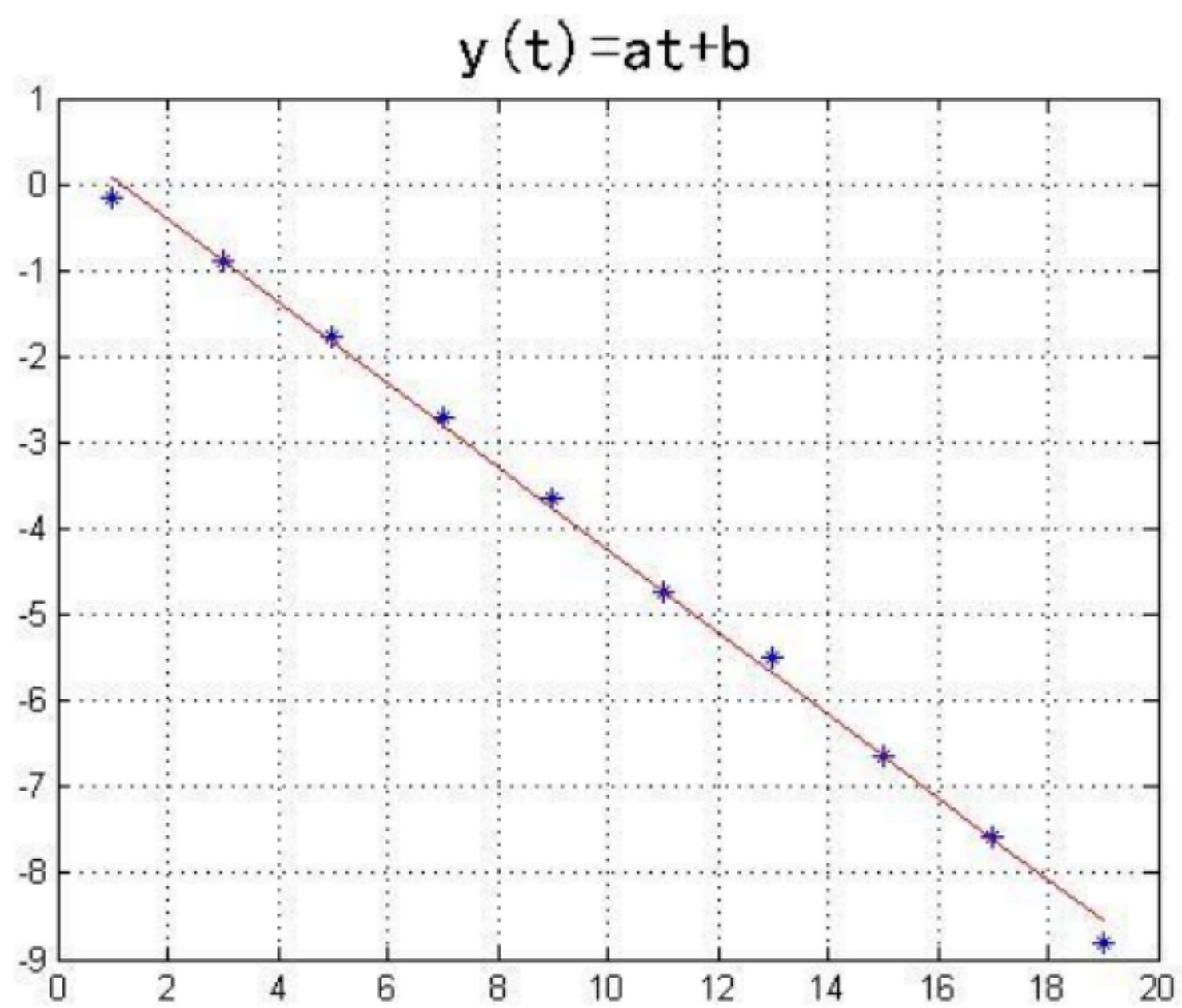
```
clc
close all
t=[1 3 5 7 9 11 13 15 17 19];
y=[0.149086 0.5890067 0.830617 0.933990 0.973980 0.991095 0.995868 0.998680 0.999490
0.999850]; %实验数据，数据来源：《系统辨识方法及应用》.国防工业出版社

y2=log(1-y);
plot(t,y2,'*');
grid on
pm=polyfit(t,y2,1)
value=polyval(pm,t);
hold on
plot(t,value,'r')

title('\fontname{ 黑体 }\fontsize{20}y(t)=at+b')

w2=-pm(1)
w1=w2/(1-exp(-pm(2)))
T=1/sqrt(w1*w2)
theta=(w1+w2)/(2*sqrt(w1*w2))
z=[];
p=[-w1 -w2];
k=w1*w2;
sys=zpk(z,p,k)
figure(2)
step(sys,[0:0.5:20]);
axis([0 20 0 1.2])
hold on
plot(t,y,'r*')
```

运行结果：



系统的传递函数为

$$G(S) = \frac{0.54034}{(S + 1.126)(S + 0.4797)}$$

阻尼比为  $\zeta = 1.0925$

自然振荡周期为  $T=1.3604 \text{ s}$