Shënime në matematikë elementare

Drin Prekaj

July 7, 2024

Contents

Ekuacioni kuadratik

Çdo ekuacion i formës

$$ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}) \quad (a \neq 0)$$

apo që mund të transformohet në këtë formë quhet ekuacion kuadratik.

$$ax^2 + bx + c \iff \underbrace{x^2 + px + q}_{\text{Forma normale}} \quad p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

Çdo vlerë $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) e tillë që kur x-in e zëvendësojmë me α, ekuacioni shëndërrohet në formulë të saktë quhet zgjidhje e ekuacionit.

Bashkësia e zgjidhjeve $= B = \{\alpha \in \mathbb{R}\ (\alpha \in \mathbb{C}) \mid \mathcal{V}(a\alpha^2 + b\alpha + c = 0) = \mathrm{T}\}$.

- $B \neq \emptyset$.
- $b = 0 \implies B = \{-\sqrt{-q}, \sqrt{-q}\} = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.
- $c = 0 \implies B = \{0, -p\} = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x^2\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x^2\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\left|x+\frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} \\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} \\
x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} &= \begin{cases} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, & a>0 \\ \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, & a<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

- $b = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \implies x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{2a}$.

Rregullat e Viett-it:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = q = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \iff a(x-x_1)(x-x_2)$$

$D = b^2 - 4ac$ quhet dallori (diskriminanta) e një ekuacioni kuadratik:

- $D > 0 \implies$ zgjedhjet janë reale dhe të ndryshme.
- $D = 0 \implies$ zgjedhjet janë reale dhe të barabarta.
- $D < 0 \implies$ zgjedhjet janë të konjuguara komplekse.

$$\text{Syprina e trekëndëshit} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$\#\text{ i diagonaleve të } n\text{-këndëshit koveks} = d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ekuacioni bikuadratik

Ekuacioni i formës

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

apo që mund të transformohet në këtë formë quhet ekuacion bikuadratik.

Ekuacionet bikuadratike zgjedhen duke zëvendësuar $x^2 = t$ dhe pastaj duke zgjedhur ekuacionin kuadratik me të panjohurën t.

Funksioni kuadratik

Funksioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

quhet funksion kuadratik.

Grafiku i f quhet parabolë.

$$ax^2+bx+c \iff \underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}_{\text{Forma kanonike}} \iff a(x-\alpha)^2+\beta \qquad \left(\alpha=-\frac{b}{2a}\right) \qquad \left(\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$\text{Kulmi i parabolës} = K(\alpha,\beta) = K\left(-\frac{b}{2a},-\frac{D}{4a}\right)$$

Shenja e trinomit kuadratik

1. $a>0 \wedge D>0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\{x_1,x_2\}$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in(x_1,x_2)$
2. $a>0 \wedge D=0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in\emptyset$
3. $a>0 \wedge D<0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in\mathbb{R}$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\emptyset$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in\emptyset$
4. $a<0 \wedge D>0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in(x_1,x_2)$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\{x_1,x_2\}$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in(\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$
5. $a<0 \wedge D=0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in\emptyset$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
6. $a<0 \wedge D<0$
   - $ax^2+bx+c>0 \iff x\in\emptyset$
   - $ax^2+bx+c=0 \iff x\in\emptyset$
   - $ax^2+bx+c<0 \iff x\in\mathbb{R}$

Ekuacionet dhe inekuacionet iracionale

Çdo ekuacion (inekuacion) tek i cili e panjohura ndodhet nën rrënjë quhet ekuacion iracional. Zgjidhje e një ekuacioni iracional quhet çdo vlerë $\lambda \in \mathbb{R}$ për të cilën ekuacioni shëndërrohet në formulë të saktë.

Për zgjidhjen e tyre nuk ka formulë, por duhet ditur mirë vetitë e rrënjëve dhe veçanërisht faktin se gjatë ngritjes në fuqi me eksponent numër natyral numri i zgjidhjeve i ekuacionit të fituar rritet, që nuk do të thotë të jenë zgjidhje të ekuacionit të dhënë në fillim.

Gjithashtu,

$$\sqrt[2n]{p(x)} = q(x) \text{ është ekuivalent me sistemin } \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) = q^{2n}(x) \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$$

Për zgjidhjen e inekuacioneve iracionale duhet ditur mirë vetitë e rrënjëve dhe veçanërisht monotinë e funksioneve $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Një veti e rrënjës:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ çift} \\ a, & n \text{ tek} \end{cases}$$

Për logaritmet:

$$\log_{p(x)}(g(x)) * f(x) \text{ është ekuivalent me sistemin } \begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) * p(x)^{f(x)} \end{cases} \qquad \text{për } * \in \{=, >, <, \geq, \leq\}$$

Ligjet e DeMorganit:

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} X_i{}^c \qquad \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} X_i{}^c$$

Prodhimi kartezian:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Bashkësitë themelore:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$$

Funksione karakteristike: