ACH0021 – Tratamento e Análise de Dados/Informações (2014.1)

Segunda Prova – Julho/2014

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **75** (**setenta e cinco**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora é **proibido**.

Formulário (conjunto de n elementos $\{w_i\}$)

Média: $\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$ Variância: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w})^2$ Desvio padrão: σ

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

Teorema de Bayes: $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$, $\{A_j\}$ formando uma partição do espaço amostral

1) Suponha que a comissão de vestibular esteja preocupada com a eficácia do sistema de avaliação baseado em testes de múltipla escolha. Para analisar a questão, consideraram um mau aluno hipotético M, que sabe a resposta de somente 30% da prova. Em um teste de múltipla escolha (com alternativas A, B, C, D e E para selecionar uma delas como resposta, sendo que somente uma das alternativas é a correta), quando o mau aluno M não sabe a resposta, ele escolhe aleatoriamente uma das alternativas (prática do vulgo “chute”).
[4,0 pontos] a) Determinar a probabilidade do aluno acertar uma questão.
[3,5 pontos] b) Se o mau aluno M acerta uma questão, determinar a probabilidade de que ele de fato sabia respondê-la.

1a) Definição dos eventos:
A: Mau aluno M acertar a questão.
S: Mau aluno M saber a resposta.

Do enunciado, tem-se $P(S) = 0,30$ (e, por conseguinte, $P(S^c) = 1 - P(S) = 0,70$), $P(A|S) = 1$ e $P(A|S^c) = \frac{1}{5}$ (admite-se que cada uma das cinco alternativas tem igual chance de ser escolhida e de ser a correta quando é “adivinhada”). Como os eventos S e S^c formam uma partição, pode-se escrever $A = (A \cap S) \cup (A \cap S^c)$, donde é imediato que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) + P(A \cap S^c) \\ &= P(A|S)P(S) + P(A|S^c)P(S^c) = 1 \cdot 0,30 + \frac{1}{5} \cdot 0,70 = \frac{11}{25} = 0,44\,, \end{aligned}$$

que é a probabilidade do mau aluno M acertar uma questão.
1b) A probabilidade deste aluno saber, de fato, a resposta, dado que fora respondida corretamente, é dada por

$$P(S|A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 0,30}{0,44} = \frac{15}{22} \approx 0,682 \text{ (ou cerca de } 68,2\%)\,.$$

---

2) [2,5 pontos] Ainda em relação ao exercício anterior, dado que o mau aluno M não sabe a resposta, o mesmo pode tentar adivinhá-la (como no caso anterior) ou, com probabilidade $0,10$, resolver recorrer a

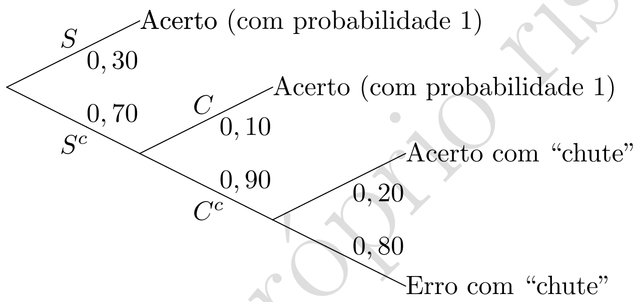
meios ilícitos para acertar a questão (prática da vulga "cola"[‡]). Neste caso, determinar a probabilidade do aluno M acertar a questão.

---

2) Definição dos eventos:
A: Mau aluno M acertar a questão.
S: Mau aluno M saber a resposta.
C: Mau aluno recorrer a meios ilícitos para acertar a questão (prática do vulgo "cola").

Do enunciado, tem-se
(i) Probabilidade do mau aluno M saber a resposta: $P(S) = 0,30$ – e, por conseguinte, $P(S^c) = 1 - P(S) = 0,70$;
(ii) Sabendo a resposta, a probabilidade do aluno acertar a questão: $P(A|S) = 1$;
(iii) Probabilidade de recorrer a meios ilícitos, dado que não sabe a resposta: $P(C|S^c) = 0,10$ – e, por conseguinte, $P(C^c|S^c) = 1 - P(C|S^c) = 0,90$;
(iv) Dado que o aluno não sabe a resposta e não recorre a meios ilícitos, a probabilidade de acerto é a probabilidade de acertar "adivinhando": $P(A|S^c \cap C^c) = \frac{1}{5}$;
(v) Dado que o aluno não sabe a resposta e recorre a meios ilícitos, a probabilidade de acerto é de 100% (devido ao recurso ilegal) – logo, $P(A|S^c \cap C) = 1$;

Da árvore de probabilidades,



tem-se

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|S)P(S) + P(A|C \cap S^c)P(C|S^c)P(S^c) + P(A|C^c \cap S^c)P(C^c|S^c)P(S^c) \\ &= 1 \cdot 0,30 + 1 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,20 \cdot 0,90 \cdot 0,70 = 0,496\,, \end{aligned}$$

que é, naturalmente, um valor maior que a probabilidade de acerto do caso anterior (onde o aluno não cogita em recorrer a meios ilícitos).

Solução alternativa

Notar que a diferença relevante em relação ao exercício (1a) é a mudança na probabilidade do aluno acertar uma questão dado que não sabe a resposta. No caso anterior, a única chance de acerto residia numa "adivinhação" bem sucedida; agora, além deste recurso, há um adicional de acertar a questão por meio ilegal. Como os conjuntos C e C^c formam uma partição, tem-se $A \cap S^c = (A \cap S^c \cap C) \cup (A \cap S^c \cap C^c)$, donde se tem

$$\begin{aligned} P(A \cap S^c) &= P(A \cap S^c \cap C) + P(A \cap S^c \cap C^c) = P(A|S^c \cap C)P(S^c \cap C) + P(A|S^c \cap C^c)P(S^c \cap C^c) \\ &= P(A|S^c \cap C)P(C|S^c)P(S^c) + P(A|S^c \cap C^c)P(C^c|S^c)P(S^c) \\ &= 1 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + \frac{1}{5} \cdot 0,90 \cdot 0,70 = \frac{49}{250} = 0,196\,. \end{aligned}$$

Lembrando que os conjuntos S e S^c formam uma partição, a probabilidade de acerto é

$$P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap S^c) = P(A|S)P(S) + P(A \cap S^c) = 1 \cdot 0,30 + 0,196 = \frac{62}{125} = 0,496\,,$$

[‡]Esta prática é abominada pelo nosso curso de TADI e caso uma situação similar ocorra durante esta ou qualquer prova, é de comum acordo que o infrator será reprovado imediatamente com nota final do curso 0,0, independentemente das notas obtidas nas provas anteriores (M.H.).

que é, naturalmente, um valor maior que a probabilidade de acerto do caso anterior (onde o aluno não cogita em recorrer a meios ilícitos).
