ACH0021 – Tratamento e Análise de Dados/Informações (2015.1)

Segunda Prova – Junho/2015

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ________________ Curso: ________________

Observação 1: Duração da prova: **75** (**setenta e cinco**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora é **proibido**.

Formulário (conjunto de n elementos $\{w_i\}$)

Média (amostral): $\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$ Variância (amostral): $\sigma^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w})^2$ Desvio padrão (amostral): σ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Teorema de Bayes: $P(A_j|B) = \dfrac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$, $\{A_j\}$ formando uma partição conveniente

Prova A

1) Em uma ilha C habitam somente duas espécies raras de uma ave, A_1 e A_2, sendo que a população de A_1 é o dobro de A_2. Sabe-se que metade das aves A_1 vieram de uma outra ilha, B, e que um sétimo de A_2 não veio de B.

[3,0 pontos] a) Determinar a probabilidade de uma ave de C ser proveniente da ilha B. Usar, necessariamente, uma partição conveniente.

[3,0 pontos] b) Se uma ave (na ilha C) veio da ilha B, determinar a probabilidade desta ser da espécie A_2. Usar, necessariamente, o teorema de Bayes para resolver o problema.

1a) Definição dos eventos:
A_i: Ave ser da espécie A_i ($i \in \{1,2\}$).
B: Ave ser proveniente da ilha B.

Do enunciado, tem-se $P(A_1) = 2P(A_2)$ (e, por conseguinte, $P(A_1) = \frac{2}{3}$ e $P(A_2) = \frac{1}{3}$), $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B^c|A_2) = \frac{1}{7}$ (logo, $P(B|A_2) = \frac{6}{7}$). Como os eventos $B \cap A_1$ e $B \cap A_2$ formam uma partição de B (pois ambos são disjuntos e a união dos dois é B), pode-se escrever $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, donde é imediato que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{21} \approx 0,619 \text{ (ou cerca de } 61,9\%)\,, \end{aligned}$$

que é a probabilidade de uma ave da ilha C ser proveniente da ilha B.

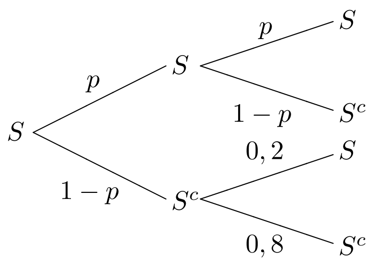
1b) A probabilidade de uma ave proveniente de B ser da espécie A_2, é dada pelo teorema de Bayes como

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\underbrace{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}_{=P(B)}} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{13}{21}} \\ &= \frac{6}{13} \approx 0,462 \text{ (ou cerca de } 46,2\%)\,. \end{aligned}$$

2) Um programa espacial lançará foguetes ao espaço. Sabe-se que quando um lançamento for bem sucedido, o próximo lançamento tem probabilidade p de sucesso. Por outro lado, se há fracasso, o lançamento seguinte tem sucesso com probabilidade $0,2$. Se o primeiro lançamento for bem sucedido, determinar
a) [3,0 pontos] A probabilidade de sucesso no terceiro lançamento (como função de p).
b) [1,0 ponto] O valor mínimo da probabilidade obtida acima (**SEM** usar "cálculo diferencial").

2a) Definição dos eventos:
S: Sucesso do lançamento.
S^c: Fracasso do lançamento.
S_n: Sucesso no n-ésimo lançamento.

A árvore de probabilidades do processo é descrita por



Logo,

$$P(S_3) = p \cdot p + (1-p) \cdot 0,2 = p^2 - \frac{1}{5}p + \frac{1}{5}\,.$$

2b) A função

$$P(S_3) = p^2 - \frac{1}{5}p + \frac{1}{5} = \left(p - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{19}{100}$$

é minimizada se o termo entre o parênteses, que é não negativa, for nulo. Logo, $p = 0,1$ minimiza a função, que fornece como probabilidade mínima $0,19$.

Solução alternativa de 2b: Seja $(p^*, f(p^*))$ o ponto mínimo da parábola $f(p) = p^2 - \frac{1}{5}p + \frac{1}{5}$, que não tem raízes reais. Deslocando este objeto paralelamente ao eixo das ordenadas ("eixo y"), pode-se obter uma outra parábola, dada por $g(p)$, que tenha raízes reais e que tem o ponto de mínimo pertencente à reta $p = p^*$ (naturalmente, o ponto de mínimo $(p^*, g(p^*))$ é diferente). Escolhendo, convenientemente, a função $g(p) = p^2 - \frac{1}{5}p$ (que é deslocada em $\frac{1}{5}$ em relação à f), sabe-se que as raízes de $g(p)$ são 0 e $\frac{1}{5}$. Pela simetria da parábola, $p^* = \frac{0+\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$. Logo, $f(p^*) = f(\frac{1}{10}) = \frac{19}{100}$.

Prova B

1) Em uma ilha C habitam somente duas espécies raras de uma ave, A_1 e A_2, sendo que a população de A_1 é o triplo de A_2. Sabe-se que metade das aves A_1 vieram de uma outra ilha, B, e que um sétimo de A_2 não veio de B.
[3,0 pontos] a) Determinar a probabilidade de uma ave de C ser proveniente da ilha B. Usar, necessariamente, uma partição conveniente.
[3,0 pontos] b) Se uma ave (na ilha C) veio da ilha B, determinar a probabilidade desta não ser da espécie A_2. Usar, necessariamente, o teorema de Bayes para resolver o problema.

1a) Definição dos eventos:
A_i: Ave ser da espécie A_i ($i \in \{1,2\}$).
B: Ave ser proveniente da ilha B.

Do enunciado, tem-se $P(A_1) = 3P(A_2)$ (e, por conseguinte, $P(A_1) = \frac{3}{4}$ e $P(A_2) = \frac{1}{4}$), $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B^c|A_2) = \frac{1}{7}$ (logo, $P(B|A_2) = \frac{6}{7}$). Como os eventos $B \cap A_1$ e $B \cap A_2$ formam uma partição de B (pois ambos são disjuntos e a união dos dois é B), pode-se escrever $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, donde é imediato que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{33}{56} \approx 0,589 \text{ (ou cerca de } 58,9\%\text{)}, \end{aligned}$$

que é a probabilidade de uma ave da ilha C ser proveniente da ilha B.
1b) A probabilidade de uma ave proveniente de B ser da espécie A_2, é dada pelo teorema de Bayes como

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\underbrace{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}_{=P(B)}} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{33}{56}} \\ &= \frac{4}{11}. \end{aligned}$$

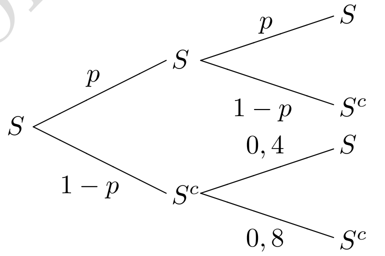
Logo, a probabilidade de uma ave em questão não ser da espécie A_2 é $P(A_2^c|B) = 1 - P(A_2|B) = \frac{7}{11} \approx 0,636$ (aproximadamente $63,6\%$).

---

2) Um programa espacial lançará foguetes ao espaço. Sabe-se que quando um lançamento for bem sucedido, o próximo lançamento tem probabilidade p de sucesso. Por outro lado, se há fracasso, o lançamento seguinte tem sucesso com probabilidade $0,4$. Se o primeiro lançamento for bem sucedido, determinar
a) [3,0 pontos] A probabilidade de sucesso no terceiro lançamento (como função de p).
b) [1,0 ponto] O valor mínimo da probabilidade obtida acima (**SEM** usar “cálculo diferencial”).

2a) Definição dos eventos:
S: Sucesso do lançamento.
S^c: Fracasso do lançamento.
S_n: Sucesso no n-ésimo lançamento.

A árvore de probabilidades do processo é descrita por



Logo,

$$P(S_3) = p \cdot p + (1-p) \cdot 0,4 = p^2 - \frac{2}{5}p + \frac{2}{5}.$$

2b) A função

$$P(S_3) = p^2 - \frac{2}{5}p + \frac{2}{5} = \left(p - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}$$

é minimizada se o termo entre o parênteses, que é não negativa, for nulo. Logo, $p = 0,2$ minimiza a função, que fornece como probabilidade mínima $0,36$.

Solução alternativa de 2b: Seja $(p^*, f(p^*))$ o ponto mínimo da parábola $f(p) = p^2 - \frac{2}{5}p + \frac{2}{5}$, que não tem raízes reais. Deslocando este objeto paralelamente ao eixo das ordenadas ("eixo y"), pode-se obter uma outra parábola, dada por $g(p)$, que tenha raízes reais e que tem o ponto de mínimo pertencente à reta $p = p^*$ (naturalmente, o ponto de mínimo $(p^*, g(p^*))$ é diferente). Escolhendo, convenientemente, a função $g(p) = p^2 - \frac{2}{5}p$ (que é deslocada em $\frac{2}{5}$ em relação à f), sabe-se que as raízes de $g(p)$ são 0 e $\frac{2}{5}$. Pela simetria da parábola, $p^* = \frac{0+\frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{5}$. Logo, $f(p^*) = f(\frac{1}{5}) = \frac{9}{25}$.
