ACH0021 – Tratamento e Análise de Dados/Informações (1/2012)

Segunda Prova – Junho/2012

Nome: ______________________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ______________________ Curso: ______________________

Observação 1: Duração da prova: **90** (**noventa**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora é opcional, e seu empréstimo durante a prova é proibido.

Formulário (conjunto de n elementos $\{w_i\}$)

Média: $\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$ Variância: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w})^2$ Desvio padrão: σ

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(-a \le Z \le a) = \gamma\,, \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$

1) [3,0 pontos] Deseja-se estimar o tempo que os funcionários ingressantes de uma certa empresa grande necessitam para serem promovidos pela primeira vez. Com base em estatísticas dos anos anteriores, este tempo pode ser aproximado por uma distribuição normal e a variância pode ser considerada como sendo de $2,25$ anos^2. Estimar o número de funcionários (já promovidos) para a pesquisa de forma que a amplitude do intervalo de $92,5\%$ de confiança seja de, no máximo, $0,4$ ano.

---

1) Seja $\overline{X}$ a média amostral com n dados; sejam μ e σ, respectivamente, a média e o desvio padrão das baterias ($\sigma^2 = 2,25$ anos^2, o que implica $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$ anos, e μ desconhecido). Pelo teorema central do limite (assumindo as variáveis envolvidas como sendo independentes e identicamente distribuídas), a variável

$$Z := \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

segue uma distribuição normal de média 0 e variância 1. Logo, pela tabela de valores para a distribuição normal, sabe-se que

$$P(-a \le Z \le a) = \gamma = 0,925$$

realiza-se para $a \approx 1,78$, visto que $P(0 \le Z \le a) = \frac{1}{2}P(-a \le Z \le a) = \frac{0,925}{2} = 0,4625$. Como $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, então

$$P\Big(-a \le \overbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}^{Z} \le a\Big) = 0,925 \qquad (\text{com } a \approx 1,78)\,,$$

donde se tem

$$P\Big(\overline{X} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 0,925 \qquad (\text{com } a \approx 1,78)\,.$$

A amplitude Δ do intervalo de $92,5\%$ de confiança no problema é, segundo a equação acima,

$$\Delta = \left(\overline{X} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2a\sigma}{\sqrt{n}}\ (\text{anos})\,.$$

Para que esta amplitude seja de no máximo $0,4$ ano (*id est*, $\Delta \leq 0,4$ ano), deve-se ter

$$\begin{aligned} 0,4 \quad \geq \quad & \Delta = \frac{2a\sigma}{\sqrt{n}} \\ \approx \quad & \frac{2 \cdot 1,78 \cdot 1,5}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

donde é imediato que $n \geq 179$, que é o tamanho estimado da amostra para as condições impostas.

---

2) [3,0 pontos] Em um curso hipotético, a avaliação do aluno é feita através de, no máximo, 4 provas. Suponha que o critério de aprovação seja nota azul (nota maior ou igual a $5,0$) em **pelo menos duas provas**. As provas são corrigidas e os resultados são divulgados imediatamente após cada exame. Suponha que haja um aluno hipotético X que seja **relapso**: se ele consegue duas notas azuis, ele para de frequentar o curso, deixando de fazer as provas seguintes. Se a probabilidade do aluno obter nota azul em uma prova for q, determinar a probabilidade do mesmo ser aprovado no curso.

---

2) Definindo como A o evento "nota azul na prova", tem-se a árvore de probabilidades ao lado. Sendo q a probabilidade do aluno obter nota azul (evento A) e a probabilidade complementar, $1-q$, caso cotrário (evento A^c), a probabilidade do aluno ser aprovado (segundo os critérios acima) é dado pela soma das probabilidades dos eventos disjuntos $X_1 \cdots X_n$, onde X_i é o evento (A ou A^c) da i-ésima prova:

$$\begin{aligned} & P(AA) + P(AA^cA) + P(AA^cA^cA) + P(A^cAA) + P(A^cAA^cA) + P(A^cA^cAA) \\ &= qq + q\,(1-q)\,q + q\,(1-q)\,(1-q)\,q + (1-q)\,qq + (1-q)\,q\,(1-q)\,q + (1-q)\,(1-q)\,qq \\ &= q^2\left(6 - 8q + 3q^2\right) \end{aligned}$$

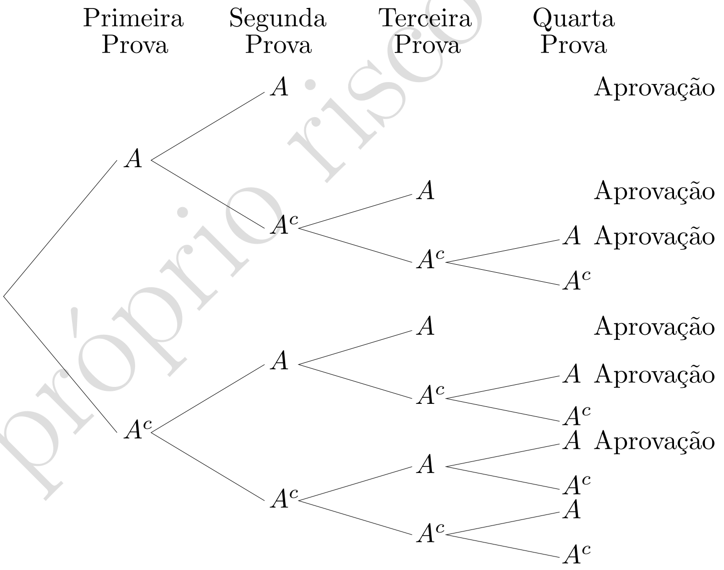

Figura 1: Árvore de probabilidades - exercício 2.

---

3) Um trabalhador hipotético faz o trajeto de sua casa ao trabalho usando somente ônibus. Quando o ônibus em questão envolve-se em algum acidente, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{10}$, este trabalhador chega atrasado no trabalho com probabilidade $0,60$. Contudo, mesmo o ônibus não se envolvendo em nenhum acidente, o trabalhador atrasa no trabalho com chance de 30%.
a) [3,0 pontos] Determinar a probabilidade de ter ocorrido um acidente com o ônibus do referido trabalhador, dado que este atrasou no trabalho.
b) [1,0 ponto] Suponha, somente para este exercício (3b), que este trabalhador tem crises de pânico em 80% das vezes quando o seu ônibus envolve-se em algum acidente durante a viagem. Quando isto ocorre, ele precisa ser socorrido e a probabilidade de chegar atrasado no trabalho sobe para 95%. Determinar a probabilidade de ter ocorrido acidente de ônibus, dado que este trabalhador atrasou no trabalho (todas as informações, de quando o trabalhador não tem crise de pânico, são as mesmas do exercício 3a).

3a) Definição dos eventos:
O: Acidente com o ônibus do trabalhador hipotético.
A: Atraso do trabalhador hipotético no trabalho.

Do enunciado, tem-se $P(O) = 0,10$ (e, por conseguinte, $P(O^c) = 1 - P(O) = 0,90$), $P(A|O) = 0,60$ e $P(A|O^c) = 0,30$. Como os eventos O e O^c formam uma partição, pode-se escrever $A = (A \cap O) \cup (A \cap O^c)$, donde é imediato que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap O) + P(A \cap O^c) \\ &= P(A|O)P(O) + P(A|O^c)P(O^c) = 0,60 \cdot 0,10 + 0,30 \cdot 0,90 = 0,33\,, \end{aligned}$$

que é a probabilidade do trabalhador atrasar no serviço. A probabilidade de ter ocorrido um acidente no seu ônibus, dado que o trabalhador atrasou-se no serviço, é dada por

$$P(O|A) = \frac{P(A \cap O)}{P(A)} = \frac{P(A|O)P(O)}{P(A)} = \frac{0,60 \cdot 0,10}{0,33} = \frac{2}{11} \approx 0,182 \text{ (ou aproximadamente } 18,2\%\text{)}\,.$$

3b) Definição dos eventos:
O: Acidente com o ônibus do trabalhador hipotético.
A: Atraso do trabalhador hipotético no serviço.
C: Trabalhador com crise de pânico (devido a problemas com o seu ônibus).

Do enunciado, tem-se
(i) Probabilidade de ocorrência de acidente de ônibus: $P(O) = 0,10$ – e, por conseguinte, $P(O^c) = 1 - P(O) = 0,90$;
(ii) Probabilidade do trabalhador ter crise de pânico, dado o acidente: $P(C|O) = 0,80$ – e, por conseguinte, $P(C^c|O) = 1 - P(C|O) = 0,20$;
(iii) Dado que ocorre um acidente de ônibus e o trbalhador tem crise de pânico, a probabilidade dele atrasar no serviço é: $P(A|O \cap C) = 0,95$;
(iv) Dado que ocorre um acidente e o trabalhador não tem crise de pânico, a probabilidade dele atrasar no serviço é: $P(A|O \cap C^c) = 0,60$;

Notar que a diferença relevante em relação ao exercício (3a) é a mudança na probabilidade do trabalhador atrasar no serviço dado um acidente. No presente caso, há a necessidade de considerar as situações onde o trabalhador entra em pânico. Como os conjuntos C e C^c formam uma partição, tem-se $A \cap O = (A \cap O \cap C) \cup (A \cap O \cap C^c)$, donde se tem

$$\begin{aligned} P(A \cap O) &= P(A \cap O \cap C) + P(A \cap O \cap C^c) = P(A|O \cap C)P(O \cap C) + P(A|O \cap C^c)P(O \cap C^c) \\ &= P(A|O \cap C)P(C|O)P(O) + P(A|O \cap C^c)P(C^c|O)P(O) \\ &= 0,95 \cdot 0,80 \cdot 0,10 + 0,60 \cdot 0,20 \cdot 0,10 = 0,088\,. \end{aligned}$$

Lembrando que os conjuntos O e O^c formam uma partição, a probabilidade de atraso é

$$P(A) = P(A \cap O) + P(A \cap O^c) = P(A \cap O) + P(A|O^c)P(O^c) = 0,088 + 0,30 \cdot 0,90 = 0,358\,,$$

que é um valor maior que a probabilidade de atraso do caso anterior. Logo, a probabilidade de ter ocorrido um acidente, dado que o trabalhador se atrasou, passa a ser

$$P(O|A) = \frac{P(A \cap O)}{P(A)} = \frac{0,088}{0,358} = \frac{44}{179} \approx 0,246 \text{ (ou cerca de } 24,6\%\text{)}\,.$$

Distribuição Normal/Gaussiana: Valores de q, onde $P(0 \leq Z \leq z_\alpha) = q$

Segunda decimal de z_α

Parte inteira e primeira decimal de z_α

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	**0,0**
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	**0,1**
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	**0,2**
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	01480	0,1517	**0,3**
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879	**0,4**
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	**0,5**
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549	**0,6**
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852	**0,7**
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	**0,8**
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389	**0,9**
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621	**1,0**
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830	**1,1**
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015	**1,2**
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	**1,3**
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319	**1,4**
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441	**1,5**
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545	**1,6**
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633	**1,7**
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706	**1,8**
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767	**1,9**
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817	**2,0**
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857	**2,1**
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890	**2,2**
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916	**2,3**
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936	**2,4**
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952	**2,5**
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964	**2,6**
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974	**2,7**
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981	**2,8**
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986	**2,9**
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	**3,0**
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993	**3,1**
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995	**3,2**
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	**3,3**
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	**3,4**
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	**3,5**
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,6**
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,7**
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,8**
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	**3,9**