ACH0021 – Tratamento e Análise de Dados/Informações

Lista de Exercícios 2

Observação 1: Os exercícios desta lista devem ser resolvidos <u>SEM</u> o uso de ferramentas computacionais
Observação 2: Alguns dos exercícios foram adaptados do livro de M. N. Magalhães & A. C. P. de Lima, *Noções de Probabilidade e Estatística*, Edusp (2008).

---

1) Dados os subconjuntos A, B e C de Ω (suponha A, B e C não-vazios), mostre que
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
e) $A \setminus B = A \cap B^c$.

1a) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se $x \in A \cap (B \cup C)$ (x arbitrário), então x pertence a A e x pertence a B ou C, o que implica x pertencer a A e B ou x pertencer a A e C; logo, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, considere $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (x arbitrário). Desta forma, x pertence a A e B ou x pertence a A e C, e isto implica x pertencer a A e também pertencer a B ou C; em suma, $x \in A \cap (B \cup C)$, donde segue $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

De $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, tem-se $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1b) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se $x \in A \cup (B \cap C)$ (x arbitrário), então x pertence a A ou x pertence a B e C, o que implica x pertencer a A ou B e x pertencer a A ou C; logo, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, considere $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (x arbitrário). Desta forma, x pertence a A ou B e x pertence a A ou C, e isto implica x pertencer a A ou pertencer a B e C; em suma, $x \in A \cup (B \cap C)$, donde segue $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

De $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, tem-se $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1c) Mostrar-se-á, inicialmente, que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Se um x arbitrário pertence a $(A \cup B)^c$, então ele não pertence a $A \cup B$; em suma, x não pertence a A e nem a B, o que implica x pertencer a A^c e B^c. Logo, $x \in A^c \cap B^c$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, se um x arbitrário pertence a $A^c \cap B^c$, ele pertence a A^c e B^c. Consequentemente, x não pertence a A e nem a B, ou seja, x não pertence a $A \cup B$; logo, $x \in (A \cup B)^c$, donde segue $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

De $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$, chega-se a $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1d) Mostrar-se-á, inicialmente, que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. Se um x arbitrário pertence a $(A \cap B)^c$, então ele não pertence a $A \cap B$; em suma, x não pertence a A e B simultaneamente, o que implica x pertencer a A^c ou B^c. Logo, $x \in A^c \cup B^c$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, se um x arbitrário pertence a $A^c \cup B^c$, ele pertence a A^c ou B^c. Consequentemente, x não pertence a A ou não pertence a B, ou seja, x não pode pertencee aos dois ao mesmo tempo. Em suma, $x \notin A \cap B$; logo, $x \in (A \cap B)^c$, donde segue $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

De $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ e $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$, chega-se a $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1e) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \setminus B \subset A \cap B^c$. Se x (arbitrário) pertencer a $A \setminus B$, então ele pertence a A, mas não pertence a B, isto é, x pertence a A e também pertence a B^c. Desta forma, $x \in A \cap B^c$.

Reciprocamente, se x pertencer a $A \cap B^c$, então ele pertence a A e a B^c. Logo, x pertence a A mas não pode pertencer a B, o que implica $x \in A \setminus B$. Tem-se, então, $A \cap B^c \subset A \setminus B$.

De $A \setminus B \subset A \cap B^c$ e $A \cap B^c \subset A \setminus B$, chega-se a $A \setminus B = A \cap B^c$.

2) Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, "traduzir" as situações abaixo para a linguagem da teoria dos conjuntos:
a) os dois eventos ocorrem.
b) pelo menos um dos eventos ocorre.
c) a ocorrência de A implica a ocorrência de B.
d) a ocorrência de A implica B não ocorrer.
e) o evento A ocorre, mas B não ocorre.
f) nenhum dos dois eventos ocorre.
g) exatamente um dos eventos ocorre.

2a) $A \cap B$ 2b) $A \cup B$ 2c) $A \subset B$ 2d) $A \subset B^c$ 2e) $A \setminus B$ 2f) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 2g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Nota: Notar que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$ no exercício (2g).

3) Uma universidade tem 15 mil alunos dos quais 6 mil são considerados esportistas. Sabe-se, ainda, que 750 alunos são do curso de biologia diurno, 1050 da biologia noturno, 150 são esportistas e da biologia diurno e 300 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:
a) ser esportista.
b) ser esportista e aluno da biologia noturno.
c) não ser da biologia.
d) ser esportista ou aluno da biologia.
e) não ser esportista e nem aluno da biologia.

3) Admita a equiprobabilidade no sorteio dos alunos e considere a seguinte notação:

E: Conjunto dos alunos considerados esportistas.
B_d: Conjunto dos alunos de biologia diurno.
B_n: Conjunto dos alunos de biologia noturno.
Ω: Conjunto amostral.

Admite-se, também, que o curso de biologia seja oferecido somente nos dois períodos supracitados e que um aluno não faz o mesmo curso nos dois períodos ($B_d \cap B_n = \varnothing$). Das informações acima, tem-se

$$P(E) = \tfrac{6000}{15000} = 0,40 \qquad P(B_d) = \tfrac{750}{15000} = 0,05 \qquad P(B_n) = \tfrac{1050}{15000} = 0,07$$

$$P(E \cap B_d) = \tfrac{150}{15000} = 0,01 \qquad P(E \cap B_n) = \tfrac{300}{15000} = 0,02$$

3a) Probabilidade de ser esportista: $P(E) = 0,40$.

3b) Probabilidade de ser esportista e aluno da biologia noturno: $P(E \cap B_n) = 0,02$.

3c) Probabilidade de não ser da biologia (não ser da biologia diurno ou biologia noturno): $P((B_d \cup B_n)^c)$. Como para quaisquer eventos A e B sabe-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)\,,$$

então

$$\begin{aligned} P((B_d \cup B_n)^c) &= P(B_d^c \cap B_n^c) = P(B_d^c) + P(B_n^c) - P(B_d^c \cup B_n^c) \\ &= \underbrace{P(B_d^c)}_{1-P(B_d)} + \underbrace{P(B_n^c)}_{1-P(B_n)} - \underbrace{P((\underbrace{B_d \cap B_n}_{\varnothing})^c)}_{P(\Omega)=1} \\ &= 1 - P(B_d) - P(B_n) = 1 - 0,05 - 0,07 = 0,88\,. \end{aligned}$$

3d) Probabilidade de ser esportista ou aluno da biologia (diurno ou noturno): $P(E \cup B_d \cup B_n)$. A regra de adição de probabilidades implica

$$\begin{aligned} P(E \cup B_d \cup B_n) &= P(E \cup (B_d \cup B_n)) = P(E) + \underbrace{P(B_d \cup B_n)}_{1-P((B_d \cup B_n)^c)} - P(\underbrace{E \cap (B_d \cup B_n)}_{(E\cap B_d)\cup(E\cap B_n)}) \\ &= P(E) + 1 - \underbrace{P((B_d \cup B_n)^c)}_{\text{Exercício (3c)}} - \Big[P(E \cap B_d) + P(E \cap B_n) - P(\underbrace{(E \cap B_d) \cap (E \cap B_n)}_{\varnothing,\text{ pois } B_d \cap B_n = \varnothing})\Big] \\ &= 0,40 + 1 - 0,88 - 0,01 - 0,02 = 0,49\,. \end{aligned}$$

3e) Probabilidade de não ser esportista e nem aluno da biologia (diurno ou noturno): $P(E^c \cap (B_d \cup B_n)^c)$.

$$\begin{aligned} P(E^c \cap (B_d \cup B_n)^c) &= P((E \cup B_d \cup B_n)^c) = 1 - \underbrace{P(E \cup B_d \cup B_n)}_{\text{Exercício (3d)}} \\ &= 1 - 0,49 = 0,51\,. \end{aligned}$$

4) Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral de sorte que $P(A) = 0,30$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,60$ e $P(A \cap B) = 0,20$. Determine o valor de p.

4) Da regra de adição de probabilidades, tem-se

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0,60 &= 0,30 + p - 0,20\,, \end{aligned}$$

donde $p = 0,50$.

5) Dois processadores, A e B, são colocados em teste por várias horas. A probabilidade de que um erro de cálculo ocorra no processador A é de p_a, no processador B, p_b, e, em ambos, p. Determinar a probabilidade de:
a) pelo menos um dos processadores apresentar erro.
b) nenhum dos processadores apresentar erro.
c) apenas o processador A apresentar erro.
d) apenas o processador B apresentar erro.

5) Definição dos eventos:

A: Ocorrência de erro no processador A; probabilidade de ocorrer erro no processador A: $P(A) = p_a$.
B: Ocorrência de erro no processador B; probabilidade de ocorrer erro no processador B: $P(B) = p_b$.

A ocorrência de erro nos processadores A e B é o evento $A \cap B$, que tem probabilidade $P(A \cap B) = p_{ab}$.

5a) A probabilidade de pelo menos um dos processadores apresentar erro é $P(A \cup B)$. Pela regra de adição de probabilidades, tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p_a + p_b - p_{ab}\,.$$

5b) A probabilidade de nenhum dos processadores apresentar erro é $P((A \cup B)^c)$, sendo que

$$P((A \cup B)^c) = 1 - \underbrace{P(A \cup B)}_{\text{Exercício (5a)}} = 1 - p_a - p_b + p_{ab}\,.$$

5c) A probabilidade de apenas o processador A apresentar erro é $P(A \setminus B)$, sendo que $P(A \setminus B) = P(A \cap B^c)$. Como os subconjuntos B e B^c formam uma partição, é imediato que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (naturalmente, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \varnothing$), donde $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ e, por conseguinte,

$$P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = p_a - p_{ab}\,.$$

5d) Pelos argumentos análogos apresentados no exercício (5c), a probabilidade de somente o processador B apresentar erro é

$$P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A) = p_b - p_{ab}\,.$$

6) Se $P(A \cup B) = p_{ab}$, $P(A) = p_a$ e $P(B) = x$, determine x se:
a) A e B forem mutualmente exclusivos.
b) A e B forem independentes (admita $P(A) \neq 1$).

6a) Para $A \cap B = \varnothing$ (eventos mutualmente exclusivos), a regra da adição de probabilidades implica

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\underbrace{A \cap B}_{\varnothing}) \quad \Rightarrow \quad p_{ab} = p_a + x - 0\,,$$

donde se tem $x = p_{ab} - p_a$.

6b) Para $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (quando os eventos A e B forem independentes), a regra da adição de probabilidades implica

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} \quad \Rightarrow \quad p_{ab} = p_a + x - p_a x\,,$$

donde se tem $x = \frac{p_{ab} - p_a}{1 - p_a}$ (para $p_a \neq 1$).

7) Mostrar que se os eventos A e B forem independentes, então A^c e B^c também o são.

7) Admite-se, por hipótese, que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, que é a condição de independência entre os eventos A e B. Logo, invocando a regra de adição de probabilidades, tem-se

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big[P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{\substack{P(A)P(B),\\ \text{por hipótese}}}\Big] \\ &= \underbrace{1 - P(A)}_{P(A^c)} - P(B)\Big[\underbrace{1 - P(A)}_{P(A^c)}\Big] = P(A^c)\Big[\underbrace{1 - P(B)}_{P(B^c)}\Big] = P(A^c)P(B^c)\,, \end{aligned}$$

conforme requisitado.

8) Sejam A, B, C e D pertencentes a um mesmo espaço amostral. Supondo $P(D) > 0$, mostre que:
a) $P(A^c|D) = 1 - P(A|D)$.
b) $P(A \cup B|D) = P(A|D) + P(B|D) - P(A \cap B|D)$.
c) $P(A \cup A^c|D) = 1$.
d) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

8a) De $A \cup A^c = \Omega$ (onde Ω indica o espaço amostral), pode-se escrever $(A \cup A^c) \cap D = \overbrace{\Omega \cap D}^{D}$, donde $D = (A \cap D) \cup (A^c \cap D)$. Como, naturalmente, $(A \cap D) \cap (A^c \cap D) = \varnothing$, então

$$P(D) \quad = \quad P(A \cap D) + P(A^c \cap D)\,;$$

a divisão desta equação por $P(D) > 0$ implica

$$1 = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} + \frac{P(A^c \cap D)}{P(D)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A^c|D) = 1 - P(A|D)\,.$$

8b) De $(A \cup B) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$, a regra de adição de probabilidades implica

$$P((A \cup B) \cap D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) - P((A \cap B) \cap D)\,;$$

a divisão desta equação por $P(D) > 0$ conduz ao resultado desejado.

8c) De $A \cup A^c = \Omega$ (onde Ω é o espaço amostral), pode-se escrever $(A \cup A^c) \cap D = \overbrace{\Omega \cap D}^{D}$, donde se tem

$$P((A \cup A^c) \cap D) = P(D)\,.$$

A divisão por $P(D) > 0$ desta equação implica $P(A \cup A^c|D) = 1$.

8d) A recorrência sucessiva à regra de adição de probabildiades implica

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\ &= \underbrace{P(A \cup B)}_{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} + P(C) - P(\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \underbrace{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}_{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)} \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\,. \end{aligned}$$

9) Se $P(A) \neq 0$, $P(B|A) = a/2$, e o evento B sempre é observado quando o evento A ocorre, determine o valor de a.

9) Se o evento B é sempre observado quando A ocorre, então $A \subset B$, donde segue $A \cap B = A$. Logo,

$$P(\underbrace{A \cap B}_{A}) = P(B|A)P(A) \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{a}{2}P(A)\,,$$

que implica $a = 2$, visto que $P(A) \neq 0$.

10) Uma classe de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 12 do sexo masculino (M) e 18 do feminino foram reprovados, 24 do sexo masculino e 42 do feminino foram aprovados (A). Calcule: a) $P(A \cup M^c)$ b) $P(A^c \cap M^c)$ c) $P(A|M)$ d) $P(M^c|A)$ e) $P(M|A)$

10) Dos dados fornecidos, pode-se montar a seguinte tabela de distribuição de notas.

Sexo\Desempenho	Aprovação (A)	Reprovação (A^c)
Masculino (M)	24	12
Feminino (M^c)	42	18

10a) Do total de 96 pessoas, o número total de pessoas aprovadas (homens e mulheres) junto com as mulheres ($A \cup M^c$) é, segundo a tabela, $24 + 42 + 18$ (respectivamente, homens aprovados, mulheres aprovadas e mulheres reprovadas); logo, $P(A \cup M^c) = 84/96 = 7/8$.

10b) O número de pessoas do sexo feminino e que foram reprovadas (conjunto $A^c \cap M^c$) é 18; logo, $P(A^c \cap M^c) = 18/96 = 3/16$.

10c) Do total de $24 + 12 = 36$ homens, 24 obtiveram aprovação; logo, $P(A|M) = 24/36 = 2/3$.

10d) Do total de $24 + 42 = 66$ pessoas aprovadas, 42 são mulheres; logo, $P(M^c|A) = 42/66 = 7/11$.

10e) Do total de $24 + 42 = 66$ pessoas aprovadas, 24 são homens; logo, $P(M|A) = 24/66 = 4/11$ (o complementar de $P(M^c|A)$, calculado no exercício (10d)).

11) Peças produzidas por uma máquina são tais que 2%, 8% e 90% delas são, respectivamente, defeituosas, recuperáveis e perfeitas. De um lote, foram sorteadas, para análise, duas peças (com reposição). Determine a probabilidade de: a) as duas serem defeituosas. b) pelo menos uma ser perfeita. c) uma ser recuperável e a outra, perfeita.

11) Definição dos eventos:

D: Sorteio de uma peça defeituosa.
R: Sorteio de uma peça recuperável.
P: Sorteio de uma peça perfeita.

Seja o par $(A, B) \subset \Omega \times \Omega$ (Ω denota o espaço amostral para um sorteio individual) o evento onde A e B são, respectivamente, os resultados do primeiro e segundo sorteios. Assumindo os sorteios independentes, tem-se $P((A, B)) = P(A)P(B)$.

11a) O evento (D, D), das duas peças escolhidas serem defeituosas, realiza-se com probabilidade $P((D, D)) = P(D)P(D) = 0,02 \cdot 0,02 = 0,0004$.

11b) O evento em questão ocorre com probabilidade complementar ao evento (P^c, P^c), onde não há sorteio de peça perfeita nas duas tentativas. Como $P((P^c, P^c)) = (1 - 0,90)(1 - 0,90) = 0,01$, a probabilidade de obter pelo menos uma peça perfeita é $1 - P((P^c, P^c)) = 0,99$.

11c) O evento em questão realiza-se através de dois eventos disjuntos, (R, P) e (P, R). Logo, a probabilidade requisitada é $P((R, P)) + P((P, R)) = 0,08 \cdot 0,90 + 0,90 \cdot 0,08 = 0,144$.

12) Numa cidade, estima-se que cerca de 30% dos habitantes tenham algum tipo de alergia. Sabe-se que 60% dos alérgicos praticam esportes, enquanto que esta porcentagem entre os não-alérgicos é de 30%. Escolhendo-se um indivíduo, de forma aleatória nesta cidade, determine a probabilidade dele:
a) praticar esporte.
b) ser alérgico, dado que não pratica esportes.

12) Definição dos eventos:

A: Alérgicos.
E: Praticantes de esporte.

Sabe-se, do enunciado da quest ao, que $P(A) = 0,30$ (logo, $P(A^c) = 1 - P(A) = 0,70$), $P(E|A) = 0,60$ e $P(E|A^c) = 0,30$.

12a) Como os subconjuntos A e A^c formam uma partição, tem-se $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ (com $(E \cap A) \cap (E \cap A^c) = \varnothing$), donde se tem

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap A^c) = P(E|A)P(A) + P(E|A^c)P(A^c) = 0,60 \cdot 0,30 + 0,30 \cdot 0,70 = 0,39\,,$$

que é a probabilidade da pessoa praticar esporte.

12b) Do exercício (11a), é imediato que a probabilidade da pessoa não praticar esportes é $P(E^c) = 1 - P(E) = 0,61 \neq 0$. Logo,

$$P(A|E^c) = \frac{P(A \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c)} = \frac{\big[1 - P(E|A)\big]P(A)}{P(E^c)} = \frac{(1 - 0,60)\,0,30}{0,61} = \frac{12}{61} \approx 0,20\,.$$

13) As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela abaixo.

Sexo\Filme	Comédia	Romance	Policial
Homens	150	90	200
Mulheres	100	200	60

Sorteando-se, ao acaso, uma dessas locações, determine a probabilidade de:

a) uma mulher ter alugado um filme policial.
b) uma mulher ter alugado um filme, sabendo-se que o gênero era policial.
c) o filme ser policial, dado que foi alugado por uma mulher.
d) o filme não ser policial, dado que foi alugado por um homem.

13a) De um total de $150+100+90+200+200+60=800$ locações, 60 filmes correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{60}{800}=\frac{3}{40}$.

13b) De um total de $200+60=260$ locações de filmes policiais, as mulheres alugaram 60 deles, implicando a probabilidade de $\frac{60}{260}=\frac{3}{13}$.

13c) De um total de $100+200+60=360$ locações por mulheres, 60 filmes correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$.

13d) De um total de $150+90+200=440$ locações de filmes por homens, $150+90=240$ correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{240}{440}=\frac{6}{11}$.

14) Em um bairro existem três empresas de TV a cabo e 30 mil residências. A empresa TA tem 3150 assinantes, a TB tem 2775 e a empresa TC tem 3900 assinantes, sendo que algumas residências em condomínios subscrevem aos serviços de mais de uma empresa. Assim, há 630 residências que são assinantes de TA e TB, 180 de TA e TC, 270 de TB e TC e 45 que são assinantes das três empresas. Se uma residência desse bairro é sorteada ao acaso, determinar a probabilidade de:
a) ser assinante somente da TA.
b) assinar pelo menos uma delas.
c) não ter TV a cabo.

14) Definição dos eventos:

A: Assinatura com a empresa TA.
B: Assinatura com a empresa TB.
C: Assinatura com a empresa TC.

Assumindo equiprobabilidade no sorteio das residências, tem-se

$$\begin{aligned} P(A) &= \tfrac{3150}{30000}=0,1050\,, & P(B) &= \tfrac{2775}{30000}=0,0925\,, & P(C) &= \tfrac{3900}{30000}=0,1300\,, \\ P(A\cap B) &= \tfrac{630}{30000}=0,0210\,, & P(A\cap C) &= \tfrac{180}{30000}=0,0060\,, & P(B\cap C) &= \tfrac{270}{30000}=0,0090 \end{aligned}$$

e $P(A\cap B\cap C)=\frac{45}{30000}=0,0015$.

14a) A probabilidade de ser assinante somente da TA é dada por

$$\begin{aligned} P(A\cap B^c\cap C^c) &= P(A\cap(B\cup C)^c)=P(A)-P(A\cap(B\cup C))=P(A)-P((A\cap B)\cup(A\cap C)) \\ &= P(A)-\big[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\big] \\ &= 0,1050-\big[0,0210+0,0060-0,0015\big]=0,0795\,, \end{aligned}$$

onde usou-se o fato de $(B\cup C)$ e $(B\cup C)^c$ constituírem uma partição (vide primeira linha) e a regra da adição de probabilidades.

14b) A probabilidade de assinar pelo menos uma das TV a cabo é dada por

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P((A\cup B)\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C) \\ &= \overbrace{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}^{P(A\cup B)}+P(C)-P((A\cap C)\cup(B\cap C)) \\ &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-\big[P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\big] \\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) \\ &= 0,1050+0,0925+0,1300-0,0210-0,0060-0,0090+0,0015=0,2930\,, \end{aligned}$$

onde a regra de adição de probabilidades foi invocada sucessivas vezes.

14c) A probabilidade de não ter TV a cabo é dada por

$$P(A^c\cap B^c\cap C^c) = P((A\cup B\cup C)^c)=1-\underbrace{P(A\cup B\cup C)}_{\text{Exercício (14b)}}=1-0,2930=0,7070\,.$$

15) Das pacientes de uma clínica de ginecologia com idade acima de 40 anos, 70% são ou foram casadas e 30% são solteiras. Sendo solteira, a probabilidade de ter apresentado um distúrbio hormonal no último ano é de 20%, enquanto que para as demais essa probabilidade aumenta para 40%. Determinar:
a) a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter apresentado um distúrbio hormonal (no último ano).
b) se a paciente sorteada teve distúrbio hormonal (no último ano), a probabilidade de ser solteira.
c) se duas pacientes são escolhidas ao acaso e com reposição, a probabilidade de pelo menos uma ter manifestado distúrbio (no último ano).

15) Definição dos eventos:

S: Solteira (denotar-se-á por S^c aquelas que são ou foram casadas).
D: Ocorrência de distúrbio hormonal no último ano.

Sabe-se que $P(S) = 0,30$, $P(S^c) = 0,70$, $P(D|S) = 0,20$ e $P(D|S^c) = 0,40$.

15a) Notando que os subconjuntos S e S^c formam uma partição, pode-se representar o evento D por $D = (D \cap S) \cup (D \cap S^c)$ (com $(D \cap S) \cap (D \cap S^c) = \varnothing$). Desta forma, a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter apresentado um distúrbio hormonal (no último ano) é dada por

$$P(D) \;=\; P(D \cap S) + P(D \cap S^c) = P(D|S)P(S) + P(D|S^c)P(S^c) = 0,20 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,70 = 0,34\,.$$

15b) Sabendo-se, pelo exercício (15a), que $P(D) \neq 0$, a probabilidade da paciente ser solteira, dado que teve distúrbio hormonal (no último ano), é dada por

$$P(S|D) \;=\; \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|S)P(S)}{\underbrace{P(D)}_{\text{Exercício (15a)}}} = \frac{0,20 \cdot 0,30}{0,34} = \frac{3}{17} \approx 0,18\,.$$

15c) Do exercício (15a), a probabilidade da paciente escolhida não ter apresentado distúrbio no último ano é $P(D^c) = 1 - P(D)$. Como o sorteio das duas pacientes (com reposição) é independente, a probabilidade de nenhuma das duas ter manifestado o problema é $P(D^c)P(D^c)$, o que implica a probabilidade de pelo menos uma delas ter apresentado distúrbio hormonal no último ano ser a probabilidade complementar $1 - P(D^c)P(D^c) = 1 - \left[1 - P(D)\right]^2 = 1 - (1 - 0,34)^2 = 0,5644$.

16) Numa região, a probabilidade de chuva em um dia qualquer de primavera é de $0,2$. Um meteorologista acerta suas previsões em 80% dos dias em que chove e em 90% dos dias em que não chove.
a) Determinar a probabilidade deste meteorologista acertar a previsão.
b) Havendo acerto na previsão feita, determinar a probabilidade de ter sido um dia de chuva.

16) Definição dos eventos:

A: Acerto da previsão pelo meteorologista.
C: Ocorrência de chuva (em um dia qualquer de primavera).

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(C) = 0,2$ (logo, $P(C^c) = 1 - P(C) = 0,8$), $P(A|C) = 0,8$ e $P(A|C^c) = 0,9$.

16a) Notando que os subconjuntos C e C^c formam uma partição, pode-se escrever $A = (A \cap C) \cup (A \cap C^c)$, e a probabilidade deste meteorologista acertar a previsão é dada por

$$P(A) \;=\; P(A \cap C) + P(A \cap C^c) = P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,8 = 0,88\,.$$

16b) Do exercício (16a), sabe-se que $P(A) \neq 0$. Havendo acerto na previsão feita, a probabilidade de ter sido um dia de chuva é dada por

$$P(C|A) \;=\; \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,88} = \frac{2}{11} \approx 0,18\,.$$

17) Um médico desconfia que um paciente tem tumor no abdômen, já que isto ocorreu em 80% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultra-som o detectará com probabilidade $0,9$. Entretanto, se ele não tiver o tumor, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade $0,1$. Se o exame detectou um tumor, determinar a probabilidade do paciente tê-lo de fato.

17) Definição dos eventos:

T: Ocorrência de tumor.
U: Indicação de tumor pelo exame ultra-som.

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(T) = 0,8$ (logo, $P(T^c) = 1 - P(T) = 0,2$), $P(U|T) = 0,9$ e $P(U|T^c) = 0,1$. Notando que os subconjuntos T e T^c formam uma partição, pode-se escrever $U = (U \cap T) \cup (U \cap T^c)$, e a probabilidade do exame detectar tumor é dada por

$$P(U) = P(U \cap T) + P(U \cap T^c) = P(U|T)P(T) + P(U|T^c)P(T^c) = 0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,74 \neq 0\,.$$

Desta forma, havendo indicação de tumor pelo ultra-som, a probabilidade do paciente tê-lo de fato é dada por

$$P(T|U) = \frac{P(T \cap U)}{P(U)} = \frac{P(U|T)P(T)}{P(U)} = \frac{0,9 \cdot 0,8}{0,74} = \frac{36}{37} \approx 0,97\,.$$

18) Acredita-se que numa certa população, 30% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é de $0,5$. Para os não alérgicos, esta probabilidade é de $0,1$. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibiótico; determinar a probabilidade dela ser do grupo não alérgico.

18) Definição dos eventos:

A: Pessoa com alergia.
R: Reação ao antibiótico.

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(A) = 0,30$ (logo, $P(A^c) = 1 - P(A) = 0,70$), $P(R|A) = 0,50$ e $P(R|A^c) = 0,1$. Notando que os subconjuntos A e A^c formam uma partição, pode-se escrever $R = (R \cap A) \cup (R \cap A^c)$, e a probabilidade da pessoa apresentar reação ao antibiótico é dada por

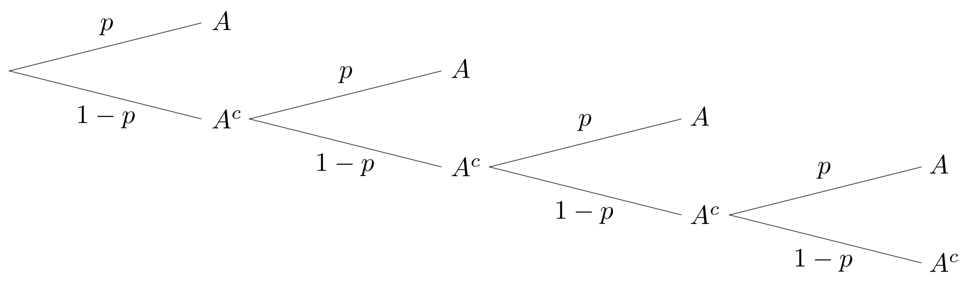
$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap A) + P(R \cap A^c) = P(R|A)P(A) + P(R|A^c)P(A^c) \\ &= 0,50 \cdot 0,30 + 0,1 \cdot 0,70 = 0,22 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Desta forma, havendo reação ao antibiótico, a probabilidade desta pessoa não ser do grupo alérgico é dada por

$$P(A^c|R) = 1 - P(A|R) = 1 - \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = 1 - \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = 1 - \frac{0,50 \cdot 0,30}{0,22} = \frac{7}{22} \approx 0,32\,.$$

19) Uma companhia que fura poços artesianos trabalha numa região escolhendo, aleatoriamente, o ponto de furo. Não encontrando água na primeira tentativa, sorteia outro local e, caso também não tenha sucesso, faz uma terceira tentativa. Não encontrando novamente, um quarto e último furo é aberto em outro local escolhido ao acaso. Admite-se que a probabilidade de encontrar água em qualquer ponto dessa região seja p. Determinar a probabilidade de:
a) encontrar água na terceira tentativa.
b) encontrar água em até três tentativas.
c) encontrar água.

19) A árvore de probabilidades da situação descrita pode ser representada abaixo, onde o evento “encontrar água” é denotado por A. Assume-se que a probabilidade de encontrar água em cada furo, p, seja independente.



Denote por $X_1 X_2 \cdots$ a sequência ordenada dos eventos (X_i sendo o evento do i-ésimo furo, sendo igual a A^c ou A; notar que as únicas sequências possíveis são A, A^cA, A^cA^cA, $A^cA^cA^cA$ e $A^cA^cA^cA^c$)

19a) A única sequência de eventos que permite encontrar água na terceira tentativa seria não encontrá-la nas duas primeiras tentativas e obter sucesso na terceira. Desta forma, a probabilidade requisitada é dada por

$$\underbrace{(1-p)}_{A^c\ (1^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{(1-p)}_{A^c\ (2^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{p}_{A\ (3^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} = (1-p)^2\, p\,.$$

19b) Para encontrar água em até três tentativas, existem três (e somente três) possibilidades:

(i) Encontrar água na primeira tentativa – probabilidade $P(A)$.
(ii) Não encontrar água na primeira tentativa e encontrá-la na segunda – probabilidade $P(A^cA)$.
(iii) Não encontrar água nas duas primeiras tentativas e encontrá-la na terceira – probabilidade $P(A^cA^cA)$.

A probabilidade requisitada é dada por

$$\begin{aligned} P(A) + P(A^cA) + P(A^cA^cA) &= \underbrace{p}_{A\ (1^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} + \underbrace{(1-p)}_{A^c\ (1^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{p}_{A\ (2^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} + \underbrace{(1-p)^2 p}_{\text{exercício (1a)}} \\ &= p\big[1 + (1-p) + (1-p)^2\big]\,, \end{aligned}$$

onde a aditividade das probabilidades dos três eventos decorre desses serem mutualmente exclusivos.

19c) Para encontrar água, existem quatro (e somente quatro) possibilidades:

(i) Encontrar água na primeira tentativa – probabilidade $P(A)$.
(ii) Não encontrar água na primeira tentativa e encontrá-la na segunda – probabilidade $P(A^cA)$.
(iii) Não encontrar água nas duas primeiras tentativas e encontrá-la na terceira – probabilidade $P(A^cA^cA)$.
(iv) Não encontrar água nas três primeiras tentativas e encontrá-la na quarta (e última) – probabilidade $P(A^cA^cA^cA)$.

A probabilidade requisitada é dada por

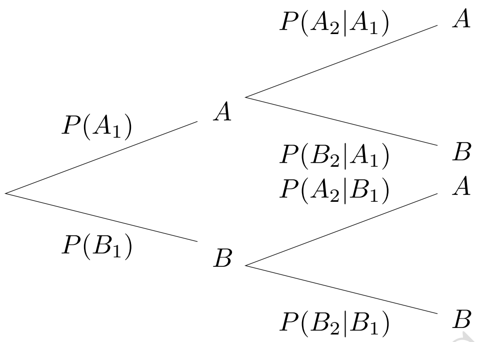
$$\begin{aligned} &\underbrace{P(A) + P(A^cA) + P(A^cA^cA)}_{\text{exercício (1b)}} + P(A^cA^cA^cA) = \\ &= \underbrace{p\big[1 + (1-p) + (1-p)^2\big]}_{\text{exercício (1b)}} + \underbrace{(1-p)}_{A^c\ (1^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{(1-p)}_{A^c\ (2^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{(1-p)}_{A^c\ (3^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \cdot \underbrace{p}_{A\ (4^{\underline{a}}\ \text{tentativa})} \\ &= p\big[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3\big]\,, \end{aligned}$$

onde a aditividade da probabilidade dos quatro eventos decorre desses serem mutualmente exclusivos.

Nota: O exercício (1c) admite uma solução alternativa, onde a probabilidade de encontrar água é vista como a probabilidade complementar de não encontrar água (esta última, pela independência dos eventos associados a cada furo, é $(1-p)^4$), sendo, portanto, $1-(1-p)^4$ (este resultado coincide, naturalmente, com o valor $p[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3]$ obtido anteriormente).

20) Uma urna contém $a > 0$ bolas amarelas e $b \geq 2$ bolas brancas. Retira-se, aleatoriamente, uma bola da urna e registra-se a cor sorteada. A bola é devolvida à urna e a operação anterior é repetida.
a) Determinar a probabilidade de obter duas bolas brancas.
b) Determinar a probabilidade de obter a bola branca no segundo sorteio.
c) Refazer os exercícios (2a) e (2b) admitindo que, após o primeiro sorteio, a primeira bola não seja devolvida à urna.

20) A árvore de probabilidades referente aos eventos é dada abaixo. Denota-se por A_i (B_i) o evento "sorteio da bola amarela (branca) no i-ésimo sorteio.



Caso o segundo sorteio ocorra com reposição da primeira bola, e assumindo que o sorteio de cada uma das $a+b$ bolas seja equiprovável, tem-se

$$P(A_1) = P(A_2|A_1) = P(A_2|B_1) = \frac{a}{a+b} \qquad \text{e} \qquad P(B_1) = P(B_2|A_1) = P(B_2|B_1) = \frac{b}{a+b}\,.$$

Notar a independência entre o primeiro e segundo sorteio.

20a) A probabilidade de se obter duas bolas brancas é descrita por

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2\,.$$

20b) Notando que os conjuntos A_1 e B_1 formam uma partição para o primeiro sorteio, a probabilidade de se obter a bola branca no segundo sorteio é dada por

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap A_1) + P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a+b}\,. \end{aligned}$$

Nota: Uma vez que os sorteios são independentes (com reposição da primeira bola), poder-se-ia obter diretamente $P(B_2)$ como sendo a probabilidade de sortear a bola branca $\frac{b}{a+b}$.

20c) Caso não haja reposição da primeira bola, tem-se

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{a}{a+b}, & P(A_2|A_1) &= \frac{a-1}{a+b-1}, & P(A_2|B_1) &= \frac{a}{a+b-1}, \\ P(B_1) &= \frac{b}{a+b}, & P(B_2|A_1) &= \frac{b}{a+b-1} \quad \text{e} & P(B_2|B_1) &= \frac{b-1}{a+b-1}\,. \end{aligned}$$

Neste novo cenário, a probabilidade de se obter duas bolas brancas é descrita por

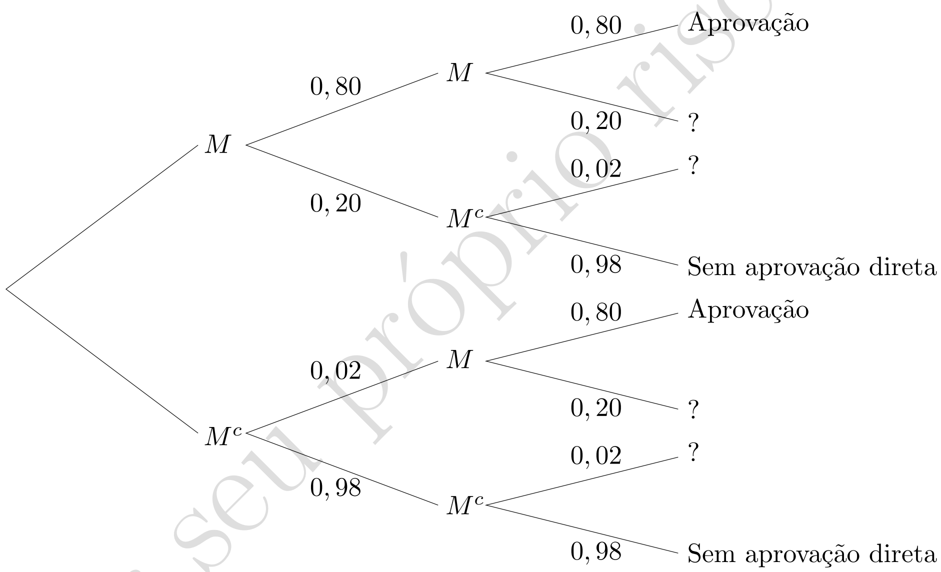
$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b\,(b-1)}{(a+b)\,(a+b-1)}\,,$$

e, notando que os conjuntos A_1 e B_1 formam uma partição para o primeiro sorteio, a probabilidade de se obter a bola branca no segundo sorteio é dada por

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap A_1) + P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a+b}\,. \end{aligned}$$

21) Em um curso hipotético de TADI, suponha que a probabilidade de um(a) aluno(a) obter nota igual ou acima de $5,0$ seja de 80% caso o ele(a) esteja muito motivado(a) e 2% se não estiver. Suponha que a motivação do(a) aluno(a) seja diretamente ligada ao seu desempenho na prova anterior. Determinar a probabilidade do(a) aluno(a) ser aprovado no curso sem a necessidade das provas substitutiva e de recuperação se:
a) ele(a) começou o curso desmotivado(a).
b) ele(a) começou o curso motivado(a).

21) Denotando por M o estado "motivado" do aluno (e, por M^c, o estado "desmotivado"), segue abaixo a árvore de probabilidades referente ao desempenho do aluno nas duas provas.



21a) A probabilidade do aluno obter notas acima de $5,0$ nas duas provas, dado que ele começa o curso desmotivado, é de $0,02 \cdot 0,80 = 0,016$. Por outro lado, a probabilidade deste obter notas abaixo de $5,0$ nos dois exames é de $0,98 \cdot 0,98 = 0,9604$ (com a mesma condição inicial), o que implica a probabilidade de aprovação ser majorada por $1 - 0,9604 = 0,0396$. Desta forma, a probabilidade do aluno ser aprovado no curso sem a necessidade de provas substitutiva e de recuperação encontra-se na faixa entre $1,60\%$ e $3,96\%$.

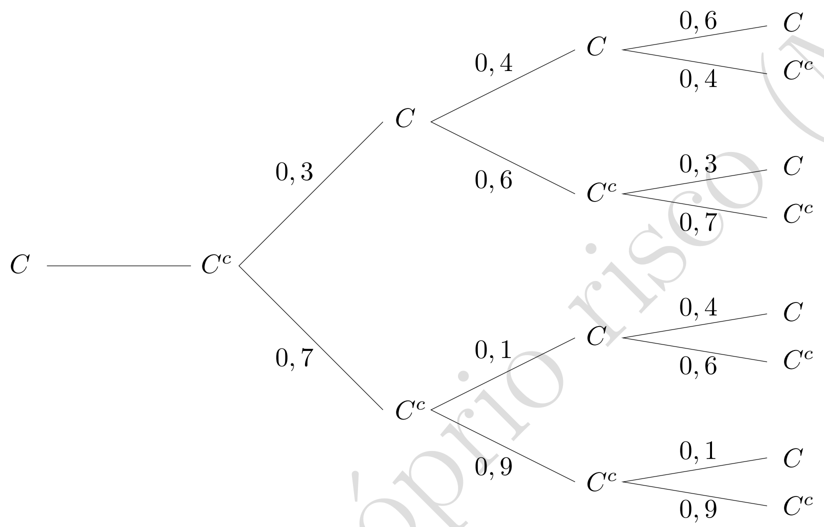
21b) A probabilidade do aluno obter notas acima de $5,0$ nas duas provas, dado que ele começa o curso motivado, é de $0,80 \cdot 0,80 = 0,64$. Por outro lado, a probabilidade deste obter notas abaixo de $5,0$ nos dois exames é de $0,20 \cdot 0,98 = 0,196$ (com a mesma condição inicial), o que implica a probabilidade de aprovação ser majorada por $1 - 0,196 = 0,804$. Desta forma, a probabilidade do aluno ser aprovado no curso sem a necessidade de provas substitutiva e de recuperação encontra-se na faixa entre $64,0\%$ e $80,4\%$.

22) Suponha que o tempo de um dia D (em dias) seja determinado pelos dois dias anteriores de sorte que:

- Chuva nos dias $D-2$ e $D-1$ implica chuva no dia D com probabilidade 0,6.
- Chuva no dia $D-2$ e ausência de chuva no dia $D-1$ implica chuva no dia D com probabilidade 0,3.
- Ausência de chuva no dia $D-2$ e chuva no dia $D-1$ implica chuva no dia D com probabilidade 0,4.
- Ausência de chuva nos dias $D-2$ e $D-1$ implica chuva no dia D com probabilidade 0,1.

a) Admitindo que choveu ontem e não há chuva hoje, determinar a probabilidade de chover daqui a três dias.
b) Determinar o cenário mais provável (previsão do tempo de amanhã e depois) se não houver chuva daqui a três dias (assumindo a condição inicial do item anterior).

22) As regras descritas podem ser esquematizadas na árvore de probabilidades abaixo.



22a) Denotando por X_i (X_i podendo ser C_i ou C_i^c) o tempo do i-ésimo dia (onde $i=-1$ indica "ontem", $i=0$ significa "hoje", e assim por diante), a probabilidade de chover daqui a três dias, $P(C_3)$, é dada por

$$\begin{aligned} P(C_3) &= P(C_{-1}C_0^cC_1C_2C_3)+P(C_{-1}C_0^cC_1C_2^cC_3)+P(C_{-1}C_0^cC_1^cC_2C_3)+P(C_{-1}C_0^cC_1^cC_2^cC_3) \\ &= 0,3\cdot 0,4\cdot 0,6+0,3\cdot 0,6\cdot 0,3+0,7\cdot 0,1\cdot 0,4+0,7\cdot 0,9\cdot 0,1 \\ &= 0,217\,, \end{aligned}$$

onde a aditividade das probabilidades (na primeira linha) segue da disjunção entre os eventos.

22b) Com a mesma notação anterior, existem as seguintes possibilidades para não chover daqui a três dias (assumindo as mesmas condições iniciais do exercício (16a)):

$$\begin{aligned} &\text{Cenário } C_{-1}C_0^cC_1C_2C_3^c && \Rightarrow \text{ Probabilidade de ocorrência: } 0,3\cdot 0,4\cdot 0,4=0,048 \\ &\text{Cenário } C_{-1}C_0^cC_1C_2^cC_3^c && \Rightarrow \text{ Probabilidade de ocorrência: } 0,3\cdot 0,6\cdot 0,7=0,126 \\ &\text{Cenário } C_{-1}C_0^cC_1^cC_2C_3^c && \Rightarrow \text{ Probabilidade de ocorrência: } 0,7\cdot 0,1\cdot 0,6=0,042 \\ &\text{Cenário } C_{-1}C_0^cC_1^cC_2^cC_3^c && \Rightarrow \text{ Probabilidade de ocorrência: } 0,7\cdot 0,9\cdot 0,9=0,567 \end{aligned}$$

O cenário mais provável para não haver chuva daqui a três dias é não chover amanhã e nem depois (o que ocorre com probabilidade $56,7\%$).