Prova 2 - Matemática Discreta

Prof. Márcio Moretto Ribeiro

4 de dezembro de 2024

(2.0) Exercício 1

Prove, utilizando **indução**, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n > n^2 \quad \text{para } n \geq 5.$$

(2.0) Exercício 2

Considere as seguintes funções definidas em $\mathbb{Z}$:

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 3x - 4.$$

(a) Calcule $g(f(x))$.

(b) Calcule $f(g(x))$.

(c) Determine se $g(f(x)) = f(g(x))$. Justifique.

(d) Encontre x tal que $g(f(x)) = 0$

(2.0) Exercício 3

Resolva as relações de recorrência fornecendo fórmulas explícitas para a_n. Em cada caso, calcule a_5:

(a) $a_n = 3a_{n-1} + 2$, com $a_0 = 1$.

(b) $a_n = 2a_{n-1} - 4$, com $a_0 = 5$.

(2.0) Exercício 4

Exercício

Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas:

(a) $12 \equiv -1 \pmod{13}$.

(b) Se $a \cdot b \equiv 0 \pmod{m}$, então $a \equiv 0 \pmod{m}$ ou $b \equiv 0 \pmod{m}$.

(c) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, prove ou refute:

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

$2 \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 4)$

(d) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

$-4 \equiv 4 \ \mathrm{mod}\ 4$

(2.0) Exercício 5

Dada a permutação π que reordena os elementos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ da seguinte forma:

$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 3, \quad \pi(3) = 4, \quad \pi(4) = 5, \quad \pi(5) = 1, \quad \pi(6) = 7, \quad \pi(7) = 6,$

responda:

$0 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 5)$

(a) Calcule π^2 (a composição de π consigo mesma).

$3 \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 5)$

(b) Determine π^{-1}, o inverso de π.

$3 \equiv 13 \ (\mathrm{mod}\ 5)$

$2 \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 4) \to 6 \,\underline{|\,4}\, \to b \,\underline{|\,m}$

$\phantom{2 \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 4) \to}\ 2 \quad 1 \qquad\ \ m$

$c \,\underline{|\,m}$

b

$= k_1 \cdot q + r$