Instituto Tecnológico de Matamoros

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Tema 4
Serie De Taylor

Docente: Cecilia Anzaldua Ramírez
Materia: Calculo Integral

Equipo:
Carlos Daniel Cruz Castillo
José Emiliano Briceño Ramírez

16 de Mayo del 2025

1 Serie de Taylor

1.1 Introducción

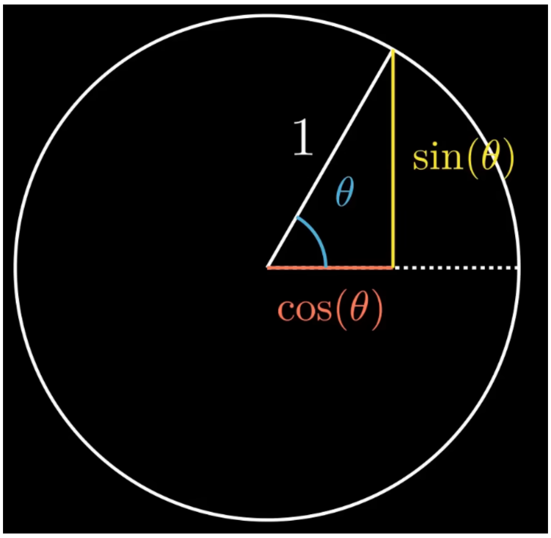
En matemáticas y en mundo real, muchas veces no podemos calcular de forma totalmente exacta lo que nos rodea. Tenemos que recurrir a aproximaciones para tratar de resolver ciertos problemas y que la vida sea más sencilla.
Las **series de Taylor** son una herramienta matemática fundamental utilizada para aproximar funciones mediante polinomios. Esta técnica es ampliamente utilizada en cálculo , análisis matemático, física, ingeniería y otras ramas.

Una serie de Taylor permite expresar una función suave (infinitamente derivable) como una suma infinita de términos derivados de la función evaluada en un punto específico. Esta representación es especialmente útil cuando una función es complicada o imposible de calcular directamente.

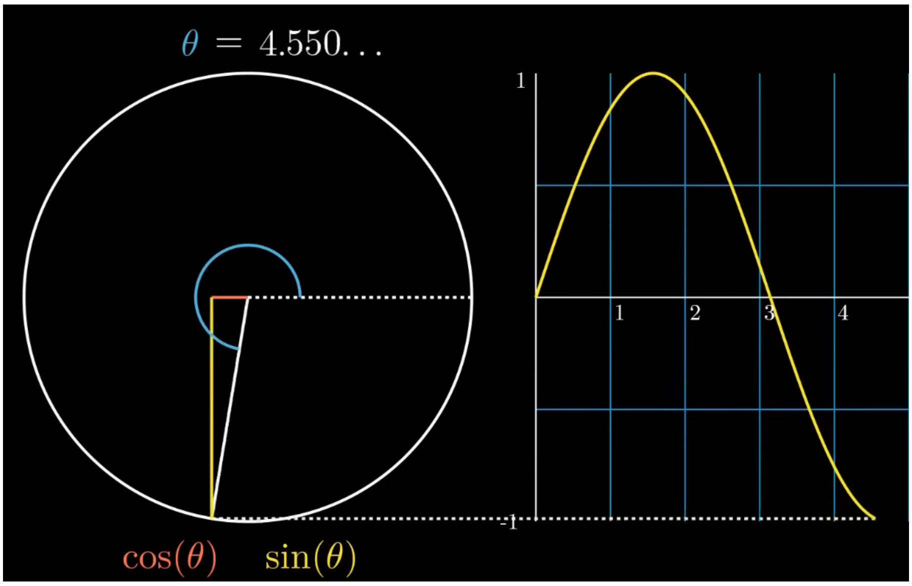
Podemos empezar por las series de Taylor explicando **¿Qué es el seno de un angulo θ?**

$$\sin\theta$$

Para hallarlo se suele construir un circulo de radio *unidad* y un triangulo de esta forma con el angulo θ.



Pues se dice que el $\sin$ es la longitud del lado amarillo, mientras que la del lado rojo es el $\cos$. Si variamos el valor de θ las longitudes de estos segmentos cambian, se hacen mas grandes y mas pequeños. Es decir, esto depende del ángulo θ y por lo tanto, podemos dibujar cuanto valen el $\sin$ y el $\cos$ en función.



Todo esto esta correcto, pero ahora **¿Qué que pasa si quiero calcular el seno de algo con muchos decimales?** Como 2.4521352121....

La respuesta lógica es que podríamos aumentar la precisión de las medidas y obtendríamos el resultado ¿No? Pues no es tan simple, ya que no tenemos algo como "precisión suficiente" ya que son muchos decimales. Pero las calculadoras lo hacen ¿Verdad?

¿Como lo hacen las calculadoras?
Ya que es imposible de almacenar en la memoria de las calculadoras todos los valores del seno para todos los valores que se introduzca, suelen calcularlo de dos formas diferentes. La primera, un algoritmo muy famoso llamado **Cordic** y por las segunda, las **Series de Taylor**.

1.2 ¿Que son las series de Taylor?

Las series de Taylor son representaciones de funciones mediante una suma infinita de términos calculados a partir de las derivadas de la función en un único punto. Permiten aproximar funciones complicadas con polinomiosmás manejables.

Definición Formal

Sea $f(x)$ una función infinitamente derivable en un punto a. La serie de Taylor de $f(x)$ centrada en a es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Donde:

- $f^n(a)$: es la derivada n-ésima de f evaluada en a.
- $n!$: es el factorial de n.
- $(x-a)^n$: es la potencia n-ésima del desplazamiento respecto a a

1.3 ¿Para que sirven?

Las series de Taylor se utilizan para:

- Aproximar funciones difíciles de calcular(como e^x, $sin(x)$, $ln(x)$, etc).
- Resolver ecuaciones diferenciales.
- Realizar cálculos numéricos en ingeniería y física.
- Analizar el comportamiento local de funciones.

1.4 ¿Cómo se calcula una Serie de Taylor?

Pasos:

1. Elige el punto de desarrollo a
2. Calcula las derivadas sucesivas de $f(x)$
3. Evalúa esas derivadas en a
4. Sustituye en la fórmula:

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + ...
\end{aligned}
$$

1.5 Ejemplo

a) Calcula la Serie de Taylor de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, alrededor de $x_0 = 1$

- Calcular las derivadas sucesivas de $f(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
f'(x) &= 4x^3 - 6x \\
f''(x) &= 12x^2 - 6 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

- Evaluar las derivadas en a

$$
\begin{aligned}
f(1) &= -1 \\
f'(1) &= -2 \\
f''(1) &= 6 \\
f'''(1) &= 24 \\
f^{(4)}(1) &= 24 \\
f^{(5)}(1) &= 0
\end{aligned}
$$

- Sustituir en la fórmula

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$$f(x) = -1 - 2(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4$$
$$f(x) = -1 - 2(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{24}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4$$
$$f(x) = -1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

- Entonces la serie de Taylor es:

$$f(x) = -1-2(x-1)+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$$

2 Representación de Funciones Mediante Series de Taylor

2.1 Introducción

La representación de funciones mediante series de Taylor es una de las herramientas más importantes del análisis matemático. Esta técnica permite aproximar funciones complejas utilizando polinomios infinitos, lo que resulta de gran utilidad en diversos campos como la física, la ingeniería, la economía y la informática.

En matemáticas, una serie de Taylor de una función $f(x)$ infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto $(a - r, a + r)$

Si esta serie converge para todo x perteneciente al intervalo $(a-r, a+r)$ y la suma es igual a $f(x)$, entonces la función $f(x)$ se llama analítica. Para comprobar si la serie converge $af(x)$, se suele utilizar una estimación del resto del teorema de Taylor. Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si $a = 0$, a la serie se le llama serie de Maclaurin.

Esta representación tiene tres ventajas importantes:
La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales. Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función. Es posible demostrar que, si es viable la transformación de una función a una serie de Taylor, es la óptima aproximación posible.

2.2 Condiciones de Validez Para Series de Taylor

No todas las funciones se pueden representar por su serie de Taylor en todo su dominio. Para que una función $f(x)$ sea representada por su serie de Taylor en un intervalo alrededor de a, se deben cumplir ciertos requisitos:

- $f(x)$ debe ser infinitamente derivable en ese intervalo
- La serie debe converger
- El valor al que converge la serie debe ser igual al valor real de la función (convergencia uniforme o convergencia absoluta en algunos casos).