Formulas de Frenet-Serret y El Vector Torsión

Jean Frenet

Jean Frédéric Frenet (7 de febrero de 1816 - 12 de junio de 1900) fue un famoso matemático que introdujo la Teoría de Curvas junto a Joseph Serret. En reconocimiento a su trabajo, se denomina a la base espacial definida por los vectores tangente, normal y binormal, triedro de Frenet-Serret.

Nació en Périgueux en 1816 y en el año 1840 ingresó en L'École Normale Superieure, más tarde continuó sus estudios en Toulouse, ciudad en la que redactó su tesis doctoral durante 1847. Un fragmento de la mencionada tesis alberga la teoría de curvas en el espacio, incluyendo las fórmulas que actualmente son conocidas como 'fórmulas de Frenet – Serret'. Frenet aportó seis de dichas fórmulas, mientras que Serret proporcionó las nueve restantes. Cabe señalar que Frenet publicó este apartado de su tesis en el 'Journal de mathématique pures et appliques', en el año 1852.

Frenet llegó a ser profesor en Toulouse y, después, en 1848, ocupó un puesto de docente de matemáticas en Lyon. Además, también fue director del observatorio astronómico, donde, como tal, dirigió las observaciones meteorológicas.

Joseph Alfred Serret

Joseph Alfred Serret (París, Francia, 30 de agosto de 1819 - Versalles, Francia, 2 de marzo de 1885), más conocido como Joseph Serret, fue un matemático francés, conocido por desarrollar junto a Jean Frenet la teoría de curvas. Editó los trabajos de Lagrange —publicados en catorce volúmenes entre 1867 y 1892 y realizó la quinta edición de los de Monge en 1850. Una de sus principales obras fue el manual Cours d'Algèbre supérieure, editado en dos tomos.

Joseph-Alfred Serret era hijo de Pierre Antoine Serret y de Marie Virginie Tessier. Nacido en la calle de Sant Honoré de París, realizó estudios superiores en la Escuela Politécnica de 1838 a 1840,que continuó en la Escuela de la

Tabacalera. Renunció a su trabajo como ingeniero de la tabacalera para regresar a París, donde se convirtió en examinador en el Colegio de Santa Bárbara. En 1847 obtuvo el doctorado en ciencias matemáticas en la Facultad de Ciencias de París, y un año después se convirtió en examinador de admisión en la Escuela Politécnica, cargo que ocupó hasta 1862.

Introduccion a las formulas de Frenet-Serret

En geometría diferencial, las fórmulas de Frenet-Serret describen las propiedades cinemáticas de una partícula que se mueve a lo largo de una curva diferenciable en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$, o las propiedades geométricas de la propia curva módulo desplazamientos de la misma. Más específicamente, las fórmulas describen las derivadas de cada vector unitario del triedro de Frenet-Serret en términos de los otros dos. Las fórmulas llevan el nombre de los dos matemáticos franceses que las descubrieron de forma independiente: Jean Frédéric Frenet, en su tesis de 1847, y Joseph Alfred Serret, en 1851. La notación vectorial y el álgebra lineal que se emplean actualmente para escribir estas fórmulas aún no estaban disponibles en el momento de su descubrimiento.

En cada punto de una curva diferenciable, el triedro de Frenet-Serret es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por los siguientes vectores:

- T es el vector unitario tangente a la curva, apuntando en la dirección del movimiento.
- N es el vector unitario normal, en el sentido de la derivada de T con respecto del parámetro longitud de arco.
- B es el vector unitario binormal, el producto vectorial de T y N.

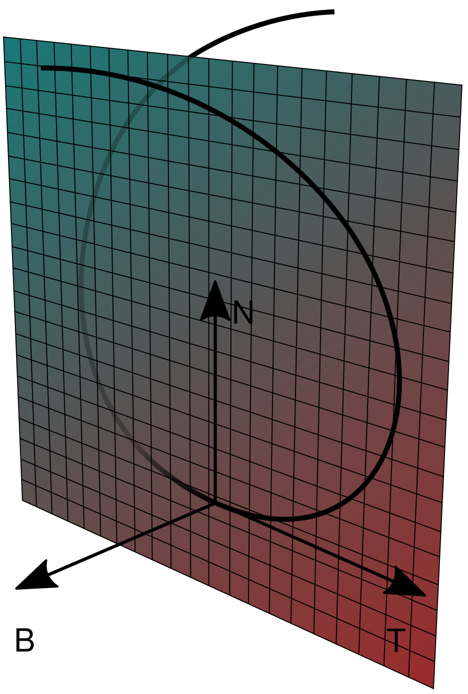
Las formulas de Frenet-Serret son:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

Donde $\frac{d}{ds}$ denota la derivada con respecto al parámetro longitud del arco, κ es la curvatura y τ es la torsión de la curva, dos magnitudes escalares. Intuitivamente, la curvatura mide lo que dista una curva de ser una línea recta, mientras que la torsión mide lo que dista una curva de ser plana.



Una curva alabeada; los vectores T, N y B; y el plano osculador atravesado por T y N

Enunciado

Sea $R(s)$ una curva en el espacio euclídeo, que representa el vector de posición de la partícula en función del tiempo. Las fórmulas de Frenet-Serret se aplican a curvas que no son degeneradas, es decir, que se curvan en todo punto. Más formalmente, se requiere que el vector de velocidad $R'(s)$ y el vector de aceleración $R''(s)$ no sean proporcionales.

Además, se puede suponer que la curva está parametrizada por el arco (es decir, que $||R(s)|| = 1$ para todo s), ya que cualquier parametrización de la curva da la misma curvatura en cada punto.

En estas condiciones, el triedro de Frenet-Serret (o TNB) se define como:

- El vector unitario tangente T en un parametrización por el arco se define como:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

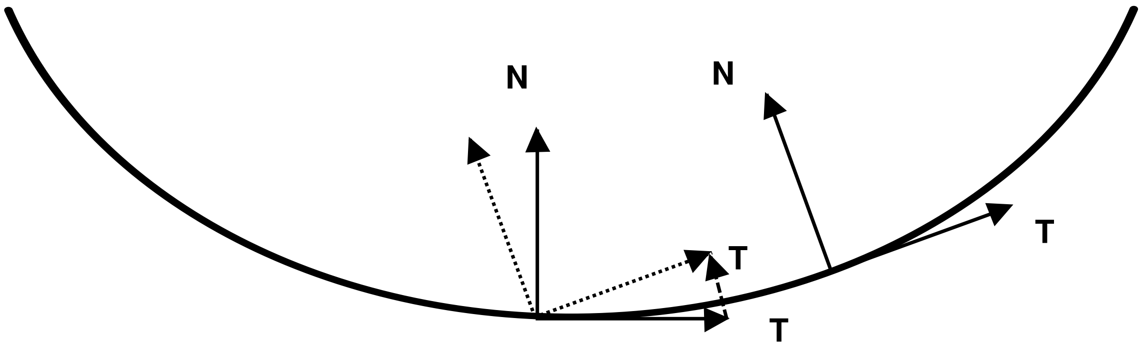
- El vector unitario normal N a su vez se define como:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||}$$

  de donde se sigue, ya que la longitud de $\mathbf{T}$ es constantemente 1, que $\mathbf{N}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$. Como $\kappa = ||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||$, obtenemos la primera fórmula de Frenet-Serret.

- El vector unitario binormal $\mathbf{B}$ se define como el producto vectorial de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$



Los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ en dos puntos de una curva plana, una versión desplazada del segundo diedro (punteado) y el cambio en $\mathbf{T}$, $\delta\mathbf{T}$. Si s es la distancia entre los puntos, en el límite d T d s apuntará en la dirección N y su magnitud —la curvatura— describe la velocidad de rotación del diedro.

Las fórmulas de Frenet-Serret (o Teorema de Frenet-Serret) son:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa \boldsymbol{N}$$

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}$$

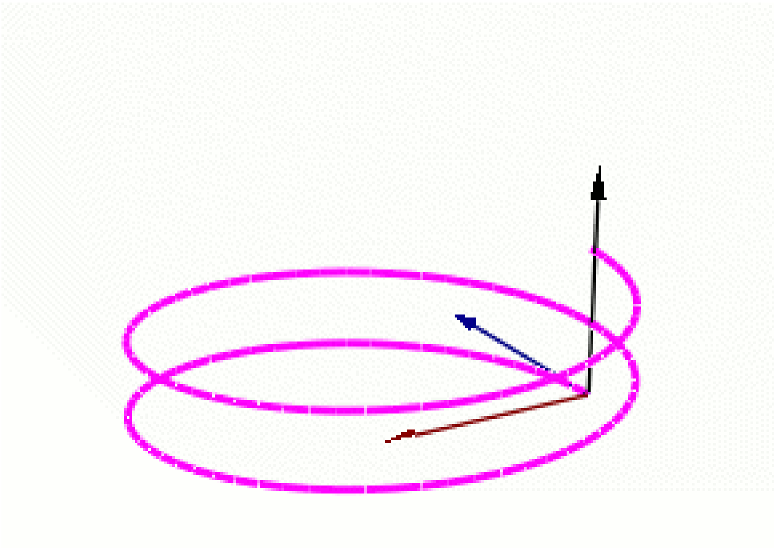
$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau \boldsymbol{N}$$

donde κ es la curvatura y τ es la torsión.

O, en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Esta matriz es antisimétrica



El triedro de Frenet-Serret moviéndose a lo largo de una hélice . La $\mathbf{T}$ está representada por la flecha azul, la $\mathbf{N}$ por la flecha roja, y la $\mathbf{B}$ por la flecha negra.

Formulas en n dimensiones

Las fórmulas de Frenet-Serret fueron generalizadas a espacios euclídeos de dimensión superior por Camille Jordan en 1874.

Supongamos que $r(s)$ es una curva suave en $\mathbb{R}^n$, y que las primeras n derivadas de $\mathbf{r}$ son linealmente independientes. Los vectores en el n-edro de Frenet-Serret son una base ortonormal construida aplicando el proceso de Gram-Schmidt a los vectores ($\mathbf{r}$'(s), $\mathbf{r}$''(s), ..., $\mathbf{r}^{(n)}$(s)).

El vector tangente unitario es el primer vector de Frenet $e_1(s)$, y se define como:

$$e_1(s) = \frac{\overline{e_1}(s)}{||\overline{e_1}(s)||}$$

donde

$$e_1(s) = \mathbf{r}'(s)$$

El vector normal, a veces llamado vector de curvatura, indica lo que dista la curva de ser una línea recta. Se define como:

$$\overline{e_2}(s) = \mathbf{r}^n(s) - (\mathbf{r}^n(s), e_1(s))e_1(s)$$

Su forma normalizada, el vector normal unitario, es el segundo vector de Frenet $e_2(s)$ y se define como:

$$e_2(s) = \frac{\overline{e_2}(s)}{||\overline{e_2}(s)||}$$

Los vectores tangente y normal en el punto s definen el plano osculador en el punto $r(s)$.

Los vectores restantes en el n-edro (el binormal, trinormal, etc.) se definen de manera similar:

$$e_j(s) = \frac{\overline{e_j}(s)}{||\overline{e_j}(s)||}$$

$$\overline{e_j}(s) = \mathbf{r}^{(j)}(s) - \sum_{i=1}^{j-1}(\mathbf{r}^{(j)}(s), e_i(s))e_i(s)$$

El último vector del sistema se define como el producto vectorial de los primeros $n-1$ vectores:

$$e_n(s) = e_1(s) \times e_2(s) \times ... \times e_{n-2}(s) \times e_{n-1}(s)$$

Las siguientes funciones reales $\chi_i(s)$ se denominan curvaturas generalizadas:

$$\chi_i(s) = \frac{\langle e_i'(s), e_{i+1}(s)\rangle}{||\mathbf{r}'(s)||}$$

Las fórmulas de Frenet-Serret, expresadas en lenguaje matricial, son:

$$\begin{bmatrix} e_1'(s) \\ \vdots \\ e_n'(s) \end{bmatrix} = ||\mathbf{r}'(s)|| \cdot \begin{bmatrix} 0 & \chi_1(s) & & 0 \\ -\chi_1(s) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & -\chi_{n-1}(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ \vdots \\ e_n(s) \end{bmatrix}$$

Nótese que la convención usada al definir las curvaturas y el sistema de Frenet en dimensión n no es universal. La curvatura superior χ_{n-1} (también llamada torsión, en este contexto) y el último vector en el marco e_n, difieren de la torsión habitual por el signo

Ejemplo: Hélice circular

Considera la curva:

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

donde a y b son constantes; Calcule los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, la curvatura κ y la torsión τ y verifique las ecuaciones con las formulas de Frenet-Serret

Derivadas de r

$$
\begin{aligned}
r'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b)\\
r''(t) &= (-a\cos t, -a\sin t, 0)\\
r'''(t) &= (a\sin t, -a\cos t, 0)\\
|r'(t)| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\\
|r'(t)| &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Vector tangente unitario $\mathbf{T}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \frac{r'(t)}{|r'(t)|}\\
\mathbf{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)
\end{aligned}
$$

su derivada con respecto a t

$$
\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t, -a\sin t, 0)
$$

su derivada con respecto a la longitud de arco s usamos $\frac{d}{ds} = \frac{1}{|r'|}\frac{d}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{1}{|r'|}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t, -a\sin t, 0)\\
\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0)
\end{aligned}
$$

Vector normal principal $\mathbf{N}$

La dirección de $\mathbf{N}$ de $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$. Observamos que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$
$$||\frac{d\mathbf{T}}{ds}|| = \sqrt{\frac{(-a\cos t)^2 + (-a\sin t)^2 + 0^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{(a^2+b^2)^2}}$$
$$||\frac{d\mathbf{T}}{ds}|| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$
$$\frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||} = \frac{\frac{(-a\cos t - a\sin t + 0)}{a^2+b^2}}{\frac{a}{a^2+b^2}} = \frac{(a^2+b^2)(-a\cos t - a\sin t + 0)}{(a^2+b^2)(a)}$$
$$\frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||} = \frac{a(-\cos t - \sin t + 0)}{a} = (-\cos t - \sin t + 0)$$

Entonces el vector unitario normal es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

(Nótese que $\mathbf{N}$ ya es unitario porque $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

Curvatura κ

Usamos la fórmula $\kappa = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$

Primero el producto vectorial:

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$r' \times r'' = i \begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -a\sin t & b \\ -a\cos t & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}$$

$$r' \times r'' = i(ab\sin t) - j(ab\cos t) + k(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)$$

$$r' \times r'' = i(ab\sin t) - j(ab\cos t) + k(a^2(\sin^2 t + \cos^2 t))$$

$$r' \times r'' = i(ab\sin t) - j(ab\cos t) + k(a^2)$$

Su magnitud:

$$|r' \times r''| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (-ab\cos t)^2 + (a^2)^2}$$

$$|r' \times r''| = \sqrt{(ab)^2(\sin t + \cos t)^2 + (a^2)^2} = \sqrt{(ab)^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^4}$$

$$|r' \times r''| = \sqrt{a^4 + (ab)^2} = \sqrt{a^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|r' \times r''| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

y tambien $|r'|$:

$$|r'| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}$$

$$|r'| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Entonces:

$$\kappa = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})(\sqrt{a^2+b^2})^2} = \frac{a}{(\sqrt{a^2+b^2})^2}$$
$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Vector binormal B

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Primero el producto vectorial:

$$|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = i \begin{vmatrix} \frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$
$$|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = i(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}) - j(\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}) + k(\frac{-a\sin^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a\cos^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}})$$
$$|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = i(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}) - j(\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}) + k(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(\sin^2 + \cos^2))$$
$$|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = i(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}) - j(\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}) + k(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Entonces el vector binormal:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \sin t, -b \cos t, a)$$

y verificaremos que sea unitario:

$$|\mathbf{B}(t)| = \sqrt{\frac{(b \sin t)^2 + (-b \cos t)^2 + a^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2}} = \sqrt{\frac{b^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$|\mathbf{B}(t)| = \sqrt{\frac{b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Torsión τ

Usamos la formula

$$\tau = \frac{(r' \times r'') \cdot r'''}{|r' \times r''|^2}$$

Ya tenemos $(r' \times r''')$, r''' y $|r' \times r''|$:

$$r' \times r''' = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$
$$r''' = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$
$$|r' \times r''| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

Calculamos el cuadrado de $|r' \times r''|$

$$|r' \times r''|^2 = (a\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2(a^2 + b^2)$$

Entonces

$$\tau = \frac{(ab\sin t - ab\cos t + a^2)(a\sin t - a\cos t + 0)}{a^2(a^2+b^2)}$$
$$\tau = \frac{ab\sin t \cdot a\sin t + (-ab\cos t)(-a\cos t) + a^2(0)}{a^2(a^2+b^2)}$$
$$\tau = \frac{a^2b\sin^2 t + a^2b\cos^2 t}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a^2b(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}$$
$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Verificaciones con las formulas de Frenet-Serret

Las formulas de Frenet-Serret son:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

para la primera formula ya hemos calculado $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

$$\frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0) = \frac{a}{a^2+b^2}(-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$\frac{(-a\cos t, -a\sin t, 0)}{a^2+b^2} = \frac{(-a\cos t, -a\sin t, 0)}{a^2+b^2}$$

para la segunda formula calcularemos $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{|r'|}\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(\sin t, -\cos t, 0)$$

calculo de $-\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}$

$$-\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B} = -\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,\ a\cos t,\ b) + \frac{b}{a^2+b^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t,\ -b\cos t,\ a)$$
$$-\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\big(a^2\sin t + b^2\sin t,\ -a^2\cos t - b^2\cos t,\ -ab+ab\big)$$
$$-\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(\sin t,\ -\cos t,\ 0).$$

Entonces:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(\sin t,\ -\cos t,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(\sin t,\ -\cos t,\ 0)$$

Para la tercera formula calcularemos $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{1}{|r'|}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1}{a^2+b^2}(b\cos t, b\sin t, 0)$$

calculo de $-\tau\mathbf{N}$

$$-\tau\mathbf{N} = -\frac{b}{a^2+b^2}(-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$-\tau\mathbf{N} = \frac{1}{a^2+b^2}(b\cos t, b\sin t, 0)$$

Entonces

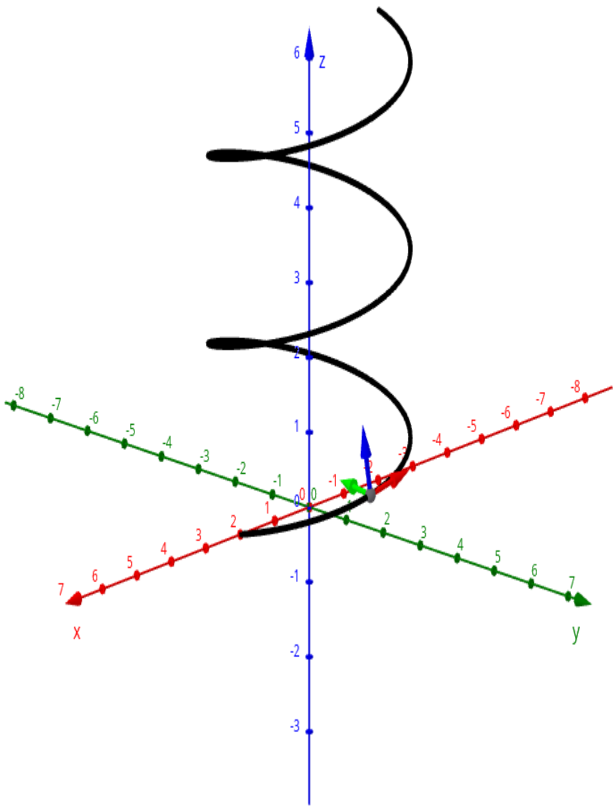
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$
$$\frac{1}{a^2+b^2}(b\cos t, b\sin t, 0) = \frac{1}{a^2+b^2}(b\cos t, b\sin t, 0)$$

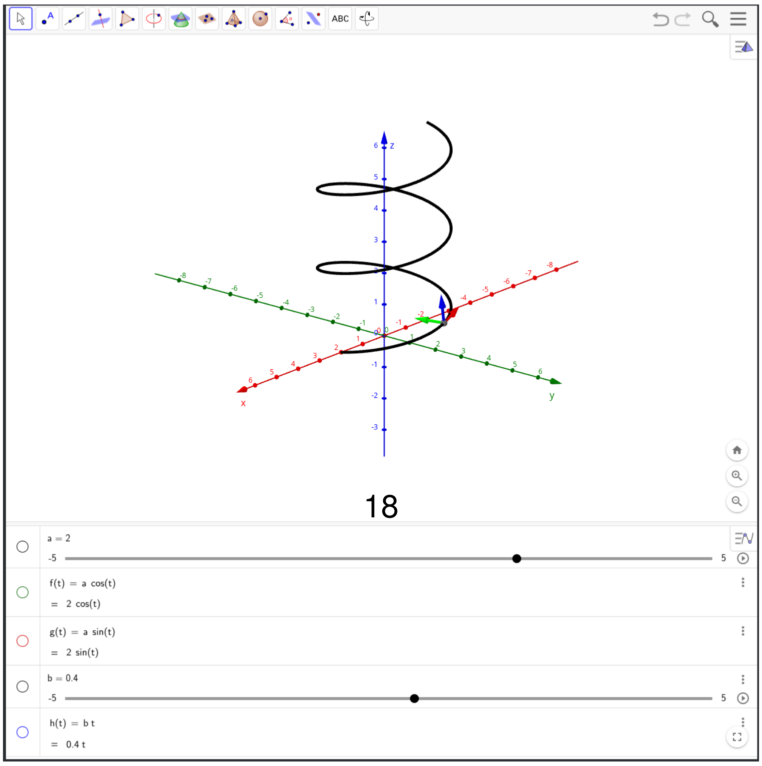
Conclusion

Para la hélice $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

- $|r'| = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$
- $\mathbf{N}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$
- $\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$
- $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$
- $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$

Con esto concluimos que las 3 formulas de Frenet-Serret se cumplen y obtenemos el Tiedro de Frenet:


z
x
y

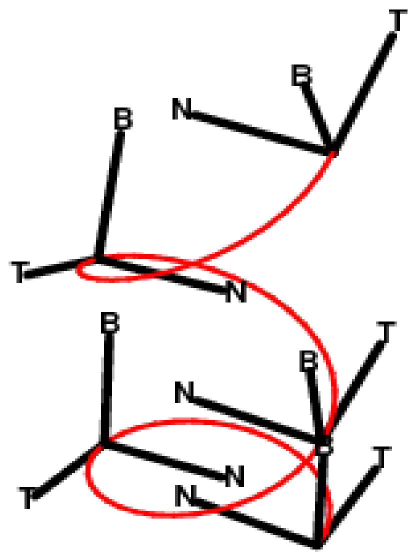

ABC
a = 2
-5
5
f(t) = a cos(t)
= 2 cos(t)
g(t) = a sin(t)
= 2 sin(t)
b = 0.4
-5
5
h(t) = b t
= 0.4 t

Aplicaciones e interpretación

Cinemática del triedro

El triedro de Frenet-Serret asocia a cada punto de la curva una base ortonormal del espacio, o sea, un sistema de referencia o sistema de coordenadas (ver imagen).

Las fórmulas de Frenet-Serret admiten una interpretación cinemática: imagínese a un observador que se mueve a lo largo de la curva en el tiempo, utilizando el triedro de Frenet en cada punto como su sistema de coordenadas. Las fórmulas de Frenet-Serret dictan que este sistema de coordenadas va girando a medida que el observador se mueve a lo largo de la curva. Por lo tanto, este sistema de coordenadas siempre es no inercial. El momento angular del sistema de coordenadas del observador es proporcional al vector de Darboux del triedro.



El triedro de Frenet-Serret moviéndose a lo largo de una hélice en el espacio

Más conretamente, supongamos que el observador lleva consigo un trompo (inercial) (o un giroscopio) a lo largo de la curva. Si el eje de la peonza apunta en la dirección del tangente, se observará que gira alrededor de su eje con una velocidad angular $-\tau$ relativa al sistema de coordenadas no inercial del observador. Si, por el contrario, el eje de la peonza apunta en la dirección del binormal, entonces se observa que gira con velocidad angular $-\kappa$. Esto se visualiza fácilmente en el caso de que la curvatura sea una constante positiva y la torsión desaparezca. El observador se encuentra entonces en movimiento circular uniforme . Si la peonza apunta en la dirección del binormal, entonces, por conservación del momento angular, debe girar en la dirección opuesta al movimiento circular. En el caso límite cuando la curvatura desaparece, la normal para el observador sufre una precesión sobre el vector tangente y, de manera similar, el trompo girará en la dirección opuesta a esta precesión.

Aplicaciones del Triedro de Frenet

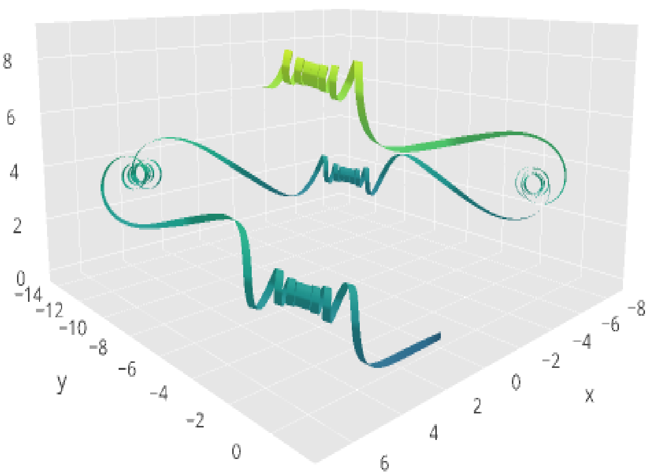
La cinemática del triedro tiene muchas aplicaciones en las ciencias.

- En las ciencias de la vida, particularmente en modelos de movimiento microbiano, se ha utilizado el triedro de Frenet-Serret para explicar el mecanismo a través del cual un organismo en movimiento en un medio viscoso cambia de dirección

- En física, el triedro de Frenet-Serret es útil cuando es imposible o inconveniente asignar un sistema de coordenadas naturales para una trayectoria. Tal es a menudo el caso, por ejemplo, en la teoría de la relatividad . En este contexto, los marcos de Frenet-Serret se han utilizado para modelar la precesión de un giroscopio en un pozo gravitatorio

Cintas y Tubos

El aparato de Frenet-Serret permite definir ciertas cintas y tubos óptimos centrados alrededor de una curva. Sus aplicaciones abarcan los ámbitos de la ciencia de los materiales y la teoría de la elasticidad, así como los gráficos por computadora.



Una cinta definida por una curva de torsión constante y una curvatura muy oscilante. La parametrización por la longitud de arco de la curva se definió mediante la integración de las ecuaciones de Frenet-Serret.

La cinta de Frenet a lo largo de una curva C es la superficie trazada al barrer el segmento de línea $[-N,N]$ generado por la unidad normal a lo largo de la curva. Esta superficie se confunde a veces con la superficie desarrollable tangente, que es la envolvente E de los planos osculadores de C, dado que tanto la cinta de Frenet como E exhiben propiedades similares a lo largo de C. Concretamente, los planos tangentes de ambas hojas de E, cerca de la singularidad C donde se cruzan estas láminas, se aproximan a los planos osculadores de C; los planos tangentes de la cinta de Frenet a lo largo de C son iguales a estos planos osculadores. La cinta de Frenet en general no es desarrollable.