1 Definicion de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares (números reales). (David C. Lay, 2007, p. 217)

Estas operaciones deben cumplir con un conjunto específico de propiedades o axiomas, como la asociatividad, conmutatividad, distributividad y existencia de un elemento neutro. La suma de dos vectores debe resultar en otro vector dentro del mismo espacio, y el producto de un escalar por un vector también debe dar como resultado un vector del espacio.

1.1 Notacion

Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ están en $\boldsymbol{V}$ y si a es un número real, entonces la suma se escribe como $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ y el producto escalar de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$ como $\boldsymbol{ax}$. (Stanley I. Grossman, 2007, p. 282)

Ejemplo: Sea $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ vectores pertenecientes a un espacio vectorial, y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ un escalar perteneciente a los numeros reales.

- Suma:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1, +\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{y}_n)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$\boldsymbol{ax} = (\boldsymbol{ax}_1, \boldsymbol{ax}_2, \cdots, \boldsymbol{ax}_3)$$

1.2 Axiomas de un espacio vectorial

1. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, entonces $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ **(cerradura bajo la suma)**.
2. Para todos $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ en $\boldsymbol{V}$, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ **(ley asociativa de la suma de vectores)**.
3. Existe un vector $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (el 0 se llama **vector cero** o **identico aditivo**).
4. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, existe un vector $-\boldsymbol{x}$ en $\in \boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = 0$ ($-\boldsymbol{x}$ se llama **inverso aditivo de x**).
5. Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ estan en $\boldsymbol{V}$, entonces $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ **(ley conmutativa de la suma de vectores)**.
6. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ es un escalar, entonces $\boldsymbol{\alpha x} \in \boldsymbol{V}$ **(cerradura bajo la multiplicación por un escalar)**
7. Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ estan en $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ es un escalar, entonces $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha x}+\boldsymbol{\alpha y}$ **(primera ley distributiva)**
8. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son escalares, entonces $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x}+\boldsymbol{\beta x}$ **(segunda ley distributiva)**.

9. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son escalares, entonces $\boldsymbol{\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x}$ **(ley asociativa de la multiplicación por escalares)**.

10. Para cada vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{1x = x}$

(Stanley I. Grossman, 2007, 282).

1.3 Ejemplo

El conjunto

$$\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones usuales:

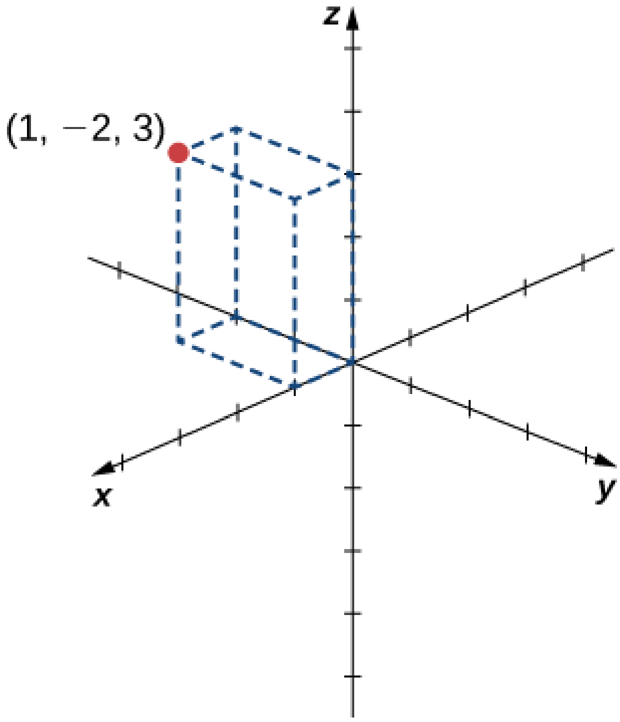
- Suma

$$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}) + (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2}) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2})$$

- Producto por escalar:

$$\boldsymbol{a(x, y, z) = (ax, ay, az)}$$

y cumple con los 10 axiomas de espacio vectorial, entonces $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ **es un espacio vectorial** Ejemplo grafico:



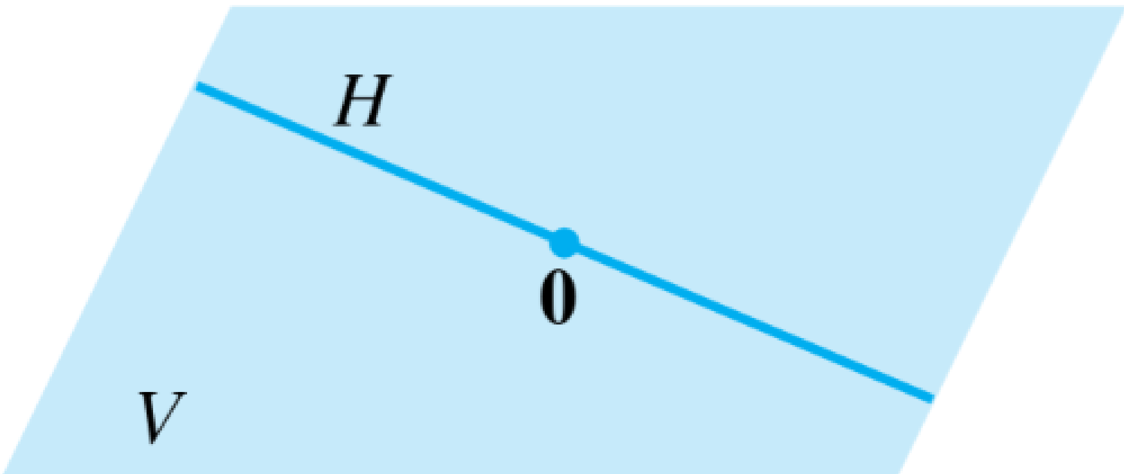
2 Definicion de Subespacio Vectorial

Un **subespacio** de un espacio vectorial V es un subconjunto H de V que tiene tres propiedades:

1. El vector cero de $\boldsymbol{V}$ está en $\boldsymbol{H}^{\mathbf{2}}$
2. $\boldsymbol{H}$ es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{H}$, la suma de $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ está en $\boldsymbol{H}$
3. $\boldsymbol{H}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{H}$ y cada escalar $\boldsymbol{a}$, el vector $\boldsymbol{au}$ está en $\boldsymbol{H}$

(David C. Lay, 2007, p. 220).

Así, todo subespacio es un espacio vectorial. De manera recíproca, todo espacio vectorial es un subespacio (de sí mismo o posiblemente de espacios mayores). El término subespacio es usado cuando se consideran por lo menos dos espacios, con uno dentro de otro, y la frase subespacio de $\boldsymbol{V}$ identifica a $\boldsymbol{V}$ como el espacio más grande. (David C. Lay, 2007, p. 220). Se puede decir que el subespacio $\boldsymbol{H}$ hereda las operaciones del espacio vectorial "padre" $\boldsymbol{V}$. (Stanley I. Grossman, 2007, p. 293)



Un subespacio de $\boldsymbol{V}$

2.1 Reglas de Cerradura

Un subconjunto no vacío $\boldsymbol{H}$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es un subespacio de $\boldsymbol{V}$ si se cumplen las dos reglas de cerradura:

1. Si $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}$, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}$.
2. Si $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$, entonces $\boldsymbol{au} \in \boldsymbol{H}$ para todo escalar $\boldsymbol{a}$

Es obvio que si $\boldsymbol{H}$ es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. (Stanley I. Grossman, 2007, p. 293)

2.2 Ejemplo

Considera el conjunto:

$$\boldsymbol{W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}}$$

Este conjunto contiene todos los vectores del eje $\boldsymbol{x}$, es decir:

$$\boldsymbol{W = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}}$$

y si es **un subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$

2.2.1 Verificacion

Tomemos dos vectores de $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{u = (3, 0), \quad v = (-2, 0)}$$

1. El vector cero pertenece al conjunto

$$\boldsymbol{(0, 0) \in W \quad porque \quad y = 0}$$

2. Cerradura bajo la suma

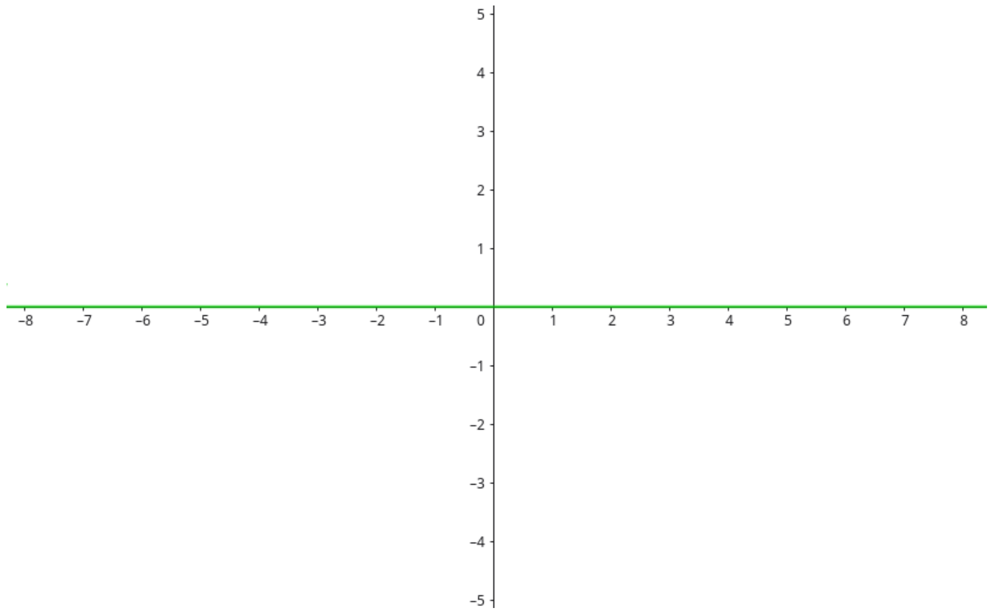
$$\boldsymbol{u + v = (3 + (-2), 0 + 0) = (1, 0)}$$

   Como su segunda componente es cero, está en $\boldsymbol{W}$

3. Cerradura bajo el producto por escalar: sea $\boldsymbol{a = 4}$

$$\boldsymbol{au = 3(3, 0) = (12, 0)}$$

   También cumple $\boldsymbol{y} = 0$, por lo tanto $\boldsymbol{au} \in \boldsymbol{W}$.



El subespacio $\boldsymbol{W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}}$

3 Referencias

- David C. Lay. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Mexico. Pearson Educación
- Stanley I. Grossman. (2007) .Álgebra Lineal. Mexico. The McGraw-Hill