

1 Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares (números reales). (David C. Lay, 2007, p. 217)

Estas operaciones deben cumplir con un conjunto específico de propiedades o axiomas, como la asociatividad, conmutatividad, distributividad y existencia de un elemento neutro. La suma de dos vectores debe resultar en otro vector dentro del mismo espacio, y el producto de un escalar por un vector también debe dar como resultado un vector del espacio.

1.1 Notación

Si x y y están en V y si a es un número real, entonces la suma se escribe como $x + y$ y el producto escalar de a y x como ax . (Stanley I. Grossman, 2007, p. 282)

Ejemplo: Sea $x, y \in V$ vectores pertenecientes a un espacio vectorial, y $a \in \mathbb{R}$ un escalar perteneciente a los números reales.

- Suma:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_3)$$

1.2 Axiomas de un espacio vectorial

1. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (**cerradura bajo la suma**).
2. Para todos x, y, z en V , $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**ley asociativa de la suma de vectores**).
3. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ (el 0 se llama **vector cero** o **identico aditivo**).
4. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$ ($-x$ se llama **inverso aditivo de x**).
5. Si x y y están en V , entonces $x + y = y + x$ (**ley conmutativa de la suma de vectores**).
6. Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$ (**cerradura bajo la multiplicación por un escalar**).
7. Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (**primera ley distributiva**).
8. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (**segunda ley distributiva**).

9. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (**ley asociativa de la multiplicación por escalares**).

10. Para cada vector $x \in V$, $1x = x$

(Stanley I. Grossman, 2007, 282).

1.3 Ejemplo

El conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones usuales:

- Suma

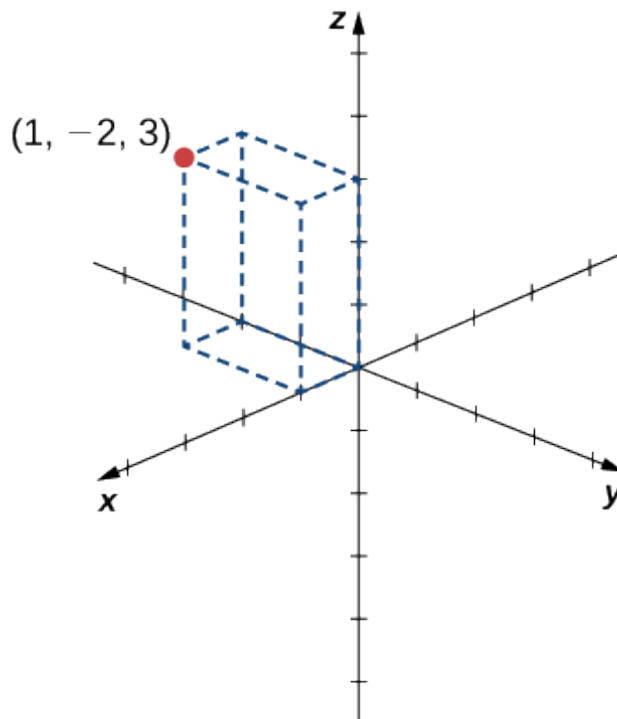
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

- Producto por escalar:

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

y cumple con los 10 axiomas de espacio vectorial, entonces \mathbb{R}^3 **es un espacio vectorial**

Ejemplo grafico:



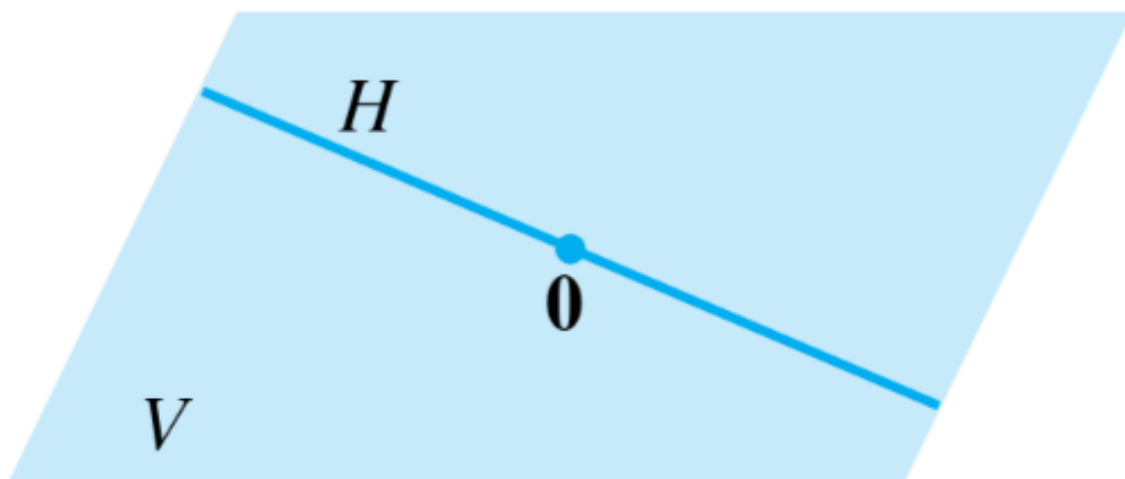
2 Definición de Subespacio Vectorial

Un **subespacio** de un espacio vectorial V es un subconjunto H de V que tiene tres propiedades:

1. El vector cero de V está en H
2. H es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada u y v en H , la suma de $u + v$ está en H
3. H es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada u en H y cada escalar a , el vector au está en H

(David C. Lay, 2007, p. 220).

Así, todo subespacio es un espacio vectorial. De manera recíproca, todo espacio vectorial es un subespacio (de sí mismo o posiblemente de espacios mayores). El término subespacio es usado cuando se consideran por lo menos dos espacios, con uno dentro de otro, y la frase subespacio de V identifica a V como el espacio más grande. (David C. Lay, 2007, p. 220). Se puede decir que el subespacio H hereda las operaciones del espacio vectorial “padre” V . (Stanley I. Grossman, 2007, p. 293)



Un subespacio de V

2.1 Reglas de Cerradura

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

1. Si $u \in H$ y $v \in H$, entonces $u + v \in H$.
2. Si $u \in H$, entonces $au \in H$ para todo escalar a

Es obvio que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. (Stanley I. Grossman, 2007, p. 293)

2.2 Ejemplo

Considera el conjunto:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$$

Este conjunto contiene todos los vectores del eje x , es decir:

$$W = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

y si es **un subespacio vectorial** de \mathbb{R}^2

2.2.1 Verificación

Tomemos dos vectores de W :

$$u = (3, 0), \quad v = (-2, 0)$$

1. El vector cero pertenece al conjunto

$$(0, 0) \in W \quad \text{porque} \quad y = 0$$

2. Cerradura bajo la suma

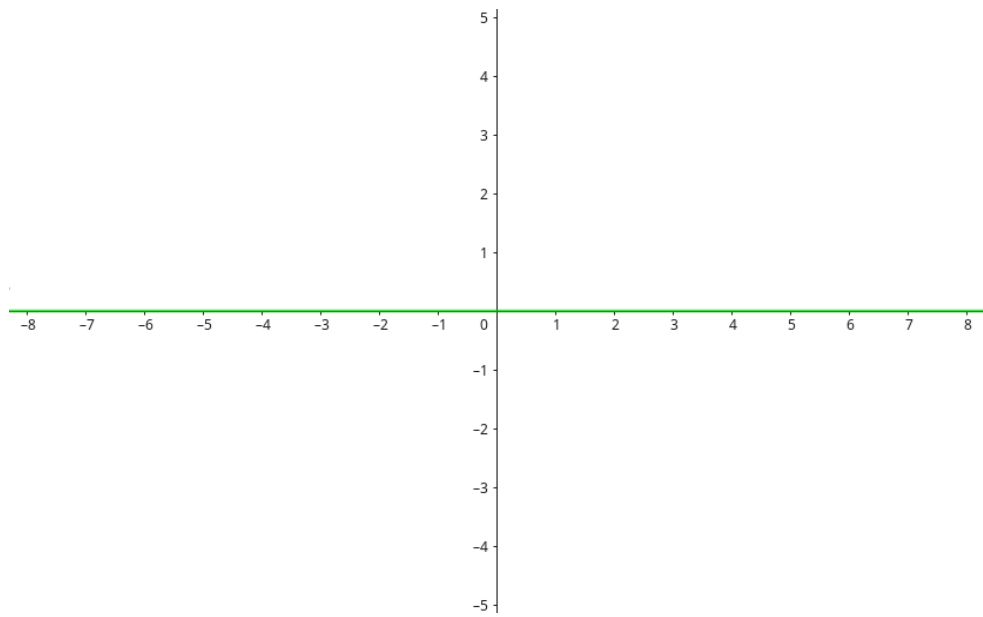
$$u + v = (3 + (-2), 0 + 0) = (1, 0)$$

Como su segunda componente es cero, está en W

3. Cerradura bajo el producto por escalar: sea $a = 4$

$$au = 4(3, 0) = (12, 0)$$

También cumple $y = 0$, por lo tanto $au \in W$.



El subespacio $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$

3 Referencias

- David C. Lay. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Mexico. Pearson Educación
- Stanley I. Grossman. (2007) .Álgebra Lineal. Mexico. The McGraw-Hill