# Лекция №15

## Задачи со многими процессами. Расщепление по процессам. Жёсткий метод прямых.

Большинство реальных задач содержат много процессов. Даже 1-процессные задачи при более внимательном рассмотрении содержат более 1 процесса. При этом 1 процесс – 1 закон сохранения.

- Перенос – закон сохранения числа частиц в объёме (1 закон, 1 процесс)
- Теплопроводность: тепловой поток через $\nabla$ темп., закон сохранения энергии
- Колебания (акустика): перенос амплитуды, перенос скорости измен. амплитуды
- Газодинамика: сохр. массы, сохр. импульса, сохр. энергии, описание движения частиц
- Магнитогидродинамика: газодинамика, уравн. измен. электрич. и магнитн. полей

Стараемся привести к системе уравн. I порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A(u, v, w \ldots) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = B(u, v, w \ldots) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = C(u, v, w \ldots) \\ \vdots \end{cases}$$

Возможно получится дифф-алгебраическая система.

Краевые условия включены в A, B, C...

A, B, C... имеют 1/2 порядок по пространству

## Как решать?

1. Вводим сетку по x (1-D)
2. Заменяем опер. дифф. в правой части на их разностные аналоги (строим балансн. разностн. схемы, или хотя бы консервативн.)
3. Жёсткий метод прямых (ЖМП); расщепление по процессам

Расщепление по процессам

Система имеет 1 порядок по времени $\Rightarrow$ двухслойная схема.

Решаем I уравнение:

1) $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots) \Rightarrow$ получаем какое-то $\tilde{\vec{u}}$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

не знаем! $\Rightarrow$ берём из предыд. расчета и не трогаем "замораживаем" (например берём с прошлого ~~все~~ слоя)

2) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots) \Rightarrow \tilde{\vec{v}}$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

не знаем

$\dfrac{\tilde{\vec{u}} + \vec{u}}{2}$ (для II порядка)

3) $\dfrac{d\vec{w}}{dt} = C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots)$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

$\dfrac{\tilde{\vec{u}} + \vec{u}}{2}$ $\dfrac{\tilde{\vec{v}} + \vec{v}}{2}$

Отдельные схемы лучше брать безусловно устойчивыми.

Расчет по кругу
(для $O(\tau^2)$)

Выполняем шаги 1), 2), 3)

Опять выполняем эти шаги, используя значения, полученные на 1 круге.

За 2 круга получаем $O(\tau^2)$

Из безусловной устойчивости схем $\not\Rightarrow$ безусловная устойчивость всего процесса.

Для безусл. устойчивости обычно надо делать не 2 круга, а много кругов до сходимости итераций.

Где применяется?

~~1-D задачи~~ $\Downarrow$ лучше SMOC

Многомерн. задачи до сих пор

$\boxed{\text{SMOL}}$

Решаем полученную систему ОДУ методами для жёстких задач (например CROS).

$$\left(E - \frac{1+i}{2}\tau F_{\vec{z}}\right)\vec{y} = \vec{F}(\vec{z})$$

$$\hat{\vec{z}} = \vec{z} + \tau \operatorname{Re}\vec{y}$$

где $\vec{z} = \{u_0, v_0, w_0 \dots; u_1, v_1, w_1 \dots; \dots u_N, v_N, w_N\}$

всё сюда!

Матрица $F_z$ — ленточная $\Rightarrow$ нет проблем со временем счёта.

Главное — мало итераций!!!, хотя работает только для 1-D задач.

$F_z$ лучше брать точно, но можно и с помощью разностной аппроксимации.