2. Численное решение

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \Lambda[\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\check{u}]$$

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \sigma\Lambda[\hat{u} - 2u + \check{u}] + \Lambda u$$

$$\hat{u} - 2u + \check{u} = \sigma\underbrace{\tau^2\Lambda}_{\Lambda^*}(\hat{u} - 2u + \check{u}) + \tau^2\Lambda u$$

$$(E - \sigma\Lambda^*)(\underbrace{\hat{u} - 2u + \check{u}}_{\Delta_2 u}) = \Lambda^* u$$

$$\Delta_2 u = \hat{u} - 2u + \check{u}$$

$$\hat{u} = \Delta_2 u + 2u - \check{u}$$

Итого: это уже есть

$$(E - \sigma\Lambda^*)\Delta_2 u = \Lambda^* u$$

??!

$$\hat{u} = \Delta_2 u + 2u - \check{u} \leftarrow$$ {подставновил граничных условий}

$\Lambda^* = \tau^2\Lambda$ — уже есть

Остэн.

$\check{u}$ — им

u — u

$\hat{u}$ — ?

надо обеспечить обновление $u, \hat{u}, \check{u}$

Лекция № 14

Интегральные уравнения.
Корректно поставленные задачи.
Понятие о некорректных задачах.

Дополнение по прошлой лекции:

Для 3-D задачи:

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_z)w = (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)u + f$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_y)v = w$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2} = v$$

$$v_{гр} = (E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\left(\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\right)\Big|_{гр}$$

Оператор можно отбросить без потери 2-го порядка

$$v_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Big|_{гр}$$

Аналогично

$$w|_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Big|_{гр}$$

Ситуация существенно проще, чем в случае с уравнением теплопроводн.

В интегральных уравнениях искомая функция стоит под знаком $\int$

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi))\,d\xi = F(x, u(x))$$

$$a \le x \le b$$

Здесь $K(x, \xi, u)$ – ядро уравнения

Запись в форме инт. уравнений более естественна. Задача в терминах инт. уравнения формул. в форме закона сохранения.

Интегр. уравнения удобнее диф. уравнений, т.к. не требуют гранични. условий.
Пример – задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Заменяется уравнением

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, u(\xi))\, d\xi$$

Начальных доп. условий не нужно!

Задачи естественно обобщаются на многомерный случай:

$$\int_G K(\bar{x}, \bar{\xi}, u(\bar{\xi}))\, d\bar{\xi} = F(\bar{x}, u(\bar{x}))$$

$\bar{x} = \{x_1, \ldots x_n\} \in G(\bar{x})$.

$\boxed{\text{Линейные интегральные уравнения}}$

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x),$$
$$a \le x \le b$$

Это уравнение Фредгольма II-ого рода.

Ядро $K(x, \xi)$ определено в квадрате $[a; b] \times [a; b]$

Возможна следующая модификац. этого уравнения:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x),$$
$$a \le x \le b$$

Это уравнение Вольтерра II рода.
Если убрать $u(x)$, то получается уравнения I рода. Такие задачи некорректно поставлены.

Для II-ого рода задача корректна.

Для однородного уравнения ставится задача на собств. значения

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a; b]$$

Имеем пары: $(u_s(x), \lambda_s)$
с.ф. с.з.

Для веществ. симметричного ядра $K^*(x, \xi) = K(x, \xi) = K(\xi, x)$ есть хотя бы одно собств. значение

У такого ~~[illegible]~~ ядра собств. функции ортогональны друг другу, а собств. знач. вещественны

Если $\lambda \neq \lambda_s$, то неоднородное уравн. имеет единственное решение

Если $K(x,\xi) \in C_p$ и $f(x) \in C_p \Rightarrow$

$u(x) \in C_p$ (непр. вместе с p-тыми производными)

Для симметричного ядра решение выглядит так:

$$u(x) = f(x) + \sum_s \frac{\lambda}{\lambda_s - \lambda} u_s(x) \int_a^b f(\xi) u_s(\xi) d\xi$$

Если $\lambda \neq \lambda_s$, то решение $\exists!$

Если $\lambda = \lambda_s$, то решение или $\nexists$, или неединственно

Уравнение Вольтерра не имеет собственных значений: из $f(x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$. Поэтому неоднородное уравнение всегда имеет единств. решение

$\boxed{\text{Сеточный метод}}$

Как решать? – заменяем $\int$ суммой

$$\int_a^b \phi(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^N c_n \phi(x_n)$$

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi)) d\xi = F(x, u(x)), \quad a \le x \le b$$

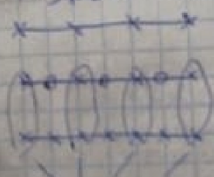
$u_n = u(x_n)$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m=1}^N c_m K(x_n, \xi_m, u(\xi_m)) = F(x_n, u(x_n)), \quad 1 \le n \le N$$

Нелинейная система → решаем Ньютоном.

Нужен многосеточный метод



1-ое приближ.

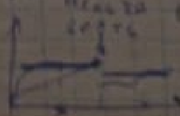
интерполируем на более подр. сетку

2-ое приближ.

оценка погрешн. по Ричардсону (можно использовать уточнение)

Бывают ядра с разрывом на диагонали

Применяем формулу средних (если строгого разрыва)



нельзя брать

Если слабого – можно и трапеции использовать

Часто удобнее использовать квадратуры Гаусса с $N \sim 5$–10.

Их точность $O(N^{-2N})$

Метод не работает, если есть особенности на диагонали.
Можно использовать аналог многосеточного метода.

Что будет для линейных задач?

— система линейных уравнений

1. Задача на с.з. для уравнения Фредгольма II рода

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} u_m = \frac{1}{\lambda} u_n, \quad 1 \le n \le N$$

$$K_{nm} = K(x_n, x_m)$$

Имеем задачу на с.з. матрицы

$$K^{*}_{nm} = c_m K_{nm}$$

Только несколько первых с.з. близки к с.з. исходной задачи.

K^{*}_{nm} может быть несимметрична.
А не получится комплексных с.з.???

~~Вводим $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{c_n}}$, $u_n = \sqrt{c_n}\, v_n$~~

$$\cancel{\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} \sqrt{c_m}\, v_m = \frac{1}{\lambda} \sqrt{c_n}\, v_n}$$

$$u_n = \frac{v_n}{\sqrt{c_n}}$$

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} \frac{v_m}{\sqrt{c_m}} = \frac{1}{\lambda} \frac{v_n}{\sqrt{c_n}}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \underbrace{\sqrt{c_m c_n}\, K_{nm}}_{\text{вещ. симм.}} v_m = \frac{1}{\lambda} v_n$$

вещ. симм. матр. $\Rightarrow$ v_m веществ. и с.з. тоже вещ.

$\Rightarrow u_n$ веществ.

2. Неоднородный Фредгольм.

$$u_n - \sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} u_m = f_n, \quad 1 \le n \le N$$

$$f_n = f(x_n)$$

Решается и в пол. Погрешность контролируем по Ричардсону. Хорошо решается, если λ далеко от с.з. матрицы. Если близко — плохообусл. задача.

3. Уравнение Вольтерра

Для этого уравнения матрица треугольная $\Rightarrow$ легко решается обратным ходом метода Гаусса за $3N^2/2$ действий.

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \end{pmatrix}$$

Проблем с обусловленностью не возникает.

$\boxed{\text{Повышение гладкости}}$

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, u(\xi)\, d\xi = f(x)$$

~~хорошая~~ и кусочно-гладкие

Тогда и $u(x)$ очевидно и кусочно-гладкая

Берем $v(x) = u(x) - f(x)$

$$v(x) + \cancel{f(x)} - \lambda \int_a^b K(x,\xi) v(\xi) d\xi -$$

$$- \underbrace{\lambda \int_a^b K(x,\xi) f(\xi) d\xi}_{\Phi(x)} = \cancel{f(x)}$$

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi) v(\xi) d\xi = \Phi(x)$$

В этой задаче $\Phi(x)$ гладкое, она решается проще.

Многомерные задачи

Решаются только простейшие. Лучше использовать произведение одномерных. Формула Гаусса [illegible] в этом случае не работает.

Некорректные задачи

Рассмотрим Фредгольма I рода:

$$\int_a^b K(x,\xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \le x \le d$$

Или Вольтерра I рода

$$\int_a^x K(x,\xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \le x \le d$$

Обращаем внимание, что задача определена в прямоугольнике!!

Корректность
1) $\exists$
2) !
3) непрерывн. решения от правой части

Берем возмущение решения

$\delta u(\xi) = \omega e^{i\omega^2 \xi}$, $\omega \gg 1$ — большое возмущение. Загоняем в уравнение.

$$\delta f(x) = \int_a^b K(x,\xi) \delta u(\xi) d\xi = \omega \int_a^b K(x,\xi) e^{i\omega^2 \xi} d\xi = \frac{1}{i\omega} \int_a^b K(x,\xi)\, d e^{i\omega^2 \xi} =$$

$$= \frac{1}{i\omega} K(x,\xi) e^{i\omega^2 \xi} \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial \xi} e^{i\omega^2 \xi} d\xi$$

$$= O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Значит для сколь угодно малых возмущений δf имеем сколь угодно большие возмущения δu. => неуст.

Частный случай — дифференцирование

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = f(x)$$

Просто так такие задачи не решить. Для решения сужают класс функций, в котором ищется решение. В этом классе задача становится корректной и может быть решена.
В этом суть метода регуляризации.