Лекция №15

Задачи с многими процессами. Расщепление по процессам. Жёсткий метод прямых.

Большинство реальных задач содержат много процессов. Даже 1-процессные задачи при более внимательном рассмотрении часто содержат более 1 процесса. При этом 1 процесс — 1 закон сохранения.

- Перенос — закон сохранения числа частиц в объёме (1 закон, 1 процесс)
- Теплопроводность ⟨ тепловой поток через ∇ темп. / → закон сохранения энергии
- Колебания (акустика) ⟨ перенос амплитуды / → перенос скорости измен. амплитуды
- Газодинамика → сохр. массы / → сохр. импульса / → сохр. энергии / → описание движения величин
- Магнитодинамика ⟨ газодинамика / → уравн. измен. электрич. и магнитн. полей

Стараемся привести к системе уравн. I порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A(u, v, w \ldots) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = B(u, v, w \ldots) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = C(u, v, w \ldots) \\ \vdots \end{cases}$$

Возможно получится дифф.-алгебраическая система.

Краевые условия включены в $A, B, C \ldots$

$A, B, C \ldots$ имеют 1/2 порядок по пространству.

Как решать?

1. Вводим сетку по x (1-D)
2. Заменяем опер. дифф. в правой части на их разностные аналоги (строим консерв. разностн. схемы, или хотя бы консервативн.)
3. → жёсткий метод прямых (SMOL) / → расщепление по процессам

(2)

Расщепление по процессам

Система имеет 1 порядок по времени $\Rightarrow$ двухслойная схема.

Решаем I уравнение:

1) $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots)$ $\Rightarrow$ получаем какое-то $\vec{\tilde{u}}$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

не знаем! $\Rightarrow$ берём из превыд. расчёта и не трогаем

"замораживаем"

~~(обо~~ например берём с текущего слоя)

2) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots) \Rightarrow \vec{\tilde{v}}$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

не знаем

$\dfrac{\vec{u}+\vec{\tilde{u}}}{2}$ (для II порядка)

3) $\dfrac{d\vec{w}}{dt} = C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots)$ $\boxed{\text{Точность } O(\tau)}$

$\dfrac{\vec{u}+\vec{\tilde{u}}}{2}$ $\qquad \dfrac{\vec{v}+\vec{\tilde{v}}}{2}$

Отдельные схемы лучше брать безусловно устойчивыми.

Расчёт по кругу (для $O(\tau^2)$)

Выполняем шаги 1), 2), 3)

Опять выполняем эти шаги, используя значения, получаемые на 1 круге.

За 2 круга получаем $O(\tau^2)$

Из безусловной устойчивости схем $\not\Rightarrow$ безусловная устойчивость всего процесса.

Для безусл. устойчивости обычно мало делать не 2 круга, а много кругов до сходимости итераций.

Где применяется?

~~1-р задачи~~ $\Downarrow$ лучше SMAC

многомерн. задачи до сих пор

3

SMOL

Решаем полученную систему ОДУ методами для жёстких задач. (например CROS).

$$\left(E - \frac{1+i}{2}\tau F_z\right)\vec{y} = \vec{F}(\vec{z})$$

$$\hat{\vec{z}} = \vec{z} + \tau \operatorname{Re} \vec{y}$$

$\vec{z} = \{u_0, v_0, w_0 \ldots; u_1, v_1, w_1 \ldots; \ldots u_N, v_N, w_N\}$

все сюда!

Матрица F_z – ленточная $\Rightarrow$ нет проблем со временем счёта.

Главное – мало итераций!!!, хотя работает только для 1-D задач.

F_z лучше брать точно, но можно и смот. и разностн. аппроксимацию.