сопр. невязки. Работает даже получше, чем метод Крейга.

Оценки сходимости

Сопр. невязки и градиенты:

$$S = \underline{O}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\right) \approx ~~\underline{O}(N)~~$$

~~[illegible] направления~~

Крейг:

$$S = \underline{O}\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)$$

Расчет останавливаем при выходе нормы невязки на уровень ошибки округления.

Семинар № 11

2-р теплопроводность

Решаем 2-р задачу в прямоугольнике с условиями Дирихле на границе.

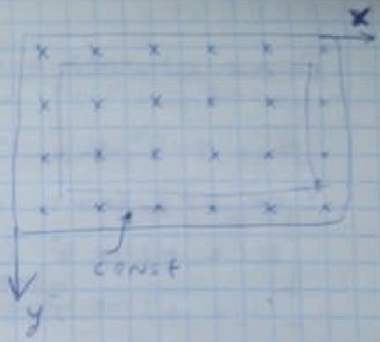
$$\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_x\right)}_{P_x}\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_y\right)}_{P_y}\Delta u = \Lambda_x u + \Lambda_y u$$

$$\hat{u} = u + \tau\Delta u$$

В матричной форме

$$\Lambda_x(u) = u \times L_x$$

$$\Lambda_y(u) = L_y \times u$$



$$P_x P_y \Delta u = \Lambda u$$

$$P_y \Delta u = P_x^{-1}(\Lambda u)$$

оператор!

$$\Delta u = P_y^{-1}(P_x^{-1}(\Lambda u))$$

Надо записать с использованием левого и правого матр. деления с помощью „/" и „\"

Лекция № 12

Гиперболические уравнения

Г. У.

- колебания струны
- движение сжимаемого газа
- распростр. возмущений электромагн. полей

Типичная задача - малые колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$x \in [0; a]$$

$$t \in [0; T]$$

Задача

1) Реализовать Λx используя функцию spdiags (help spdiags)

2) Поставить условия Дирихле, модифицировав Λx

3) — " — Неймана, модифицировав Λx.

Дирихле: первая и посл. строка — изменен

Неймана: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \emptyset \\ & & \ddots & & \\ & \emptyset & & \ddots & \\ & & & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Лекция № 11

Эллиптические уравнения

Электростатика

Стац. распределение тепла

Давление газа в неоднор. силовом поле

Прогиб мембраны

Предполагается стационарность задачи

Постановка задачи

$$\Delta u(\vec{r}) = -f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G$$

$$u(\vec{r}) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Начальных условий нет.

В неоднородной среде:

$$\operatorname{div}(k(\vec{r})\vec{\nabla} u(\vec{r})) = -f(\vec{r}),$$

$$k(\vec{r}) > 0, \quad \vec{r} \in G$$

$$u(\vec{r}) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Рассмотрим так называемую эволюционную задачу

$$\frac{\partial U(\vec{r},t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k\vec{\nabla} u) + f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G, \quad t \geq 0$$

$$U(\vec{r},t) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma, \quad U(\vec{r},0) = U_0(\vec{r})$$

Найдем разность между эволюц. и стационарной задачами:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\left[U(\vec{r},t) - u(\vec{r})\right] = \operatorname{div}(k\vec{\nabla}(U(\vec{r},t) - u(\vec{r},t))), \quad \vec{r} \in G}$$

$$\cancel{U(\vec{r},t) - u(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U(\vec{r},t) - u(\vec{r})\right) = \operatorname{div}(k\vec{\nabla}(U - u))$$

$$U(\vec{r},t) - u(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Это последнее уравнение имеет произвольное начальное условие и нулевое граничное. Значит

в силу диссипативности при $t \to \infty$ решение этого уравнения будет 0, а значит эволюц. задача даст решение стационарной.

Процесс стремления решения нестац. задачи к решению стац. называется установлением, а сам метод – счетом на установление.

Начальные данные формально произвольные, но лучше брать удовлетвор. граничному условию.

Разностная схема

Решаем в параллелепипеде

$G = [0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c]$

$k(\vec{r})$ – скаляр.

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(x, y, z)$$

|| Пространственных производных смешанного типа нет! || !!!

Возьмем в G произвольную неравномерную сетку:

$$\omega = \{x_n, 0 \le n \le N; y_m, 0 \le m \le M; z_k, 0 \le k \le K\}$$

Пусть $h_{xn} = x_n - x_{n-1}$

$h_{ym} = y_m - y_{m-1}$

$h_{zk} = z_k - z_{k-1}$

$$(\Lambda_x u)_{nmk} = \frac{2}{h_{xn} + h_{x,n+1}} \left(k(x_{n+\frac{1}{2}}, y_m, z_k) \cdot \frac{u_{n+1,mk} - u_{nmk}}{h_{x,n+1}} - k(x_{n-\frac{1}{2}}, y_m, z_k) \cdot \frac{u_{nmk} - u_{n-1,mk}}{h_{xn}} \right)$$

Аналогично по y и z.

Решаем эволюц.-факт. схемой

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau} = (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)u + f$$

Граничные условия:

1. По u: $(\hat{u} - u)_\Gamma = 0$
2. $\left[\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_\Gamma = v_\Gamma$. Очевидно $v_\Gamma = 0$
3. $\left[\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_\Gamma = w_\Gamma$

Также $w_{i\tau} = 0$

Вопрос: как часто считать и какой нужен шаг по времени?

Возьмем не один шаг, а целый набор шагов τ_s, $1 \le s \le S$

Рассмотрим затухание k-той гармоники за все S шагов

$$R_k = \prod_{s=1}^{S} \rho_k(\tau_s) = \prod_{s=1}^{S} \frac{1+\tau_s\lambda_k/2}{1-\tau_s\lambda_k/2}, \quad 1 \le k \le N-1, \quad \lambda_k < 0$$

Рассмотрим числитель в произв.:

$1 + \tau_s \lambda_k / 2 = 0$

$\tau_s = -\frac{2}{\lambda_k}$ будем делать так: $\tau_1 = -\frac{2}{\lambda_1}$, $\tau_2 = -\frac{2}{\lambda_2}$, ... $\tau_{N-1} = -\frac{2}{\lambda_{N-1}}$

Проблема в том, что у нас нет всех этих λ_k.

Сделаем иначе: если известны границы спектра λ_1 и λ_{N-1}, то возьмем

$\tau_1 \approx -\frac{2}{\lambda_1}$ $\tau_S \approx -\frac{2}{\lambda_{N-1}}$ $\boxed{\lambda \text{ - отриц.!}}$

Остальные τ расположим между ними

Как?

Если брать фикс. шаг τ для всех, то оказывается, что наибольшее убывание будет при

$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_S}$ или

$$\ln\tau = \frac{1}{2}\ln\tau_1 + \frac{1}{2}\ln\tau_S = \frac{\ln\tau_1 + \ln\tau_S}{2}$$

По аналогии поступим для набора шагов, т.е. расположим τ_i между τ_1 и τ_S равномерно в логарифм. масштабе

$$\ln\tau_i = \ln\tau_1 + \frac{i-1}{S-1}\ln\frac{\tau_S}{\tau_1}$$

$\tau_1 \approx \frac{2}{\lambda_{min}}$ $\tau_S = \frac{2}{\lambda_{max}}$

Это логарифмический набор шагов

Везде фигурируют неизвестные нам границы спектра.

Где их брать?

$\boxed{1-D}$ (интересен скорее методически)

$\lambda_{min} \approx \left(\frac{\pi}{l_x}\right)^2 k_x$

$\lambda_{max} \approx \frac{4k_x}{h_x^2}$

Оценка точности

$$S = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Замечание: важно сделать все S шагов

$\varepsilon \sim 10^{-10}$; $N \sim 100-1000 \Rightarrow S \sim 50-75$

$\boxed{2-D}$

$$R_{kl} = \prod_{s=1}^{S} \frac{1+\tau_s\lambda_{xk}/2}{1-\tau_s\lambda_{xk}/2} \cdot \frac{1+\tau_s\lambda_{yl}/2}{1-\tau_s\lambda_{yl}/2}$$

Это можно рассматривать как перемножение τ_s однотипных множ. и действовать по старой схеме

Выбираем самый малый возможный τ и самый больший:

$$\lambda_{min} = \min(|\lambda_{x1}|, |\lambda_{y1}|)$$

$$\lambda_{max} = \max(|\lambda_{x N_x-1}|, |\lambda_{y N_y-1}|)$$

Интересно, что в 2-D случае при слитных границах спектра по 2 направлениям сходимость наступает за существенно меньшее число итераций.
Дело в том, что один ~~…~~ τ_s давит сразу 2 гармоники по разным направлениям.

Если, например, $u_x = u_y = const$ и $N_x = N_y$, то при $N \sim 100-1000$,
$\varepsilon = 10^{-10}$ $S \sim 25-30$.

$\boxed{3\text{-}D}$
Анализировать сложнее, но подход тот же:

$$\lambda_{min} = \min(|\lambda_{x1}|, |\lambda_{y1}|, |\lambda_{z1}|)$$

$$\lambda_{max} = \max(|\lambda_{x N_x-1}|, |\lambda_{y N_y-1}|, |\lambda_{z N_z-1}|)$$

Что нужно для расчета с чебышёвским набором шагов?

1. Нужны границы спектра по направлениям.

Оценим сверху по формулам:

$$\lambda_{min} \simeq \left(\frac{\pi}{a_x}\right)^2 k_x$$

$$\lambda_{max} \simeq \frac{4k_x}{h_x^2}$$

Лучше λ_{min} брать поменьше, а λ_{max} — побольше. (раза в 3)

Во вне!

Такая перестраховка приводит к росту S, но оно невелико

Типично $\ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \simeq 9-14$

После расширения $\ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \approx 11-16$

т. е. рост примерно на 20%.

2. Оцениваем S по формуле

$S = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ — max и min по всем 3 направлениям! (по модулю)

Итерационные методы

Для сложных задач (крив. области, смешан. произв., нестационар задачи, высокий порядок) рассмотр выше метод не работает.

В общем виде схемы к таким задачам имеют вид

$A\vec{u} = \vec{b}$, $A = \{a_{nm}\}$, $\vec{b} = \{b_n\}$

$M \sim N^{\nu}$, ν - размерн. простр.

$A \sim M \times M$.

A - сильно разрежена.

$\boxed{A\vec{u} \text{ - дешевая операция!!!}}$

Эффективные методы

Сопр. градиенты | Сопр. невязки | Метод Крайга

Идея.

Берем квадратичную форму

$\Phi(\vec{u}) = \sum\limits_{ij} u_i u_j a_{ij}$ $\quad i, j \in 1..M$

В общем случае она описывает поверх. функции общего вида $F(\vec{u})$ вблизи экстремума ($\nabla F = 0$ в этой точке)

Берем $\vec{u}_1 \in R_M$ - произв. нач. прибл.

~~[illegible]~~

Проведем прямую через $\vec{u}_1$ и вдоль нее ищем минимум.

Получаем $\vec{u}_2$.

Строим прямую $\perp$ первой ($\vec{s}_1$)

$\vec{s}_2 \perp \vec{s}_1$

В плоскости $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ внутри ищем min

Получаем $\vec{u}_3$. Проводим $\vec{s}_3 \perp \vec{s}_1$ и $\vec{s}_3 \perp \vec{s}_2$, опять ищем min. И т.д.

За M шагов строится полный базис и $M+1$ шаг дает точное решение. Это исчерпывание.

Но в многомерке M очень велико поэтому ставят обычное ε-условие на погрешность

Сопряженные градиенты

Берем A из $A\vec{u} = \vec{b}$. Строится некоторая кв. форма, имеющая min при $A\vec{u} = \vec{b}$. Впрочем явно $F(\vec{u})$ мы не строим.

Метод без вывода:

$$\vec r_s = \begin{cases} A\vec u_s - \vec b & s=1 \\ \vec r_{s-1} - \vec q_{s-1} / (\vec q_{s-1}, \vec r_{s-1}) & s=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec p_s = \vec p_{s-1} + \frac{\vec r_s}{(\vec r_s, \vec r_s)}$$

$\vec r_s$ - невязки
$\vec p_s$ - напр спуска

$$\vec q_s = A\vec p_s$$

$$\vec u_{s+1} = \vec u_s - \frac{\vec p_s}{(\vec q_s, \vec p_s)}$$

Берём $\vec r_0 = \vec 0$ и произвольно $\vec u_1$

При $s=1$ - 2 умнож. на A
$s \geq 2$ - 1 умнож на A.

Крутим до тех пор, пока $\|\vec r_s\|_{L_2} < \varepsilon$ - условие на невязку!

$\|\vec u_s - \vec u_{точн}\|_{L_2} \leq \varepsilon \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ - оценка

Работает, когда $A = A^H > 0$ или
$A = A^H < 0$

A - знакоопределенная!!! и эрмитова

Сопряженные невязки

~~xxx~~ $A = A^H$ не может быть знаконеопределенная.

$\vec r_0 = \vec 0$
$\vec u_1$ - произвольно

$$\vec r_s = \begin{cases} A\vec u_s - \vec b & s=1 \\ \vec r_{s-1} - \dfrac{\vec q_{s-1}}{(\vec q_{s-1}, \vec q_{s-1})} & s=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec g_s = A\vec r_s$$

$$\vec p_s = \vec p_{s-1} + \frac{\vec r_s}{(\vec r_s, \vec g_s)}$$

$$\vec q_s = \begin{cases} A\vec p_s, & s=1 \\ \vec q_{s-1} + \dfrac{\vec g_s}{(\vec r_s, \vec g_s)} & s=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec u_{s+1} = \vec u_s - \vec p_s \frac{(\vec r_s, \vec q_s)}{(\vec q_s, \vec q_s)}$$

Метод Крейга

Всеядный, но более медленный

$\vec p_0 = \vec 0$
$\vec u_1$ - произв.

$$\vec r_s = A\vec u_s - \vec b$$

$$\vec p_s = \vec p_{s-1} + \frac{\vec r_s}{(\vec r_s, \vec r_s)}$$

$$\vec q_s = A^H \vec p_s$$

$$\vec u_{s+1} = \vec u_s - \frac{\vec q_s}{(\vec q_s, \vec q_s)}$$

Есть иной подход, как бороться с прямоугольными матрицами: берём $A \times A^H$ и исп. [illegible]