

Лекция №9

Параболические уравнения

Параболические уравнения

Теплопроводность

Диффузия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$k = \text{const} > 0$$

$$x \in (0, a]$$

$$t \in (0, T]$$

Нужно { начальные (I произв. по t) и
2 граничных (II произв. по x)

$$u(x, 0) = u(x), \quad x \in (0, a) - \text{нач. условие}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u_1(t) \\ u(a, t) = u_2(t) \\ t \in (0, T] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Граничные} \\ \text{условия} \\ \text{I рода} \end{array}$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_1(t) \\ u_x(a, t) = u_2(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Граничные} \\ \text{условия} \\ \text{II рода} \\ (\text{тепловые} \\ \text{потоки}) \end{array}$$

$$\begin{cases} u(0, t) + \alpha_1 u_x(0, t) = u_1(t) \\ u(a, t) + \alpha_2 u_x(a, t) = u_2(t) \end{cases}$$

Для указанных выше
и прочих условий справедлива
теорема

Существуют и более сложные формы
уравнения и более сложные граничные
условия

Например при остывании асбеста
и много тела появляется лучистый
теплообмен $u^4(x, t)$. Для высокотемп.
разрядной плазмы $u(x) \sim u^{5/2}$

Уравнение теплопроводности д-сипла-
тивно и стабилизирует разрывы начальных
данных и граничных условий.

При $f(x, t)$ неограничен. дифф.
 $u(x, t)$ также неограничен. дифферен-

$$\begin{aligned} &\text{Если } x \in (-\infty; +\infty), f(x, t) = 0, \\ &u_1(t) = u_2(t) = 0, \text{ то} \\ &u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{\lambda_m t} \sin \frac{\pi m x}{a} \\ &\lambda_m = -k \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \end{aligned}$$

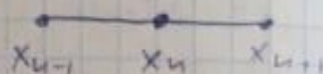
C_m - коэффициенты разложения
начальных данных $u(x)$

при $m \rightarrow \infty$ $\lambda_m \rightarrow -\infty$, т.е. более
высокие гармонич. члены
затухают \Rightarrow устойчивость задачи

Построение схем
методом прямых.

$$\left\{ \begin{aligned} x_n &= nh, \quad 0 \leq n \leq N, \quad h = \frac{a}{N} \\ t_u &= k\tau, \quad u = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$



$$u_n(t) = u(x_n, t), \quad f_n(t) = f(x_n, t)$$

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{K}{h^2} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f_n(t)$$

$$1 \leq n \leq N-1$$

Граничные условия: Начальные условия

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_1(t) & u_n(0) &= u(x_n) \\ u_N(t) &= u_2(t) & (1 \leq n \leq N-1) \end{aligned}$$

Невязка по пространству $O(h^2)$

Если $u_1(t) = u_2(t) = 0$, то $f(x, t) = 0$

можно написать точное решение

$$u_n(t) = \sum_{m=1}^{N-1} Y_m e^{V_m t} \sin \frac{\pi m x_n}{a}$$

$$V_m = -\frac{4K}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{2N} \right), \quad 1 \leq m \leq N-1$$

При $m \ll N$

численные $V_m \sim$ точные λ_m

При $m \sim N$

V_m отличаются от λ_m в 1.6 раза

$$\frac{V_{N-1}}{V_1} = c + \frac{\pi}{2N} \approx \left(\frac{2N}{\pi} \right)^2$$

Все V_m отрицательны, значит
сбегать к нулю. Отрицательные значения
отличаются друг от друга \Rightarrow устойчивость
задача.

Устойчивость \Rightarrow схемы для х. задачи

\Rightarrow схемы Розенберга
(нужна устойчивость)
А-устойчивость

Запишем в векторной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Lambda \vec{u} + \vec{f}$$

$$\Lambda = \frac{K}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}(\vec{u}, t)$$

$$\vec{F} = \Lambda \vec{u} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} = \Lambda$$

Схема Р-замкнула:

$$\hat{\sigma} = \bar{\sigma} + \tau \text{Re } \bar{\omega}$$

$$(E - \tau \Lambda) \bar{\omega} = \Lambda \bar{\sigma} + \bar{f}$$

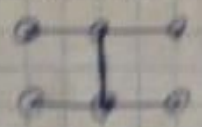
Варианты, перепроч. Λ -уст.

$$\bar{\sigma} = \frac{1+i}{2}, 1, \frac{1}{2}$$

Матрица Λ в левой части -
треугол., ленточная.

$\bar{\sigma} = 0$ - плохо, т.е. нет Λ -уст.

Из треугол. \Rightarrow исп. по 3 точки
с левыми приращенными слоя \Rightarrow
шасси танка.



При вещественном $\bar{\sigma}$ получаются
классические схемы.

Использование
CROS

$$\bar{\sigma} = \frac{1+i}{2}$$

Функция устойчивости

$$p(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{\tau}}, \quad z = \mu \tau$$

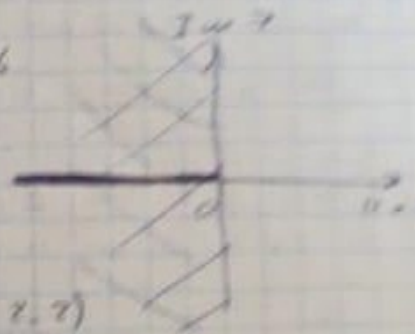
μ - спектральные множители,
т.е. собственные значения

У оператора Λ они все вещественные,
и отрицательные.

Из Λ -уст. $\Rightarrow |p(z)| < 1$ при $z = \tau \mu$

\Rightarrow безуслов. устойчивость

В общем: все Λ -уст.
схемы есть безуслов.
устойчивы.



Если также уст. по
правой части (теорема 2.2)
(надо посмотреть!)

По пространствам $O(h^2)$, по времени
 $O(\tau^2) \Rightarrow$ все $O(\tau^2 + h^2)$.

CROS t -многочлен \Rightarrow по времени
монотонность есть, но есть провалит
монотонность по пространству (для
разрывных решений)

При $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}$ - и схема с полтерми-
(схема Урания - Ньютона)

В традиционной форме

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{K}{2h^2} \left((\hat{u}_{n-1} - \hat{z} \hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + \right. \\ \left. + (u_{n-1} - z u_n + u_{n+1}) \right) + f(x_n, t + \frac{\tau}{2})$$

$$\boxed{O(\tau^2 + h^2)}$$

A-уст. \Rightarrow безусловн. устойчива
(лишны ещё уст. по нек. данным...)

Но она не τ -монотонна \Rightarrow возможны
"полусрезанные" решения - проблема.

⑦. точнее, чем CROS

При $\beta = 1$ - ~~лиш~~ чисто неявная схема
в трехчленной форме

$$\frac{u_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(u_n, t + \frac{\tau}{2})$$

Эта схема $O(\tau + h^2)$, безусловн.
устойчива.

Явная схема ($\beta = 0$) не A-уст. \Rightarrow
нестабильна.

На самом деле есть устойчивость
при $\frac{k\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, но это значит, что

$\tau \sim h^2$, что невыгодно для
практики (слишком маленький τ).

Асимптотическая
устойчивость

В явном решении чем \uparrow номер
гармоник, тем \uparrow затухание
(меньше множитель роста).

В частности все гармоник ~~и~~
должны затухать по экспоненте, чем
первая

$$|p| \leq p_1$$

На самом деле достаточн., чтобы
это неравенство выполнялось с
точностью до членов порядка $O(\tau)$
тогда при $\tau \rightarrow 0$ такая нестрогость
несущественна. ROS!

Схемы CROS и ~~XXXXX~~ (2- и 1-
соответственно) \Rightarrow с ростом номера
гармоник $p \rightarrow \infty$ \Rightarrow неустойчивость

(хотя ~~XXXXX~~ ROS $\frac{1}{2}$ не L-уст.

$$|p(\tau)| = \frac{1 + \frac{\tau}{2}}{1 - \frac{\tau}{2}} \Rightarrow \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad |p(\tau)| \rightarrow \infty$$

\Rightarrow ~~XXXXX~~ с определенного момента
множитель роста растет по экспоненте
 \Rightarrow нет асимптотич. устойчивости.

Такая устойчивость существенна
важна при расчете на больших N .

Такие схемы CROS и ROS! имеют
нечастотный правильный порядок
затухания гармоник Δ ROS $\frac{1}{2}$ - нет.

Монотонность

Было показано, что

$$\text{монотонность} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m u_m \\ \beta_m \geq 0 \end{cases}$$

Явная схема

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})$$

$$\hat{u}_n = \frac{k\tau}{h^2} u_{n-1} + \left(1 - 2\frac{k\tau}{h^2}\right) u_n + u_{n+1} \quad \frac{k\tau}{h^2}$$

Для монотонности все коэф. ≥ 0

$$\Rightarrow 1 - \frac{2k\tau}{h^2} \geq 0 \quad \text{Условие монотонности}$$

совп. с условием устойчивости.

\Rightarrow монотонная

Неявная схема (чисто неявная)

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2} (\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1})$$

$$\hat{u}_n - u_n = \frac{k\tau}{h^2} (\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1})$$

$$\hat{u}_n \left(1 + \frac{2k\tau}{h^2}\right) = u_n + \frac{k\tau}{h^2} (\hat{u}_{n-1} + \hat{u}_{n+1})$$

$$\hat{u}_n = \frac{u_n + \frac{k\tau}{h^2} (\hat{u}_{n-1} + \hat{u}_{n+1})}{1 + \frac{2k\tau}{h^2}}$$

Здесь все коэффициенты всегда положительны. Далее выразим \hat{u}_n и \hat{u}_{n+1} через соседей.

При рекуррентной подстановке эта положительность будет сохраняться \Rightarrow монотонность.

Схема с произвольной.

CROSS не ϵ -монотонна — сигнал!

связи типа ϵ -дифф. ~~сх.~~ мон. схемы нет,

но это о многом говорит.

Условие мон.

$2k\tau \leq 3h^2 \Rightarrow$ нет беззон. монот.

и на разрывах и даже на резких фронтах \Rightarrow плохо

Схема CROSS

ϵ -монотонность есть, но монотонности строго говоря нет, хотя монотонность играет незначительную.

Отстаивание.

Для уравнения переноса доказано, что Π порядка и строгая мон. не совместимы.

Для уравнения теплопроводности такой теоремы нет, но такой схемы пока никто не построил.

Вообще ни для какого типа ЭВМ, уравнений не построены схемы сохраняющие Π порядок и строго монотонные.

БЛОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ

Более общий вид:

$$c(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x,t)$$

$c(x,t)$ - теплоемкость среды.

В т. разрыва $u(x,t)$ дифр. не имеет смысла \Rightarrow по сути ищется кусочное решение.

Нужны внутри граничные условия их берем из физич. соображений.

В столбик правила:

1. Узел в разрыв

2. Система уравн. I порядка

$$\begin{cases} c(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} + f(x,t) \\ w = k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Форм. внутр. гранич. условия - нег. решения u (температура!) и теплового потока w (энергия через границу!)

3. Интеграл-интерп. метод (инт. только по пространству!)

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} c(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} dx = w_n - w_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,t) dx$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{w}{k(x,t)} dx = u_n - u_{n-1}$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} dx = w_n - w_{n-1}$$

4. Аппроксимирем

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{du_{n-1}}{dt} + \frac{du_n}{dt} \right) h_n =$$

$$= w_n - w_{n-1} + h_n f_n - \frac{1}{2}$$

$$\frac{w_{n-1} + w_n}{2 k_{n-1/2}} h_n = u_n - u_{n-1}$$

Далее используем w_n и разн. систему ОДУ.

Переходим к решению с помощью того же CROS.

При расчетах в неограниченной области вместо $u(x,t)$ используем $u(x,t)$ сегм. + изм. энергии в пределах шага

$$x = x(\xi), \quad \xi_n = \frac{n}{N}$$

$$h_n = \left(\frac{dx}{d\xi} \right)_{\xi_{n-1/2}} \frac{1}{N}$$