Семинар №9

Квазилинейное уравнение переноса

1. Реализовать консервативную схему для уравнения переноса. (Квазилин.)
   После каждого слоя сделать отрисовку решения.
   Поставить оператор pause(1e-6) (после plot)

   Указания: убрать ($c \equiv 1$) или взять $c = 1$.

2. Исследовать схему II порядка (проверить на сходимость)

3. У доски: делаем вывод аналога схемы с полусуммой.

Схема II-го порядка оказалась неустойчива.

Вывод схем для УТ в традиционной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k u_{xx} + f$$

$$\frac{du_n}{dt} = \underbrace{k\,\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2}}_{\Lambda u} + f_n$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{\Lambda \vec{u} + \vec{f}}_{\vec{F}}$$

$$\hat{u} = u + \tau w$$

$$(E - \gamma\tau F_u)\, w = \vec{F}$$

|| Действительно ROS

В данном случае:

$$(E - \gamma\tau\Lambda)\,\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda \vec{u} + \bar{f}$$

$$(E - \gamma\tau\Lambda)(\hat{u} - u) = \tau\Lambda \vec{u} + \bar{f}$$

$$\hat{u} - u = \gamma\tau\Lambda(\hat{u} - u) + \tau\Lambda u + \bar{f}$$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \gamma\Lambda\hat{u} + (1-\gamma)\Lambda u + \bar{f}$$

$f\,(t + \ldots$

$\gamma = 0$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda u + \bar{f}$$ явная схема

$\gamma = 1$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda\hat{u} + \bar{f}$$ Неявная схема

$\gamma = \frac{1}{2}$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda\,\frac{u + \hat{u}}{2} + \bar{f}$$ схема с полусуммой

|| Разобраться, как спектр влияет на устойчивость || 8)

Лекция №10

Многомерная теплопроводность

Работа над ошибками: см. предыд. страницу.

2-D теплопроводность в прямоугольнике:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t)$$

$0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < t < T$

$u(0, y, t) = \mu_1(y, t),\quad u(a, y, t) = \mu_2(y, t),$
$u(x, 0, t) = \mu_3(x, t),\quad u(x, b, t) = \mu_4(x, t),$
$u(x, y, 0) = \mu(x, y).$

Сетка: $\{x_n, y_m,\ 0 \le n \le N,\ 0 \le m \le M\}$
$h_x = const,\ h_y = const$
$\boxed{u_{nm} = u(x_n, y_m, t)}$!!!

Операторы простр. дифференц.:

$$(\Lambda_x u)_{nm} = K_x \frac{u_{n-1,m} - 2u_{nm} + u_{n+1,m}}{h_x^2}$$

$$(\Lambda_y u)_{nm} = K_y \frac{u_{n,m-1} - 2u_{nm} + u_{n,m+1}}{h_y^2}$$

Используем метод прямых:

$$\frac{d u_{nm}}{dt} = [(\Lambda_x + \Lambda_y) u]_{nm} + f_{nm}$$

Аппроксимация $\underline{O}(h_x^2 + h_y^2)$

Используем одностадийные схемы Розенброка:

$$(E - \alpha\tau(\Lambda_x + \Lambda_y))\frac{\hat{u} - u}{\tau} = (\Lambda_x + \Lambda_y)u$$

Аналогично 1-D можно записать: схема с весами!

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = (\Lambda_x + \Lambda_y)(\alpha\hat{u} + (1-\alpha)u) + f$$

Из Λ-устойчивости ($\alpha = 1, \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ безусловная устойчивость

$+$ $\{$Трудоемкость$\}$

Для 1-D матрица $E - \alpha\tau\Lambda$ трёхдиагональна, т.к. у E единств. диагональ и Λ — трёхдиагональна

Т. измеряется числом операций при переходе на след. слой в расчёте на 1 узел сетки при $\tau \sim h$

Схема экономична, если такое число операций $\sim \underline{O}(1)$

Явная схема: $\tau \sim h^2$ => на один $\tau \sim h$ шаг надо $N \sim \frac{1}{h}$ шагов => $O(N)$ => нет экономичности.

Схема с весами

Для расчета матрицу нам придется вытягивать в вектор, строка за строкой. Тогда матрица оператора $\Lambda_x + \Lambda_y$ не будет трехдиагональной. У нее будет ленточная форма с шириной ленты $\sim 2N-1$, когда в строке будет всего 5 ненул. эл-тов.

Полное число операций на узел $\sim N^2$ => не экономична.

Для 3D - еще хуже. На один узел $\sim N^4$ операций.

Выход - факторизация!

Эволюционная факторизация

Берём „схему с полусуммой":

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right)\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \Lambda u + f\left(x,y,z,t+\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$$

Заменяем

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right) = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\cdot\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) + O(\tau^2)$$

Действительно

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) = E - \frac{\tau}{2}(\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_y\Lambda_x + \Lambda_z\Lambda_x + \Lambda_z\Lambda_y) - \frac{\tau^3}{8}\Lambda_z\Lambda_y\Lambda_x =$$

$= E - \frac{\tau}{2}\Lambda + O(\tau^2)$ => таким образом мы не нарушили аппроксимации.

Итого:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \Lambda u + f\left(x,y,z,t+\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$$

„Строгий" метод гармоник

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau} = Au$$

Если u - с.ф., а λ - с.з.

$$Au = \lambda u$$

$\hat{u} = \rho u$, ρ - множ. роста для с.ф. u

$$\frac{\rho u - u}{\tau} = \lambda u$$

$$\frac{\rho - 1}{\tau} = \lambda$$

$\rho = 1 + \tau\lambda$

Должно быть $|\rho| < 1$

$|1 + \tau\lambda| < 1$: $-1 < 1 + \tau\lambda < 1$

$-2 < \tau\lambda < 0$

Разница в том, что вместо $e^{i\varphi x_k}$ на все случаи жизни надо брать собственные функции оператора из правой части (или что-то другое в связи с задачей) и работать именно с ними.

В нашем случае (3-р):

$u_{klm}(x, y, z) = \sin\frac{\pi k x}{a}\sin\frac{\pi l y}{b}\sin\frac{\pi m z}{c}$

$k \in [1; N_x - 1]$

$l \in [1; N_y - 1]$

$m \in [1; N_z - 1]$

с.ф. получается произведением одномерных

$$\lambda_{xk} = -\frac{4\varkappa_x}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N_x}$$

$$\lambda_{yl} = -\frac{4\varkappa_y}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi l}{2N_y}$$

$$\lambda_{zm} = -\frac{4\varkappa_z}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi m}{2N_z}$$

$\varkappa$ - коэфф. температуропроводности

$\Lambda u_{klm} = \Lambda_x u_{klm} + \Lambda_y u_{klm} + \Lambda_z$

$= \lambda_{xk} u + \lambda_{yl} u + \lambda_{zm} u = (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm})$

$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x) u \frac{\rho - 1}{\tau}$

$= (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm}) u$

$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x) u = u - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk} u$

$= (1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk}) u$

$(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{zm})(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{yl})(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk})$

$= (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm})$

$$\boxed{\rho = 1 + \tau\frac{\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm}}{(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk})(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{yl})(1 - \frac{\tau}{2}}}$$

Дробь всегда неположительна, т.к. знаменатель всегда положит. из-за отрицат. λ, а числитель - отрицат. по той же причине

Надо показать, что дробь > -2

$$\frac{\tau(\lambda_{xu} + \lambda_{ye} + \lambda_{zm})}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{zm}\right)} > -2$$

Переобозначим $\lambda_{xu} = \lambda_x$, $\lambda_{ye} = \lambda_y$, $\lambda_{zm} = \lambda_z$

$\cancel{\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)}$

$$\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) > -2\Big(1 - \frac{\tau}{2}(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) +$$

$$+ \frac{\tau^2}{4}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) - \frac{\tau^3}{8}\lambda_x\lambda_y\lambda_z\Big)$$

$$\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) > -2 + \tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) -$$

$$- \frac{\tau^2}{2}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) + \frac{\tau^3}{4}\lambda_x\lambda_y\lambda_z$$

$$2 > -\frac{\tau^2}{2}\underbrace{(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z)}_{>0} + \frac{\tau^3}{4}\underbrace{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}_{<0}$$

$$2 + \frac{\tau^2}{2}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) > \frac{\tau^3}{4}\lambda_x\lambda_y\lambda_z$$

$$\frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z} + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) < \frac{\tau^3}{4}$$

$$\underbrace{\frac{\tau^3}{4} - \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) - \frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}}_{p(\tau)} > 0$$

$$p(0) = -\frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z} > 0$$

$$p'_\tau = \frac{3\tau^2}{2} - \tau\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) = 0$$

$$\tau\left(\frac{3}{2}\tau - \left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)\right) = 0$$

$$\tau = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)$$

$$\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right.$$

$p'_\tau > 0$ при $\tau > 0$ => При пусть ...

$p(\tau) > 0$

Для 2-D случая – аналогично.

Асимптотическая устойчивость

1-D схема не является асимптоти[чески] устойчивой => скорее всего 2-D и [3-D] схемы тоже лишь условно асимпт[отически] устойчивы. $\boxed{\text{2D случай}}$

$$\rho = \frac{\tau(\lambda_{xu} + \lambda_{ye})}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)} + 1 = \frac{\tau(\lambda_{xu} + \dots}{(1 - \dots)}$$

$$+ \frac{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu} - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye} + \frac{\tau^2}{4}\lambda_{xu}\lambda_{ye}}{}$$

$$\rho = \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{xu} + \frac{\tau}{2}\lambda_{ye} + \frac{\tau^2}{4}\lambda_{xu}\lambda_{ye}}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)}$$

$$\rho = \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}} \cdot \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}}$$

Можно заменить разности II прогонкой, допуская ошибки в 2-3 порядка, т.е. без потери порядка аппроксим.

$$v_{гр.} = \left[\left(E - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр.}$$

Посчитав. берём точно

$$w_{гр.} = \left(\left(E - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right)_{гр.}$$

Схема имеет при таких граничн. условиях аппрокс. $O(\tau^2 + h^2)$

{ Удовлетворительно сообщить CROS даже на 2-D не получается. }

Для неоднородной среды и гладких изотерм, на неравном сетке запишем:

$$(\Lambda_x u)_n = \frac{2}{h_{x,n} + h_{x,n+1}} \left(k_{n+\frac{1}{2}} \frac{u_{n+1} - u_n}{h_{x,n+1}} - k_{n-\frac{1}{2}} \frac{u_n - u_{n-1}}{h_{x,n}}\right).$$

k берём в центре: по y, z

$\frac{\hat{u} - u}{\tau}$ также берём в центре ячейки.

Семинар № 10

Уравнение теплопроводности

Схема

$\hat{u} = u + \tau\, \mathrm{Re}\, w$

$$(E - \sigma \tau \Lambda_x) w = \Lambda_x u + \bar{f}.$$

У нас $f = 0$

$$\begin{cases} (\Lambda_x)_n = \dfrac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} \\ 1 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Граничные условия входятся в Λ_x.

Условие Дирихле

$u_0 = a$

$u_N = b$

В частности $\hat{u}_0 = u_0$, $\hat{u}_N = u_N$

Условие Неймана (фиктивные точки!)

простейшее $u_x = 0$

$u_1 = u_{-1}$; $u_{N-1} = u_{N+1}$

$$(\Lambda_x)_0 = \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} = \frac{2}{h^2}(-u_0 + u_1)$$

$$(\Lambda_x)_N = \frac{u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}}{h^2} = \frac{2}{h^2}(-u_N + u_{N-1})$$

Нет нормального диагонального преобладания.