Важно, что не надо пересчит. $f(u)$ в других точках.

Отличаются только b_i.

~~ДДДД~~

"(—)": метод не дает гарантированной оценки точности"

ode45 — схема 5-го порядка с влож. схемой 4-го порядка.

Как можно получить оценку? Глобально сгустить сетку

Порядок сходимости

r-тый порядок аппроксимации обеспечивается выполнением уравнений порядка

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \\ a_{21} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

частный случай для двухстад схемы.

Для сходимости нужна ещё устойчивость

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u},t) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Порядки бьются

Вспоминаем схемный шаг

$$\hat{v} = v + h\underbrace{f(v,t)}_{A_1(v,t)} + \frac{h^2}{2}\underbrace{f_u f}_{A_2(v,t)} + \dots$$

$$\hat{v} = v + hA_1(v,t) + \frac{h^2}{2!}A_2(v,t) + \frac{h^3}{3!}A_3(v,t) + \dots$$

~~Проварьируем правую часть~~

~~$\vec{f} \to \vec{f}^*$~~

~~Этому соответствует вариация решения z~~

~~$\widehat{(v+z)} = v + z + hA_1^*(v+z,t) + \frac{h^2}{2}A_2(v+z,t) + \dots$~~

~~Вычитаем...~~

~~$\hat{z} - z = h(A_1(v+z,t) - A_1(v,t)) + \frac{h^2}{2}(A_2(\dots) - A_2\dots)$~~

Внесли ошибку...

$$\hat{v}^* = v^* + hA_1^*(v^*,t) + \frac{h^2}{2!}A_2^*(v^*,t) + \dots$$

$$\hat{v}^* - \hat{v} = v^* - v + h(A_1^*(v^*,t) - A_1(v,t)) + \frac{h^2}{2}(A_2^*(v^*,t) - A_2(v,t)) + \dots$$

$\boxed{\cancel{A_i^* = A_i}}$ ← плохой вариант

$$\hat z = z + h\frac{\partial A_1}{\partial u} z + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial A_2}{\partial u} z + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial A_3}{\partial u} z + \dots$$

$$\frac{\hat z - z}{h} = z\left(\frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{h}{2}\frac{\partial A_2}{\partial u} + \frac{h^2}{3!}\frac{\partial A_3}{\partial u} + \dots\right)$$

Пусть $h \to 0$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial A_1}{\partial u} z \\ z(t_0) = z_0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial t} = f_u z \\ z(t_0) = z_0\end{cases}$$

$$\boxed{z = z_0 e^{\int_{t_0}^{T} f_u\, dt}}$$ — нарастание ошибки.

ошибка нач. данных

$$A_1^*(U^*, t) = A_1(U^*, t) + \underbrace{B_1(U^*, t)}_{\text{вариация правой части}}$$

Обозначим $z = U^* - U$

$$\hat z = z + h\frac{\partial A_1}{\partial u} z + \frac{h^2}{2}\frac{\partial A_2}{\partial u} z + \dots + hB_1 + \frac{h^2}{2} B_2 + \dots$$

$$\frac{\hat z - z}{h} = \frac{\partial A_1}{\partial u} z + B_1 + h(\dots) \qquad h \to 0$$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial t} = f_u z + \delta f \\ z(t_0) = z_0\end{cases}$$

$$z(T) = \int_{t_0}^{T} \delta f\, e^{\int_t^T f_u(t)\,dt}\, dt + \cancel{[illegible]}$$
$$+ \underbrace{z_0\, e^{\int_{t_0}^{T} f_u(t)\,dt}}_{\text{нач. данные}}$$

правая часть

$$f = f(u, t) = f(u(t), t) = \cancel{[illegible]} = f(t)$$

Если f_u — ограничена, то

$$\|z(T)\| \le \left\|C_1 \int_{t_0}^{T} \delta f\, dt + z_0 C_1\right\|$$ (от h не зависит!)

$\le C_2\|\delta f\| + C_1\|z_0\|$ — устойчивость по начальным данным и

Аналогичное выражение получалось при док-ве z теоремы о сходимости

$\Rightarrow$ порядок ~~аппр~~ сходим., не хуже порядка аппроксим.

Барьеры Бутчера

$s = 1 \quad p = 1$
$s = 2 \quad p = 2$
$s = 3 \quad p = 3$
$s = 4 \quad p = 4$

$s = 5 \quad p = 4$
$s = 6 \quad p = 5$
$s = 7 \quad p = 6$

$s = 8 \quad p = 6$
$s = 9 \quad p = 7$

$s = 10 \quad p = 7$
$s = 11 \quad p = 6$
$\vdots$

Лучше исп. 4-стад. схемы Кутты или 7-стад. схему Хаммуда (исп. из Иванова) 6 порядка. Почти интегр. $\alpha_{24} \approx -1{,}27$

Дормана – Принса
$s = 7 \quad p = 5(4)$
$\alpha_{52} = -11{,}6$!

В задаче с $\frac{1}{1+x^2}$ получается

6 порядок после сгущения.

Объясняется это тем, что

$f'''(1) - f'''(0) = 0$ и в формуле погрешности

$$\varepsilon = -\frac{h^4}{2880}\left(f'''(1) - f'''(0)\right) = 0$$

а лучше сказать, что

$\varepsilon = ch^4\left(f'''(1) - f'''(0)\right)$, т.к.

нет полной уверенности в правильности константы

Успели только простые расчеты с выводом погрешности в задачах ① и ⑤. Некоторые успели сделать з. ④

По Эйткену сгустить не успел никто

По ① задаче придумали замечат. метод

$$f = b^2(21 + 55b^2 - 10a^2) - 2a^2 + \frac{a}{2b}$$

Сначала считается легко в типе double без переполнения. Потом легко найти f.

Лекция №3

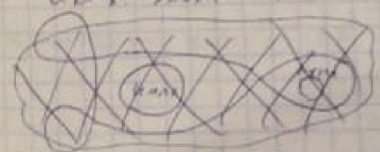
1) Применения ОДУ (см. Лекция №2)

ОДУ

Мягкие (обычные) больш. инж. задач

Жесткие химия, радиотехн.

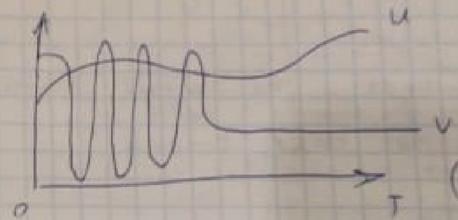
[illegible] задача Аренсторфа $\boxed{3 \text{ тела}}$



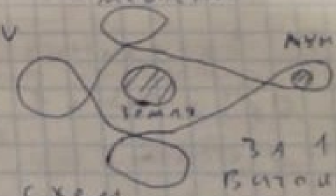
Тепловой взрыв

Вращение Луны вокруг Земли при особых нач. условиях + тело малой массы

В жестких задачах имеются процессы с разной скоростью



Шаг приходится брать по самому быстрому процессу — медленно



За 1 виток погрешн. растет в 10^6 раз!!!

Тестирование схем на тесте Далквиста

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u, \quad 0 \le t \le T, \quad u(0) = u_0 \\ \lambda T << -1 \end{cases}$$

λ - большое отрицательное

Точное решение $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ быстро затухает

$u(t) \geq 0$ при $u_0 > 0$

Схема Эйлера

$$\hat{u} = u + \tau f = u + \tau \lambda u$$

вместо h

Пусть $R_1(z) = \frac{\hat{u}}{u} = 1 + \tau\lambda$ $\boxed{z \equiv \tau\lambda}$

(функция устойчивости)

1) $|R_1(z)| < 1$ - затухание решения

$|1 + \tau\lambda| < 1$

$-1 < 1 + \tau\lambda < 1$

$-2 < \tau\lambda < 0$, $\underline{\lambda < 0!!!}$

$2 > |\lambda|\tau > 0$

$\tau < \frac{2}{|\lambda|}$

А если $\lambda = -1000$ ... $\Rightarrow$ очень малый шаг

2) Затухание с сохр. знака

$0 \leq 1 + \tau\lambda < 1$

$-1 \leq \tau\lambda < 0$

$\tau < \frac{1}{|\lambda|}$ - ещё в 2 раза меньше

Число шагов

$N = \frac{T}{\tau} \geqslant T|\lambda| \Rightarrow$ идея классиф. задачи по величине λT

Для других схем РК

$R_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$

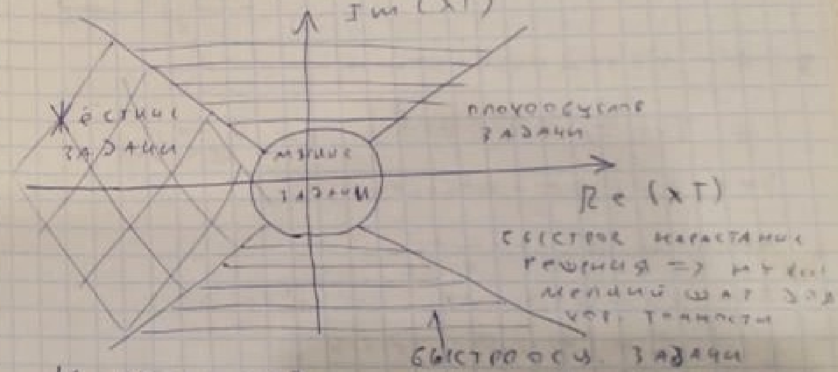
$R_3(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$

$R_4(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$

Отрезки разложения e^z

Условия устойчивости вида $O(|\lambda|^{-1})$

Классификация по λT



Каждую задачу можно классифиц. по характерным λ.

Точное $R(z) = e^z$

$$\frac{\hat{u}}{u} = \frac{u e^{\lambda\tau}}{u} = e^z$$

При большом z высшие члены дают большой вклад => для плохообусл. задач нужен малый шаг.

$|R(z)| \le 1$ что должно быть?
(для жестких задач)

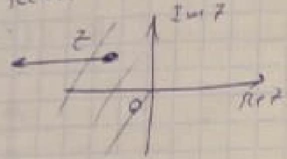
1. ~~$|R(z)| \le 1$~~ при $Re(z) < 0$ –
(Re(λ)<0)

условие затухания решения

или A – устойчивость (самая слабая)

2. A – устойчивость + $\lim_{\substack{z \to \infty \\ Re(z) < 0}} R(z) = 0$

Это L – устойчивость



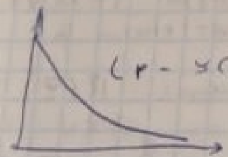
3. A – устойчивость +

+ $R(z) = O(z^{-p})$ при $z \to \infty$

Это L_p – устойчивость.

4. f – монотонность

A – устойчивость и $R(z) > 0$
при $Im(z) = 0$ и $z < 0$



$R(z) = e^z$ (точное)

~~$|e^z| \le 1$ при $Re(z) < 0$~~

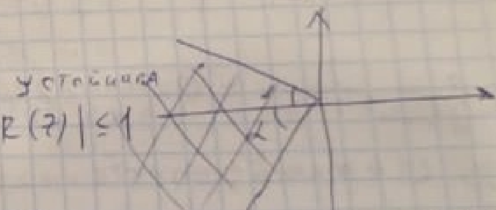
~~$e^z = e^{x+iy}$~~

~~$\lim_{\substack{x<0 \\ z\to\infty}} e^{x+iy} = e^x \lim_{z\to\infty} e^{iy}$~~

L_p – устойчивые методы лучше повторяют экспоненту

Лучше всего Lp – уст. → f – монот.

A(α) – устойчивость



Схемы РК и новые явные

~~A – устойчивость~~

⇓

непригодны

Неявный Эйлер

Явный $\hat{u} = u + \tau f(u)$

Неявный $\hat{u} = u + \tau f(\hat{u})$

$\tau f(\hat{u}) = \tau \lambda \hat{u}$ для теста Далквиста

$\hat{u} = u + \tau \lambda \hat{u}$

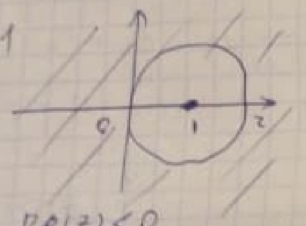
$\hat{u}(1 - \tau\lambda) = u$

$\frac{\hat{u}}{u} = \frac{1}{1-\tau\lambda}$ или $R(z) = \frac{1}{1-z}$

A - устойчивость.

$|R(z)| = \frac{1}{|1-z|} \le 1$

$|z-1| \ge 1$



$\mathrm{Re}(z) < 0$

$\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{1-z} = 0$

$\Rightarrow$ L - устойчивость

$\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^p}{1-z} = -1$ при $p = 1$

$\Rightarrow$ L1 - устойчивость

$\frac{1}{1-z} > 0$ при $z < 0$ $\Rightarrow$ + - монотонность

Проблема: решать $\hat{u} = u + \tau f(\hat{u})$ - нелин. уравнения. Надо решить итерации до сходимости (Ньютона)

Запишем $f(\hat{u}) = f(u) + f_u(\hat{u} - u)$ - - линеаризация

$\hat{u} = u + \tau f(u) + \tau f_u (\hat{u} - u)$

$\hat{u} - u = \tau f(u) + \tau f_u (\hat{u} - u)$

$(1 - \tau f_u)(\hat{u} - u) = \tau f(u)$

В векторной форме

$\left(E - \tau f_u(u)\right)(\hat{u} - u) = \tau f(u)$

взято при u

она поменялась

Надо решать СЛАУ напр. Гауссом

Явно - неявная (полуявная) схема

Обобщим:

$(E - \alpha \tau f_u) w = f(u, t + c\tau)$

$\hat{u} = u + \tau b w$

Семейство одностадийных схем Розенброка.

$$w = f(u, t + c\tau)(E - \alpha\tau f_u)^{-1} =$$
$$= (f + f_t c\tau + o(\tau))(E + \alpha\tau f_u + o(\tau)) = f + f_t c\tau + \alpha\tau f f_u + o(\tau)$$
$$\hat{u} = u + \tau b f + \tau^2 b(\alpha f f_u + c f_t) + o(\tau^2)$$

С другой стороны

$$\hat{u} = u + \tau f + \frac{\tau^2}{2}(f f_u + f_t) + \bar{o}(\tau^2)$$

Значит

$$\begin{cases} b = 1 & (\text{I порядок}) \\ \alpha = c = \frac{1}{2} & (\text{II порядок}) \end{cases}$$

Устойчивость

$\frac{du}{dt} = \lambda u$ $\boxed{b \equiv 1}$ − для I порядка

$$(1 - \alpha\tau\lambda)(\hat{u} - u) = \tau\lambda u$$
$$(1 - \alpha z)(\hat{u} - u) = z u$$
$$(1 - \alpha z)\left(\frac{\hat{u}}{u} - 1\right) = z$$

$$R(z) - 1 = \frac{z}{1 - \alpha z}$$
$$R(z) = \frac{z}{1 - \alpha z} + 1$$
$$\boxed{R(z) = \frac{z + 1 - \alpha z}{1 - \alpha z} = \frac{z(1-\alpha) + 1}{1 - \alpha z}}$$

A - устойчивость:

$\left|\frac{z(1-\alpha) + 1}{1 - \alpha z}\right| \le 1 \Rightarrow$ возведём в квадрат $\Rightarrow$

$$\frac{(z(1-\alpha) + 1)(z^*(1-\alpha) + 1)}{(1 - \alpha z)(1 - \alpha z^*)} =$$
$$= \frac{z z^*(1-\alpha)^2 + 2\,\mathrm{Re}(z)(1-\alpha) + 1}{1 - 2\alpha\,\mathrm{Re}\, z + \alpha^2 z z^*}$$

$$|z|^2(1-\alpha)^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z \cancel{- 2\alpha\,\mathrm{Re}\, z + 1} \le$$
$$\le \cancel{1 - 2\alpha\,\mathrm{Re}\, z} + \alpha^2|z|^2$$
$$2\,\mathrm{Re}\, z \le |z|^2(\alpha^2 - (1-\alpha)^2)$$
$$2\,\mathrm{Re}\, z \le |z|^2(2\alpha - 1)$$

$\alpha - \frac{1}{2} \ge \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|^2}$ − условие A-уст.

$\mathrm{Re}\, z < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha \ge \frac{1}{2} \text{ − условие A-уст.}}$

L - устойчивость

$$\boxed{\text{При } z \to \infty \quad R(z) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}} \Rightarrow \text{при } \alpha = 1 \ \ L\text{-уст.}$$

При $\alpha = 1$

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Уже рассматривали
1) A - уст.
2) L и L1 - уст.
3) f - монотонность.

f - монотонность

$R(z) > 0$ при ~~[illegible]~~ $z < 0$

$$\frac{z}{1 - \alpha z} + 1 > 0$$

$$z > -1 \cdot (1 - \alpha z)$$

$$z > \alpha z - 1$$

$$z(1 - \alpha) > -1$$

$$1 - \alpha > -\frac{1}{z}$$

$\frac{1}{z}$ стрем.

$\alpha - 1 > \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha \geq 1 \\ \text{для} \\ f\text{-монотон.} \end{array}}$$

Итого

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$ A - уст., L1 - уст., f - мон. — для сложных задач I порядка

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ c = \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$ A - уст. и всё! — для более простых II порядка

Нужна схема II порядка, хотя бы L уст. ...

Семинар №3

Теория

1. MATLAB - язык матричных вычислений

Хотелось бы напомнить некоторые приёмы прогр.

$$A = [\underbrace{1\ 2\ 3}_{\text{строка 1}};\ \underbrace{4\ 5\ 6}_{\text{строка 2}};\ \underbrace{7\ 8\ 9}_{\text{строка 3}}]$$

разделители

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

A(2 end, 1 : 3)

посл. эл-т

Подматрица

A(2:3, 1:2) = [4 5, 7 8]

A(:) - матрица в 1 ~~строку~~ столбец

~~A = [1 2 3 4 5 6 7 8 9]~~

A(:, 1:3) - все строки, столбцы от 1 до 3