Семинар №12

Счёт на установление с логарифмическим набором шагов

Решаем задачу

$u_{xx}+u_{yy}=0$

$x\in[0;6\pi]$ $a_x=6\pi$

$y\in[0;4\pi]$ $a_y=4\pi$

$\cancel{u(x,0)=\frac{1}{20}+\frac{1}{100}\sin x}$

$\cancel{u(x,a_y)=\frac{1}{20}-\frac{1}{100}\sin x}$

$\cancel{u(0,y)=\frac{1}{20}\cos y}$

$\cancel{u(a_x,y)=\frac{1}{20}\cos y}$

$u(x,0)=u(x,4\pi)=-\frac{1}{100}\sin(x)$

$u(0,y)=u(6\pi,y)=\frac{1}{20}\sin(y)$

Надо построить логарифмический набор шагов и записать в tau log

Вывод:

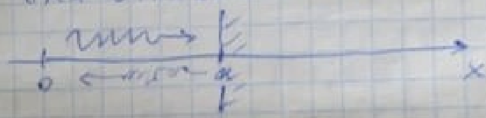
1. Профиль в конце
2. $\|\hat{u}-u\|_C$ от номера итерации

Лекция №13

Неограниченная область. Многомерное уравнение колебаний.

Неограниченная область

Если волна распространяется в на конечном отрезке $[0;a]$, то при достижении правой границы она отражается и бежит обратно.



В неограниченной области такого отражения не происходит. Для решения задачи строим квазиравномерную сетку

$$x(\xi)=\frac{b\xi}{(1-\xi^2)^r},\quad 0\le\xi\le1,\quad b>0,\ r>0$$

Её последняя точка — бесконечно удалённая. Полуцелые узлы и длины шагов считаем обычным способом.

Обычно $r=\frac{1}{2}$; b берём так, чтобы в интересной области было 50–75% расчётных точек.

Прозрачная граница

Можно считать и на конечном отрезке вместо бесконечности, но тогда надо убрать обратную волну.

„Хорошая" волна $\varphi_1(x-ct)$ бежит →

„Плохая" волна $f_2(x+ct)$ бежит ←

„Плохой" волны не должно быть вблизи правой границы.

Для „хорошей" волны верно

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$$

Возьмём это в качестве условия на правой границе

$$(u_t + c u_x)_{x=a} = 0$$

Для двухслойной схемы

$$(c u_x + v_x)_{x=a} = 0$$

Его разностный аналог

$$c\,\frac{\hat u_{N+1} - \hat u_{N-1}}{h_N + h_{N+1}} + \frac{\hat v_{N+1/2} - \hat v_{N-1/2}}{h_{N+1/2}} = 0$$

Аппроксимация $O(h^2)$

Многомерное уравнение

В изотропной среде (либо если у тензора упругости $\neq 0$ только диагональные элементы)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u + f(\vec x, t)$$

$$A_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(c_\alpha^2(\vec x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$\vec x = \{x_1 \dots x_p\} \in G$$

Граничные условия и начальные условия:

$$u(\vec x, 0) = \mu_1(\vec x) \quad \vec x \in G$$

$$u_t(\vec x, 0) = \mu_2(\vec x)$$

$$u(\vec x, t) = \mu_3(\vec x, t), \ \vec x \in \Gamma(G)$$

Будем решать в параллелепипеде с прямоугольными равном. сетками с шагами h_α по переменным x_α.

Многомерный „крест"

Строится аналогично 1-D

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat u - 2u + \check u) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u + f$$

Аппроксимация $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\right)$

Исследуем устойчивость методом гармоник

$$u = e^{i\sum_{\alpha=1}^{p}\varphi_\alpha x_\alpha}$$

Делаем замены:

$u \to 1 \qquad \check{u} \longrightarrow \frac{1}{\rho}$

$\hat{u} \to \rho$

$$\Lambda_\alpha u \to -4\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\sin\frac{\varphi_\alpha h_\alpha}{2}\right)^2$$

$$\rho - 2 + \frac{1}{\rho} = -4\underbrace{\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\sin\frac{\varphi_\alpha h_\alpha}{2}\right)^2}_{\gamma}$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = -4\gamma\rho$$

$$\rho^2 - 2\rho(1-2\gamma) + 1 = 0$$

Устойчивость будет при $D \le 0$ $\Rightarrow$

$$\tau < \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\right)^2\right)^{-1/2} \sim \frac{h}{c\sqrt{p}}$$

Обобщенное условие Куранта

$\{$Факторизованные схемы$\}$

Многомерный аналог схемы с весами

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\left[\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\check{u}\right] + f$$

Преобразуем схему и перепишем в ином виде

$$\frac{1}{\tau^2}[\hat{u} - 2u + \check{u}] = \sigma\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\hat{u} - 2u + \check{u}) + \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u + f$$

$$\underbrace{\left(E - \tau^2\sigma\sum_{\alpha}\Lambda_\alpha\right)}_{\Downarrow\ \text{замена}}\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2} = \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u + f$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}(E - \tau^2\sigma\Lambda_\alpha)u = E - \tau^2\sigma\sum_{\alpha}\Lambda_\alpha + \underbrace{\tau^4\sigma^2\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta + \ldots}_{O(\tau^4)}$$

Факторизация работает даже лучше, чем для параболических уравнений.

$\{$Устойчивость Ф.С.$\}$

Делаем замены

$$\Lambda_\alpha \to -4\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_\alpha h_\alpha}{2}, \quad \hat{u}\to\rho,\ \check{u}\to\frac{1}{\rho}, \quad u \to 1$$

$$\gamma_\alpha = \frac{2\tau^2 c_\alpha^2}{h_\alpha^2}\sin^2\left(\frac{\varphi_\alpha h_\alpha}{2}\right)$$

$$\Lambda_\alpha \to -2\gamma_\alpha/\tau^2$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}(1 + 2\sigma\gamma_\alpha)\frac{\rho - 2 + 1/\rho}{\tau^2} = -2\frac{1}{\tau^2}\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)(\rho^2-2\rho+1) = -2\rho\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha$$

$$\rho^2-2\rho+1 = -\rho\,\frac{2\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)}$$

$$\rho^2-2\rho\left(1-\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)}\right)+1=0$$

опять $D\le 0$

$$-1\le 1-\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)}\le 1$$

$$\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)}\le 2 \Rightarrow \prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\delta\gamma_\alpha)\ge \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha$$

При $\delta\ge\frac{1}{4}$ будет верно для $\forall$ гармоники

Условие устойчивости $\boxed{\delta\ge\frac{1}{4}}$

Или и в ГР лучше брать $\delta\in[\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$

Алгоритм решения аналогичен главному для параболич. уравнения.

Семинар №13

Решение гиперболического уравнения с помощью трехслойной схемы.

Будем решать задачу

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}\\ x\in(0,6\pi)\\ u(0,t)=u(6\pi,t)=0\\ u(x,0)=\sin(x),\ u_t(x,0)=0\end{cases}$$

1. Точное решение?

$u = c_1\sin(x-ct)+c_2\sin(x+ct)$

1) $c_1+c_2=1$

$u(0) = c_1\sin(-ct)+c_2\sin(ct)=0$

$u(6\pi)=u(0)$

значит $(c_1-c_2)\sin ct=0 \Rightarrow$

2) $c_1=c_2$

$c_1=c_2=\frac{1}{2}$

$$u=\frac{\sin(x-ct)+\sin(x+ct)}{2}=$$

$$=\frac{2\sin x\cos ct}{2}=$$

$=\sin x\cos ct$

$\boxed{u(x,t)=\sin x\cos ct}$