сопр. невязки. Работает даже лучше, чем метод Крейга.

$\boxed{\text{Оценки сходимости}}$

Сопр. невязки и градиенты:

$$S = O\left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\right) \approx \cancel{O(N)}$$

~~число узлов вдоль одного направления~~

Крейг:

$$S = O\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)$$

Расчет останавливаем при выходе нормы невязки на уровень ошибки округления.

Семинар № 11

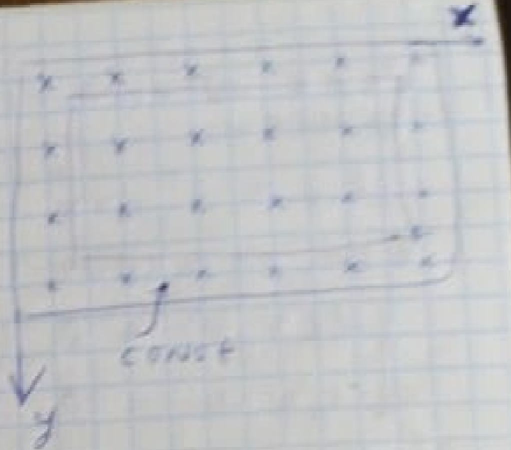
2-D теплопроводность

Решаем 2-D задачу в прямоугольнике с условиями Дирихле на границе

$$\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_x\right)}_{P_x}\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_y\right)}_{P_y}\Delta u = \Lambda_x u + \Lambda_y u$$

$$\hat{u} = u + \tau\Delta u$$

В матричной форме



$$\Lambda_x(u) = u \times L_x$$

$$\Lambda_y(u) = L_y \times u$$

$$P_x P_y \Delta u = \Lambda u$$

$$P_y \Delta u = P_x^{-1}(\Lambda u)$$

оператор!

$$\Delta u = P_y^{-1}(P_x^{-1}(\Lambda u))$$

Надо записать с использованием левого и правого матр. умножения с помощью „/“ и „\“

Лекция № 12

Гиперболические уравнения

Г. У.

- Колебания струны
- Движение сжимаемого газа
- Распростр. возмущений электромагн. полей

Типичная задача — малые колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$x \in [0, a]$$

$$t \in [0; T]$$

Для однородного уравнения ($f = 0$) имеем:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Его решение автомодельно

$$\left[\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi_1(x+ct) \\ u(x,t) &= \varphi_2(x-ct) \end{aligned}\right.$$

$$u(x,t) = k_1\varphi_1(x+ct) + k_2\varphi_2(x-ct)$$

общее решение.

Нужны 2 граничных условия по x

$u(0,t) = \mu_1(t)$

$u(a,t) = \mu_2(t)$

$0 \le t \le T$

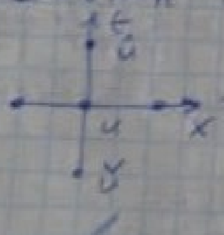
Также нужны 2 условия по t

$u(x,0) = \mu_3(x)$

$u_t(x,0) = \mu_4(x)$, $0 \le x \le a$

$\boxed{\text{Схема „крест"}}$

Шаблон — крест имеет 3 слоя по времени.



Сетка — равномерная

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u}_n - 2u_n + \check{u}_n) = \frac{c^2}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f_n$$

$$1 \le n \le N-1$$

Граничные условия:

$\hat{u}_0 = \mu_1(\hat{t})$

$\hat{u}_N = \mu_2(\hat{t})$

Решение.

На 0 слое известно

$\overset{0}{u}_n = \mu_3(x_n)$, $0 \le n \le N$

На 1 слое придется вычислять отдельно

Самый простой метод.

$$\hat{u}_n \approx u_n + \tau u_t(x_n, 0) = \mu_3(x_n) + \tau\mu_4(x_n)$$

$\boxed{\text{I порядок}}$

Лучше

$$\hat{u}_n \approx u_n + \tau u_t + \underbrace{\frac{\tau^2}{2} u_{tt}}_{?} \Rightarrow \text{из уравнения}$$

$\boxed{\text{II порядка}}$

$$\hat{u}_n = \mu_3 + \tau\mu_4 + \frac{\tau^2}{2}\left(c^2 \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x^2} + f(x_n, 0)\right)$$

Вместо M_{xx} можно исп. 2 простр разность

Схема - явная. Начиная со 2 слоя все стандартно.

{Аппроксимация}

Из самой записи следует 2 порядок аппроксимации по пространству и времени (нужны непрерывн. и производные).

Значит $O(\tau^2+h^2)$, но при простейш аппроксимации на 1 слое получается только $O(\tau+h^2)$.

{Устойчивость}

$u_n \to 1$

$u_{n\pm1} \to e^{\pm iqh}$

$\hat{u}_n \to \rho u_n$

$\check{u}_n \to \frac{u_n}{\rho}$

Для q-той гармоники...

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\rho-2+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{c^2}{h^2}\left(e^{iqh}-2+e^{-iqh}\right)$$

$$\rho^2-2\rho+1=\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2\rho\left(e^{i\frac{qh}{2}}-e^{-i\frac{qh}{2}}\right)^2$$

$$\rho^2-2\rho+1=\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2\rho\left(2i\sin\frac{qh}{2}\right)^2$$

$$\rho^2-2\rho+\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 4\rho\sin^2\frac{qh}{2}+1=0$$

$$\rho^2-2\rho\underbrace{\left(1-2\left(\frac{c\tau}{h}\sin\frac{qh}{2}\right)^2\right)}_{\gamma_q}+1=0$$

По т. Виета $\rho_q'\rho_q''=1 \Rightarrow |\rho_q'||\rho_q''|$

Но должно быть $|\rho'|\leq 1$ и $|\rho''|$

Значит $|\rho'|=|\rho''|=1$

$$\rho_{1,2}=\frac{2\gamma_q\pm\sqrt{D}}{2}=\gamma_q\pm\frac{1}{2}\sqrt{D}$$

$$D=4\gamma_q^2-4=4(\gamma_q^2-1)$$

$$\rho_{1,2}=\gamma_q\pm\sqrt{\gamma_q^2-1}$$

Мы знаем $|\rho_{1,2}|=1$

Имеем 2 варианта.

1. ρ - вещественна
$\rho_1=\rho_2=1$ или $\rho_1=-\rho_2=\pm1$
2. ρ - комплексна

Для веществ. ρ

$\rho_1=\rho_2 \Rightarrow \gamma_q^2-1=0 \Rightarrow |\gamma_q|=1$

$$\begin{cases} \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = 1 \\ \gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 0 \\ \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 0 \\ \sqrt{-1} = 1 \end{cases}$$ несовместна

2 – комплексно

$|\gamma_2| < 1$

Тогда

$$\lambda_1 = \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 1}$$
$$\lambda_2 = \gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 1}$$

Re Im

$$|\lambda| = \lambda_1 \lambda_2 = \gamma_2^2 - (\gamma_2^2 - 1) = 1$$

Итого $|\gamma_2| \le 1$ – условие устойчивости

$$-1 \le 1 - 2\left(\frac{c\tau}{h} \sin\frac{\alpha h}{2}\right)^2 \le 1$$

всегда верно

$$\frac{c\tau}{h} \left|\sin\frac{\alpha h}{2}\right| \le 1$$

Должно выполняться для всех гармоник =>

$$\boxed{\nu = \frac{c\tau}{h} \le 1}$$

число Куранта

Постановка условия Неймана

$$u_x(0, t) = \mu_1(t)$$

Тогда удобно брать $x_0 = -\frac{h}{2}$, $x_1 = \frac{h}{2}$

Значит $\frac{u_1 - u_0}{h} = \mu_1(t)$ – II порядок!

Если c может меняться и условие Куранта нарушаться, то расчёт может развалиться, хотя явная схема совсем не изм

Неявная схема

По аналогии с теплопроводностью

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \Lambda[\sigma\hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma\check{u}] + f$$

$$\Lambda u_n = \frac{c^2}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

1 слой считаем как раньше.

Сам счёт – обычная прогонка с 3-диагональной матрицей

Аппроксимация: $O(\tau^2 + h^2)$ при любом σ.

Устойчивость

Исследуется методом гармоник аналогично явной схемы.

После обычных подстановок получим:

$$\rho_q^2 - 2\gamma_q\rho_q + 1 = 0$$

$$\gamma_q = \frac{1 - 2(1-2\sigma)\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \quad \beta_q = \frac{c\tau}{h}\sin\frac{qh}{2}$$

Аналогично прошлому случаю

$$|\gamma_q| \le 1$$

$$-1 \le \frac{1 + 4\sigma\beta_q^2 - 2\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \le 1$$

$$-2 \le -\frac{2\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \le 0$$

$$\beta_q^2 \le 1 + 4\sigma\beta_q^2$$

$$(1 - 4\sigma)\beta_q^2 \le 1$$

$$\boxed{\kappa = \frac{c\tau}{h}}$$

$$(1 - 4\sigma)\kappa^2 \sin^2\frac{qh}{2} \le 1$$

По худшему случаю...

$$\kappa^2 \le \frac{1}{1 - 4\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{4}$$

κ - любое, при $\sigma \ge \frac{1}{4}$ - безусл. устойчивость

$$\boxed{\sigma \ge \frac{1}{4}}$$

Разумно брать $\sigma \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$, чтобы коэффиц. $1 - 2\sigma$ не становился отрицательным.

Двухслойные схемы

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

Возьмём

$$v(x,t) = \int_0^x u_t(\xi,t)\,d\xi$$

$$F(x,t) = \int_0^x f(\xi,t)\,d\xi$$

тогда

$$v_x = u_t$$

$$v_t = \int_0^x u_{tt}(\xi,t)\,d\xi = \int_0^x (c^2 u_{xx} - f(x,t$$

$$v_t = c^2 u_x + F(x,t)$$

Итого

$$\begin{cases} v_x = u_t \\ v_t = c^2 u_x + F \end{cases}$$

Граничные условия - старые

$$u(0,t) = \mu_1(t)$$

$$u(a,t) = \mu_2(t)$$

Начальные условия

$$u(x,0) = \mu_3(x) \quad v(x,0) = \int_0^x \mu_4(\xi)\,d\xi$$

Уравнение II порядка свели к системе уравнений 1 порядка.

Это — задача акустики

Она бывает удобнее для числ. счёта

Всё это делается ради неравномерной сетки.

Используем метод прямых

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = c^2 u_x + F \end{cases}$$

$$\frac{du_n}{dt} = (v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}) / h_{n+\frac{1}{2}}$$

$$h_{n+\frac{1}{2}} = x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} \qquad 1 \le n \le N-1$$

$$\frac{dv_{n-\frac{1}{2}}}{dt} = c^2(u_n - u_{n-1})/h_n + F_{n-\frac{1}{2}}(t) \qquad 1 \le n \le N$$

Всего $2N-1$ неизв. функций.

При $n=1$ исп. $u_0(t)$

$n=N$ исп. $u_N(t)$

Так исп. граничные условия

На произв. сетке аппрокс. только $O(h)$, на равном и квазиравном $O(h^2)$

Где взять $v_{n-\frac{1}{2}}(0)$? — интегр. μ_4

$$v_{1/2}(0) = \frac{1}{2}(\mu_4(x_0) + \mu_4(x_{1/2}))(x_{1/2} - x_0)$$

$$v_{n+\frac{1}{2}}(0) = v_{n-\frac{1}{2}}(0) + \mu_4(x_n) h_{n+\frac{1}{2}} \qquad 1 \le n \le N-1$$

Где взять $F(x_{n-1/2}, t)$?

$$F_{1/2}(t) = \frac{1}{2}(f(x_0,t) + f(x_{1/2},t))(x_{1/2} - x_0)$$

$$F_{n+\frac{1}{2}}(t) = F_{n-\frac{1}{2}}(t) + f(x_n,t) h_{n+\frac{1}{2}} \qquad 1 \le n \le N-1$$

Единая система

Введём новые обозначения

$$w_{2n}(t) = u_n(t), \quad 0 \le n \le N \qquad k = 2n$$

$$w_{2n-1}(t) = v_{n-\frac{1}{2}}(t), \quad 1 \le n \le N \qquad k = 2n-1$$

k — общий индекс, $0 \le k \le 2N$

$$\frac{dw_k}{dt} = \varphi_k(w_{k-1}, w_{k+1}) = \begin{cases} \dfrac{w_{k+1} - w_{k-1}}{h_{(k+1)/2}}, & k = 2, 4, \ldots 2N-2 \\ \dfrac{c^2(w_{k+1} - w_{k-1})}{h_{(k+1)/2}} + F_{k/2}(t), & k = 1, 3, \ldots, 2N \end{cases}$$

$2N-1$ уравнений.

Гран. условия

$$w_0(t) = u_0(t) = \mu_1(t)$$

$$w_{2N}(t) = u_N(t) = \mu_2(t)$$

Начальные условия

$w_{2n}(0) = u_n(0) = u_2(x_n)$

$w_{2n-1}(0) = v_{n-\frac{1}{2}}(0)$ ← это считать умеем.

$\boxed{\text{Разностная схема}}$

Систему ОДУ решаем Розенброком

$$\hat{\vec{w}} = \vec{w} + \tau \operatorname{Re} \vec{z}$$

$$\left(E - \alpha\tau \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{w}}\right)\vec{z} = \varphi\left(\vec{w}, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\alpha = 0;\ \underbrace{\tfrac{1}{2};\ 1;\ \tfrac{1+i}{2}}_{\text{неявные схемы}}$$

Схема двухслойная, так что можно произвольно менять шаг по времени τ (и не надо отд. формул для 1 слоя.

$\boxed{\text{Гармонический анализ}}$

Исследуем устойчивость при действительном α

Схема имеет след. вид:

$$\hat{u}_n - u_n = \frac{\tau}{h}\left(\alpha\left(\hat{v}_{n+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{n-\frac{1}{2}}\right) + (1-\alpha)\left(v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\hat{v}_{n-\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\tau c^2}{h}\left(\alpha\left(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}\right) + (1-\alpha)\left(u_n - u_{n-1}\right)\right) + \tau F_{n-\frac{1}{2}}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

У нас 2 функции, но множ. роста один на двоих

$u(x) = e^{iqx}$

$v(x) = \beta e^{iqx}$ - может иметь др. амплитуду

$\hat{u} = \rho_q u$

$\hat{v} = \rho_q v$

подставим и получим

$$\rho_q - 1 = \frac{\tau\beta}{h}\left(\alpha\rho_q \frac{e^{iq\frac{h}{2}} - e^{-iq\frac{h}{2}}}{2i} + (1-\alpha)\frac{e^{iq\frac{h}{2}} - e^{-iq\frac{h}{2}}}{2i}\right)2i$$

$$\beta(\rho_q - 1) = 2i\frac{\tau c^2}{h}\left(\alpha \sin\frac{qh}{2}\rho_q + (1-\alpha)\sin\frac{qh}{2}\right)$$

Умножаем...

$$(\rho_q - 1)^2 = \underbrace{-4\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{qh}{2}}_{S_q}\left(\alpha\rho_q + 1 - \alpha\right)^2$$

$(\rho_q - 1)^2 + (\alpha\rho_q + 1 - \alpha)^2 s_q = 0, \quad s_q > 0$

$$(1+\alpha^2 s_q)\rho_q^2 - 2(1 - \alpha(1-\alpha)s_q)\rho_q + 1 + (1-\alpha)^2 s_q = 0$$

Уравнение имеет или 1 вещ. или 2 компл. сопр. корня.
т.е. модули корней равны => по т. Виета

$$|\rho_q| = \left(\frac{1+(1-\alpha)^2 s_q}{1+\alpha^2 s_q}\right)^{1/2}$$

Должно быть $|\rho_q| \le 1$

$$0 \le \frac{1 + s_q\alpha^2 - 2\alpha s_q + s_q}{1+\alpha^2 s_q} \le 1$$

$$0 \le 1 + \frac{s_q(1-2\alpha)}{1+\alpha^2 s_q} \le 1$$

$$\frac{s_q(1-2\alpha)}{1+\alpha^2 s_q} \le 0$$

$\boxed{\alpha \ge \frac{1}{2}}$ — условие устойчивости

$\alpha = 0$ — безусл. неуст.

$\alpha = \frac{1}{2}$ — безусл. уст., но $|\rho_q| = 1$ => не диссипат.

$\alpha > \frac{1}{2}$ — безусл. уст. и диссипативна

Схемы:

1. CROS $\alpha = \frac{1+i}{2}$

$O(\tau^2 + h^2)$

по t — промежут. сетка

по x — равном. или неравномерн.

Схема немонотонна, т.к. уравнение подобно 2 уравн. переноса с волнами, бегущ. навстречу друг другу, а для уравн. переноса из II пор. => не

2. ROS 1 (чисто неявная)

$O(\tau + h^2)$

монотонна

3. ROS $\frac{1}{2}$ (полусумма)

$O(\tau^2 + h^2)$, но немонотонна гораздо сильнее, чем CROS

Явная схема безусл. неустойч., но можно построить уст. явн. схему не вход. в семейств. схем Розенброка. Но смысл в ней есть только для ~~[illegible]~~ после многом. сх