# **Введение**

В современном мире интернет-технологии всё глубже проникают в нашу жизнь, возрастает значимость проблем хранения и передачи информации. В частности, одной из наиболее актуальных тем исследований является эффективное представление изображений. Развитие данной предметной области происходит в двух направлениях: сокращения объема, занимаемого данными при хранении информации, и для уменьшения времени передачи информации.

Одним из вариантов решения этих проблем является применение методов компрессии с целью уменьшения занимаемого интересующими данными объема.

Объектом исследования являются системы хранений изображений. Предметом исследования являются методы сжатия изображений.

Целью работы является исследование и анализ методов сжатий изображений с использованием вейвлет-преобразований. В рамках индивидуального задания по практике были решены следующие задачи: анализ существующего алгоритма сжатия изображения, исследование вейвлет-компрессии, сравнение данных методов.

# **Основные понятия**

## **1.1 Полутоновые изображения**

Статические растровые изображения представляют собой двумерный массив чисел. Элементы этого массива называют пикселами (от английского pixel ≈ picture element). Все изображения можно подразделить на две группы: с палитрой и без нее. У изображений с палитрой в пикселе хранится число (индекс) в некотором одномерном векторе цветов, называемом палитрой. Чаще всего встречаются палитры из 16 и 256 цветов.

Изображения без палитры бывают в какой-либо системе цветопредставления и *в градациях серого* (полутоновые изображения) [1]. Для последних значение каждого пиксела интерпретируется как яркость соответствующей точки. В данной работе рассматриваются изображения такого вида.

## **1.2 Дискретный сигнал**

Под термином сигнал понимается физический процесс (например, изменяющееся во времени напряжение), отображающий некоторую информацию (сообщение). Математически сигнал описывается некоторой функцией 𝑓(𝑡) определенного вида. Сигналы бывают аналоговыми, дискретными и цифровыми. Аналоговый сигнал – описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией 𝑓(𝑡).

Дискретный сигнал – это функция дискретного аргумента y = y(nT) с областью определения D = { nT|n ϵ Z } [2].

## **1.3 Кратно-масштабный анализ**

Последовательность подпространств {𝑉𝑚} ⊂ 𝐿 2 (𝑅), 𝑚 ∈ 𝑍, образует кратно-масштабный анализ (КМА), если обладает следующими свойствами [2]:

1. Подпространства вложены, ∀𝑚 ∈ 𝑍: 𝑉𝑚 ⊂ 𝑉𝑚+1.
2. Если функция 𝑓(𝑥) ∈ 𝑉𝑚, то 𝑓(2𝑥) ∈ 𝑉𝑚+1 и наоборот.
3. Существует некоторая функция 𝜙(𝑥) ∈ 𝑉0, целочисленные сдвиги которой {𝜙(𝑥 − 𝑛)}𝑛∈𝑍 ⊂ 𝑉0 образуют ортонормированный базис подпространства 𝑉0 . Такая функция 𝜙(𝑥) называется масштабирующей.
4. Для всех подпространств есть единственный общий элемент – нулевой, ∩ 𝑉𝑚 = {0}, 𝑚 ∈ 𝑍.
5. Замыкание множества всех подпространств является пространством 𝐿2 (𝑅): ⋃ = 𝐿2 (𝑅), 𝑚 ∈ 𝑍.

## **1.4 Вейвлеты**

Вейвлеты – относительно новое понятие для прикладной математики.

Вейвлет-преобразование разбивает данные или функции на составляющее с различными частотами, каждая из которых позже рассматривается отдельно с разрешением, подходящим по масштабу [3].

Обозначим через 𝑊𝑚 подпространство, представляющее собой ортогональное дополнение подпространства 𝑉𝑚 до 𝑉𝑚+1.

Основополагающим утверждением для кратно-масштабном анализе является следующее: для масштабирующей функции найдется такая функция ѱ(𝑥) ∈ 𝑊0 , что множество функций образует ортонормированный базис в подпространстве 𝑊m. Функцию, для которой выполняется данное утверждение, принято называть материнским вейвлетом.

Произвольную функцию 𝑓(𝑥)) ∈ 𝐿2 (𝑅) можно представить в виде разложения по ортогональному базису вейвлетов [2]:

Где 𝑓M = 𝐴M(𝑓), 𝑐m.n (𝑓) = 〈𝑓, ѱm,n 〉. Таким образом, материнский вейвлет можно представить с помощью базиса :

где . Уравнение называется масштабирующим для вейвлетов.

## **1.5** **Вейвлет ряды**

Так как , где является ортогональным дополнением подпространства до , вещественная функция 𝑓(𝑥) может быть представлена разложением масштабирующей функции в подпространстве и некоторыми из разложений материнского вейвлета в подпространствах [2]. Следовательно, имеет место представление вида:

Здесь j0 – произвольный начальный масштаб, – коэффициенты приближений, – коэффициент деталей.

В случае, когда – дискретная, полученная последовательность называется дискретным вейвлет-преобразования.

## **1.6 Арифметическое кодирование**

Арифметическое кодированием называется отображение слов алфавита с заданным распределение вероятностей на множество двоичных слов [4].

Основанная идея арифметического кодирования заключается в следующем: слова алфавита сортируются по возрастанию вероятности их появления, пропорционально этим вероятностям делится интервал от 0 до 1. Каждая часть такого интервала соответствует двоичному представлению слова исходного алфавита. Таким образом, для наиболее часто встречающихся слов будут использоваться наиболее компактные представления.

## 1.7 Машинное обучение

Машинное обучение представляет собой науку (и искусство) программирования компьютеров для того, чтобы они могли обучаться на основе данных.

Методы машинного обучения делятся на четыре вида: обучение с учителем, обучение без учителя, частичное обучение, обучение с подкреплением. [8]

При обучении с учителем данные, которые планируется использовать в системе, поставляются с метками (желательные решения). Числовые характеристики, используемые для нахождения метки, называются признаками. Матрицу, строки которой состоят из набора признаков, соответствующих одной целевой метке, будем обозначать за . Вектор-столбец желательных решений - . Набор данных с признаками и метками называется обучающей выборкой.

Как пример обучения с учителем можно рассмотреть задачу регрессии. Суть данной задачи состоит в том, чтобы по числовым признакам восстановить значение метки. Например, спрогнозировать цену автомобиля в зависимости от его пробега, модели, возраста. Еще одной типичной задачей обучения с учителем является задача классификации. Классификация отличается от регрессии конечностью множества возможных значений метки.

## 1.8 Линейная регрессия

Рассмотри более подробно алгоритм линейной регрессии. Пусть задана обучающая выборка , где , при .

Задача линейной регрессии состоит в нахождении линейной функции, которая лучше всего приближает значение [9]:

где – матрица весовых коэффициентов, – свободный член.

Для того, чтобы найти матрицы и , мы составим функцию вида

которую назовем функцией потерь. Можно взять функции другого вида, но мы остановимся на этой.

Обозначим за расширенный вектор-столбец весовых коэффициентов и свободного члена

Аналогично обозначим расширенный вектор-столбец признаков

Тогда в веденных обозначениях функция регрессии будет иметь вид:

функцию потерь запишем, как квадрат нормы разницы между и :

Теперь задача регрессии может быть записана в виде задачи минимизации функции :

Таким образом, минимизируя ведённую нами функцию потерь, мы сможем вычислить значения , такие, при которых выражение будет «предсказывать» величину .

## 1.9 Случайный лес

Для начала введем понятие дерева решений.

Берется весь обучающий набор данных, называемый корневым узлом, и разбивается на два или более узлов (сегментов) так, чтобы наблюдения, попавшие в разные узлы, максимально отличались друг от друга по зависимой переменной (например, выделяем два узла с наибольшим и наименьшим процентами «плохих» заемщиков). В роли правил разбиения, максимизирующих эти различия, выступают значения независимых переменных (пол, возраст, доход и др.). Качество разбиения оценивается с помощью статистических критериев. Правила и статистики отмечаются на ветвях – линиях, которые соединяют разбиваемый узел с узлами, полученными в результате разбиения. Для каждого узла вычисляются вероятности в виде процентных долей категорий зависимой переменной (если зависимая переменная является категориальной) или средние значения зависимой переменной (если зависимая переменная является количественной). В результате выносится решение – спрогнозированная категория зависимой переменной (если зависимая переменная является категориальной) или спрогнозированное среднее значение зависимой переменной (если зависимая переменная является количественной).

# **Список источников**

[1] Д.С.Ватолин «Алгоритмы cжатия изображений». (Методическое пособие).1999. 76 с.

[2] С.В. Умняшкин. «Основы теории цифровой обработки сигналов». М.: Техносфера, 2016. 528 с.

[3] Добеши И. «Десять лекций по вейвлетам». "РХД", 2001 г. 464 с.

[4] В. Н. Потапов, “Арифметическое кодирование сообщений с использованием случайных последовательностей”, ПДМ, 2008, № 2(2), 133 с.

[5] А. В. Григорьев «Компрессия изображений на основе пакетных вейвлет-преобразований». (Бакалаврская работа). 2016. 53 с.

[6] <https://scask.ru/a_lect_cod.php?id=12>

[7] С. К. Абармов, Н. В. Бурцев, С. С. Кривенко, А. Н. Зеляченко, В. В. Лукин «Автоматическое сжатие в окрестности оптимальной рабочей точки изображений с шумом кодерами типа SPIHT и JPEG2000». Информационные технологии. 2016. 109с.

[8] Жерон Орельен «Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow» 2018, 688 с.

[9] В.В.Вьюгин «Математические основы машинного обучения и прогнозирования». 2013. 387с.

[10] C. П. Чистяков «Случайные леса: обзор». 2013. С. 117–136

[11] Груздев А.В. «Прогнозное моделирование в IBM SPSS Statistics, R и Python. Метод деревьев решений и случайный лес». 2017. C. 642 с.