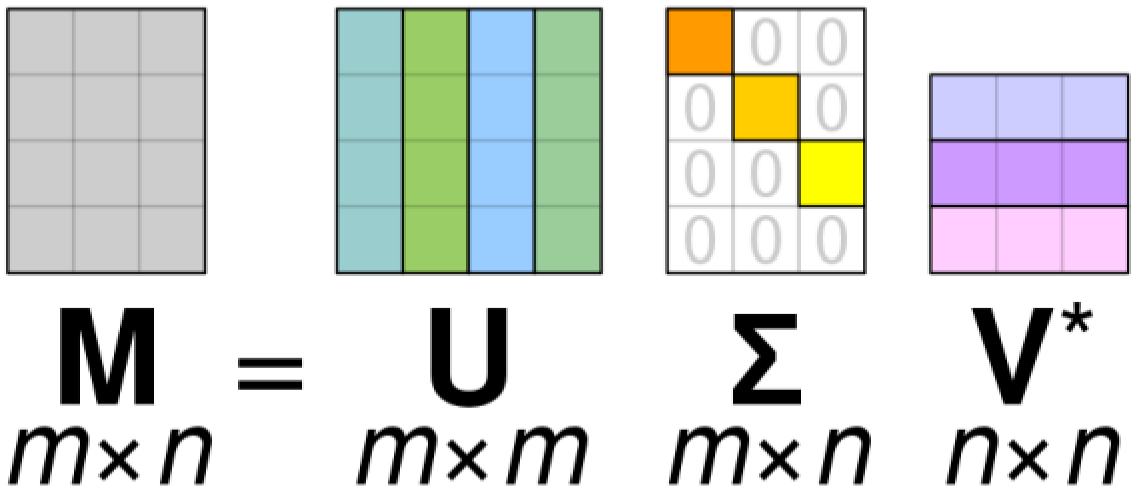
Singular Value Decomposition (SVD)

Semua matriks dapat diuraikan menjadi 3 matriks baru,

$$SVD(A) = U\Sigma U^T$$
$$A = \text{input matrix}$$
$$U = \text{orthogonal matrix (m x m), left singular values}$$
$$\Sigma = \text{diagonal singular values matrix (m x n)}$$
$$V = \text{orthogonal matrix (n x n), right singular values}$$



Orthogonal Matrix

Matrix yang kolom dan barisnya merupakan vektor orthonormals

$$Q^TQ = QQ^T = I, \text{where } Q^T = Q^{-1}$$

Suatu vektor dapat dikatakan orthonormal apabila memiliki magnitude = 1 dan dot product (·) = 0.

Contoh pada matriks rotasi :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Matriks rotasi merupakan orthogonal karena $RR^T = I$, dan $R^T = R^{-1}$

Singular Values

Singular values pada dasarnya merupakan akar dari eigenvalues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ dari A^TA, maka singular valuesnya adalah $\sigma_1 = \sqrt{\lambda}_1, \sigma_2 = \sqrt{\lambda}_2, \sigma_3 = \sqrt{\lambda}_3, \ldots, \sigma_n = \sqrt{\lambda}_n$. Matriks A^TA merupakan matriks symmetric $n \times n$.

Matriks diagonal Σ, memiliki urutan σ_n dari paling besar ke paling kecil dan ≥ 0.

Rank Matrix

Rank matriks merupakan nilai kolom atau baris yang independen secara linear.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, R_2 = R_2 - 4R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, R_3 = R_3 - 7R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}, R_2 = \frac{R_2}{R_3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}, R_3 = R_3 + 6R3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, jumlah rank dari matriks A adalah 2 (non-zeros baris atau kolom).

How To

1. Hitung $A^T A$ adalah matriks simetrik, maka eigenvectornya orthogonal. Untuk mendapatkan matriks V^T
2. Hitung eigenvalues (λ) dengan $\det(A^T A - \lambda I) = 0$, maka diperoleh eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
3. Hitung eigenvector (v) dengan menggunakan $\lambda_{1:n}$. Agar magnitude eigenvector = 1, tiap element pada eigenvector dibagi dengan $\sqrt{v_i^2 + v_j^2 + \ldots + v_n^2}$
4. Hitung nilai singular value $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
5. Hitung langkah 1 sampai 3, dengan AA^T untuk mendapatkan matriks U