Kalman Filter

Kalman FIlter berfungsi untuk melakukan prediksi dan estimasi pada *state* (keadaan) suatu sistem.

Kalman filter membutuhkan 2 model, yaitu state model dan observation model

1. State Model

   State model adalah persamaan / model yang merepresentasikan perubahan *state* pada sistem w.r.t waktu.

2. Observation Model

   Observation model adalah persaamaan / model yang merepresentasikan data yang diukur biasanya dengan sensor yang memberikan data eksternal robot dihubungkan dengan keadaan sistem.

Multivariate Kalman Filter

State pada sistem$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

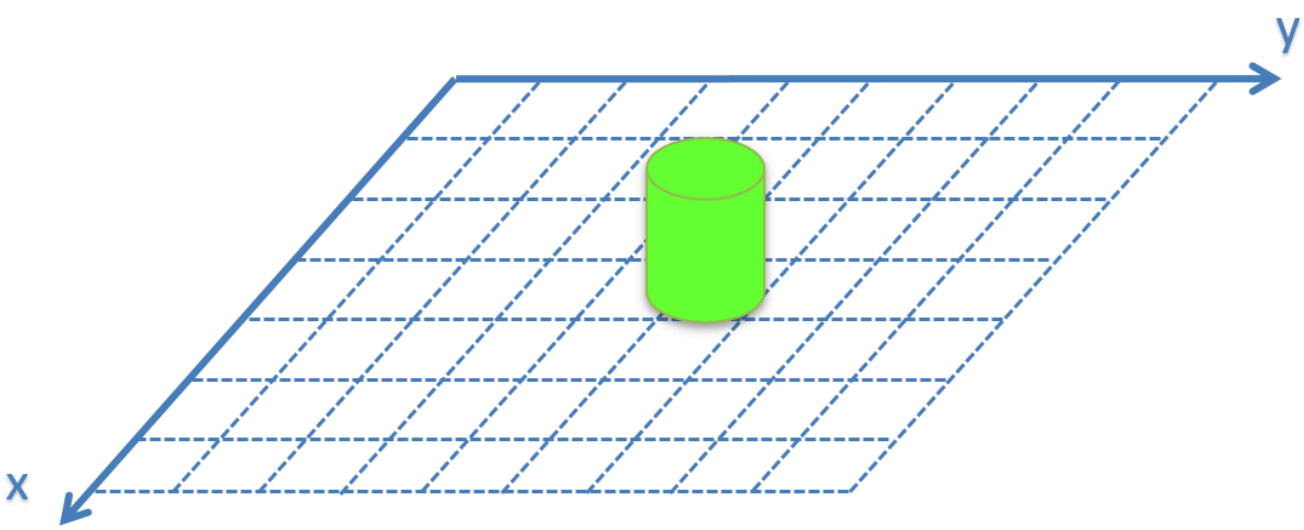
Multivariate Kalman Filter memberikan output berupa **multivariate random variabel** dan **covariance matrix** merupakan matriks persegi sebesar jumlah state ketidakpastian.

Covariance matrix pada **Kalman Filter** meliputi :

- $P_{n,n}$: covariance matriks pada estimasi
- $P_{n+1,n}$: covariance matriks pada prediksi
- R_n : covariance matriks yang menggambarkan ketidakpastian pengukuran
- Q : covariance matriks untuk proses noise

Covariance

Covariance mengukur seberapa korelasi antara 2 atau lebih variabel random



Covaraince antara populasi X dan populasi Y dengan banyak data N:

$$COV(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Jika menggunakan sample:

$$COV(X,Y) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Covariance Matrix

Coariance matrix adalah matriks persegi yang merepresentasikan covariance antar setiap element pada setiap state.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} VAR(x) & COV(x,y) \\ COV(y,x) & VAR(y) \end{bmatrix}$$

Jika x dan y tidak berkolerasi maka bagian dari matriks Σ yang bukan diagonal bernilai 0

Jika memiliki *state* x dengan dimensi $1 \times k$,

$$COV(x) = E((x - \mu_x)(x - \mu_x)^T)$$

Proof :

$$\begin{aligned} COV(x) &= E\left(\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_{x_1})^2 & (x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2}) & \cdots & (x_1 - \mu_{x_1})(x_k - \mu_{x_k}) \\ (x_2 - \mu_{x_2})(x_1 - \mu_{x1}) & (x_2 - \mu_{x_2})^2 & \cdots & (x_2 - \mu_{x_1})(x_k - \mu_{x_k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_k - \mu_{x_k})(x_1 - \mu_{x1}) & (x_k - \mu_{x_k})(x_2 - \mu_{x_2}) & \cdots & (x_k - \mu_{x_k})^2 \end{bmatrix}\right) \\ &= E\left(\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_{x_1}) \\ (x_2 - \mu_{x_2}) \\ \vdots \\ (x_k - \mu_{x_k}) \end{bmatrix} [[(x_1 - \mu_{x_1}) \quad (x_2 - \mu_{x_2}) \quad \cdots \quad (x_k - \mu_{x_k})]\right) \\ &= E((x_{1:k} - \mu_{x_{i:k}})(x_{1:k} - \mu_{x_{i:k}})^T) \end{aligned}$$

Note :

$E(v)$ adalah ekspektasi, rata-rata dari variabel random

Covariance Matrix Properties

- $$\Sigma_{ii} = \sigma_{ii}^2$$
- $$tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n}\Sigma_{ii} \geq 0$$
- $$\Sigma = \Sigma^T$$

Multivariate Gaussian Distribution

$$p(x|\mu,\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)|\Sigma|}} exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

State Equation

Befungsi untuk melakukan prediksi berdasarkan estimasi yang sudah ada.

$\hat{x}_{n+1,n} = F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n} + w_n$

$\hat{x}_{n+1,n}$: prediksi state pada $n+1$

$\hat{x}_{n,n}$: prediksi state pada n

u_n : variabel kontrol *input* terukur ke dalam sistem

w_n : noise, *input* tidak terukur ke dalam sistem (disebut proses noise)

F : matrix transisi

G : matrix kontrol (mapping efek u_n ke variabel *state*)

Persamaan state dapat diperoleh dengan *State Space Equations* dengan menganlisa dynamic dari sistem.

Covariance Equation

Mengukur ketidakpastian dari prediksi *State Equation*

$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$

Proof :

dengan $COV(x) = E((x_{1:k} - \mu_{x_{i:k}})(x_{1:k} - \mu_{x_{i:k}})^T)$, maka

$P_{n,n} = E((\hat{x}_{n,n} - \mu_{\hat{x}_{n,n}})(\hat{x}_{n,n} - \mu_{\hat{x}_{n,n}})^T)$, dengan menggunakan *state equation* dapat diperoleh $P_{n+1,n}$

$$\begin{aligned}
P_{n+1,n} &= E((\hat{x}_{n+1,n} - \mu_{\hat{x}_{n+1,n}})(\hat{x}_{n+1,n} - \mu_{\hat{x}_{+1,n}})^T) \\
&= E\left((F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n} - F\hat{\mu}_{x\,n,n} + G\hat{u}_{n,n})(F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n} - F\hat{\mu}_{x\,n,n} + G\hat{u}_{n,n})^T\right) \\
&= E\left(F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}}))^T\right) \\
&= E\left(F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})^T F^T\right) \\
&= FE\left(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})^T\right) F^T
\end{aligned}$$

sehingga,

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T$$

Observation Model

$z_n = Hx_n + v_n$

z_n : vektor observasi

H : matriks observasi

x_n : state sebenarnya

v_n : random noise (disebut noise observasi)

Contoh pada kasus sensor jarak ultrasonik, state dari sistem adalah jarak x_n, output dari sensor merupakan ToF yang terukur z_n, maka *obeservation model*-nya :

$z_n = [\frac{2}{c}]x_n + v_n$

dengan c merupakan kecepatan suara

Observation Uncertainty

$R_n = E(v_n v_n^T)$

R_n : covariance matrix untuk obervasi

v_n : kesalahan observasi

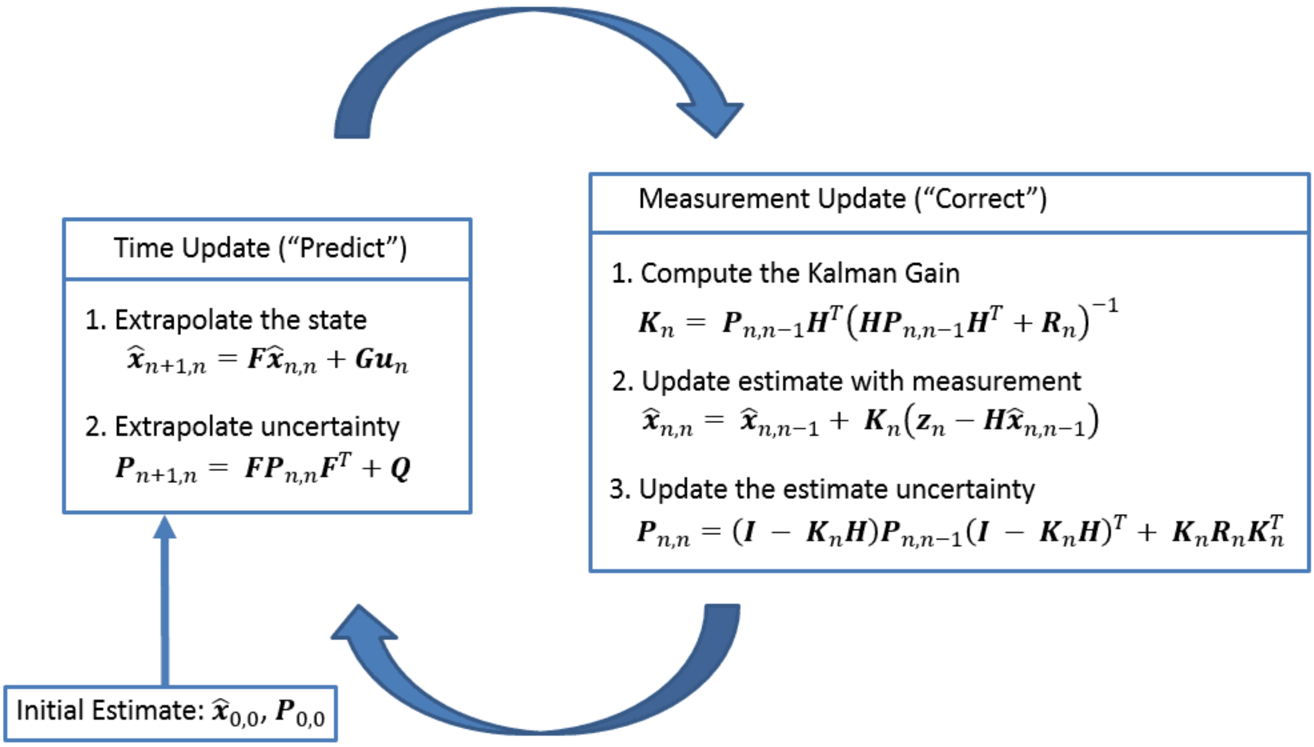
Process Uncertainty

$Q_n = E(w_n w_n^T)$

Q_n : covariance matrix untuk proses noise

w_n : proses noise

Summary



Kalman Gain

Kalman Gain merupakan bobot bagi *measurement model*, dengan kata lain *Kalman Gain* menentukan seberapa besar pengaruh *measurement model* terhadap estimasi *state*.

$$KG = \frac{error_{estimate}}{error_{estimate} + error_{measurement}}$$

- $error_{estimate} > error_{measurement} : \ KG \rightarrow 1$
- $error_{estimate} < error_{measurement} : \ KG \rightarrow 0$

$$estimate_t = estimate_{t-1} + KG(measurement_t - estimate_{t-1})$$

Error on Estimation

$$E_{estimate_t} = [1 - KG]E_{estimate_{t-1}}$$

- $KG \rightarrow 1$, maka error pada estimasinya besar, sehingga persamaan diatas akan menghasilkan $E_{estimate}$ yang kecil
- $KG \rightarrow 0$, maka error pada estimasinya kecil, sehingga persamaan diatas akan mempertahankan error estimasi dari waktu $t - 1$
- $E_{estimate_t} < E_{estimate_{t-1}}$

Note :

Saat varians pada estimasi mengecil, maka mendekati nilai sebenarnya

References :

- kalmanfilter.com
- Michel van Biezen - Kalman Filter Playlist