Singular Value Decomposition - Iterative Closest Point (SVD-ICP)

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$$
$$Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$$
$$E = \underset{R,t}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^{n} ||Rp_i + t - q_i||^2$$

E adalah fungsi loss, P adalah titik korespondensi pada *pointcould* source dan Q adalah titik korespondensi pada pointcloud reference. Tujuan ICP adalah menemukan transformasi terbaik yang dapat menayelarasakn *pointcloud* P ke Q.

$$\mu_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} q_i$$
$$\mu_q = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p_i$$

μ_q dan μ_p merupakan center of mass dari pointcloud Q dan P. Kemudian, tentukan koordinat lokal pada pointcloud Q dan P dengan mengurangkan tiap titik Q dan P terhadap center of mass-nya.

$$Q' = Q_i - \mu_q = \{Q'_i\}$$
$$P' = P_i - \mu_p = \{P'_i\}$$
$$W = \sum_{i=1}^{N} q'_i p'^T_i$$
$$W = \begin{bmatrix} cov(p_x, q_x) & cov(p_x, q_y) \\ cov(p_y, q_x) & cov(p_y, q_y) \end{bmatrix}$$

W merupakan cross-covariance, cross-covariance memberikan informasi bagaimana perubahan pada koordinat di titik p jika koordinat titik x berubah. Cross-covariance yang ideal adalah matriks identitas, dikarenakan pada kondisi ideal tidak ada korelasi antara axis-x dan axis-y.

$$R = VU^T$$
$$t = \mu_y - R\mu_x$$

Vektor Translasi $(t = \mu_p - R\mu_x)$

Turunkan E terhadap t,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - Rx_i - t) = 0$$
$$t = y_i - Rx_i$$

Matriks Rotasi $\left(R = VU^T\right)$

Rotasi R mencapai optimal jika translasi $t = 0$,

$$R = \underset{R\in SO(n)}{argmin}\sum_{i=1}^{n}\|Rx_i - y_i\|^2$$

$$\begin{aligned}\|Rx_i - y_i\|^2 &= (Rx_i - y_i)^T(Rx_i - y_i)\\ &= x_i^T R^T R x_i - y_i^T R x_i - x_i^T R^T y_i - y_i^T y_i\\ &= x_i^T x_i - y_i^T R x_i - x_i^T R^T y_i - y_i^T y_i\end{aligned}$$

$x_i^T R^T y_i$ adalah operasi skalar, sehingga $a = a^T$

$$x_i^T R^T y_i = \left(x_i^T R^T y_i\right)^T = y_i^T R x_i$$

$$\underset{R\in SO(d)}{\text{argmin}}\sum_{i=1}^{n}\|Rx_i - y_i\|^2 = \underset{R\in SO(d)}{\text{argmin}}\sum_{i=n}^{n} x_i^T x_i - 2y_i^T R x_i - y_i^T y_i$$

untuk mendapatkan matriks rotasi R, persamaan $x_i^T x_i$ dan $y_i^T y_i$ dapat diabaikan. Sehingga, untuk meminimalkan nilai χ^2, sama dengan memasimalkan nilai :

$$\underset{R\in SO(d)}{\text{argmax}}\sum_{i=1}^{n} y_i^T R x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^T R x_i = \text{tr}(Y^T R X) = \text{tr}(R X Y^T) = \text{tr}(RW)$$

dengan sifat trace pada matrix $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ dan $XY^T = W$, sehingga

$$SVD(W) = U\Sigma V^T, \text{subtitute to } tr(RXY^T)$$
$$\text{tr}(RU\Sigma V^T) = \text{tr}(\Sigma V^T R U)$$

tetapkan matriks $M = V^T RU$, M merupakan matriks orthogonal. Sehingga,

$$\text{tr}(\Sigma V^T R U) = \text{tr}(\Sigma M)$$

dengan menerapkan Cauchy-Schwarz inequality pada $\text{tr}(\Sigma M)$,

$$\mathrm{tr}(\Sigma M) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i m_{ii}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i m_{ii}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \sum_{i=1}^{r} m_{ii}^2$$

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i m_{ii} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \sum_{i=1}^{r} m_{ii}^2}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$$

dikarenakan M merupakan matriks orthogonal, maka $m_{ii}^2 = |m_{ii}| \leq 1$. Sehingga, untuk memperoleh nilai maksimum m_{ii} bernilai 1. Seperti yang dijelaskan diawal bahwa M merupakan matriks orthogonal, sehinggga m_{ii} bernilai 1 jika $M = I$

$$M = I = V^T RU$$

$$R^T = V^T U$$

$$R = UV^T$$

References :

- Sorkine-Hornung, O., & Rabinovich, M. (2017). Least-squares rigid motion using svd. *Computing*, *1*(1), 1-5. https://igl.ethz.ch/projects/ARAP/svd_rot.pdf
- Arun, K. S., Huang, T. S., & Blostein, S. D. (1987). Least-Squares fitting of two 3-D point sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *PAMI*-*9*(5), 698–700. https://doi.org/10.1109/tpami.1987.4767965