10. Polohové a metrické úlohy

Analytická geometrie

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Vzájemná poloha bodu a dalšího objektu

Definice 10.1

Body $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$ jsou

- totožné, jestliže $\boxed{x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 = y_2 \ \wedge \ x_3 = y_3.}$
- různé, jestliže nejsou totožné.

Definice 10.2

Bod X (ne)leží na přímce $p = p(A, \mathbf{u})$, jestliže (ne)platí

$$\boxed{\exists t \in \mathbb{R} \ : \quad X = A + t\mathbf{u}.}$$

Definice 10.3

Bod X (ne)leží v rovině $\rho = \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, jestliže (ne)platí

$$\boxed{\exists t, s \in \mathbb{R} \ : \quad X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.}$$

Vzájemná poloha dvou přímek

Příklad 10.1 Určete kvalitativně průnik přímek

$$p: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1), \; t \in \mathbb{R},$$
$$q: \; X = [3,4,6] + s(2,2,1), \; s \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & t & = & 3 & + & 2s \\ 2 & & & = & 4 & + & 2s \\ 5 & + & t & = & 6 & + & s \end{array}$$

$\ldots \exists!$ řešení

$\Longrightarrow$ průnikem je bod

Definice 10.4

O dvou přímkách v E_3 říkáme, že jsou

- mimoběžné, jestliže mají prázdný průnik a jejich směrové vektory jsou lineárně nezávislé.
- rovnoběžné různé, jestliže mají prázdný průnik a jejich směrové vektory jsou lineárně závislé.
- rovnoběžné totožné, jestliže jejich průnikem je přímka.
- jsou různoběžné, jestliže jejich průnikem je bod.

Příklad 10.2 Určete kvalitativně průnik přímky a roviny

$$p: \ X = [1,2,5] + t(1,0,1), \ t \in \mathbb{R},$$

$$\sigma: \ X = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2), \ r,k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & + & t & = & 3 & + & 3r & - & 2k \\ 2 & & & = & 4 & + & 2r & - & 2k \\ 5 & + & t & = & 6 & - & r & + & 2k \end{array}$$

$\ldots \nexists$ řešení

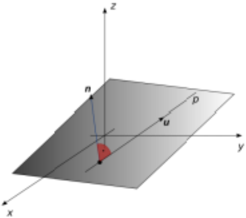
$\Longrightarrow$ průnikem je $\emptyset$

Vzájemná poloha přímky a roviny

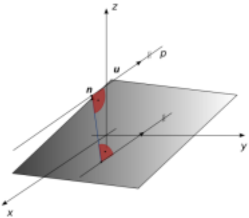
Definice 10.5

O přímce a rovině v E_3 říkáme, že

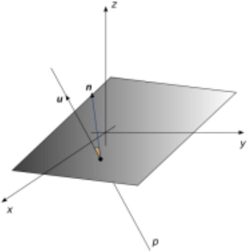
- jsou ryze rovnoběžné, jestliže mají prázdný průnik.
- přímka leží v rovině, jestliže jejich průnikem je přímka.
- jsou různoběžné, jestliže jejich průnikem je bod.



přímka leží v rovině



ryze rovnoběžné



různoběžné

Příklad 10.3

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ, je-li

a)
$$p: \left.\begin{aligned} x_1 &= -2+3t \\ x_2 &= 1-4t \\ x_3 &= -5+4t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}, \quad \rho: 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5 = 0.$$

b)
$$p: \left.\begin{aligned} x_1 &= -2+t \\ x_2 &= 4-2t \\ x_3 &= 8-3t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}, \quad \rho: \left.\begin{aligned} x_1 &= -5-r+2q \\ x_2 &= -7+4r+q \\ x_3 &= -5-5r-4q \end{aligned}\right\} r, q \in \mathbb{R}.$$

c) $p = \sigma \cap \tau, \quad \sigma: -2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0, \quad \tau: x_1 + 2x_3 - 11 = 0,$
$\rho: x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0.$

Příklad 10.4 Určete kvalitativně průnik rovin

$$\rho: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \quad t,s \in \mathbb{R},$$
$$\sigma: \; X = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2), \; r,k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & t & + & 2s & = & 3 & + & 3r & - & 2k \\
2 & & & + & 2s & = & 4 & + & 2r & - & 2k \\
5 & + & t & + & s & = & 6 & - & r & + & 2k
\end{array}$$

$\dots \exists$ nekonečně mnoho řešení (1 parametr)

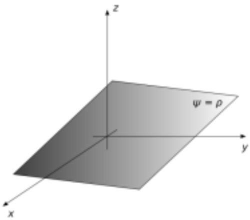
$\Longrightarrow$ průnikem je přímka

Vzájemná poloha dvou rovin

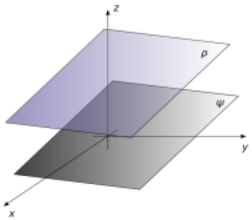
Definice 10.6

O dvou rovinách v E_3 říkáme, že jsou

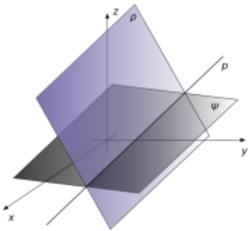
- rovnoběžné různé, jestliže mají prázdný průnik.
- rovnoběžné totožné, jestliže průnikem je rovina.
- různoběžné, jestliže jejich průnikem přímka.



rovnoběžné totožné



rovnoběžné různé



různoběžné

Příklad 10.5

Určete vzájemnou polohu rovin

a) $\rho : 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \quad \sigma : 8x_1 + 8x_2 - 12x_3 - 8 = 0.$

b) $\rho : 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \quad \sigma : 8x_1 + 8x_2 - 12x_3 + 8 = 0.$

c)
$$\rho : \left.\begin{aligned} x_1 &= t + 2s \\ x_2 &= t + 2s \\ x_3 &= 1 + s \end{aligned}\right\} t, s \in \mathbb{R}, \quad \sigma : \left.\begin{aligned} x_1 &= 7 + 3r + 2q \\ x_2 &= 5 + 2r + q \\ x_3 &= 5 + 2r + q \end{aligned}\right\} r, q \in \mathbb{R}.$$

d) $\rho : 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 8 = 0, \quad \sigma : 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 26 = 0.$

e)
$$\rho : 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 8 = 0, \quad \sigma : \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + t + 2s \\ x_2 &= 2 - 2t + s \\ x_3 &= 2 - t \end{aligned}\right\} t, s \in \mathbb{R}.$$

Metrika, vzdálenost

Definice 10.7

- Vzdálenost bodů $X, Y \in E_3$ je číslo $\boxed{d(X, Y) = |X - Y|.}$
- Vzdálenost množin $M, N \subset E_3$ je číslo

$$\boxed{d(M, N) = \min\{d(X, Y) : X \in M, Y \in N\}.}$$

Poznámka

Vzdálenost dvou množin, které mají alespoň jeden společný bod (tj. neprázdný průnik), je 0.

Poznámka 10.1

Euklidovská metrika (v E_3) je zobrazení, které každé dvojici bodů z E_3 přiřadí jejich vzdálenost.

Vzdálenost bodu a přímky

Věta 10.1

Pro bod X a přímku $p = p(A, \mathbf{u})$ v E_3 platí

$$\boxed{d(X, p) = \frac{|(X - A) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.}$$

Příklad 10.6

Určete vzdálenost bodu $X = [6, 6, 9]$ a přímky

$$p: \left.\begin{aligned} x_1 &= -2 - 4t \\ x_2 &= 5 + 5t \\ x_3 &= -3t \end{aligned}\right\} \; t \in \mathbb{R}.$$

Vzdálenost bodu a roviny

Věta 10.2

Pro bod X a rovinu $\rho = \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ v E_3 platí

$$\boxed{d(X, \rho) = \frac{|(X - A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.}$$

Příklad 10.7

Určete vzdálenost bodu $X = [1, 2, 5]$ a roviny

$$\rho : \; 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 40 = 0.$$

Vzdálenosti přímek a rovin

Věta 10.3

- Pro přímky $p = p(A, \mathbf{u})$, $q = q(B, \mathbf{v})$ v E_3 platí

$$d(p,q) = \begin{cases} \dfrac{|(B-A) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}, & \text{jestliže jsou rovnoběžné,} \\ \dfrac{|(B-A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}, & \text{jestliže jsou mimoběžné.} \end{cases}$$

- Pro přímku $p = p(A, \mathbf{u})$ a rovinu $\rho = p(B, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ v E_3 , které jsou ryze rovnoběžné, platí

$$d(p,\rho) = \frac{|(B-A) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

- Pro roviny $\rho = \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ $\sigma = \sigma(B, \mathbf{w}, \mathbf{x})$ v E_3 , které jsou rovnoběžné různé, platí

$$d(\rho,\sigma) = \frac{|(B-A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.$$

Odchylky

Definice 10.8

- Odchylka přímek $p, q \subset E_3$ se směrovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, je číslo $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ splňující

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|};}$$

  také se označuje $\boxed{\varphi(p, q).}$

- Odchylka množin $M, N \subset E_3$, z nichž každá je buď přímka nebo rovina v E_3, je číslo

$$\boxed{\varphi(M, N) = \min\{\varphi(p, q) : p \subset M, q \subset N\}.}$$

Věta 10.4

Nechť $p \subset E_3$ je přímka se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a nechť $\rho, \sigma \subset E_3$ jsou roviny s normálovými vektory $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\sigma$. Platí

$$\boxed{\sin\varphi(p,\rho) = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\rho|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{n}_\rho|}}, \qquad \boxed{\cos\varphi(\rho,\sigma) = \frac{|\mathbf{n}_\rho\cdot\mathbf{n}_\sigma|}{|\mathbf{n}_\rho|\,|\mathbf{n}_\sigma|}}.$$

Speciálně, jsou-li $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}_\rho$ směrové vektory roviny ρ a $\mathbf{u}_\sigma, \mathbf{v}_\sigma$ směrové vektory roviny σ, platí

$$\boxed{\sin\varphi(p,\rho) = \frac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_\rho\times\mathbf{v}_\rho)|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}_\rho\times\mathbf{v}_\rho|}}, \qquad \boxed{\cos\varphi(\rho,\sigma) = \frac{|(\mathbf{u}_\rho\times\mathbf{v}_\rho)\cdot(\mathbf{u}_\sigma\times\mathbf{v}_\sigma)|}{|\mathbf{u}_\rho\times\mathbf{v}_\rho|\,|\mathbf{u}_\sigma\times\mathbf{v}_\sigma|}}.$$

Příklad 10.8

a) Určete odchylku přímek

$$p: \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - 12t \\ x_2 &= 4 + 5t \\ x_3 &= -9 + 6t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}, \qquad p: \left.\begin{aligned} x_1 &= 6 + 4s \\ x_2 &= 2 - 3s \\ x_3 &= 1 - 4s \end{aligned}\right\} s \in \mathbb{R}.$$

b) Určete odchylku přímky p a roviny ρ, je-li

$$p: \left.\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2t \\ x_2 &= 7 + t \\ x_3 &= 1 + 2t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}, \qquad \rho: \ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 16 = 0.$$

c) Určete odchylku rovin

$$\rho: \ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 19 = 0, \qquad \sigma: \ 4x_1 + 12x_2 + x_3 + 50 = 0.$$

Vybrané metrické úlohy

Příklad 10.9

$$A = [1, 2, 5],\ C = [3, 4, 6],\ \mathbf{u} = (1, 0, 1),\ \mathbf{v} = (2, 2, 1)$$

a) Určete vzdálenost bodů A, C. $\ldots \underline{\underline{d(A, C) = 3}}$

b) Určete vzdálenost bodu C a přímky $p:\ X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$.
$\ldots \underline{\underline{d(C, p) = \frac{3}{\sqrt{2}}}}$

c) Určete vzdálenost bodu $O = [0, 0, 0]$ a roviny
$\rho:\ X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$. $\ldots \underline{\underline{d(O, \rho) = \frac{10}{3}}}$

d) Určete odchylku φ přímek
$p:\ X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad q:\ X = C + s\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{R}$. $\ldots \underline{\underline{\varphi(p, q) = \frac{\pi}{4}}}$

Konec

(10. Polohové a metrické úlohy)