Analytická geometrie

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

7. Kružnice

GOA – ORLOVA.CZ

Rovnice kružnice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu, tzv. středu kružnice, danou vzdálenost, tzv. poloměr kružnice.

Kružnici se středem $S[m; n]$ a poloměrem r lze zapsat

- středovou rovnicí: $\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=q, \qquad \text{kde } q=r^2}$.
- obecnou rovnicí: $\boxed{x^2+y^2-2mx-2ny+p=0, \qquad \text{kde } p=m^2+n^2-r^2}$.

Příklad 7.1 Najděte středovou a obecnou rovnici kružnice se středem $S=[2;3]$ a polom. $r=4$.

- středová:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$
$$\underline{\underline{(x-2)^2+(y-3)^2=16}}$$

- obecná:

$$x^2+y^2-2\cdot 2\cdot x-2\cdot 3\cdot y+(2^2+3^2-4^2)=0$$
$$\underline{\underline{x^2+y^2-4x-6y-3=0}}$$

Rovnice kružnice

Příklad 7.2 Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí

a) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 25$, b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$.

---

a) $\underbrace{m = -2, \quad n = 6}_{\underline{\underline{S = [-2; 6]}}}$, $r^2 = 25$

$\underline{\underline{r = 5}}$ ($r = -5$ zamítáme)

b) zjistíme středovou rovnici; výraz na levé straně upravíme (dvojitým) doplněním na čtverec:

$$\mathbf{L} = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = (x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) + 12$$
$$= \left(x^2 - 4x + (-2)^2\right) - (-2)^2 + \left(y^2 - 6y + (-3)^2\right) - (-3)^2 + 12$$
$$= (x-2)^2 + (y-3)^2 - 4 - 9 + 12 = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 1$$

…středová rovnice je $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, odkud $\underline{\underline{S = [2; 3]}}$ a $\underline{\underline{r = 1}}$.

Kružnice o středu $S = [m; n]$ a poloměru r

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = q, \qquad \text{kde} \quad q = r^2}$$

Rovnice kružnice

Příklad 7.3 Najdi kružnici k, která prochází body $A=[0;0]$, $B=[1;3]$, $C=[4;2]$. Leží na této kružnici bod $D=[-3;-3]$?

Kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r

$$\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=q, \qquad \text{kde} \quad q=r^2}$$

$$[0;0]\in k \iff (0-m)^2+(0-n)^2=q$$
$$[1;3]\in k \iff (1-m)^2+(3-n)^2=q$$
$$[4;2]\in k \iff (4-m)^2+(2-n)^2=q$$

$$m^2+n^2=q \implies q=5$$

$$1-2m+m^2+9-6n+n^2=q$$
$$16-8m+m^2+4-4n+n^2=q$$

$$1-2m+9-6n=0$$
$$16-8m+4-4n=0$$

$$10=2m+6n \quad \cdot(-4)$$
$$20=8m+4n$$

$$10=2m+6n \implies 10=2m+6\cdot 1$$
$$-20=-20n \implies n=1 \qquad m=2$$

$$k:\ (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

Leží bod $D=[-3;-3]$ na kružnici k?

$$[-3;-3]\in k \iff (-3-2)^2+(-3-1)^2=5$$
$$41\neq 5$$

Bod D neleží na kružnici k.

Rovnice kružnice

Příklad 7.4 Najdi kružnici k, která prochází body $A=[-3;2]$, $B=[-1;4]$, $C=[3;0]$.

$$[-3;2]\in k \iff (-3-m)^2+(2-n)^2=r^2 \qquad (1)$$
$$[-1;4]\in k \iff (-1-m)^2+(4-n)^2=r^2 \qquad (2)$$
$$[3;0]\in k \iff (3-m)^2+(0-n)^2=r^2 \qquad (3)$$

Lze použít sčítací metodu za účelem eliminace r, např.

$$(-3-m)^2+(2-n)^2-(-1-m)^2-(4-n)^2=0 \qquad (1-2)$$
$$(-3-m)^2+(2-n)^2-(3-m)^2-(0-n)^2=0 \qquad (1-3)$$

$$9+6m+\cancel{m^2}+4-4n+\cancel{n^2}-(1+2m+\cancel{m^2})-(16-8n+\cancel{n^2})=0$$
$$9+6m+\cancel{m^2}+4-4n+\cancel{n^2}-(9-6m+\cancel{m^2})-\cancel{n^2}=0$$

$$4m+4n=4 \qquad (4)$$
$$12m-4n=-4 \qquad (5)$$

Opět lze použít sčítací metodu: $16m=0 \qquad (4+5)$

$$\underline{m=0}$$

Kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r

$$\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=r^2}$$

Z (4) dostáváme

$$n=1-m=\underline{1},$$

např. z (3) dostáváme

$$q=3^2+(-1)^2=\underline{10}$$

a středová rovnice je

$$\underline{\underline{x^2+(y-1)^2=10.}}$$

Přímka a kružnice

Jestliže pro přímku p a kružnici k platí

- $\boxed{p \cap k = \emptyset}$, **přímka p leží vně kružnice k a nazývá se vnější přímka kružnice.**
- $\boxed{p \cap k = \{P\}}$, **přímka p se dotýká kružnice k v bodě P a nazývá se tečna kružnice k.**
- $\boxed{p \cap k = \{P, Q\}}$, **přímka p protíná kružnici k v bodech P a Q a nazývá se sečna kružnice k.**

Příklad 7.5 Určete vzájemnou polohu přímky $p : x - 2y - 3 = 0$ a kružnice

$$k : x^2 + 4x + y^2 - 1 = 0.$$

- Vyšetřujeme množinu $p \cap k$, tj. hledáme body $[x; y]$ takové, že $[x; y] \in p \wedge [x; y] \in k$.
- Bod patří do nějakého objektu, splňují-li jeho souřadnice rovnici tohoto objektu:

$$[x; y] \in p \iff x - 2y - 3 = 0$$
$$[x; y] \in k \iff x^2 + 4x + y^2 - 1 = 0$$

- Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých . . . má jediné řešení $[x; y] = [-1; -2]$.

$\Longrightarrow$ Přímka p se dotýká kružnice k v bodě $[-1; -2]$.

Tečna kružnice

Tečna kružnice o středu $S = [m; n]$ a poloměru r v bodě $T = [x_T; y_T]$

$$\boxed{(x_T - m)(x - m) + (y_T - n)(y - n) = r^2}$$

Příklad 7.6 Najděte rovnici tečny t kružnice

$k:\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ v bodě $T = [4; -2]$.

$$(4-1)(x-1) + (-2-2)(y-2) = 25$$

$$\vdots$$

$$t:\quad 3x - 4y - 20 = 0$$

Tečna kružnice

Příklad 7.7 Najděte rovnici tečny t kružnice $k:\ x^2-2x+y^2-4y-20=0$ v jejím bodě $T=[4;-2]$.

- Najdeme středovou rovnici a z ní střed kružnice:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= x^2-2x+y^2-4y-20=(x^2-2x)+(y^2-4y)-20\\ &= \left(x^2-2x+(-1)^2\right)-(-1)^2+\left(y^2-4y+(-2)^2\right)-(-2)^2-20\\ &= (x-1)^2+(y-2)^2-1-4-20=\underset{\sim\sim\sim}{(x-1)^2+(y-2)^2-25}\end{aligned}$$

…středová rovnice je $(x-1)^2+(y-2)^2=25,$ odkud $\underset{\sim\sim}{S=[1;2]}$

- Úsečka ST je kolmá k tečně t. Potom vektor $T-S=(3;-4)$ lze použít jako normálový vektor tečny t. Můžeme tedy vyjádřit její obecnou rovnici:

$$t:\quad 3x-4y+c=0$$

- Zbývá dopočítat c. K tomu využijeme skutečnost, že $T\in t$:

$$\begin{aligned}T=[4;-2]\in t \iff 3\cdot 4-4\cdot(-2)+c&=0\\ \underset{\sim\sim}{c}&\underset{\sim\sim}{=-20}\end{aligned}$$

- Kompletní obecná rovnice tečny je $\underline{\underline{t:\quad 3x-4y-20=0}}$.

Tečna kružnice

Příklad 7.8 Napište rovnici tečny ke kružnici $k:\ x^2-6x+y^2-4y-5=0$, která je rovnoběžná s přímkou $p:\ x+y+4=0$.

- Najdeme středovou rovnici $\ldots k:\ (x-3)^2+(y-2)^2=18$ a střed $\ldots S=[3;2]$
- Označíme-li $T=[t_x,t_y]$ bod dotyku a $\vec{s}_p$ směrový vektor přímky p, platí $(T-S)\perp\vec{s}_p$

$$(T-S)\cdot\vec{s}_p=0$$

$$(t_x-3;t_y-2)\cdot(1;-1)=0$$

$$t_x-3-t_y+2=0$$

$$t_x=t_y+1$$

- Současně platí $T\in k$, tj. $(t_x-3)^2+(t_y-2)^2=18$
- Souřadnice bodu T lze tedy najít jako řešení soustavy

$$t_x=t_y+1$$

$$(t_x-3)^2+(t_y-2)^2=18$$

$\ldots T=[0;-1],\ T'=[6;5]$

- Parametrická rovnice hledané tečny je $t:\ X=T+\tau\,\vec{s}_p,\ \tau\in\mathbb{R}$

$$t:\ X=[0;-1]+\tau(1;-1),\ \tau\in\mathbb{R}$$

$$t':\ X=T'+\nu\,\vec{s}_p,\ \nu\in\mathbb{R}$$

$$t':\ X=[6;5]+\nu(1;-1),\ \nu\in\mathbb{R}$$

Tečna kružnice

Příklad 7.9 Najděte tečny ke kružnici $k:\ x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ z bodu $B = [5; 1]$.

- Najdeme středovou rovnici $\dots k:\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$ a střed $\dots S = [1; -3]$
- Označíme-li $T = [t_x, t_y]$ bod dotyku, je $T - B$ směrovým vektorem hledané tečny a platí

$$(T - B) \perp (T - S)$$
$$(T - B) \cdot (T - S) = 0$$
$$(t_x - 5; t_y - 1) \cdot (t_x - 1; t_y + 3) = 0$$
$$(t_x - 5)(t_x - 1) + (t_y - 1)(t_y + 3) = 0$$

- Současně platí $T \in k$, tj. $(t_x - 1)^2 + (t_y + 3)^2 = 16$
- Souřadnice bodu T lze tedy najít jako řešení soustavy

$$\begin{aligned}(t_x - 5)(t_x - 1) + (t_y - 1)(t_y + 3) &= 0\\ (t_x - 1)^2 + (t_y + 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

$\dots T = [1; 1],\ T' = [5; -3]$

- Parametrická rovnice hledané tečny je

$$t:\ X = T + \tau(T - B),\ \tau \in \mathbb{R} \qquad t':\ X = T' + \nu(T' - B),\ \nu \in \mathbb{R}$$
$$\underline{\underline{t:\ X = [1; 1] + \tau(-4; 0),\ \tau \in \mathbb{R}}} \qquad \underline{\underline{t':\ X = [5; -3] + \nu(0; -4),\ \nu \in \mathbb{R}}}$$

Konec

(7. Kružnice)