1. Funkce

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Kartézský součin

podrobnosti

Definice 1.1

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A, b \in B$; označuje se $A \times B$. Tj.

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.}$$

Zobrazení

Definice 1.2

F je zobrazení množiny A do množiny B, zkráceně $\boxed{F : A \longrightarrow B,}$
jestliže F je neprázdná podmnožina kartézského součinu $A \times B$ a platí

$$\boxed{\forall\, a \in A \quad \exists!\, b \in B : \quad (a, b) \in F\,.}$$

Definice 1.3

Nechť $F : A \longrightarrow B$.

- Množina A se nazývá definiční obor zobrazení F; označuje se $\boxed{D_F}$.
- Množina $\boxed{\{b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in F\}}$ se nazývá obor hodnot zobrazení F ; označuje se $\boxed{H_F}$.

Je-li $(a, b) \in F$, potom

- Prvek a se nazývá vzor prvku b při zobrazení F.
- Prvek b se nazývá obraz prvku a při zobrazení F; označuje se $\boxed{F(a)}$.

Závislá a nezávislá proměnná

Poznámka 1.1

Pro vztah $(a, b) \in F$ se používají také zápisy

$$\boxed{a \xmapsto{F} b, \quad F(a) = b}$$

vyjadřující výstižně závislost prvku b na prvku a. Vzhledem k tomu, že prvek a se může „měnit“ v rámci množiny A a v závislosti na něm se „mění“ prvek b v rámci množiny B, používá se pro symboly a resp. b označení nezávislá resp. závislá proměnná.

Operace

Definice 1.4

Operace nad množinami A, B je zobrazení s definičním oborem $A \times B$.

Poznámka 1.2

Budeme-li pracovat s operací $\circ : A \times B \to C$, budeme obraz $\circ(a, b)$ označovat $\boxed{a \circ b.}$

Příklady

- Sčítání reálných čísel $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$
- Dělení reálných čísel $/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$

Definice funkce

Definice 1.5

Funkce je zobrazení jakékoliv množiny do číselné množiny.

Definice 1.6

Nechť $f : A \longrightarrow B$ je funkce. Říkáme, že

- f je reálná funkce, jestliže $B \subset \mathbb{R}$.
- f je funkce jedné reálné proměnné, jestliže $A \subset \mathbb{R}$.
- f je funkce dvou reálných proměnných, jestliže $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- f je reálná funkce jedné reálné proměnné, jestliže $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$.
- f je reálná funkce dvou reálných proměnných, jestliže $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$.

Úmluva

Dále budeme výraz funkce používat pro reálné funkce jedné reálné proměnné, tj. pro zobrazení jedné podmnožiny $\mathbb{R}$ do jiné podmnožiny $\mathbb{R}$.

Definiční obor a obor hodnot funkce

Definice 1.7

- Množina D_f se nazývá definiční obor funkce f.
- Množina H_f se nazývá obor hodnot funkce f.
- Vzor prvku při zobrazení f se nazývá argument funkce f.
- Obraz prvku při zobrazení f se nazývá funkční hodnota funkce f.

Poznámka 1.3

- Definiční obor funkce f je tvořen právě všemi argumenty funkce f a platí
$$\boxed{D_f = \{x \in \mathbb{R} : \; \exists! y \in \mathbb{R}, \; f(x) = y\}.}$$
- Obor hodnot funkce f je tvořen právě všemi funkčními hodnotami funkce f a platí
$$\boxed{H_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f, f(x) = y\}.}$$

Definiční obor a obor hodnot funkce

Úmluva

- Vztah $M \subset D_f$ budeme také vyjadřovat větou „f je definovaná na M“.
- Rovnost $f(x_0) = y_0$ budeme také vyjadřovat větou „y_0 je funkční hodnotou funkce f v bodě x_0“.

Zadání funkce

podrobnosti

Poznámka 1.4

Funkce se často zadává prostřednictvím tzv. „explicitního“ předpisu, kterým se stanoví obecný tvar proměnné y $(= f(x))$ v závislosti na proměnné x, s omezením rozsahu proměnné x. Např.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \langle 1, 2 \rangle \, .$$

Uvědomme si, že tento zápis jednoznačně vymezuje funkci f, kterou lze na základě definice vyjádřit jako podmnožinu kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \langle 1, 2 \rangle\}.$$

Někdy se omezení rozsahu proměnné x u explicitního předpisu vynechává; tím se dává najevo, že zamýšlený rozsah je množina všech přípustných argumentů funkce f, tj. takových čísel x, pro která má výraz $f(x)$ smysl. Např.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{znamená, že} \quad f = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \langle 0, +\infty)\}.$$

Graf funkce

Poznámky:

- V části **Analytická geometrie** budou zavedeny pojmy
  - Euklidovský prostor E_2, který si lze představit jako běžně vnímanou rovinu,
  - prvky z E_2, které lze chápat jako body v této rovině, a
  - kartézská soustava souřadnic, která umožňuje libovolný prvek z E_2 charakterizovat uspořádanou dvojicí reálných čísel; pro odlišení budeme pro zápis uspořádané dvojice s tímto významem používat hranaté závorky, např. $[x, y]$.
- Zřejmě pro funkci f platí

$$f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathrm{D}_f\}.$$

Malou změnou v tomto zápisu se dostaneme k množině

$$\boxed{\text{Graf } f = \{[x, f(x)] \in E_2 : x \in \mathrm{D}_f\}},$$

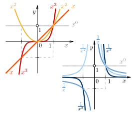
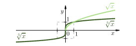
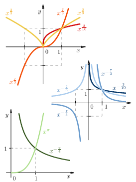
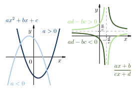
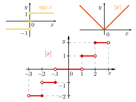
která se nazývá graf funkce f a je podmnožinou E_2.

- Konstantní funkce $\boxed{f(x) = c, \quad \text{kde} \;\; c \in \mathbb{R},}$ $D_f = (-\infty, \infty)\,, \; H_f = \{c\}.$
- Mocnina s celým exponentem $\boxed{f(x) = x^k, \quad \text{kde} \;\; k \in \mathbb{Z}.}$
  - $f(x) = x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
  - $f(x) = x^2, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = \langle 0, \infty)$
  - $f(x) = x^3, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
  - $f(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  - $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,, \quad H_f = (0, \infty)$
  - $f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Odmocnina s přirozeným exponentem $\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \text{kde} \;\; n \in \mathbb{N}.}$
  - $f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \langle 0, \infty)\,, \quad H_f = \langle 0, \infty)$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, \infty)$

- Exponenciální funkce $\boxed{f(x) = a^x, \quad \text{kde} \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.}$
  - $f(x) = e^x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = (0, \infty)$
- Logaritmické funkce $\boxed{f(x) = \log_a x, \quad \text{kde} \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.}$
  - $f(x) = \log x, \quad D_f = (0, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
    $(= \log_{10} x \ldots$ „dekadický logaritmus“)
  - $f(x) = \ln x, \quad D_f = (0, \infty)\,, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
    $(= \log_e x \ldots$ „přirozený logaritmus“)
- Goniometrické funkce
  - $f(x) = \sin x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = \langle -1, 1 \rangle$
  - $f(x) = \cos x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = \langle -1, 1 \rangle$
  - $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
  - $f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad H_f = (-\infty, \infty)$
- Cyklometrické funkce
  - $f(x) = \arcsin x, \quad D_f = \langle -1, 1 \rangle\,, \quad H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2} \right\rangle$
  - $f(x) = \arccos x, \quad D_f = \langle -1, 1 \rangle\,, \quad H_f = \langle 0, \pi \rangle$
  - $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = \left(-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2} \right)$
  - $f(x) = \operatorname{arccotg} x, \quad D_f = (-\infty, \infty)\,, \quad H_f = (0, \pi)$

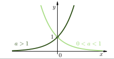
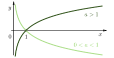
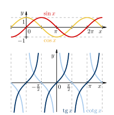
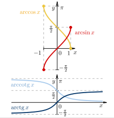
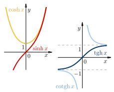
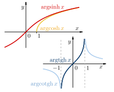
Grafy základních elementárních funkcí

http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/prehled_funkci.pdf

				$D(f)$	$H(f)$	pozn.	graf funkce f	$D(f')$	derivace f'
mocninná funkce s celým exponentem	$f\colon y = x^0$			$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\{1\}$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = 0$
	$f\colon y = x^n$	$n\in\mathbf{N}$	n sudé	$\mathbf{R}$	$\langle 0,+\infty)$	sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
			n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	
	$f\colon y = x^{-n}$	$n\in\mathbf{N}$	n sudé	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$(0,+\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$
			n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
n-tá odmocnina	$f\colon y = \sqrt[n]{x}$	$n\in\mathbf{N}$	n sudé	$\langle 0,+\infty)$	$\langle 0,+\infty)$			$(0,+\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
			n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
mocninná funkce s obecným exponentem	$f\colon y = x^{\frac{m}{n}}$	$m,n\in\mathbf{N}$	m sudé, n liché	$\mathbf{R}$	$\langle 0,+\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ($\mathbf{R}$ pro $m\geq n$)	$f'(x) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
			m liché, n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ($\mathbf{R}$ pro $m\geq n$)	
			m liché, n sudé	$\langle 0,+\infty)$	$\langle 0,+\infty)$			$(0,+\infty)$	
	$f\colon y = x^{-\frac{m}{n}}$	$m,n\in\mathbf{N}$	m sudé, n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$(0,+\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}$
			m liché, n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
			m liché, n sudé	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$			$(0,+\infty)$	
	$f\colon y = x^a$	$a\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$	$a>0$	$\langle 0,+\infty)$	$\langle 0,+\infty)$			$(0,+\infty)$	$f'(x) = ax^{a-1}$
			$a<0$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$			$(0,+\infty)$	
	$f\colon y = q$			$\mathbf{R}$	$\{q\}$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = 0$
	$f\colon y = kx + q$	$k\neq 0$		$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = k$
	$f\colon y = ax^2 + bx + c$			$\mathbf{R}$				$\mathbf{R}$	$f'(x) = 2ax + b$
	$f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$c\neq 0$, $bc - ad \neq 0$		$\mathbf{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$	$\mathbf{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}$			$\mathbf{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$	$f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
	$f\colon y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$			$\mathbf{R}$	$\{-1,0,1\}$	lichá			
	$f\colon y = \|x\| = \begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$			$\mathbf{R}$	$\langle 0,+\infty)$	sudá			
	$f\colon y = [x]$			$\mathbf{R}$	$\mathbf{Z}$	lichá			

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

přehled verze 002
LaTeX & Inkscape

transcendentní funkce		$D(f)$	$H(f)$	pozn.	graf funkce f	$D(f')$	derivace f'
exponenciální funkce	$f\colon y = a^x$, $a>0$, $a\neq 1$	$\mathbf{R}$	$(0,+\infty)$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = a^x \ln a$
	$f\colon y = e^x$						$f'(x) = e^x$
	$e \doteq 2{,}718281828$						
logaritmická funkce	$f\colon y = \log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$	$(0,+\infty)$	$\mathbf{R}$			$(0,+\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$
	$f\colon y = \log_e x = \ln x$						$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
	$f\colon y = \log_{10} x = \log x$						$f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10}$
goniometrické funkce	$f\colon y = \sin x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1,1\rangle$	period. $T=2\pi$ lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \cos x$
	$f\colon y = \cos x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1,1\rangle$	period. $T=2\pi$ sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = -\sin x$
	$f\colon y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	period. $T=\pi$ lichá		$\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
	$f\colon y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbf{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	period. $T=\pi$ lichá		$\mathbf{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
cyklometrické funkce	$f\colon y = \arcsin x$	$\langle -1,1\rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$	lichá		$(-1,1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f\colon y = \arccos x$	$\langle -1,1\rangle$	$\langle 0,\pi\rangle$			$(-1,1)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f\colon y = \operatorname{arctg} x$	$\mathbf{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
	$f\colon y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$
hyperbolické funkce	$f\colon y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \cosh x$
	$f\colon y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbf{R}$	$\langle 1,+\infty)$	sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \sinh x$
	$f\colon y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\mathbf{R}$	$(-1,1)$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
	$f\colon y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\mathbf{R}\setminus\langle -1,1\rangle$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$
hyperbolometrické funkce	$f\colon y = \operatorname{argsinh} x$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
	$f\colon y = \operatorname{argcosh} x$	$\langle 1,+\infty)$	$\langle 0,+\infty)$			$(1,+\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$f\colon y = \operatorname{argtgh} x$	$(-1,1)$	$\mathbf{R}$	lichá		$(-1,1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
	$f\colon y = \operatorname{argcotgh} x$	$\mathbf{R}\setminus\langle -1,1\rangle$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\langle -1,1\rangle$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

přehled verze 002
LaTeX & Inkscape

Sčítání, odčítání

Definice 1.8

Nechť f, g jsou funkce a nechť množina $M := D_f \cap D_g$ je neprázdná.

- Řekneme, že f, g jsou si rovny na M, zkráceně $f = g$ na M, jestliže

$$\boxed{f(x) = g(x), \quad x \in M.}$$

- Součet funkcí f, g na M je funkce $(f+g) : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in M.}$$

- Rozdíl funkcí f, g na M je funkce $(f-g) : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{(f-g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in M.}$$

Násobení, dělení

Definice 1.9

Nechť f, g jsou funkce a nechť množina $M := D_f \cap D_g$ je neprázdná.

- **Součin funkcí** f, g na M je funkce $(f \cdot g) : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem
$$\boxed{(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad x \in M.}$$
- Je-li g konstantní funkce o hodnotě $c \in \mathbb{R}$, potom součin funkcí f, g se nazývá **c-násobek funkce** f a označuje se cf.
- Nechť $n \in \mathbb{N}$. **n-tá mocnina funkce** f je funkce $f^n : D_f \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem
$$\boxed{f^n(x) := \big(f(x)\big)^n, \quad x \in D_f.}$$

Definice 1.10

Nechť f, g jsou funkce a nechť množina $M := D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$ je neprázdná. Potom **podíl funkcí** f, g na M je funkce $(f/g) : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem
$$\boxed{(f/g)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in M.}$$

Skládání

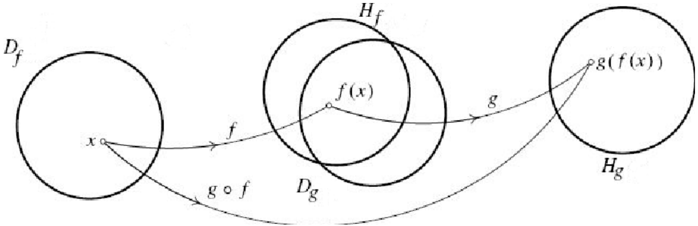
Definice 1.11

Nechť f, g jsou funkce a nechť množina $M := \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ je nepr.

- Funkce $(g \circ f) : M \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in M,}$$

  se nazývá funkce složená z funkcí f, g.
- V této situaci se funkce g nazývá vnější funkce a funkce f se nazývá vnitřní funkce .



Elementární funkce

podrobnosti

Definice 1.12

Elementární funkce jsou funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání $(+)$, odčítání $(-)$, násobení $(\cdot)$, dělení $(/)$ a skládání $(\circ)$.

Polynomy

Definice 1.13

- Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Potom polynom stupně n je funkce
$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.}$$
- Nechť $a_0 \in \mathbb{R}$. Potom polynom stupně 0 je konstantní funkce
$$\boxed{f(x) = a_0, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Definice 1.14

- Lineární funkce je polynom stupně 1.
- Kvadratická funkce je polynom stupně 2.

Poznámka 1.5

Definiční obor libovolného polynomu je množina $\mathbb{R}$.

Příklady polynomů

a) $f(x) = 2x^2 - 8$

parabola

b) $f(x) = 2x + 3$

přímka

c) $f(x) = x$

osa 1. a 3. kvadrátu

d) $f(x) = 6$

rovnoběžka s osou x

Přímka a graf funkce

Poznámka 1.6

- Přímku p, která není rovnoběžná s osou y, lze vyjádřit jako graf nějaké lineární popř. konstantní funkce. Používá se zápis

$$\boxed{p:\ y = ax + b} \quad \text{popř.} \quad \boxed{p:\ y = c}$$

- Přímku p, která je rovnoběžná s osou y, nelze vyjádřit jako graf funkce. Prochází-li tato přímka na ose x bodem c, používá se zápis

$$\boxed{p:\ x = c\,.}$$

Příklad 1.1 Určete definiční obor funkce (f zadané explicitně) a vyjádřete jej ve tvaru sjednocení komponent.

a) $f(x) = x^7 + 3x^5 - 2x + 7$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} + \sqrt[3]{x - 1}$

d) $f(x) = \cos x + \operatorname{cotg} 2x$

e) $f(x) = \log(x + 6)$

f) $f(x) = \arccos(x - 2)$

- **Absolutní hodnota** $\boxed{f(x) = |x|,}$ $D_f = (-\infty, \infty)$, $H_f = \langle 0, \infty)$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

- **Signum** $\boxed{f(x) = \operatorname{sgn} x,}$ $D_f = (-\infty, \infty)$, $H_f = \{-1, 0, 1\}$.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0, \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

- **Celá část** $\boxed{f(x) = [x],}$ $D_f = (-\infty, \infty)$, $H_f = \mathbb{Z}$.

podrobnosti

Průsečíky s osami

Definice 1.15

- Průsečík grafu funkce f s osou x je bod $[x_0, 0]$, kde x_0 je řešení rovnice

$$\boxed{f(x) = 0.} \tag{1}$$

- Průsečík grafu funkce f s osou y je bod $[0, y_0]$, kde

$$\boxed{y_0 = f(0).}$$

Poznámky:

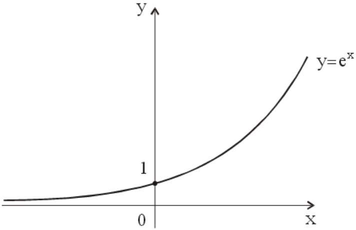
- Jestliže rovnice (1) nemá řešení, potom neexistuje průsečík s osou x.
- Jestliže $0 \notin D_f$, potom neexistuje průsečík s osou y.
- Průsečík s osou y může být nejvýše jeden; průsečíků s osou x může být až nekonečně mnoho.

Znaménko funkce

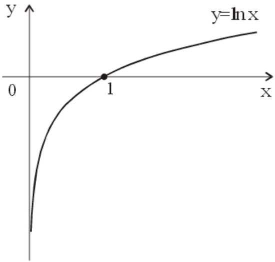
Definice 1.16

Nechť f je funkce a nechť $M \subset D_f$. Potom f je

- kladná na M, jestliže $\boxed{\forall x \in M: \quad f(x) > 0.}$
- záporná na M, jestliže $\boxed{\forall x \in M: \quad f(x) < 0.}$



kladná



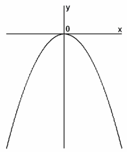
záporná na $(0, 1)$
kladná na $(1, \infty)$.

Ohraničenost

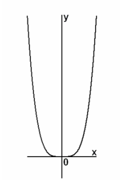
Definice 1.17

Nechť f je funkce a nechť $M \subset D_f$. Potom f je

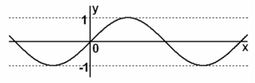
- ohraničená shora na M, jestliže $\boxed{\exists\, h \in \mathbb{R},\ \forall x \in M: \quad f(x) \leq h.}$
- ohraničená zdola na M, jestliže $\boxed{\exists\, d \in \mathbb{R},\ \forall x \in M: \quad f(x) \geq d.}$
- ohraničená na M, je-li na M ohraničená shora i zdola.



ohraničená shora



ohraničená zdola



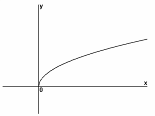
ohraničená

Monotónnost

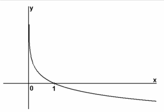
Definice 1.18

Nechť f je funkce a nechť $M \subset D_f$. Potom f je

- rostoucí na M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$
- klesající na M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$
- neklesající na M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$
- nerostoucí na M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$
- konstantní na M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad f(x_1) = f(x_2).$
- monotónní na M, jestliže má na M některou z předchozích vlastností.
- ryze monotónní na M, jestliže je na M rostoucí nebo klesající.



rostoucí



klesající

Extrémy funkce

Definice 1.19

Nechť f je funkce a $x_0 \in M \subseteq D_f$. Potom řekneme, že funkce f nabývá na množině M

- minima v bodě x_0, jestliže $\boxed{x \in M \setminus \{x_0\} \implies f(x) \geq f(x_0)}$,
- ostrého minima v bodě x_0, jestliže $\boxed{x \in M \setminus \{x_0\} \implies f(x) > f(x_0)}$,
- maxima v bodě x_0, jestliže $\boxed{x \in M \setminus \{x_0\} \implies f(x) \leq f(x_0)}$,
- ostrého maxima v bodě x_0, jestliže $\boxed{x \in M \setminus \{x_0\} \implies f(x) < f(x_0)}$.

Dodatky

- Nastane-li v definici 1.19 situace $M = D_f$, hovoříme o globálním (ostrém) minimu resp. o globálním (ostrém) maximu.
- Nabývá-li funkce f na množině M (ostrého) minima nebo maxima v bodě x_0, řekneme, že funkce f nabývá na množině M (ostrého) lokálního extrému v bodě x_0.

Konvexnost, konkávnost

Definice 1.20

Nechť f je funkce a nechť $M \subset D_f$. Potom f je

- konvexní na M, jestliže pro všechna $x, x_1, x_2 \in M$ platí

$$\boxed{x_1 < x < x_2 \implies f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).}$$

- konkávní na M, jestliže pro všechna $x, x_1, x_2 \in M$ platí

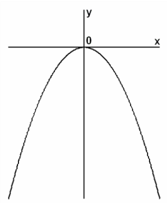
$$\boxed{x_1 < x < x_2 \implies f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).}$$

Sudost, lichost

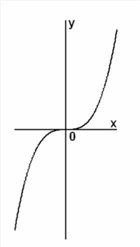
Definice 1.21

Funkce f je

- sudá, jestliže $\boxed{\forall\, x \in D_f : \quad -x \in D_f \quad \wedge \quad f(-x) = f(x).}$
- lichá, jestliže $\boxed{\forall\, x \in D_f : \quad -x \in D_f \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x).}$



sudá



lichá

Sudost, lichost

Příklad 1.2 Určete, zda je funkce sudá nebo lichá.

a) $f(x) = x^3 + \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Prostota

Definice 1.22

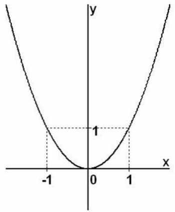
Funkce f je prostá, jestliže $\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f : \; x_1 \neq x_2 \; \Rightarrow \; f(x_1) \neq f(x_2).}$

Pozorování

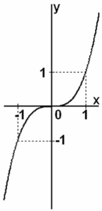
Libovolná rovnoběžka s osou x protíná graf prosté funkce nejvýše jednou.

Věta 1.1

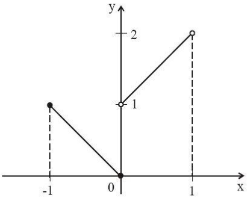
Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je prostá funkce. Potom existuje nejvýše jedno řešení rovnice $\boxed{f(x) = c.}$



není prostá



je prostá



je prostá

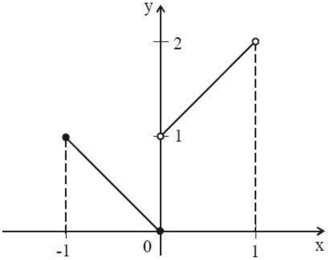
Prostota

Věta 1.2 důkaz

Každá funkce ryze monotónní na svém definičním oboru je prostá.

Poznámka 1.7

Opačné tvrzení neplatí: funkce prostá nemusí být (ani) monotónní na svém definičním oboru.



je prostá, není monotónní

Věta 1.3

Funkce f je prostá právě tehdy, když

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.}$$

Příklad 1.3 Zjistěte, zda je funkce prostá.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

c) $f(x) = 10^{x+1}$

Invertibilita

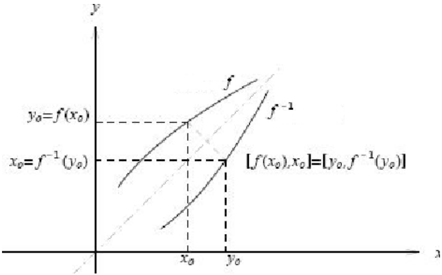
Definice 1.23

Funkce g se nazývá inverzní funkce k funkci f, jestliže pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\boxed{g(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)}$$

Poznámka 1.8

- Funkce inverzní k funkci f se obvykle označuje $\boxed{f^{-1}.}$
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.
- Platí $D_{f^{-1}} = H_f$, $H_{f^{-1}} = D_f$.



Invertibilita

Věta 1.4 (o existenci inverzní funkce)

Nechť f je funkce. Potom f^{-1} existuje právě tehdy, když f je prostá.

Příklad 1.4 Určete funkci inverzní k zadané funkci.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = \sqrt{x-2}$ c) $f(x) = 10^{x+1}$

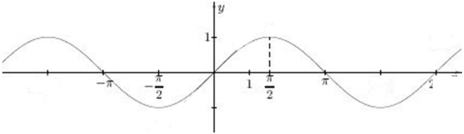
Periodicita

Definice 1.24

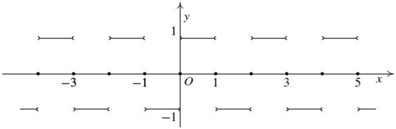
- Funkce f je periodická, existuje-li $T > 0$ takové, že

$$\boxed{\forall\, x \in D_f : \quad x + T \in D_f \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x).}$$

- V této situaci se číslo T nazývá perioda funkce f.
- Existuje-li nejmenší perioda funkce f, nazývá se základní perioda funkce f.



$T = 2\pi$



$T = 2$

Periodicita

Příklad 1.5 Určete periodu funkce.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin 2x$

c) $f(x) = \sin(2x + 1)$

d) $f(x) = 3\sin(2x + 1)$

Rozšíření definice kartézského součinu

Definice 1.1

- Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A, b \in B$; označuje se $A \times B$. Tj.

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.}$$

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou neprázdné množiny. Kartézský součin množin $A_1, \dots, A_n$ je množina všech uspořádaných n-tic $(a_1, \dots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$; označuje se $A_1 \times \cdots \times A_n$.
- Je-li $A_1 = \cdots = A_n = A$, potom kartézský součin $A_1 \times \cdots \times A_n$ se nazývá n-tá kartézská mocnina množiny A; označuje se A^n.

Způsoby zadání funkce

zpět

- Analyticky
  - explicitně: rovností $\boxed{y = f(x),}$ např. $y = 2x^2$ (nebo též $f(x) = 2x^2$),
  - implicitně: rovnicí $\boxed{F(x, y) = 0,}$ např. $xy^2 - e^y = 0$,
  - parametricky: rovnicemi $\boxed{\left.\begin{array}{l} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} t \in D,}$ např. $\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t^2 + t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}.$
- Grafem
- Tabulkou např.

Odpracované roky	0	1	2	3	4
plat v tis. Kč	15	21	29	41	57

- Slovně např. Číslo zadání studentova domácího programu je dáno zbytkem po celočíselném dělení posledního dvojčíslí jeho osobního čísla dvaceti zvětšeným o jedničku.

Funkce „celá část“, operace div, mod

zpět

Věta

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje jediné $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Číslo $k \in \mathbb{Z}$ odpovídající číslu $x \in \mathbb{R}$ podle přechozí věty se označuje $\boxed{[x].}$

- Funkce $[\cdot] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definovaná předpisem $\boxed{x \longmapsto [x]}$ se nazývá celá čast (reálného čísla).
- Operace div : $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ definovaná předpisem

$$\boxed{x \operatorname{div} y = \left[\frac{x}{y}\right], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,}$$

  se nazývá celočíselné dělení.
- Operace mod : $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{x \bmod y = x - \left[\frac{x}{y}\right] \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,}$$

  se nazývá zbytek po celočíselném dělení.

Klasifikace elementárních funkcí

zpět

- Algebraické funkce jsou všechny elementární funkce vytvořené výhradně z funkcí $f(x) = c$, $f(x) = x$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
  - Polynomy jsou všechny algebraické funkce vytvořené bez použití funkce $\sqrt[n]{x}$ a operace $/$.
  - Racionální jsou všechny algebraické funkce vytvořené bez použití funkce $\sqrt[n]{x}$.
  - Iracionální jsou všechny ostatní algebraické funkce.
- Transcendentní jsou všechny ostatní elementární funkce.
  - Nižší, např. exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické.
  - Vyšší, např. $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Příklady

a) $f(x) = x^7 + 3x^5 - 2x + 7$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} + \sqrt[3]{x - 1}$

d) $f(x) = \cos x + \operatorname{cotg} 2x$

Věta 1.2 s důkazem

zpět

Věta 1.2

Každá funkce ryze monotónní na svém definičním oboru je prostá.

Důkaz (přímý):

Nechť f je rostoucí. Nechť $x_1, x_2 \in D_f$ a $x_1 \neq x_2$.
Je-li $x_1 < x_2$, potom z definice 1.18 plyne, že $f(x_1) < f(x_2)$.
Je-li $x_1 > x_2$, potom z definice 1.18 plyne, že $f(x_1) > f(x_2)$.
V obou případech tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Konec
(1. Funkce)