Referát
Analytická geometrie

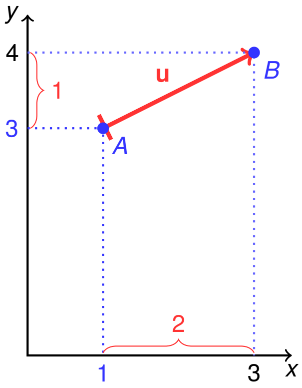
Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Bod

- „běžná“ rovina ... $\boxed{E_2}$, „běžný“ prostor ... $\boxed{E_3}$
- Bod: $\boxed{A = [a_1, a_2] \in E_2}$ resp. $\boxed{A = [a_1, a_2, a_3] \in E_3}$
- Vektor: $\boxed{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2}$ resp. $\boxed{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3}$



$A = [1, 3], \quad \mathbf{u} = (2, 1)$

- Rovnost dvou bodů:

$\boxed{A = B} \iff \boxed{\forall\, i: \; a_i = b_i}$

$$[v, 2] = [1, z] \iff \begin{array}{l} v = 1 \\ 2 = z \end{array}$$

- Sčítání bodu a vektoru:

$\boxed{A + \mathbf{u} = B} \ldots \boxed{\forall\, i: \; b_i = a_i + u_i}$

$A + \mathbf{u} = [1 + 2, 3 + 1] = [3, 4]$

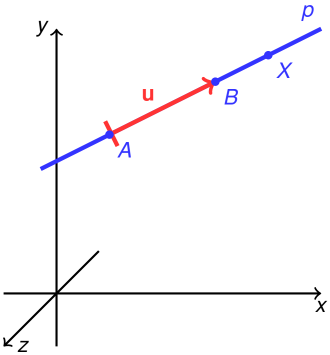
- Rozdíl dvou bodů:

$\boxed{B - A = \mathbf{u}} \ldots \boxed{\forall\, i: \; u_i = b_i - a_i}$

Přímka

- Parametrická rovnice přímky:

$$\boxed{p:\ X = A + t\mathbf{u},\ t \in \mathbb{R}}$$



- $\mathbf{u}$ je nenulový … směrový vektor
- platí v E_2 i E_3

Příklad 1.1:
Určete parametrickou rovnici přímky $p \subset E_3$, která obsahuje body $A = [1,2,5]$, $B = [2,2,6]$.

$$\mathbf{u} = B - A = [2,2,6] - [1,2,5] = (1,0,1)$$

$$p:\quad X = [1,2,5] + t(1,0,1), \quad t \in \mathbb{R}$$

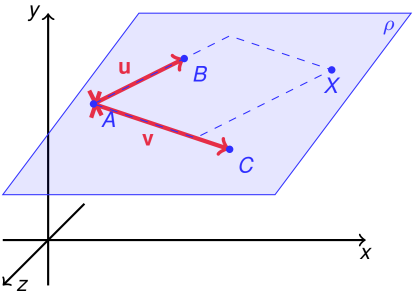
$$[x_1, x_2, x_3] = [1,2,5] + (t, 0, t)$$
$$[x_1, x_2, x_3] = [1+t, 2, 5+t]$$

$$p: \quad \left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + t \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 5 + t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Rovina

- Parametrická rovnice roviny:

$$\boxed{\rho: \ X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \ t, s \in \mathbb{R}}$$



- v není násobkem u

  … směrové vektory

Příklad 1.2:
Určete parametrickou rovnici roviny $\rho \subset E_3$, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$$\mathbf{u} = B - A = [2, 2, 6] - [1, 2, 5] = (1, 0, 1)$$
$$\mathbf{v} = C - A = [3, 4, 6] - [1, 2, 5] = (2, 2, 1)$$

$$\rho: \quad X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 5] + (t, 0, t) + (2s, 2s, s)$$
$$[x_1, x_2, x_3] = [1 + t + 2s, 2 + 2s, 5 + t + s]$$

$$\rho: \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + t + 2s \\ x_2 &= 2 + 2s \\ x_3 &= 5 + t + s \end{aligned}\right\} \ t, s \in \mathbb{R}$$

Bod a jiný objekt

- dva body jsou totožné (rovnají-li se) nebo různé (nerovnají-li se)
- bod (ne)leží na přímce, (ne)vyhovuje-li její rovnici
- bod (ne)leží v rovině (ne)vyhovuje-li její rovnici

Příklad 2.1: Určete vzájemnou polohu bodu $D = [1,0,6]$ a

a) přímky $p: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1), \quad t \in \mathbb{R}$

$$D \in p \iff [1,0,6] = [1,2,5] + t(1,0,1)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + t \\ 0 &= 2 \\ 6 &= 5 + t \end{aligned} \implies \nexists \text{ řeš.} \implies \underline{\underline{D \text{ neleží na } p}}$$

b) roviny $\rho: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \quad t,s \in \mathbb{R}$

$$D \in p \iff [1,0,6] = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + t + 2s \\ 0 &= 2 + 2s \\ 6 &= 5 + t + s \end{aligned} \iff \begin{aligned} t + 2s &= 0 \\ 2s &= -2 \\ t + s &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\ldots \exists! \text{ řešení} \\ &\implies \underline{\underline{D \text{ leží v } \rho}} \end{aligned}$$

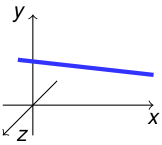
Dvě přímky

Příklad 2.2: Určete kvalitativně průnik přímek

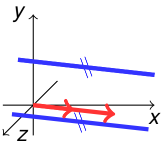
$$p: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1), \; t \in \mathbb{R},$$
$$q: \; X = [3,4,6] + s(2,2,1), \; s \in \mathbb{R}.$$

$$X \in p \cap q \quad \Longleftrightarrow \quad [1,2,5] + t(1,0,1) = [3,4,6] + s(2,2,1)$$

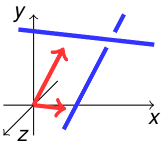
$$\begin{array}{rcl} 1 + t &=& 3 + 2s \\ 2 &=& 4 + 2s \\ 5 + t &=& 6 + s \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} t - 2s &=& 2 \\ -2s &=& 2 \\ t - s &=& 1 \end{array} \quad \ldots \exists! \text{ řešení} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\text{průnikem je bod}}}$$



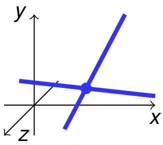
rovnoběžné totožné (průnikem je přímka)



rovnoběžné různé (průnikem je $\emptyset$)



mimoběžné (průnikem je $\emptyset$)



různoběžné (průnikem je bod)

Přímka a rovina

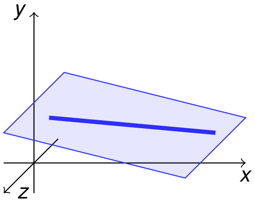
Příklad 2.3: Určete kvalitativně průnik přímky a roviny

$$p: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1), \; t \in \mathbb{R},$$

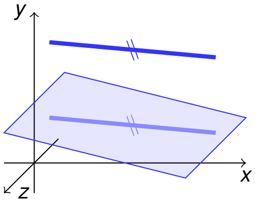
$$\sigma: \; X = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2), \; r,k \in \mathbb{R}.$$

$$X \in p \cap \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad [1,2,5] + t(1,0,1) = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2)$$

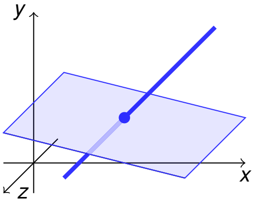
$$\begin{array}{rcl} 1 + t &=& 3 + 3r - 2k \\ 2 &=& 4 + 2r - 2k \\ 5 + t &=& 6 - r + 2k \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} t - 3r + 2k &=& 2 \\ -2r + 2k &=& 2 \\ t + r - 2k &=& 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \ldots \nexists \text{ řešení} \\ \Longrightarrow \underline{\underline{\text{průnikem je } \emptyset}} \end{array}$$



přímka leží v rovině
(průnikem je přímka)



ryze rovnoběžné
(průnikem je $\emptyset$)



různoběžné
(průnikem je bod)

Dvě roviny

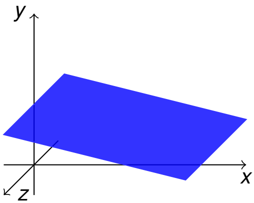
Příklad 2.4: Určete kvalitativně průnik rovin

$$\rho: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \quad t,s \in \mathbb{R},$$
$$\sigma: \; X = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2), \; r,k \in \mathbb{R}.$$

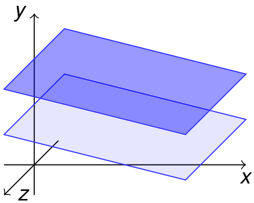
$$X \in \rho \cap \sigma \iff [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1) = [3,4,6] + r(3,2,-1) + k(-2,-2,2)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 + t + 2s &=& 3 + 3r - 2k \\ 2 \phantom{{}+t} + 2s &=& 4 + 2r - 2k \\ 5 + t + s &=& 6 - r + 2k \end{array}$$

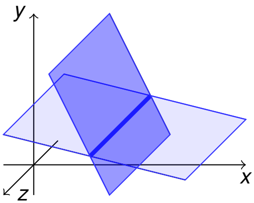
$\ldots \exists$ nekonečně mnoho řešení (1 parametr) $\Longrightarrow$ průnikem je přímka



rovnoběžné totožné
(průnikem je rovina)



rovnoběžné různé
(průnikem je $\emptyset$)



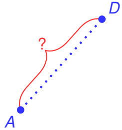
různoběžné
(průnikem je přímka)

Dva body; bod a přímka

Příklad 3.1: Pro $A=[1,2,5]$, $D=[1,0,6]$, $\mathbf{u}=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$ určete

a) vzdálenost bodů A, D

$$\boxed{d(A,D)=|D-A|}=|(0,-2,1)|=\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

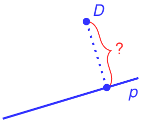


b) vzdálenost bodu D a přímky $p:\ X=A+t\mathbf{u},\quad t\in\mathbb{R}$

$$\boxed{d(D,p)=\frac{|(D-A)\times\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}}=\frac{|(0,-2,1)\times(1,0,1)|}{|(1,0,1)|}$$

$$=\frac{|(-2\cdot 1-1\cdot 0,1\cdot 1-0\cdot 1,0\cdot 0-(-2)\cdot 1)|}{|(1,0,1)|}$$

$$=\frac{|(-2,1,2)|}{|(1,0,1)|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$$



Velikost vektoru: $\boxed{|\mathbf{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}\in\langle 0,\infty)$!

Vektorový součin: $\boxed{\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\ u_2v_3-u_3v_2\ ,\ u_3v_1-u_1v_3\ ,\ u_1v_2-u_2v_1\ )}\in\mathbb{R}^3$!

Bod a rovina

Příklad 3.1: (pokračování)

Pro $A=[1,2,5]$, $D=[1,0,6]$, $\mathbf{u}=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$ určete

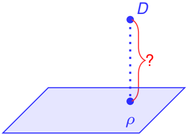
c) vzdálenost bodu D a roviny $\rho: X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t,s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{d(D,\rho) = \frac{|(D-A)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}} = \frac{|(0,-2,1)\cdot(-2,1,2)|}{|(-2,1,2)|}$$

$$= \frac{|0\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}$$

$$= \frac{|0|}{3} = \frac{0}{3} = \underline{\underline{0}}$$

... vzpomeňme, že $D \in \rho$

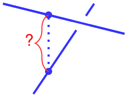


Skalární součin: $\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3} \in \mathbb{R}$!

Další případy

d) vzdálenost přímek $p: \; X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$

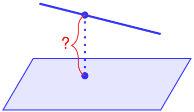
$q: \; X = C + s\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{R}$



$$d(p,q) = \begin{cases} \dfrac{|(C-A)\times\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}, & \text{jsou-li rovnoběžné,} \\ \dfrac{|(C-A)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}, & \text{jsou-li mimoběžné.} \end{cases}$$

e) vzdálenost přímky $p: \; X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$

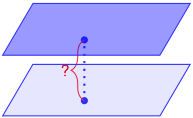
a roviny $\sigma: \; X = C + k\mathbf{w} + r\mathbf{x}, \quad k, r \in \mathbb{R}$



$$d(p,\sigma) = \frac{|(C-A)\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}{|\mathbf{w}\times\mathbf{x}|}, \text{ jsou-li ryze rovnoběžné}$$

e) vzdálenost rovin $\rho: \; X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$

$\sigma: \; X = C + k\mathbf{w} + r\mathbf{x}, \quad k, r \in \mathbb{R}$



$$d(\rho,\sigma) = \frac{|(C-A)\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}{|\mathbf{w}\times\mathbf{x}|}, \text{ jsou-li rovnoběžné různé}$$

Dvě přímky

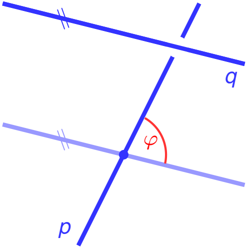
Příklad 4.1: Pro $A=[1,2,5]$, $\mathbf{u}=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$
$C=[3,4,6]$, $\mathbf{w}=(3,2,-1)$, $\mathbf{x}=(-2,-2,2)$ určete

a) odchylku přímek $p:\ X=A+t\mathbf{u},\quad t\in\mathbb{R}$
$q:\ X=C+s\mathbf{v},\quad s\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\ :\ \cos\varphi=\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}}=\frac{|(1,0,1)\cdot(2,2,1)|}{|(1,0,1)|\,|(2,2,1)|}=\frac{|2+0+1|}{\sqrt{2}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

tj. řešení rovnice $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ z intervalu $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\sim 45^\circ$$



Přímka a rovina

Příklad 4.1: (pokračování)

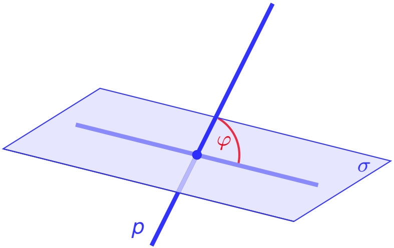
Pro $A=[1,2,5],\ \mathbf{u}=(1,0,1),\quad \mathbf{v}=(2,2,1)$
$C=[3,4,6],\ \mathbf{w}=(3,2,-1),\ \mathbf{x}=(-2,-2,2)$ určete

b) odchylku přímky $p:\ X=A+t\mathbf{u},\quad t\in\mathbb{R}$
a roviny $\sigma:\ X=C+k\mathbf{w}+r\mathbf{x},\quad k,r\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle:\ \ \sin\varphi=\frac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}{|\mathbf{u}|\,|(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}}=\frac{|(1,0,1)\cdot(2,-5,-2)|}{|(1,0,1)|\ |(2,-5,-2)|}=\frac{|2+0-2|}{\sqrt{2}\sqrt{33}}=0$$

tj. řešení rovnice $\sin\varphi=0$ z intervalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\underline{\underline{\varphi=0}}$ ...vzpomeňme, že $p\parallel\sigma$



Dvě roviny

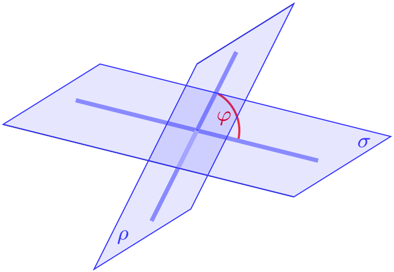
Příklad 4.1: (pokračování)

Pro $A=[1,2,5],\ \mathbf{u}=(1,0,1),\quad \mathbf{v}=(2,2,1)$
$C=[3,4,6],\ \mathbf{w}=(3,2,-1),\ \mathbf{x}=(-2,-2,2)$ určete

c) odchylku rovin $\rho:\ X=A+t\mathbf{u}+s\mathbf{v},\quad t,s\in\mathbb{R},$
$\sigma:\ X=C+k\mathbf{w}+r\mathbf{x},\quad k,r\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\ :\ \cos\varphi=\frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|\,|(\mathbf{w}\times\mathbf{x})|}}=\frac{|(-2,1,2)\cdot(2,-5,-2)|}{|(-2,1,2)|\,|(2,-5,-2)|}$$

$$=\frac{|-4-5-4|}{3\sqrt{33}}=\frac{|-13|}{3\sqrt{33}}=\frac{13}{3\sqrt{33}}\doteq 0.75$$



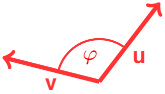
tj. řešení rovnice

$\cos\varphi=0.75$ z intervalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$$\underline{\underline{\varphi\doteq 0.72\sim 41^\circ}}$$

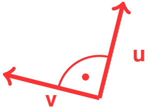
- Odchylka vektorů **u**, **v**

$$\boxed{\varphi \in \langle 0, \pi \rangle \ : \ \cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}}$$



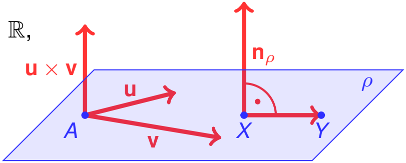
- Je-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, hovoříme o vektorech

  navzájem kolmých (platí $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$)



- Vektor, který je kolmý ke každému vektoru $Y - X$, kde $X, Y \in \rho$, značíme $\boxed{n_\rho}$; jde o tzv. normálový vektor roviny ρ.

- Je-li $\rho: \ X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$, lze volit např. $n_\rho := u \times v$



- Obecná rovnice roviny s normálovým vektorem $n_\rho = (n_1, n_2, n_3)$, $d \in \mathbb{R}$:

$$[x_1, x_2, x_3] \in \rho \iff \boxed{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0}$$

Příklad 4.2: Určete

a) obecnou rovnici roviny $\rho: \ X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \quad t,s \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{n}_\rho := (1,0,1) \times (2,2,1) = (-2,1,2)$$

$$\rho: \ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + d = 0$$

$$[1,2,5] \in \rho \iff -2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 5 + d = 0 \iff d = -10$$

$$\rho: \ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

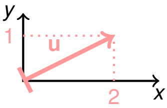
b) parametrickou rovnici roviny $\sigma: \ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 6 = 0$

$$x_1 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = \frac{4x_1 - 8x_2 + 6}{2} = \frac{4t - 8s + 6}{2} = 2t - 4s + 3$$

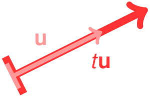
$$\sigma: \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 3 + 2t - 4s \end{aligned}\right\} t,s \in \mathbb{R}$$

$$\sigma: \ X = [0,0,3] + t(1,0,2) + s(0,1,-4), \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

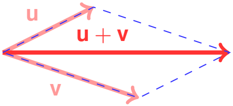
- Aritmetický vektor: $\boxed{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2}$



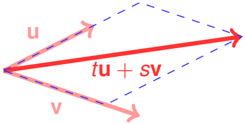
- násobek vektoru $\boxed{t\mathbf{u}}$



- součet vektorů $\boxed{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$

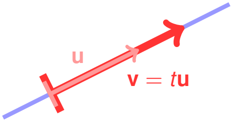


- lineární kombinace vektorů $\boxed{t\mathbf{u} + s\mathbf{v}}$



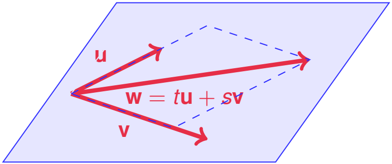
Lineárně závislé

- vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:



…jeden je násobkem druhého

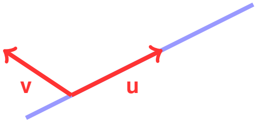
- vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:



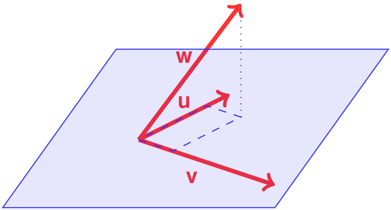
…jeden je lineární kombinací ostatních

Lineárně nezávislé

- vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:



- vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:



Je-li hodnost matice rovna počtu jejích řádků, potom její řádky reprezentují lineárně nezávislé vektory.

Příklad 5.1: Zjistěte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

a) $(1,0,1),(5,0,5)$ $\quad\ldots(5,0,5)=5\cdot(1,0,1)\implies$ ne

b) $(2,1,2),(-2,1,0),(-4,4,1)$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&1&0\\-4&4&1\end{pmatrix}\ \cdot(2)\ \sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&2\\0&6&5\end{pmatrix}\ \cdot(-3)\ \sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad \left.\begin{matrix}h(A)=3\\m=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{ano}$$

c) $(2,1,2),(-2,1,0),(-4,4,2)$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&1&0\\-4&4&2\end{pmatrix}\ \cdot(2)\ \sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&2\\0&6&6\end{pmatrix}\ \cdot(-3)\ \sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \left.\begin{matrix}h(A)=2\\m=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{ne}$$

Konec

(Referát)