3. Spojitost

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Spojitost v bodě

Definice 3.1

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $x_0 \in D_f$ a $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$

Poznámka

Nahradíme-li ve formulaci definice 3.1 limitní přechod $x \to x_0$ limitním přechodem $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$), obdržíme definici spojitosti zleva (resp. zprava) funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úkol:

Zformulujte definici 3.1 analogicky jako definici limity.

Věta 3.1

Funkce je spojitá v nějakém bodě právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.

Spojitost součtu, součinu, podílu a složené funkce

Věta 3.2

Nechť funkce f, g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom také funkce $f + g, f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je také funkce f/g spojitá v bodě x_0.

Věta 3.3

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a nechť funkce g je spojitá v bodě y_0, kde $y_0 = f(x_0)$. Potom funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.

Nespojitost v bodě

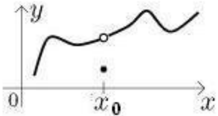
Definice 3.2

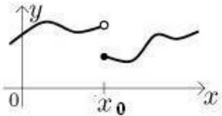
Nechť funkce f není spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $y_1, y_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

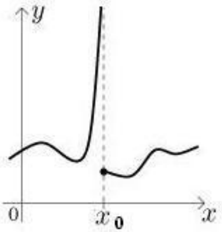
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_1, \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_2.$$

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0

- odstranitelnou nespojitost, jestliže $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a platí $y_1 = y_2$.
- nespojitost 1. druhu, jestliže $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a platí $y_1 \neq y_2$; v takové situaci se rozdíl $y_2 - y_1$ nazývá skok funkce f.
- nespojitost 2. druhu, jestliže $y_1 \in \{-\infty, \infty\}$ nebo $y_2 \in \{-\infty, \infty\}$.







Spojitost na množině

podrobnosti

Definice 3.3

Funkce je

- spojitá na intervalu, jestliže je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
- spojitá na množině, jestliže je spojitá na každé její komponentě.
- spojitá, jestliže je spojitá na svém definičním oboru.

Spojitost součtu, součinu, podílu, složené a inverzní funkce

Věta 3.4

Nechť funkce f, g jsou spojité na množině $M \subset \mathbb{R}$. Potom také funkce $f+g, f \cdot g$ jsou spojité na M. Je-li navíc funkce g nenulová na M, je také funkce f/g spojitá na M.

Věta 3.5

Nechť funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá na množině $f(M)$. Potom funkce $g \circ f$ je spojitá na M.

Věta 3.6

Nechť funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}$ a nechť existuje f^{-1}. Potom f^{-1} je spojitá na množině $f(M)$.

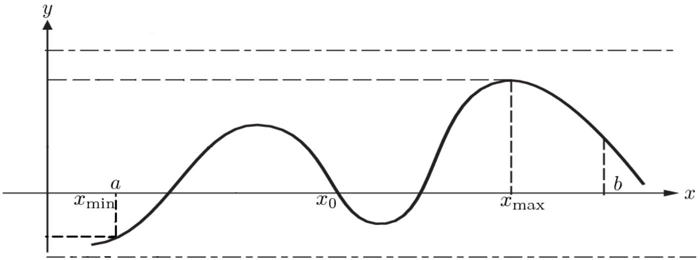
Věta 3.7

Všechny elementární funkce jsou spojité.

Další věty o spojitých funkcích

Weierstrassova věta

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená a nabývá na něm svého minima a maxima.



Bolzanova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\boxed{f(x_0) = 0.}$

Další věty o spojitých funkcích

Důsledek Bolzanovy věty

Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a nenabývá na něm nulové hodnoty. Potom f je kladná na I nebo záporná na I.

Spojitost na množině

zpět

Definice 3.3

Nechť I je interval, a je dolní mez intervalu I a b je horní mez intervalu I. Potom funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá ve všech bodech intervalu (a, b) a současně platí tyto implikace:

$$a \in I \implies f \text{ je spojitá zprava v bodě } a$$
$$b \in I \implies f \text{ je spojitá zleva v bodě } b.$$

Poznámka

Z definice 3.3 mimo jiné plyne, že funkce f je

- spojitá na intervalu (a, b), je-li spojitá ve všech jeho bodech.
- spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá na intervalu (a, b), spojitá zprava v bodě a a spojitá zleva v bodě b.
- spojitá na intervalu $\langle a, a\rangle$, je-li spojitá v bodě a.

Konec

(3. Spojitost)