

# Kombinatorika

Jaroslav Drobek

[jaroslav.drobek@goa-orlova.cz](mailto:jaroslav.drobek@goa-orlova.cz)

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

## 2. Kombinační čísla

GOA –  
ORLOVA.CZ

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo  $n$  nad  $k$ .

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo  $n$  nad  $k$ .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo  $n$  nad  $k$ .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo  $n$  nad  $k$ .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je **kombinační číslo  $n$  nad  $k$** .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} =$$



Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo  $n$  nad  $k$ .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je **kombinační číslo  $n$  nad  $k$** .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je **kombinační číslo  $n$  nad  $k$** .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je **kombinační číslo  $n$  nad  $k$** .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = \frac{7 \cdot 6}{2} =$$

Pro všechna  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $k \leq n$ , označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že  $\binom{n}{k}$  je **kombinační číslo  $n$  nad  $k$** .

### Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{21}}$$

Vypočtěte:

a)  $\binom{8}{5}$  [56]

Vypočtěte:

a)  $\binom{8}{5}$  [56]      b)  $\binom{32}{2}$  [496]

Vypočtěte:

a)  $\binom{8}{5}$  [56]

b)  $\binom{32}{2}$  [496]

c)  $\binom{121}{120}$  [121]



Vypočtěte:

a)  $\binom{8}{5}$  [56]      b)  $\binom{32}{2}$  [496]      c)  $\binom{121}{120}$  [121]

Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:

a)  $\binom{n+2}{2} \left[ \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$

**Vypočtěte:**

a)  $\binom{8}{5}$  [56]      b)  $\binom{32}{2}$  [496]      c)  $\binom{121}{120}$  [121]

**Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:**

a)  $\binom{n+2}{2} \left[ \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$       b)  $\binom{n+3}{n} \left[ \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \right]$

**Vypočtěte:**

a)  $\binom{8}{5}$  [56]      b)  $\binom{32}{2}$  [496]      c)  $\binom{121}{120}$  [121]

**Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:**

a)  $\binom{n+2}{2} \left[ \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$       b)  $\binom{n+3}{n} \left[ \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \right]$       c)  $\binom{n+1}{n-1}$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a) 
$$\binom{n}{0} = 1$$



# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$       b)  $\binom{n}{n} = 1$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$       b)  $\binom{n}{n} = 1$       c)  $\binom{n}{1} = n$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

## Věta

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$





# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

## Věta

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



## Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

**Věta**

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Příklad 2.2**

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

## Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

**Věta**

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Příklad 2.2**

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

## Věta

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



## Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^{\clubsuit} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

## Věta

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



## Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^{\clubsuit} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{5}{4} + \binom{5}{3}}^{\clubsuit} + \binom{6}{3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3}$$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí**

a)  $\binom{n}{0} = 1$     b)  $\binom{n}{n} = 1$     c)  $\binom{n}{1} = n$     d)  $\binom{0}{0} = 1$

## Věta

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$ , splňující  $k \leq n$ , platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



## Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^{\clubsuit} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{5}{4} + \binom{5}{3}}^{\clubsuit} + \binom{6}{3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3} \stackrel{\clubsuit}{=} \underline{\underline{\binom{7}{4}}}$$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Vyjádřete jediným kombinačním číslem:**

a)  $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$

# Vlastnosti kombinačních čísel

**Vyjádřete jediným kombinačním číslem:**

a)  $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$       b)  $\binom{7}{3} + \binom{7}{5}$



# Vlastnosti kombinačních čísel

**Vyjádřete jediným kombinačním číslem:**

a)  $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$       b)  $\binom{7}{3} + \binom{7}{5}$       c)  $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4}$

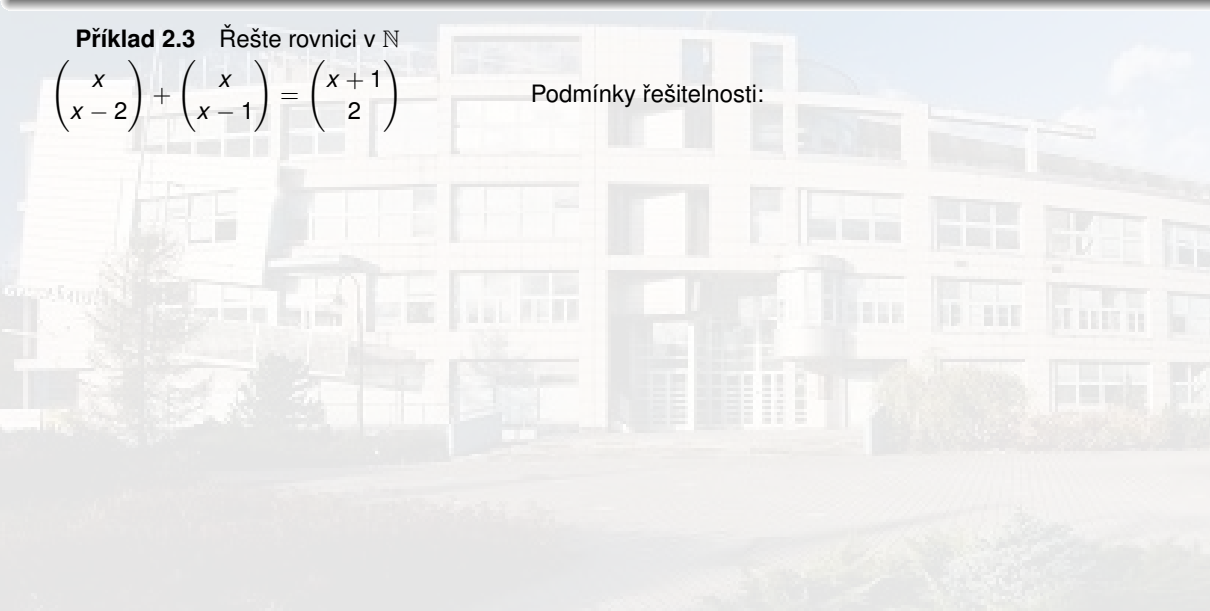
**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $x \geq 0$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $x \geq 0$    II.  $x - 2 \geq 0$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$  II.  $x - 2 \geq 0$  III.  $x - 1 \geq 0$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$  II.  $x - 2 \geq 0$  III.  $x - 1 \geq 0$  IV.  $x + 1 \geq 0$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$  II.  $x - 2 \geq 0$  III.  $x - 1 \geq 0$  IV.  $x + 1 \geq 0$

V.  $x + 1 \geq 2$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$  II.  $x - 2 \geq 0$  III.  $x - 1 \geq 0$  IV.  $x + 1 \geq 0$

$\underline{x \geq 2}$

V.  $x + 1 \geq 2$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

- I.  $\underline{x \geq 0}$    II.  $\underline{x-2 \geq 0}$    III.  $\underline{x-1 \geq 0}$    IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$   
 $\quad \quad \quad \underline{x \geq 2}$     $\quad \quad \quad \underline{x \geq 1}$     $\quad \quad \quad \underline{x \geq -1}$   
V.  $\underline{x+1 \geq 2}$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$    II.  $\underline{x-2 \geq 0}$    III.  $\underline{x-1 \geq 0}$    IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$

$\underline{x \geq 2}$

$\underline{x \geq 1}$

$\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$

$\underline{x \geq 1}$

$\boxed{x \geq 2}$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$    II.  $\underline{x-2 \geq 0}$    III.  $\underline{x-1 \geq 0}$    IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$

$\underline{x \geq 2}$     $\underline{x \geq 1}$     $\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$

$\underline{x \geq 1}$

$\boxed{x \geq 2}$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$    II.  $\underline{x-2 \geq 0}$    III.  $\underline{x-1 \geq 0}$    IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$

$\underline{x \geq 2}$     $\underline{x \geq 1}$     $\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$

$\underline{x \geq 1}$

$\boxed{x \geq 2}$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$    II.  $\underline{x-2 \geq 0}$    III.  $\underline{x-1 \geq 0}$    IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$

$$\underline{x \geq 2}$$

$$\underline{x \geq 1}$$

$$\underline{x \geq -1}$$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$

$$\underline{x \geq 1}$$

$$\boxed{x \geq 2}$$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$

II.  $\underline{x-2 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 2}$

III.  $\underline{x-1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 1}$

IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$   
 $\underline{x \geq 1}$

$\boxed{x \geq 2}$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$$



Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{\underline{x \geq 0}}$

II.  $\underline{\underline{x-2 \geq 0}}$   
 $\underline{\underline{x \geq 2}}$

III.  $\underline{\underline{x-1 \geq 0}}$   
 $\underline{\underline{x \geq 1}}$

IV.  $\underline{\underline{x+1 \geq 0}}$   
 $\underline{\underline{x \geq -1}}$

V.  $\underline{\underline{x+1 \geq 2}}$   
 $\underline{\underline{x \geq 1}}$

$\underbrace{\hspace{15em}}$   
 $\boxed{x \geq 2}$



**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$$



Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$

II.  $\underline{x-2 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 2}$

III.  $\underline{x-1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 1}$

IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$   
 $\underline{x \geq 1}$

$$\boxed{x \geq 2}$$



**Řešte rovnice:**

a)  $\binom{n}{n-3} + \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+4}{n+1} = \frac{n^3}{2} + 88 \quad [6]$

**Příklad 2.3** Řešte rovnici v  $\mathbb{N}$

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$$



Podmínky řešitelnosti:

I.  $\underline{x \geq 0}$

II.  $\underline{x-2 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 2}$

III.  $\underline{x-1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq 1}$

IV.  $\underline{x+1 \geq 0}$   
 $\underline{x \geq -1}$

V.  $\underline{x+1 \geq 2}$   
 $\underline{x \geq 1}$

$$\boxed{x \geq 2}$$



**Řešte rovnice:**

a)  $\binom{n}{n-3} + \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+4}{n+1} = \frac{n^3}{2} + 88 \quad [6]$

b)  $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{5x}{2} \quad [4]$



**Konec**  
(2. Kombinační čísla)