Stereometrie

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

4. Metrické úlohy

GOA – ORLOVA.CZ

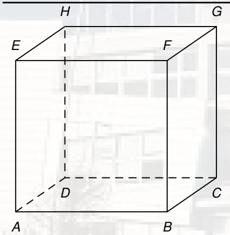
Odchylky přímek

Základní pravidla:

- **Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají.**
- **Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0°.**
- **Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.**

Odchylky přímek

Příklad 4.1 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočítejte odchylku přímek *BG* a *GD*.



- $\triangle BGD$ je rovnostranný
- $|\sphericalangle BGD| = 60°$
- $|\sphericalangle(BG, GD)| = 60°$

Odchylky přímek

Příklad 4.2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímek AS_{BC} a AD, kde bod S_{BC} je střed hrany BC.

- $\sphericalangle(AS_{BC}, AD) = ?$
- $\sphericalangle(AS_{BC}, AD) = \sphericalangle(AS_{BC}, BC)$
- $\triangle ABS_{BC}$ je pravoúhlý
- označme $\alpha = \sphericalangle(AS_{BC}, BC)$
- potom $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{|AB|}{|BS_{BC}|} = \frac{|AB|}{\frac{|AB|}{2}} = 2$
- řešme goniometrickou rovnici
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= 2 \\ \alpha &= \operatorname{arctg} 2 \\ \alpha &= 63,43^\circ \end{aligned}$$
- $\underline{\underline{\sphericalangle(AS_{BC}, AD) = 63,43^\circ}}$

Odchylky přímek

Příklad 4.3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímek BS_{DH} a AE, kde bod S_{DH} je střed hrany DH.

- $\sphericalangle(BS_{DH}, AE) = ?$
- $\sphericalangle(BS_{DH}, AE) = \sphericalangle(BS_{DH}, DH)$
- $\triangle BDS_{DH}$ je pravoúhlý
- označme $\alpha = \sphericalangle(BS_{DH}, DH),\ a = |AB|$
- potom $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\sqrt{2a^2}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{2}$
- řešme goniometrickou rovnici $$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= 2\sqrt{2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \\ \alpha &= 70{,}53^\circ \end{aligned}$$
- $\underline{\underline{\sphericalangle(AS_{BC}, AD) = 70{,}53^\circ}}$

Vzdálenosti bodů, přímek

Příklad 4.4 V kvádru $ABCDEFGH$ platí: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AE| = 8$ cm. Určete vzdálenost bodů E, S, kde bod S je střed podstavy $ABCD$.

- $|ES|$ je délka přepony v pravoúhlém $\triangle ASE$, v němž
- známe délku odvěsny AE
- pokusíme se dopočítat délku odvěsny AS:
  - $|AS|$ je polovina délky přepony v rovnoramenném pravoúhlém $\triangle ABC$, v němž známe délky obou odvěsen AB, BC
  - podle Pythagorovy věty

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$
$$|AC| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$|AS| = \frac{1}{2}|AC| = \sqrt{13}$$

- nyní opět podle Pythagorovy věty

$$|ES|^2 = |AS|^2 + |AE|^2 = 13 + 64 = 77$$
$$\underline{\underline{|ES| = \sqrt{77}\text{ cm}}}$$

Vzdálenosti bodů, přímek

Příklad 4.5 Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Určete

a) vzdálenost bodu *S* (střed úhlopříčky *CF*) od přímky *AH*,

b) vzdálenost bodu S_{AB} (střed hrany *AB*) od přímky *GH*.

---

a)
- jde o délku nejkratší možné spojnice mezi bodem *S* a body přímky *AH*.
- nejkratší možná spojnice leží na kolmici k přímce *AH* procházející bodem *S*; jejím druhým koncovým bodem je pata kolmice
- tato spojnice má stejnou délku jako s ní rovnoběžná hrana krychle, tj. *a*
- $\underline{\underline{|S \leftrightarrow AH| = a}}$

b)
- jde o délku nejkratší možné spojnice mezi bodem S_{AB} a body přímky *GH*.
- nejkratší možná spojnice leží na kolmici k přímce *GH* procházející bodem S_{AB}; jejím druhým koncovým bodem je pata kolmice
- tato spojnice má stejnou délku jako s ní rovnoběžná úsečka *BG*
- úsečka *BG* je přeponou v rovnorammenném a pravoúhlém $\triangle BCG$
- podle Pythagorovy věty
$$|BG|^2 = |BC|^2 + |CG|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$|BG| = \sqrt{2}a$$
- $\underline{\underline{|S_{AB} \leftrightarrow GH| = \sqrt{2}a}}$

Konec

(4. Metrické úlohy)