Rovnice a nerovnice

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

3. Soustavy rovnic

GOA – ORLOVA.CZ

Soustava 2 rovnic o 2 neznámých

- Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x a y je dvojice rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ px + qy &= r, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$.

- Řešení soustavy (1) je každá uspořádaná dvojice čísel x a y, která splňují obě rovnice; označujeme $\boxed{[x, y]}$

Příklad 3.1 Určete věk matky a dcery, jestliže za sedm let bude matka čtyřikrát starší než dcera a za deset let bude matka třikrát starší než dcera.

---

věk matky... x

věk dcery... y

$$\begin{aligned} x + 7 &= 4(y + 7) \\ x + 7 &= 4y + 28 \\ x - 4y &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 10 &= 3(y + 10) \\ x + 10 &= 3y + 30 \\ x - 3y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4y &= 21 \\ x - 3y &= 20 \end{aligned}$$

$$(a = 1,\ b = -4,\ c = 21) \qquad (p = 1,\ q = -3,\ r = 20)$$

Řešení dosazovací metodou

Příklad 3.1 Určete věk matky a dcery, jestliže za sedm let bude matka čtyřikrát starší než dcera a za deset let bude matka třikrát starší než dcera.

$$\begin{aligned} x - 4y &= 21 \\ x - 3y &= 20 \end{aligned} \implies x = 21 + 4y$$

$$x = 21 + 4 \cdot (-1)$$

$$\underset{\sim}{x = 17}$$

$$\begin{aligned} (21 + 4y) - 3y &= 20 \\ 21 + y &= 20 \\ \underset{\sim}{y} &\underset{\sim}{= -1} \end{aligned}$$

Řešení je uspořádaná dvojice $\underline{\underline{[17; -1]}}$. Budoucí matce je 17 let, dcera se narodí za rok.

Příklad 3.2

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -5 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned} \implies y = 2x - 1$$

$$y = 2 \cdot (-3) - 1$$

$$\underset{\sim}{y = -7}$$

$$\begin{aligned} -3x + 2(2x - 1) &= -5 \\ -3x + 4x - 2 &= -5 \\ \underset{\sim}{x} &\underset{\sim}{= -3} \end{aligned}$$

Řešení je uspořádaná dvojice $\underline{\underline{[-3; -7]}}$.

Řešení sčítací metodou

Příklad 3.3

$$\begin{aligned} x - 4y &= 21 \\ x - 3y &= 20 \quad | \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4y &= 21 \\ -x + 3y &= -20 \\ \hline 0x - y &= 1 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $y = -1$.

Hodnotu neznámé x dopočítáme např. z první rovnice dosazením zjištěné hodnoty -1 za y:

$$\begin{aligned} x - 4 \cdot (-1) &= 21 \\ x + 4 &= 21 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Řešení soustavy je uspořádaná dvojice $[17; -1]$.

Ekvivalentní úpravy rovnic:

a) vynásobení
b) přičtení (násobku)
c) záměna

Příklad 3.4

$$\begin{aligned} x + \sqrt{3}\,y &= 1 \quad | \cdot (-2) \\ 2x + 2\sqrt{3}\,y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 2\sqrt{3}y &= -2 \\ 2x + 2\sqrt{3}y &= 3 \\ \hline 0x + 0y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Protože jde o neplatnou rovnost, soustava nemá řešení.

Řešení sčítací metodou

Příklad 3.5

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 2y & = & 1 \quad | \cdot (-3) \\ 9x & - & 6y & = & 3 \\ \hline -9x & + & 6y & = & -3 \\ 9x & - & 6y & = & 3 \\ \hline 0x & + & 0y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Protože jde o platnou rovnost, soustava má ∞-mnoho řešení (uspořádaných dvojic).

Jak budou tyto uspořádané dvojice vypadat?

- **Buď** vyjádříme y (např. z první rovnice):
  $$-2y = 1 - 3x$$
  $$y = \frac{1-3x}{-2}$$
  $$y = \frac{3x-1}{2}$$
  Potom $\left[x; \frac{3x-1}{2}\right]$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

- **Nebo** vyjádříme x (např. z první rovnice):
  $$3x = 1 + 2y$$
  $$x = \frac{1+2y}{3}$$
  Potom $\left[\frac{1+2y}{3}; y\right]$ pro libovolné $y \in \mathbb{R}$.

Řešení srovnávací metodou

Příklad 3.6

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 7 \\ -6x + 5y &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5y &= 7 - 2x \\ 5y &= 13 + 6x \end{aligned}$$

Protože levé strany jsou stejné, musí být stejné také pravé strany:

$$7 - 2x = 13 + 6x$$

Pokračujeme řešením (lineární) rovnice o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} -6x - 2x &= 13 - 7 \\ -8x &= 6 \\ x &= \frac{6}{-8} \\ x &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Hodnotu neznámé y dopočítáme např. z první rovnice dosazením zjištěné hodnoty $-\frac{3}{4}$ za x:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 5y &= 7 \\ -\frac{3}{2} + 5y &= 7 \\ 5y &= 7 + \frac{3}{2} \\ 5y &= \frac{14}{2} + \frac{3}{2} \\ 5y &= \frac{17}{2} \\ y &= \frac{17}{10} \end{aligned}$$

Řešení je uspořádaná dvojice $\left[-\frac{3}{4}; \frac{17}{10}\right]$.

Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

- Soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých x, y, z je trojice rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned} \tag{2}$$

  kde $a_1, b_1, c_1, \dots, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}$.

- Řešení soustavy (2) je každá uspořádaná trojice čísel x, y, z která splňují všechny tři rovnice; označujeme $\boxed{[x, y, z]}$

Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

Příklad 3.7

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2} \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ \hline x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \quad \cdot 3 \quad \cdot(-4) \\ {\color{red}-3x_1} & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ {\color{red}4x_1} & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ \hline x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ \hline x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ & & & & -x_3 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\utilde{x_3 = -1}$$

$$-x_2 + 2 \cdot (-1) = -3$$

$$\utilde{x_2 = 1}$$

$$x_1 - 1 + (-1) = 1$$

$$\utilde{x_1 = 3}$$

Řešení je uspořádaná trojice $\underline{\underline{[3; 1; -1]}}$

Ekvivalentní úpravy rovnic:

a) vynásobení
b) přičtení násobku
c) záměna

Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

Příklad 3.8

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \quad \cdot(-2)\\ {\color{red}2x} - y + 5z &= 5\\ {\color{red}-x} + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1\\ 3y + 3z &= 3\\ y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1\\ y + 3z &= 1 \quad \cdot(-3)\\ 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1\\ y + 3z &= 1\\ -6z &= 0 \end{aligned}$$

$z = 0$

$y + 3 \cdot 0 = 1$

$y = 1$

$x - 2 \cdot 1 + 0 = 1$

$x = 3$

Řešení je uspořádaná trojice $[3; 1; 0]$

Ekvivalentní úpravy rovnic:

a) vynásobení
b) přičtení násobku
c) záměna

Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & \sqrt{2} \\ {\color{red}3x} & - & 2y & - & z & = & 2\sqrt{2} \\ {\color{red}-2x} & + & 3y & - & z & = & \sqrt{2} \end{array} \quad \cdot(-3) \quad \cdot 2$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & \sqrt{2} \\ & - & 5y & + & 5z & = & -\sqrt{2} \\ & & 5y & - & 5z & = & 3\sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & \sqrt{2} \\ & - & 5y & + & 5z & = & -\sqrt{2} \\ & & 0y & + & 0z & = & 2\sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & \sqrt{2} \\ & - & 5y & + & 5z & = & -\sqrt{2} \\ & & & & 0 & = & 2\sqrt{2} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Řešení neexistuje

Ekvivalentní úpravy rovnic:

a) vynásobení
b) přičtení násobku
c) záměna

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Příklad 3.10

$$4x + y - 6 = 0 \implies y = 6 - 4x$$

$$4x^2 - y^2 - 12 = 0 \qquad y = 6 - 4 \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$$

$$4x^2 - (6 - 4x)^2 - 12 = 0$$

$$4x^2 - (36 - 48x + 16x^2) - 12 = 0$$

$$4x^2 - 36 + 48x - 16x^2 - 12 = 0$$

$$-12x^2 + 48x - 48 = 0 \quad \big| : (-12)$$

$$1 \cdot x^2 - 4y + 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$$\implies x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

Řešení je uspořádaná dvojice $\underline{\underline{[2; -2]}}$.

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Příklad 3.11

$$x - y + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y - 5$$

$$\underline{x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0}$$

$$(y-5)^2 + 2(y-5) + y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y^2 - 10y + 25 + 2y - 10 + y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$2y^2 - 12y + 16 = 0 \quad \Big| : 2$$

$$1 \cdot y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$$

$$\Longrightarrow y_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \underline{\underline{4}} \\ \frac{6-2}{2} = \underline{\underline{2}} \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 - 5 = 4 - 5 = \underline{\underline{-1}}$$

$$x_2 = y_2 - 5 = 2 - 5 = \underline{\underline{-3}}$$

Řešení jsou uspořádané dvojice $\underline{\underline{[-1; 4],\ [-3; 2]}}$.

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Příklad 3.12

a)
$$x - 2y - 3 = 0$$
$$x^2 + 4x + y^2 - 1 = 0$$

b)
$$x - 3y + 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

c)
$$x_T - 4y_T + 9 = 0$$
$$(x_T + 1)^2 + 16(y_T - 2)^2 = 32$$

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Příklad 3.13

$$x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -x$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(-x-2)^2}{16} = 1$$

$$16(x+1)^2 + 25(-x-2)^2 = 16 \cdot 25$$

$$16(x^2 + 2x + 1) + 25(x^2 + 4x + 4) = 400$$

$$41x^2 + 132x + 116 = 400$$

$$41x^2 + 132x - 284 = 0$$

$$D = 132^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-284) = 132^2 + 4 \cdot 41 \cdot 284 = 64000 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-132 \pm \sqrt{64000}}{2 \cdot 41} = \frac{-132 \pm 80\sqrt{10}}{2 \cdot 41} = \frac{-66 \pm 40\sqrt{10}}{41}$$

$$y_{1,2} = -x_{1,2} = -\frac{-66 \pm 40\sqrt{10}}{41} = \frac{66 \mp 40\sqrt{10}}{41}$$

Řešení jsou uspořádané dvojice $\left[\frac{-66+40\sqrt{10}}{41}; \frac{66-40\sqrt{10}}{41}\right], \left[\frac{-66-40\sqrt{10}}{41}; \frac{66+40\sqrt{10}}{41}\right]$.

Konec

(3. Soustavy rovnic)