Posloupnosti

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

2. Aritmetická posloupnost

GOA – ORLOVA.CZ

Definice 2.1

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, existuje-li $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d.}$$

Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 2.1 Dokažte, že posloupnost $(3n+2)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická a určete její diferenci.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = 3n + 2$$
$$a_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 3 + 2 = a_n + 3.$$

Položme $d = 3$. Nyní vidíme, že posloupnost je podle definice aritmetická s diferencí $d = 3$.

Příklad 2.2 **Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí:**

a) $a_1 = 4,\ d = -1$ b) $a_1 = 0,5,\ d = 3$ c) $a_5 = 6,\ d = 2$ d) $a_3 = -\dfrac{5}{2},\ d = \dfrac{1}{2}$

Věta 2.1

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d a pro libovolná čísla $n, r, s \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d,} \tag{1}$$

$$\boxed{a_s = a_r + (s-r)d}. \tag{2}$$

Náznak důkazu

Podle definice postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_{10} &= \dots \qquad \cdots = a_1 + 9d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

Pro $n = s$ resp. $n = r$ z (1) obdržíme

$$\begin{aligned}
a_s &= a_1 + (s-1)d, \\
a_r &= a_1 + (r-1)d,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
a_s - a_r &= (s-r)d \\
a_s &= a_r + (s-r)d
\end{aligned}$$

Příklad 2.3 Vzorcem pro n-tý člen vyjádřete posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro niž platí: $a_5 = 7,\ a_9 = 11$.

Pro vyjádření n-tého členu lze využít vztahu

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \tag{1}$$

Stačí najít čísla a_1, d:

d: Pro $r = 5$ a $s = 9$ na základě $\boxed{a_s = a_r + (s-r)d}$ dostáváme

$$a_9 = a_5 + (9-5)d$$
$$11 = 7 + 4d$$
$$\underset{\sim\sim\sim}{d = 1}$$

a_1: Využijeme jeden ze zadaných členů, např. a_5, k dosazení do (1):

$$a_5 = a_1 + (5-1)d$$
$$7 = a_1 + 4 \cdot 1$$
$$\underset{\sim\sim\sim}{a_1 = 3}$$

Dosazením zjištěných hodnot do (1) dostáváme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 1$$
$$\underline{\underline{a_n = 2 + n}}$$

Příklad 2.4 **Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí:**

a) $a_3 = 1,\ a_7 = -7$ b) $a_6 = 12,\ a_{12} = 6$ c) $a_1 + a_6 = 16,\ a_3 + a_4 = 19$

Příklad 2.5 Určete 5. člen a diferenci aritmetické posloupnosti, je-li $a_n = 1 - 3n,\ n \in \mathbb{N}$.

Pátý člen získáme dosazením do zadaného výrazu pro n-tý člen:

$$a_5 = 1 - 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-14}}.$$

Stejně lze vypočítat libovolný člen - záměrně spočítáme čtvrtý:

$$a_4 = 1 - 3 \cdot 4 = -11,$$

protože potom (intuitivně)

$$d = a_5 - a_4 = -14 - (-11) = \underline{\underline{-3}}.$$

(Ve skutečnosti jde o využití vztahu $\boxed{a_s = a_r + (s - r)d}$ pro $s = 5, r = 4$.)

Příklad 2.6 Najděte rekurentní vyjádření aritmetické posloupnosti, je-li $a_2 = 3,\ a_4 = -1$.

Rekurentní vyjádření aritmetické posloupnosti: $\boxed{a_1, \quad a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in \mathbb{N}).}$

Potřebujeme tedy najít a_1 a d:

d: Mezi zadaným druhým a čtvrtým členem je (intuitivně) rozdíl $2d$; a opravdu, použitím vztahu

$$\boxed{a_s = a_r + (s-r)d}$$

pro $s = 4, r = 2$ dostáváme:

$$a_4 = a_2 + (4-2)d$$

$$a_4 - a_2 = 2d$$

Dosadíme: $-1 - 3 = 2d$

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim\sim\sim}{-2}$$

a_1: Mezi zadaným druhým a hledaným prvním členem je (intuitivně) rozdíl d; a opravdu, použitím vztahu

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

pro $n = 2$ platí:

$$a_2 = a_1 + (2-1)d$$

$$a_2 - a_1 = d$$

Dosadíme: $3 - a_1 = -2$

$$-a_1 = -5$$

$$\underset{\sim}{a_1} = \underset{\sim\sim\sim}{5}$$

Zjištěné údaje použijeme v rekurentním vyjádření:

$$\underline{\underline{a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n - 2 \quad (n \in \mathbb{N})}}$$

Příklad 2.7 V aritmetické posloupnosti určete n, je-li $a_n = 76,\ d = 6,\ a_1 = -2$.

Hledaný i známé údaje jsou obsaženy ve vztahu pro n-tý člen: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$.
Po dosazení dostáváme:

$$
\begin{aligned}
76 &= -2 + (n-1)\cdot 6\\
78 &= (n-1)\cdot 6\\
13 &= n-1\\
\underline{\underline{n}} &\underline{\underline{= 14}}
\end{aligned}
$$

Domácí úkol (zdroj: **Aritmetická posloupnost II na realisticky.cz**)

1. Sestavte vzorec pro n-tý člen, najděte rekurentní vyjádření a určete a_{13} v aritmetické posloupnosti, je-li $d = -2,\ a_1 = 4$.
2. V aritmetické posloupnosti platí $d = 5,\ a_1 = 2$. Který člen této posloupnosti je roven 77?

Příklad 2.8 V aritmetické posloupnosti určete a_3, je-li
$$\begin{aligned} 2a_{10} - 3a_3 &= 5 \\ 5a_5 + 4a_1 &= 83 \end{aligned} .$$

Máme dvě rovnice o čtyřech neznámých – to je moc.
Každý člen aritm. posl. však lze vyjádřit v závislosti na a_1 a d:

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \\ &a_{10} = a_1 + 9d \\ &a_5 = a_1 + 4d \\ &a_3 = a_1 + 2d \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{dosadíme do zadaných vztahů}}$$

$$\begin{aligned} 2(a_1 + 9d) - 3(a_1 + 2d) &= 5 \\ 5(a_1 + 4d) + 4a_1 &= 83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + 18d - 3a_1 - 6d &= 5 \\ 5a_1 + 20d + 4a_1 &= 83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_1 + 12d &= 5 \quad \cdot 9 \\ 9a_1 + 20d &= 83 \end{aligned}$$

$$128d = 128$$

$$\underset{\sim\sim}{d = 1} \qquad \ldots a_1 = 12d - 5 = \underset{\sim}{7}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ a_3 &= 7 + 2 \cdot 1 \\ \underline{\underline{a_3}} &\underline{\underline{= 9}} \end{aligned}$$

Domácí úkol (zdroj: Úlohy s aritmetickou posloupností na realisticky.cz)

V aritmetické posloupnosti určete

a) $a_1, d,$ je-li $a_5 + a_2 = 22, a_7 - a_3 = -16.$

b) $a_1, d, a_8,$ je-li $a_2 + a_3 + a_4 = 15, a_3 \cdot a_4 = 40.$

Věta 2.2

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti (tj. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) platí

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).}$$

Příklad 2.9 Vypočítejte součet všech dvouciferných přirozených čísel.

Kolik jich je? $\underset{a_1}{10}\ \underset{a_2}{11}\ \underset{a_3}{12}\ \underset{a_{n-2}}{97}\ \underset{a_{n-1}}{98}\ \underset{a_n}{99}\ \ldots n = 99 - 9 = 90$

Jde o aritmetickou posloupnost?

$$a_n = n + 9$$

$$a_{n+1} = n + 1 + 9 = a_n + 1 \qquad \ldots d = 1\checkmark$$

Potom

$$s_{90} = \frac{90}{2}(10 + 99) = 45 \cdot 109 = \underline{\underline{4905}}$$

Vzorce

$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$ $\boxed{a_s = a_r + (s-r)d}$ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ $\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$

Příklad 2.10 Určete součet prvních dvaceti členů aritmetické posloupnosti, je-li $a_1 = 4,\ d = 2.$

$$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (4 + a_n)$$
$$s_{20} = 10 \cdot (4 + a_1 + (n-1)d)$$
$$s_{20} = 10 \cdot (4 + 4 + 19 \cdot 2)$$
$$s_{20} = 10 \cdot 46$$
$$\underline{\underline{s_{20} = 460}}$$

Příklad 2.11 V aritmetické posloupnosti určete n, je-li $s_n = 0,\ d = 3,\ a_1 = -45.$

$$0 = \frac{n}{2} \cdot (-45 + a_n)$$
$$0 = \frac{n}{2} \cdot (-45 + a_1 + (n-1)d)$$
$$0 = \frac{n}{2} \cdot (-90 + 3n - 3)$$
$$0 = \frac{n}{2} \cdot (-93 + 3n)$$
$$0 = \frac{n}{2} \cdot 3 \cdot (-31 + n)$$
$$0 = \frac{3}{2}n \cdot (n - 31)$$
$$0 = n \cdot (n - 31)$$
$$\cancel{n_1 = 0} \qquad \underline{\underline{n_2 = 31}}$$

Příklad 2.12 Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, je-li

$$a_1 + a_5 + a_{10} = 40, \; -a_1 - a_5 + a_{10} = 24.$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_5 + a_{10} &= 40 \\ -a_1 - a_5 + a_{10} &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 4d) + (a_1 + 9d) &= 40 \\ -a_1 - (a_1 + 4d) + (a_1 + 9d) &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a_1 + 13d &= 40 \\ -a_1 + 5d &= 24 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 5d - 24 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad = 5 \cdot 4 - 24 = \underline{\underline{-4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(5d - 24) + 13d &= 40 \\ 15d - 72 + 13d &= 40 \\ 28d &= 112 \\ \underline{\underline{d = 4}} \end{aligned}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = (-4) + 9 \cdot 4 = \underline{\underline{32}}$$

$$\begin{aligned} s_{10} &= \frac{10}{2} \cdot (a_1 + a_{10}) \\ s_{10} &= 5 \cdot (-4 + 32) \\ \underline{\underline{s_{10}}} &\underline{\underline{= 140}} \end{aligned}$$

Příklad 2.13 **Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí:**

a) $a_1 = 6,\ a_{12} = 28$ [204] b) $a_1 = 0,\ d = 1,5$ [99] c) $a_4 = 7,\ a_8 = -1$ [24]

Domácí úkol **(zdroj: Vzorce pro aritmetickou posloupnost na realisticky.cz)**

Vypočítejte součet všech dvouciferných sudých čísel

a) dvouciferných sudých čísel, b) trojciferných násobků čísla 7.

Příklad 2.14 Náruživý kuřák chce každých 30 dní snížit svou denní spotřebu o 2 cigarety. Kolik ušetří za 360 dní, jestliže jedna krabička (20 cigaret) stojí 80 CZK?

$1-30\ldots x-2$ cigaret denně	$\ldots$60cigaret	$\ldots$3krabičky	$\ldots 240\text{Kč} = a_1$
$31-60\ldots x-4$ cigarety denně	$\ldots$120	$\ldots$6krabiček	$\ldots$480Kč
$61-90\ldots x-6$ cigarety denně	$\ldots$180	$\ldots$9krabiček	$\ldots$720Kč

$\vdots$

$331-360\ldots x-?$ cigaret denně

$d = 240,\ n = \frac{360}{30} = 12$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{12} = \frac{12}{2}(240 + a_n)$$

$$s_{12} = 6 \cdot (240 + 2880)$$

$$s_{12} = 6 \cdot (3120)$$

$$\underline{\underline{s_{12} = 18720}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 240 + (12-1)240$$

$$a_n = 2880$$

Příklad 2.15 Při přihlašování studentů na matematickou soutež platí škola za každého účastníka registrační poplatek. Za prvního přihlášeného platí 10 euro, za každého dalšího o euro méně; více než 10 studentů nesmí škola přihlásit. Vyjádřete vztah závislosti ceny c, kterou škola zaplatí, na počtu n přihlášených studentů.

Příklad 2.16 Cyklista má v plánu ujet 1666 km za 14 dní dovolené. Ví, že postupně ujede každý den o stejný počet kilometrů méně než předchozí, a podle toho si naplánoval trasu. Poslední den mu zbývalo ujet jen 80 km. Jaký je rozdíl v ujetých kilometrech mezi dvěma po sobě jdoucími dny?

Konec

(2. Aritmetická posloupnost)