5. Využití derivace

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

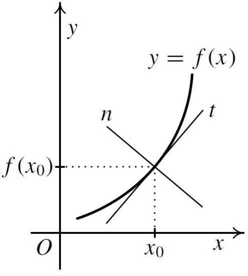
Bakalářská matematika I

Tečna a normála ke grafu funkce

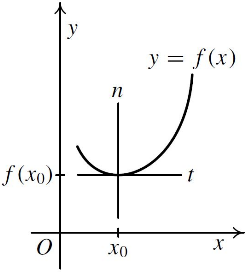
Věta 5.1

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $y_0 = f(x_0)$.

- Přímka
$$\boxed{t: \; y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$
je tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
- Je-li $f'(x_0) \neq 0$ (resp. $f'(x_0) = 0$), potom přímka
$$\boxed{n: \; y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \quad \Big(\text{resp. } \boxed{n: \; x = x_0}\Big)$$
je normála ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.



a) $f'(x_0) \neq 0$,



b) $f'(x_0) = 0$

Příklad 5.1

a) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$ v bodě T, jehož x-ová souřadnice je 2.

b) Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, která je kolmá k přímce $p : 2x - y = 0$.

c) Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{2x}$, která je rovnoběžná s přímkou $a : 2x - y + 3 = 0$.

L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.2

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a nechť platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Existuje-li $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Poznámka 5.1

Věta 5.2 bude platit i v případě, že v její formulaci předpoklad $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ změníme („zeslabíme“) na $x_0 \in \mathbb{R}$ a místo limitních přechodů $x \to x_0$ budeme uvažovat limitní přechody $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$); tj. pro levostranné (resp. pravostranné) limity.

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$ Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-x-10}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+5}{3x^2+x+2}$

$\boxed{\infty-\infty,\ 0\cdot(\pm\infty)}$ Převedeme na typ $\boxed{\frac{0}{0}}$ nebo $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$.

Příklad 5.3

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x)$

$\boxed{1^\infty, 0^0, \infty^0}$ Převedeme pomocí vztahu $x = e^{\ln x}$ na výpočet limity výrazu v exponentu, který je typu $\boxed{\frac{0}{0}}$ nebo $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$.

Příklad 5.4

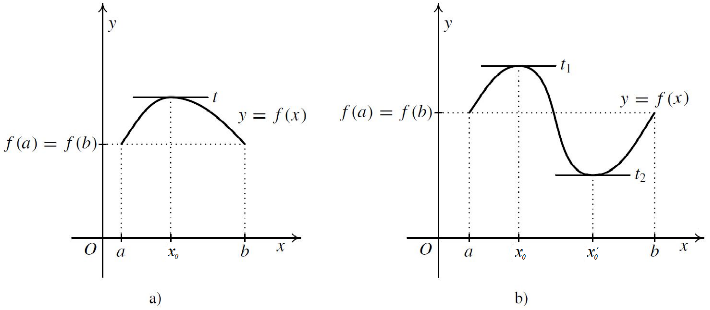
a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Základní věty diferenciálního počtu

Rolleova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\boxed{f'(x_0) = 0.}$$



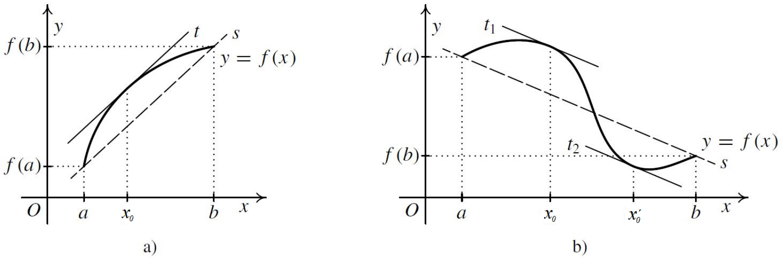
Rolleova věta

Základní věty diferenciálního počtu

Lagrangeova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$



Lagrangeova věta

Základní věty diferenciálního počtu

Cauchyova věta

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, mají derivaci na intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí $g'(x) \neq 0$. Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.}$$

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b).
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b).
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b).
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b).
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b).

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením věty 5.3 neplatí; např. funkce $f(x) = x^3$, je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, ale $f'(0) = 0$.

Příklad 5.5 Určete intervaly (ryzí) monotónnosti funkce

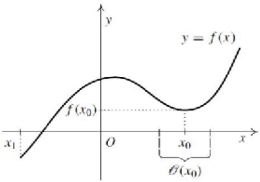
a) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

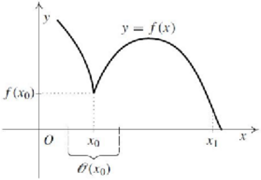
Lokální extrémy

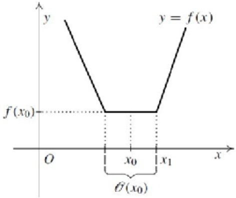
Definice 5.1

Funkce f má

- lokální minimum v bodě x_0, jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- ostré lokální minimum v bodě x_0, jestliže funkce f nabývá ostrého minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- lokální maximum v bodě x_0, jestliže funkce f nabývá maxima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- ostré lokální maximum v bodě x_0, jestliže funkce f nabývá ostrého maxima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.







ostré lokální minimum

lokální minimum

Lokální extrémy

Poznámky

- Lze rovněž říct, že funkce f má lokální minimum v bodě x_0, jestliže existuje redukované okolí P bodu x_0 takové, že

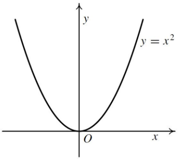
$$\boxed{x \in P \implies f(x) \geq f(x_0)}\,.$$

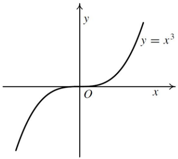
Analogicky lze formulovat zbytek definice 5.1.

- Má-li funkce f (ostré) lokální minimum nebo maximum v bodě x_0, řekneme, že funkce f má (ostrý) lokální extrém v bodě x_0.

Definice 5.2

Stacionární bod funkce f je takové číslo $x_0 \in D_f$, pro které platí $\boxed{f'(x_0) = 0}$.





Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $\boxed{f'(x_0) = 0}$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Poznámka 5.3

- Opačné tvrzení k větě 5.4 neplatí; např. 0 je stacionární bod funkce $f(x) = x^3$, ale tato funkce nemá extrém v 0. Podobně: derivace funkce sgn v 0 neexistuje, přesto tato funkce nemá extrém v 0.
- Z věty 5.4 plyne: je-li $f'(x_0) \neq 0$, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0.

Postačující podmínky existence lokálního extrému

podrobnosti

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- $\boxed{f \text{ je klesající na } P_\delta^-(x_0)} \wedge \boxed{f \text{ je rostoucí na } P_\delta^+(x_0)}$,
  potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0.
- $\boxed{f \text{ je rostoucí na } P_\delta^-(x_0)} \wedge \boxed{f \text{ je klesající na } P_\delta^+(x_0)}$,
  potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0.

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $\boxed{f''(x_0) > 0}$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0.
- $\boxed{f''(x_0) < 0}$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0.

Příklad 5.6 Vyšetřete lokální extrémy funkce

a) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5$

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

1. Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$.
2. Vypočítáme funkční hodnoty v takových bodech intervalu (a, b), v nichž je derivace funkce f nulová nebo neexistuje.
3. Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ minima (resp. maxima) v jednom z bodů, v nichž byla v předchozích krocích spočítána funkční hodnota, a to v bodě s nejmenší (resp. největší) funkční hodnotou.

Příklad 5.7

Vyšetřete extrémy funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$ na intervalu $\langle 1, 3\rangle$.

Konvexnost, konkávnost

podrobnosti

Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b).
- $f''(x) < 0$, potom funkce f je ryze konkávní na (a, b).
- $f''(x) \geq 0$, potom funkce f je konvexní na (a, b).
- $f''(x) \leq 0$, potom funkce f je konkávní na (a, b).
- $f''(x) = 0$, potom funkce f je lineární na (a, b).

Inflexe

Definice 5.3

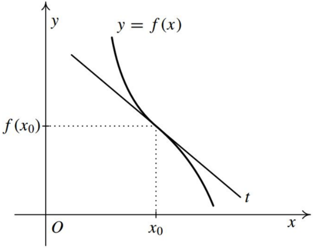
Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

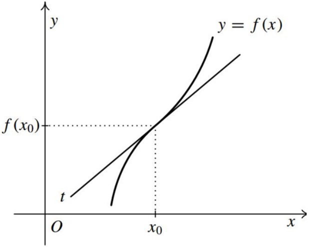
$$\boxed{f \text{ je ryze konvexní na } P_\delta^-(x_0)} \quad \wedge \quad \boxed{f \text{ je ryze konkávní na } P_\delta^+(x_0)}$$

nebo

$$\boxed{f \text{ je ryze konkávní na } P_\delta^-(x_0)} \quad \wedge \quad \boxed{f \text{ je ryze konvexní na } P_\delta^+(x_0)} .$$

Máli funkce f inflexi v bodě x_0, potom bod $[x_0, f(x_0)]$ se nazývá inflexní bod funkce f .





Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $\boxed{f''(x_0) = 0}$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

podrobnosti

Nechť

$$\boxed{\Big(f'(x_0) = f''(x_0) = 0\Big) \quad \wedge \quad \Big(f'''(x_0) \neq 0\Big).}$$

Potom funkce f má inflexi v bodě x_0.

Příklad 5.8

Určete intervaly (ryzí) konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí
1. Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
2. Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
3. Znaménko funkce
4. Průsečíky grafu funkce s osami
5. Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
6. Asymptoty

B Z první derivace se určí
1. Intervaly ryzí monotónnosti
2. Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí
1. Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti
2. Inflexní body

D Na základě dosažených výsledků se sestrojí graf.

Příklad 5.9

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

řešení

Diferenciál

Definice 5.4

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $k \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)] = 0.$$

Potom lineární funkce

$$\boxed{\mathrm{d}f_{x_0}(t) = k \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R},}$$

se nazývá diferenciál funkce f v bodě x_0 .

Věta 5.10

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje diferenciál funkce f v bodě x_0 a platí

$$\boxed{\mathrm{d}f_{x_0}(t) = f'(x_0) \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Diferenciál

Poznámka 5.4

- Obvykle se používá označení

$$\boxed{\mathrm{d}x = x - x_0, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}f_{x_0}(\mathrm{d}x).}$$

- Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x \neq x_0$, potom

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.}$$

- Pomocí diferenciálu funkce lze obvykle efektivně vyjádřit její přibližné hodnoty na základě vztahu

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y,}$$

který odráží skutečnost, že

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - (f(x_0) + \mathrm{d}y) \Big) = \lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}f_{x_0}(x - x_0) \Big) = 0.$$

Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n-tého řádu. Potom funkce

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R},}$$

se nazývá Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě x_0.

Poznámka 5.5

Taylorův polynom 1. stupně funkce f v bodě x_0 lze přepsat ve tvarech

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}y,$$

a tedy podle poznámky 5.4 vyjadřuje přibližné hodnoty funkce f.
Lze ukázat, že totéž platí pro Taylorův polynom jakéhokoliv stupně, tj. že pro $n \in \mathbb{N}$ a pro x blízká x_0 platí

$$\boxed{f(x) \approx T_n(x).}$$

Taylorův rozvoj

Definice 5.6

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Potom funkce

$$\boxed{T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \left(= \lim_{n\to\infty} T_n(x) \right)}$$

se nazývá Taylorův rozvoj funkce f.

Postačující podmínky existence lokálního extrému

zpět

Místo věty 5.5 lze použít její speciální případ:

Věta 5.5′

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $\boxed{(x - x_0)f'(x) > 0}$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0.
- $\boxed{(x - x_0)f'(x) < 0}$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0.

Zobecnění věty 5.6:

Věta 5.6′

Nechť $n \geq 2$ a nechť

$$\boxed{\Big(f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0\Big) \quad \wedge \quad \Big(f^n(x_0) \neq 0\Big).}$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0.
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f má lokální minimum v x_0.
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) < 0$, potom f má lokální maximum v x_0.

Konvexnost, konkávnost

zpět

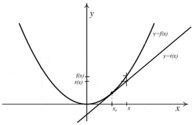
Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

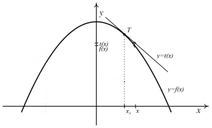
- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je ryze konvexní v bodě x_0 .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je konvexní v bodě x_0 .
- $f(x) < t(x)$, potom funkce f je ryze konkávní v bodě x_0 .
- $f(x) \leq t(x)$, potom funkce f je konkávní v bodě x_0 .

Věta 5.11

Nechť funkce f má derivaci na intervalu (a, b). Potom funkce f je (ryze) konvexní (konkávní) na intervalu (a, b) právě tehdy, když je (ryze) konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.



ryze konvexní



ryze konkávní

Postačující podmínka inflexe

zpět

Věta 5.12

Nechť $n \geq 3$ a nechť

$$\boxed{\Big(f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0\Big) \quad \wedge \quad \Big(f^n(x_0) \neq 0\Big).}$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f má inflexi v bodě x_0.
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f je konvexní v x_0.
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) < 0$, potom f je konkávní v x_0.

Vzorové vypracování průběhu funkce

zpět

A: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

1. Definiční obor:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &\neq 0 \\
(x-1)(x+1) &\neq 0 \\
x &\neq \pm 1 \qquad \Longrightarrow \quad D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)
\end{aligned}
$$

2. Sudost, lichost funkce:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \implies f \text{ je lichá}$$

Vzorové vypracování průběhu funkce

3. Znaménko výrazu $f(x)$:

$$f(x) = 0$$
$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$$
$$x = 0$$

	-1		0		1	
$-$		$+$		$-$		$+$

kladná: $(-1, 0)\,, (1, \infty)$

záporná: $(-\infty, -1)\,, (0, 1)$

4. Průsečíky: s osou $x \dots P_x = [0, 0]$;

s osou $y \dots f(0) = 0 \implies P_y = [0, 0]$

5. Limity v krajních bodech komponent definičního oboru:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \cdots = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

Vzorové vypracování průběhu funkce

zpět III

6. Asymptoty:
   bez směrnice… $a_1:\ x=1, \qquad a_1:\ x=-1$

   se směrnicí…

$$\boxed{\infty} \quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-(x^3-x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$\dots a_2: y=x$

$$\boxed{-\infty} \quad k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\dots=1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\dots=0$$

$\dots a_3\sim a_2$

Vzorové vypracování průběhu funkce zpět IV

B: $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$\dots D_{f'} = D_f$

1. Znaménko výrazu $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2} = 0$$

$$x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$

rostoucí: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, \infty\right)$

klesající: $\left(-\sqrt{3}, -1\right), (-1, 0), (0, 1), \left(1, \sqrt{3}\right)$

2. Lokální extrémy:

lok. minimum... $D = [\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = [\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [\sqrt{3}, 2.6]$

lok. maximum... $V = [-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = [-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [-\sqrt{3}, -2.6]$

Vzorové vypracování průběhu funkce

zpět V

C: $$f''(x) = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \dots = \frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$\dots D_{f''} = D_f$$

1. Znaménko výrazu $f''(x)$:

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3} = 0$$
$$2x(x^2+3) = 0$$
$$x = 0$$

$\cap$ $\quad -1 \quad$ $\cup$ $\quad 0 \quad$ $\cap$ $\quad 1 \quad$ $\cup$

$-$ $\qquad$ $+$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

konvexní: $(-1, 0)\,, (1, \infty)$

konkávní: $(-\infty, -1)\,, (0, 1)$

2. Inflexní bod: $\quad \dots I = [0, 0]$

D: Graf funkce

Konec

(5. Využití derivace)