4. Derivace

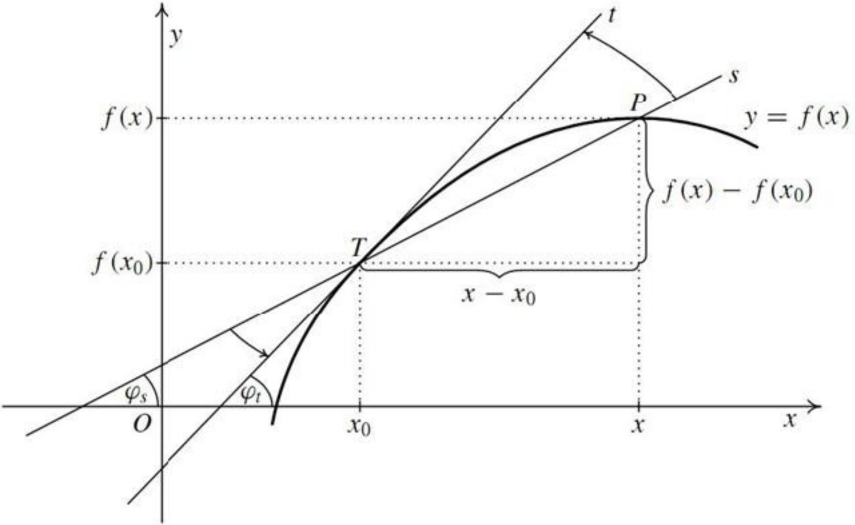
Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

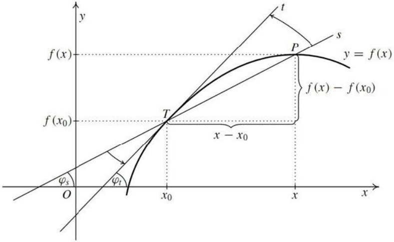
Geometrická motivace



Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T=[x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

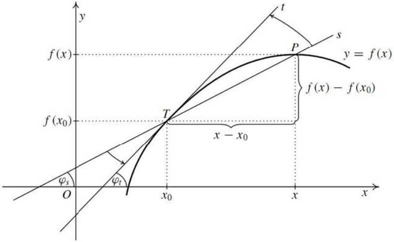


Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.

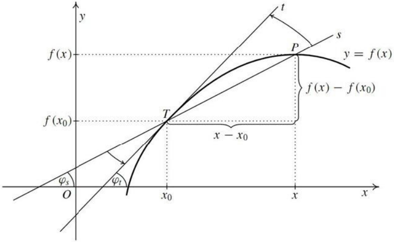


Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.

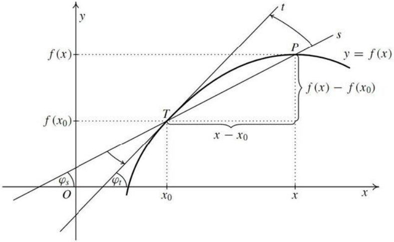


Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0, přičemž bod P se bude pohybovat po grafu funkce f k bodu T.

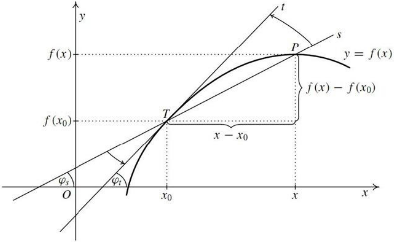


Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0, přičemž bod P se bude pohybovat po grafu funkce f k bodu T.
- V okamžiku, kdy x splyne s x_0, splyne také bod P s bodem T, sečna s s tečnou t a směrnice sečny s se směrnicí tečny t.

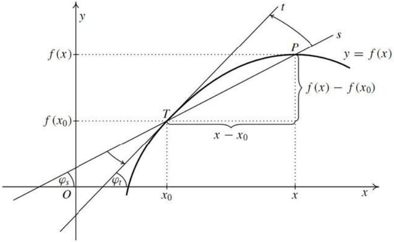


Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0, přičemž bod P se bude pohybovat po grafu funkce f k bodu T.
- V okamžiku, kdy x splyne s x_0, splyne také bod P s bodem T, sečna s s tečnou t a směrnice sečny s se směrnicí tečny t.



Směrnice sečny s:

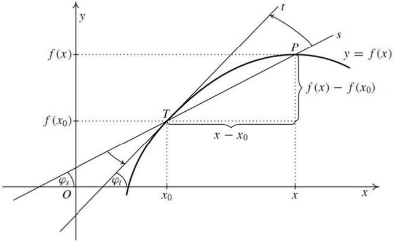
$$\boxed{k_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\,.$$

Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T=[x_0,f(x_0)]$, kde $x_0\in D_f$.

- Zvolíme $x\in D_f$, $x\neq x_0$, a potažmo bod $P=[x,f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0, přičemž bod P se bude pohybovat po grafu funkce f k bodu T.
- V okamžiku, kdy x splyne s x_0, splyne také bod P s bodem T, sečna s s tečnou t a směrnice sečny s se směrnicí tečny t.



Směrnice sečny s:

$$\boxed{k_s=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

Směrnice tečny t:

$$\boxed{k_t=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

Fyzikální motivace

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$.

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t\rangle$.
- Budeme zkracovat časový interval $\langle t_0, t\rangle$ přibližováním t k t_0.

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$.
- Budeme zkracovat časový interval $\langle t_0, t \rangle$ přibližováním t k t_0.
- V okamžiku splynutí t s t_0, dojde také ke splynutí průměrné rychlosti s okamžitou rychlostí v čase t_0.

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$.
- Budeme zkracovat časový interval $\langle t_0, t \rangle$ přibližováním t k t_0.
- V okamžiku splynutí t s t_0, dojde také ke splynutí průměrné rychlosti s okamžitou rychlostí v čase t_0.

Průměrná rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$: $\boxed{v = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.}$

Fyzikální motivace

Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase t_0.

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme $t > t_0$.
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$.
- Budeme zkracovat časový interval $\langle t_0, t \rangle$ přibližováním t k t_0.
- V okamžiku splynutí t s t_0, dojde také ke splynutí průměrné rychlosti s okamžitou rychlostí v čase t_0.

Průměrná rychlost odpovídající časovému intervalu $\langle t_0, t \rangle$: $\boxed{v = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.}$

Okamžitá rychlost v čase t_0: $\boxed{v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.}$

Matematická formulace

Matematická formulace

Definice 4.1

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom vlastní limita

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{1}$$

se nazývá vlastní derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f'(x_0)}$.

Matematická formulace

Definice 4.1

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom vlastní limita

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{1}$$

se nazývá vlastní derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f'(x_0)}$.

Dodatky

- Je-li limita (1) nevlastní, nazývá se nevlastní derivace funkce f v bodě x_0.

Matematická formulace

Definice 4.1

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom vlastní limita

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{1}$$

se nazývá vlastní derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f'(x_0)}$.

Dodatky

- Je-li limita (1) nevlastní, nazývá se nevlastní derivace funkce f v bodě x_0.
- Nahradíme-li ve formulaci definice 4.1 limitní přechod $x \to x_0$ limitním přechodem $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$), obdržíme definici levostranné (resp. pravostranné) derivace funkce f v bodě x_0, která se označuje

$$\boxed{f'_-(x_0)}\ (resp.\ \boxed{f'_+(x_0)}\ ).$$

Matematická formulace

Definice 4.1

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom vlastní limita

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (1)$$

se nazývá vlastní derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f'(x_0)}$.

Dodatky

- Je-li limita (1) nevlastní, nazývá se nevlastní derivace funkce f v bodě x_0.
- Nahradíme-li ve formulaci definice 4.1 limitní přechod $x \to x_0$ limitním přechodem $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$), obdržíme definici levostranné (resp. pravostranné) derivace funkce f v bodě x_0, která se označuje
$$\boxed{f'_-(x_0)} \; (resp. \boxed{f'_+(x_0)} \;).$$
- Skutečnost, že existuje (vlastní, nevlastní) limita (1), se slovně vyjadřuje také takto:

  „Funkce f má (vlastní, nevlastní) derivaci v bodě x_0."

Matematická formulace

Matematická formulace

Úmluva

V dalším textu bude výraz „derivace“ znamenat „vlastní derivace“.

Matematická formulace

Úmluva

V dalším textu bude výraz „derivace“ znamenat „vlastní derivace“.

Poznámka 4.1

- Zavedené označení $f'(x_0)$ může vyvolat představu nějaké funkce f'. Až budeme později zavádět pojem derivace funkce na množině, uvidíme, že tato představa je opodstatněná.

Matematická formulace

Úmluva

V dalším textu bude výraz „derivace“ znamenat „vlastní derivace“.

Poznámka 4.1

- Zavedené označení $f'(x_0)$ může vyvolat představu nějaké funkce f'. Až budeme později zavádět pojem derivace funkce na množině, uvidíme, že tato představa je opodstatněná.
- Zápis $\boxed{f'(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))'}$. V případě, že je funkce f zadána explicitně, spočívá výhoda tohoto zápisu v úspornosti: například $(x^2+3x+2)'$ znamená $f'(x)$ pro funkci $f(x)=x^2+3x+2$.

Derivace základních elementárních funkcí

Derivace základních elementárních funkcí

Věta 4.1

Každá z následujících rovností platí pro libovolné $x \in D_f \cap D_g$, kde f (resp. g) je funkce, jejíž explicitní předpis je dán výrazem v závorce na levé straně (resp. výrazem na pravé straně) uvažované rovnosti.

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, && \text{kde } c \text{ je konstanta} \\
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1}, && \text{kde } n \neq 0 \\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a, && \text{kde } a > 0, a \neq 1 \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}, && \text{kde } a > 0, a \neq 1
\end{aligned}
$$

Derivace základních elementárních funkcí

Věta 4.1

Každá z následujících rovností platí pro libovolné $x \in D_f \cap D_g$, kde f (resp. g) je funkce, jejíž explicitní předpis je dán výrazem v závorce na levé straně (resp. výrazem na pravé straně) uvažované rovnosti.

$$(c)' = 0, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \text{kde } n \neq 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Derivace základních elementárních funkcí

Věta 4.1

Každá z následujících rovností platí pro libovolné $x \in D_f \cap D_g$, kde f (resp. g) je funkce, jejíž explicitní předpis je dán výrazem v závorce na levé straně (resp. výrazem na pravé straně) uvažované rovnosti.

$$(c)' = 0, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \text{kde } n \neq 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Derivace součtu, součinu, podílu

Derivace součtu, součinu, podílu

Věta 4.2

Nechť funkce f, g mají derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f+g$, $f \cdot g$ mají derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).}$$

Derivace součtu, součinu, podílu

Věta 4.2

Nechť funkce f, g mají derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f + g$, $f \cdot g$ mají derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).}$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, potom funkce f/g má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Derivace součtu, součinu, podílu

Věta 4.2

Nechť funkce f, g mají derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f+g$, $f \cdot g$ mají derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).}$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, potom funkce f/g má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Poznámka 4.2

Věta 4.2 bude platit i v případě, že v její formulaci budeme místo derivací uvažovat levostranné (resp. pravostranné) derivace.

Derivace součtu, součinu, podílu

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

b) $(\sqrt{x})'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$ b) $(\sqrt{x})'$

c) $(-2\cos x + e^x + \ln x)'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

b) $(\sqrt{x})'$

c) $(-2\cos x + e^x + \ln x)'$

d) $(\frac{1}{x})'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

b) $(\sqrt{x})'$

c) $(-2\cos x + e^x + \ln x)'$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)'$

e) $(x \cdot e^x)'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

b) $(\sqrt{x})'$

c) $(-2\cos x + e^x + \ln x)'$

d) $(\frac{1}{x})'$

e) $(x \cdot e^x)'$

f) $(\frac{2x-1}{x^2+1})'$

Derivace součtu, součinu, podílu

Příklad 4.1 Vypočítejte

a) $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$ b) $(\sqrt{x})'$

c) $(-2\cos x + e^x + \ln x)'$ d) $(\frac{1}{x})'$ e) $(x \cdot e^x)'$

f) $(\frac{2x-1}{x^2+1})'$ g) $(\frac{\ln x}{x^2})'$

Derivace složené funkce

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin 3x)'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\ 3x)'$

b) $(\sin x^3)'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\, 3x)'$ b) $(\sin x^3)'$ c) $(\sin^3 x)'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\ 3x)'$ b) $(\sin x^3)'$ c) $(\sin^3 x)'$

d) $(\ln \cos x)'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\ 3x)'$ b) $(\sin x^3)'$ c) $(\sin^3 x)'$

d) $(\ln\cos x)'$ e) $(\sqrt[3]{x^2 - 1})'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\ 3x)'$ b) $(\sin x^3)'$ c) $(\sin^3 x)'$

d) $(\ln \cos x)'$ e) $(\sqrt[3]{x^2 - 1})'$ f) $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a) $(\sin\ 3x)'$

b) $(\sin x^3)'$

c) $(\sin^3 x)'$

d) $(\ln \cos x)'$

e) $(\sqrt[3]{x^2 - 1})'$

f) $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'$

g) $(\ln(2x - 1)^2)'$

Derivace složené funkce

Věta 4.3

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g má derivaci v bodě $y = f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x a platí

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).}$$

Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 4.3 s různými kombinacemi jednostranných derivací.

Příklad 4.2 Vypočítejte

a)	$(\sin\ 3x)'$	b)	$(\sin x^3)'$	c)	$(\sin^3 x)'$
d)	$(\ln \cos x)'$	e)	$(\sqrt[3]{x^2 - 1})'$	f)	$(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'$
g)	$(\ln(2x-1)^2)'$	h)	$(x^x)'$		

Jednostranné derivace

Jednostranné derivace

Věta 4.4

Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{f'(x_0) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a}$$

Jednostranné derivace

Věta 4.4

Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{f'(x_0) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a}$$

$$\boxed{f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \nexists\, f'(x_0)}$$

Jednostranné derivace

Věta 4.4

Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{f'(x_0) = a \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a}$$

$$\boxed{f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \implies \nexists\, f'(x_0)}$$

Věta 4.5

Má-li funkce derivaci (resp. levostrannou derivaci, pravostrannou derivaci) v nějakém bodě, potom je v tomto bodě spojitá (resp. zleva spojitá, zprava spojitá).

Jednostranné derivace

Věta 4.4

Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{f'(x_0) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a}$$

$$\boxed{f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \nexists\, f'(x_0)}$$

Věta 4.5

Má-li funkce derivaci (resp. levostrannou derivaci, pravostrannou derivaci) v nějakém bodě, potom je v tomto bodě spojitá (resp. zleva spojitá, zprava spojitá).

Poznámka 4.3

Opačné tvrzení neplatí: funkce (zleva, zprava) spojitá v nějakém bodě nemusí mít v tomto bodě (levostrannou, pravostrannou) derivaci. Např. $f(x) = |x|$ v bodě 0.

Derivace inverzní funkce

Derivace inverzní funkce

Věta 4.6

Nechť funkce f má nenulovou derivaci v bodě $x \in \mathbb{R}$ a nechť existuje inverzní funkce f^{-1} k funkci f. Potom funkce f^{-1} má derivaci v bodě y, kde $y = f(x)$, a platí

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.}$$

Derivace funkce dané parametricky

podrobnosti

Věta 4.7

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť funkce $\phi : M \to \mathbb{R}$, $\psi : M \to \mathbb{R}$ mají v bodě $t_0 \in M$ derivace $\dot{\phi}(t_0), \dot{\psi}(t_0)$, přičemž $\dot{\phi}(t_0) \neq 0$. Potom funkce f daná parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$ a $y = \psi(t)$ má v bodě $x_0 = \phi(t_0)$ derivaci a platí

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\phi}(t_0)}.}$$

Derivace funkce dané parametricky

podrobnosti

Věta 4.7

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť funkce $\phi : M \to \mathbb{R}$, $\psi : M \to \mathbb{R}$ mají v bodě $t_0 \in M$ derivace $\dot{\phi}(t_0), \dot{\psi}(t_0)$, přičemž $\dot{\phi}(t_0) \neq 0$. Potom funkce f daná parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$ a $y = \psi(t)$ má v bodě $x_0 = \phi(t_0)$ derivaci a platí

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\phi}(t_0)}.}$$

Mají-li navíc funkce ϕ, ψ v bodě t_0 druhé derivace $\ddot{\phi}(t_0), \ddot{\psi}(t_0)$, potom funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci a platí

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{\ddot{\psi}(t_0)\dot{\phi}(t_0) - \dot{\psi}(t_0)\ddot{\phi}(t_0)}{\left[\dot{\phi}(t)\right]^3}.}$$

Derivace funkce dané parametricky

Příklad 4.3

a) Určete 1. a 2. derivaci funkce, která je dána parametrickými rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= t^3 - 1 \\ y &= \ln t \end{aligned}\right\} t > 0$$

Derivace funkce dané parametricky

Příklad 4.3

a) Určete 1. a 2. derivaci funkce, která je dána parametrickými rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= t^3 - 1 \\ y &= \ln t \end{aligned}\right\} t > 0$$

b) Určete rovnici tečny ke grafu funkce (půlkružnice), která je dána parametrickými rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\} t \in \langle -\pi, 0 \rangle$$

v bodě $t_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Derivace funkce na množině

podrobnosti

Derivace funkce na množině

podrobnosti

Definice 4.2

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \subset M$.

Derivace funkce na množině

podrobnosti

Definice 4.2

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \subset M$.

Definice 4.3

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f'(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f'}$.

Derivace funkce na množině

podrobnosti

Definice 4.2

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \subset M$.

Definice 4.3

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f'(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f'}$.

Dodatek

Skutečnost, že existuje derivace funkce f na množině M, se slovně vyjadřuje také takto:

„Funkce f má derivaci na množině M. “

Druhá derivace

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Druhá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f''(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f''}$.

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Druhá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f''(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f''}$.

Poznámky

- Zápis $\boxed{f''(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))''}$. Potom

$$\boxed{(f(x))''} = f''(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f')'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} (f'(x))' \overset{Pozn\ 4.1}{=} \boxed{((f(x))')'}.$$

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Druhá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f''(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f''}$.

Poznámky

- Zápis $\boxed{f''(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))''}$. Potom
$$\boxed{(f(x))''} = f''(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f')'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} (f'(x))' \overset{Pozn\ 4.1}{=} \boxed{((f(x))')'} .$$
- Definici derivace resp. druhé derivace funkce v bodě zobecníme prostřednictvím následující rekurentní definice.

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Druhá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f''(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f''}$.

Poznámky

- Zápis $\boxed{f''(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))''}$. Potom
$$\boxed{(f(x))''} = f''(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f')'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} (f'(x))' \overset{Pozn\ 4.1}{=} \boxed{((f(x))')'}.$$
- Definici derivace resp. druhé derivace funkce v bodě zobecníme prostřednictvím následující rekurentní definice.
- Označení (n) použité v matematickém zápisu znamená „římsky n“.

Druhá derivace

Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce f' v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se druhá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f''(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Druhá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f''(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f''}$.

Poznámky

- Zápis $\boxed{f''(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))''}$. Potom
$$\boxed{(f(x))''} = f''(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f')'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} (f'(x))' \overset{Pozn\ 4.1}{=} \boxed{((f(x))')'} .$$
- Definici derivace resp. druhé derivace funkce v bodě zobecníme prostřednictvím následující rekurentní definice.
- Označení (n) použité v matematickém zápisu znamená „římsky n“.
- Funce f se někdy z formálních důvodů nazývá nultá derivace funkce f a označuje se $\boxed{f^{(0)}}$.

Derivace vyšších řádů

Derivace vyšších řádů

Definice 4.4$'$

- Jestliže existuje derivace funkce $f^{(n-1)}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se *n*-tá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f^{(n)}(x_0)}$.

Derivace vyšších řádů

Definice 4.4′

- Jestliže existuje derivace funkce $f^{(n-1)}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se *n-tá derivace funkce f v bodě x_0* a označuje se $\boxed{f^{(n)}(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. *n-tá derivace funkce f na množině M* je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f^{(n)}(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f^{(n)}}$.

Derivace vyšších řádů

Definice 4.4′

- Jestliže existuje derivace funkce $f^{(n-1)}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se *n-tá derivace funkce f v bodě x_0* a označuje se $\boxed{f^{(n)}(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. *n-tá derivace funkce f na množině M* je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f^{(n)}(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f^{(n)}}$.

Poznámka 4.4

Zápis $\boxed{f^{(n)}(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))^{(n)}}$. Potom

$$\boxed{(f(x))^{(n)}} = f^{(n)}(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f^{(n-1)})'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} \cdots = \boxed{((f(x))^{(n-1)})'}.$$

Derivace vyšších řádů

Definice 4.4′

- Jestliže existuje derivace funkce $f^{(n-1)}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se *n*-tá derivace funkce f v bodě x_0 a označuje se $\boxed{f^{(n)}(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. *n*-tá derivace funkce f na množině M je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f^{(n)}(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f^{(n)}}$.

Poznámka 4.4

Zápis $\boxed{f^{(n)}(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))^{(n)}}$. Potom

$$\boxed{(f(x))^{(n)}} = f^{(n)}(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f^{(n-1)})'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} \cdots = \boxed{((f(x))^{(n-1)})'}.$$

Příklad 4.4 Vypočítejte

a) $(3x^2 - 4x + 5)^{(3)}$

Derivace vyšších řádů

Definice 4.4′

- Jestliže existuje derivace funkce $f^{(n-1)}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nazývá se *n-tá derivace funkce f v bodě x_0* a označuje se $\boxed{f^{(n)}(x_0)}$.
- Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. *n-tá derivace funkce f na množině M* je funkce g, pro kterou platí $\boxed{g(x) = f^{(n)}(x), \quad x \in M;}$ označuje se $\boxed{f^{(n)}}$.

Poznámka 4.4

Zápis $\boxed{f^{(n)}(x)}$ se někdy nahrazuje zápisem $\boxed{(f(x))^{(n)}}$. Potom

$$\boxed{(f(x))^{(n)}} = f^{(n)}(x) \overset{D\ 4.4}{=} (f^{(n-1)})'(x) \overset{Pozn\ 4.1}{=} \cdots = \boxed{((f(x))^{(n-1)})'}.$$

Příklad 4.4 Vypočítejte

a) $(3x^2 - 4x + 5)^{(3)}$ b) $\left(\frac{x^2-4}{x^2+1}\right)^{(3)}$

Funkce daná parametricky

Funkce daná parametricky

zpět

Definice 4.5

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $\phi : M \to \mathbb{R}$, $\psi : M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Nechť existuje ϕ^{-1}. Potom funkce $f : H_\phi \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{f(x) := \psi(\phi^{-1}(x)), \qquad x \in H_\phi,}$$

se nazývá funkce daná parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$ a $y = \psi(t)$.

Derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce na množině

zpět

Derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce na množině

zpět

Věta 4.8

Nechť funkce f, g mají derivaci na neprázdné množině M. Potom funkce $f + g, f \cdot g$ mají derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \quad \text{na } M} \qquad \boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{na } M.}$$

Derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce na množině

zpět

Věta 4.8

Nechť funkce f, g mají derivaci na neprázdné množině M. Potom funkce $f+g, f\cdot g$ mají derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \quad \text{na} \ M} \qquad \boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{na} \ M.}$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, pro každé $x \in M$, potom funkce f/g má derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(f/g)' = (f'\cdot g + f\cdot g')/g^2 \quad \text{na} \ M.}$$

Derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce na množině

zpět

Věta 4.8

Nechť funkce f, g mají derivaci na neprázdné množině M. Potom funkce $f + g, f \cdot g$ mají derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \quad \text{na} \quad M} \qquad \boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{na} \quad M.}$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, pro každé $x \in M$, potom funkce f/g má derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(f/g)' = (f' \cdot g + f \cdot g')/g^2 \quad \text{na} \quad M.}$$

Věta 4.9

Nechť funkce f má derivaci na množině M a funkce g má derivaci na množině $\{f(x) : x \in M\}$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci na množině M a platí

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).}$$

Konec

(4. Derivace)