8. Soustavy lineárních rovnic

Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Definice 8.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}} \tag{1}$$

se nazývá soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$.

Definice 8.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}} \tag{1}$$

se nazývá soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$.

- Řešení soustavy (1) je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jehož složky splňují (1).

Definice 8.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}} \tag{1}$$

se nazývá soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$.

- Řešení soustavy (1) je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jehož složky splňují (1).
- Soustava (1) je řešitelná, jestliže existuje její řešení.

Definice 8.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}} \tag{1}$$

se nazývá soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$.

- Řešení soustavy (1) je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jehož složky splňují (1).
- Soustava (1) je řešitelná, jestliže existuje její řešení.
- Řešení soustavy (1), jehož všechny složky jsou nulové, je triviální.

Úmluvy:

- Libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ budeme podle potřeby ztotožňovat s maticí

$$\boxed{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{(u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}} \; ;$$

z kontextu bude vždy zřejmé, s kterou z těchto matic je vektor $\mathbf{u}$ ztotožněn.

Úmluvy:

- Libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ budeme podle potřeby ztotožňovat s maticí

$$\boxed{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{(u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \; ;$$

  z kontextu bude vždy zřejmé, s kterou z těchto matic je vektor $\mathbf{u}$ ztotožněn.
- Soustavu (1) budeme často zapisovat v tzv. maticovém tvaru:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}} \; . \tag{2}$$

Úmluvy:

- Libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ budeme podle potřeby ztotožňovat s maticí

$$\boxed{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{(u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}}\ ;$$

  z kontextu bude vždy zřejmé, s kterou z těchto matic je vektor $\mathbf{u}$ ztotožněn.
- Soustavu (1) budeme často zapisovat v tzv. maticovém tvaru:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}\ . \tag{2}$$

Poznámka 8.1

(2) platí právě tehdy, když platí (1).

Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, potom soustava (1) se nazývá homogenní; v opačném případě se nazývá nehomogenní.

Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, potom soustava (1) se nazývá homogenní; v opačném případě se nazývá nehomogenní.
- Čísla $a_{i,j}$ se nazývají koeficienty soustavy (1).

Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, potom soustava (1) se nazývá homogenní; v opačném případě se nazývá nehomogenní.
- Čísla $a_{i,j}$ se nazývají koeficienty soustavy (1).
- Matice A se nazývá matice soustavy (1).

Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, potom soustava (1) se nazývá homogenní; v opačném případě se nazývá nehomogenní.
- Čísla $a_{i,j}$ se nazývají koeficienty soustavy (1).
- Matice A se nazývá matice soustavy (1).
- Matice

$$\boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)}$$

  se nazývá rozšířená matice soustavy (1); označuje se $\boxed{\widetilde{A}}$.

Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, potom soustava (1) se nazývá homogenní; v opačném případě se nazývá nehomogenní.
- Čísla $a_{i,j}$ se nazývají koeficienty soustavy (1).
- Matice A se nazývá matice soustavy (1).
- Matice

$$\boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)}$$

  se nazývá rozšířená matice soustavy (1); označuje se $\boxed{\widetilde{A}}$.
- Vektor $\mathbf{b}$ se nazývá vektor pravých stran soustavy (1).

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když $\boxed{h(A) = h(\widetilde{A}).}$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když $\boxed{h(A) = h(\widetilde{A}).}$

Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li $h(A) = n$,

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když $\boxed{h(A) = h(\widetilde{A}).}$

Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li $h(A) = n$,
- nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) < n$; v takovém případě lze tato řešení vyjádřit v závislosti na $n - h(A)$ parametrech.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když $\boxed{h(A) = h(\widetilde{A}).}$

Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li $h(A) = n$,
- nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) < n$; v takovém případě lze tato řešení vyjádřit v závislosti na $n - h(A)$ parametrech.

Důsledek

Homogenní soustava lineárních rovnic má triviální řešení; toto řešení je jediné, je-li $h(A) = n$.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když $\boxed{h(A) = h(\widetilde{A}).}$

Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li $h(A) = n$,
- nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) < n$; v takovém případě lze tato řešení vyjádřit v závislosti na $n - h(A)$ parametrech.

Důsledek

Homogenní soustava lineárních rovnic má triviální řešení; toto řešení je jediné, je-li $h(A) = n$.

Věta 8.2

Soustavy, jejichž rozšířené matice jsou ekvivalentní, mají stejná řešení.

Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda

Umožňuje řešit soustavu (1):

- Odvodíme schodovou matici $\widetilde{B}$, která je ekvivalentní s maticí $\widetilde{A}$, a schodovou matici B, která je ekvivalentní s maticí A.

Gaussova eliminační metoda

Umožňuje řešit soustavu (1):

- Odvodíme schodovou matici $\widetilde{B}$, která je ekvivalentní s maticí $\widetilde{A}$, a schodovou matici B, která je ekvivalentní s maticí A.
- Vyřešíme soustavu, jejíž rozšířená matice je $\widetilde{B}$. Při učování složek řešení postupujeme od posledního řádku k prvnímu.

Gaussova eliminační metoda

Umožňuje řešit soustavu (1):

- Odvodíme schodovou matici $\widetilde{B}$, která je ekvivalentní s maticí $\widetilde{A}$, a schodovou matici B, která je ekvivalentní s maticí A.
- Vyřešíme soustavu, jejíž rozšířená matice je $\widetilde{B}$. Při učování složek řešení postupujeme od posledního řádku k prvnímu.
- Nalezená řešení jsou na základě věty 8.2 současně řešeními soustavy (1).

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7\\
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14
\end{aligned}
$$

$$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\ldots \ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$\ldots \ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\dots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1\\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4\\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19\\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$\dots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s-2t-4, 5t+3, t)^T}}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1\\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\ldots \ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$\ldots \ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

. . . řešení neexistuje

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1\\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4\\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19\\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1\\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

. . . řešení neexistuje

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0\\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1\\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4\\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19\\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1\\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

…řešení neexistuje

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0\\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, t, -s, -t)^T}}$

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$.

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Poznámka 8.2

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Poznámka 8.2

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Příklad 8.2

a) Najděte x_2 ze soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Poznámka 8.2

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Příklad 8.2

a) Najděte x_2 ze soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad \dots x_2 = \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Poznámka 8.2

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Příklad 8.2

a) Najděte x_2 ze soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad \dots x_2 = \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

b) Řešte stejnou soustavu s použitím inverzní matice.

Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. Cramerovo pravidlo :

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Dále platí

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}}.$$

Poznámka 8.2

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Příklad 8.2

a) Najděte x_2 ze soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad \dots x_2 = \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

b) Řešte stejnou soustavu s použitím inverzní matice. $\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(6, 2, 7)^T}}$

Konec

(8. Soustavy lineárních rovnic)