Kombinatorika

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

5. Skupiny s opakováním

GOA – ORLOVA.CZ

Variace s opakováním

Definice 5.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá k-členná variace s opakováním z n prvků.

Variace s opakováním

Definice 5.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá k-členná variace s opakováním z n prvků. Počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{V'(k, n)}$.

Variace s opakováním

Definice 5.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá k-členná variace s opakováním z n prvků. Počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{V'(k,n)}$.

Pozorování:

Všimněme si, že na rozdíl od variací (bez opakování) může u variací s opakováním být $k > n$.

Variace s opakováním

Definice 5.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá k-členná variace s opakováním z n prvků. Počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{V'(k, n)}$.

Pozorování:

Všimněme si, že na rozdíl od variací (bez opakování) může u variací s opakováním být $k > n$.

Na základě kombinatorického pravidla součinu lze snadno dokázat následující

Věta 5.1

$$\boxed{V'(k, n) = n^k}$$

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \ldots, n$,

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, ...),

Permutace s opakováním

GOA ORLOVA.CZ

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, …), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, ...), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval;

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, ...), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$.

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, …), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$. Je-li $k \geq n$, potom např.

- $(1, 1, 2)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, ...), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$. Je-li $k \geq n$, potom např.

- $(1, 1, 2)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (jednička i dvojka se vyskytují)

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \ldots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, $\ldots$), se označuje $\boxed{P'(k_1, \ldots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$. Je-li $k \geq n$, potom např.

- $(1, 1, 2)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (jednička i dvojka se vyskytují)
- $(1, 1, 1)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá permutace s opakováním z n prvků.
- Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j-tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, ...), se označuje $\boxed{P'(k_1, \dots, k_n)}$.

Pozorování:

Srovnáním s definicí 5.1 vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$. Je-li $k \geq n$, potom např.

- $(1, 1, 2)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (jednička i dvojka se vyskytují)
- $(1, 1, 1)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně není permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (dvojka se nevyskytuje)

Počet permutací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.2

$$\boxed{P'(k_1, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}}$$

Počet permutací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.2

$$\boxed{P'(k_1, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}}$$

Platí ale ještě další vztahy se skupinami bez opakování, které lze využít:

Věta 5.3

$$\boxed{P'(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n\times}) = P(n)}\ , \qquad \boxed{P'(k_1, n - k_1) = K(k_1, n)}$$

Kombinace s opakováním

Definice 5.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Neuspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá *k-členná kombinace s opakováním z n prvků*.

Kombinace s opakováním

Definice 5.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Neuspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá *k-členná kombinace s opakováním z n prvků*. Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{K'(k, n)}$.

Kombinace s opakováním

Definice 5.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Neuspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá *k-členná kombinace s opakováním z n prvků*. Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{K'(k,n)}$.

Počet kombinací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.4

$$\boxed{K'(k,n) = \binom{n+k+1}{k}}$$

Kombinace s opakováním

Definice 5.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Neuspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá k-členná kombinace s opakováním z n prvků. Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků se označuje $\boxed{K'(k,n)}$.

Počet kombinací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.4

$$\boxed{K'(k,n) = \binom{n+k+1}{k}}$$

Platí ale ještě další vztahy s jinými skupinami, které lze využít:

Věta 5.5

$$\boxed{K'(k,n) = P'(k,n-1) = K(k,n+k-1)}\,.$$

Konec

(5. Skupiny s opakováním)