Analytická geometrie

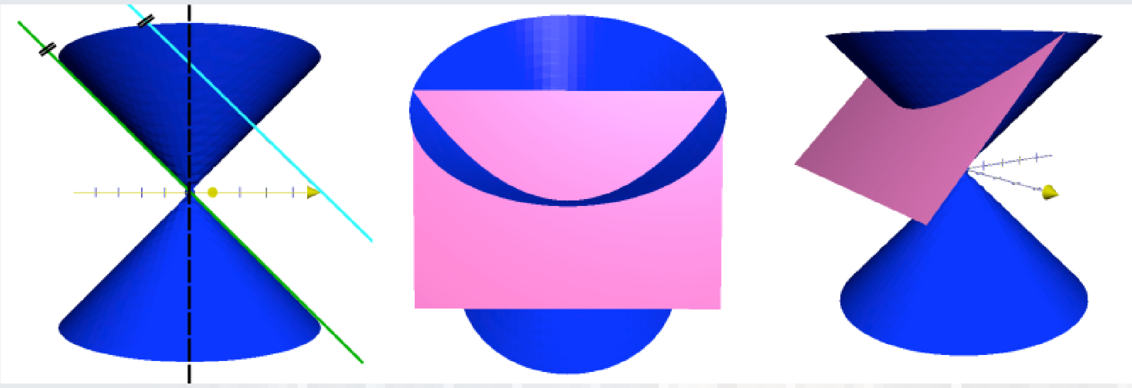
Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

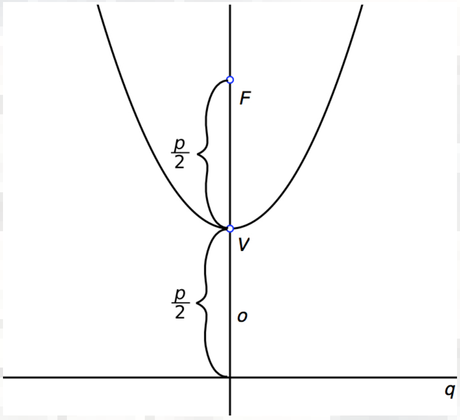
Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

10. Parabola, příklady

GOA-ORLOVA.CZ

Zápis z online hodiny 14.4.2021





Parabola s vrcholem $V = [m; n]$ **a s ohniskem** $F = [m; n \pm \frac{p}{2}]$ $\quad \ldots o \parallel o_y$

- Vrcholová rovnice: $\boxed{(x-m)^2 = 2p(y-n)}$ („údolíčko“) $\boxed{(x-m)^2 = -2p(y-n)}$ („kopeček“)

Příklad 10.1 Najděte vrcholovou rovnici paraboly určené ohniskem $F = [2; 4]$ a řídicí přímkou $q: \ y = -2$.

Orientace:

- $q \parallel o_x \implies o \parallel o_y$
- $y_F = 4 > -2 \implies F$ leží nad přímkou $q \implies$ parabola leží nad přímkou q, jde o „údolíčko“

Najdeme souřadnice vrcholu:

- V leží na ose o, stejně jako ohnisko $F \implies m = 2$
- $p = |qF| = 6$
- V leží přesně uprostřed mezi ohniskem F a přímkou $q \implies n = y_F - \frac{p}{2} = 4 - 3 = 1$

Nyní lze sestavit vrcholovou rovnici:

$$(x-2)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (y-1)$$
$$\underline{(x-2)^2 = 12 \cdot (y-1)}$$

a odvodit obecnou rovnici:
$$x^2 - 4x + 4 = 12y - 12$$
$$\underline{\underline{x^2 - 4x - 12y + 16 = 0}} \qquad \boxed{x^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$$

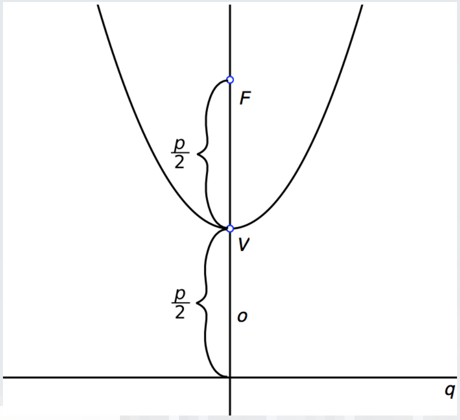
Domácí úkol (zdroj: **Hledání parabol na realisticky.cz**)

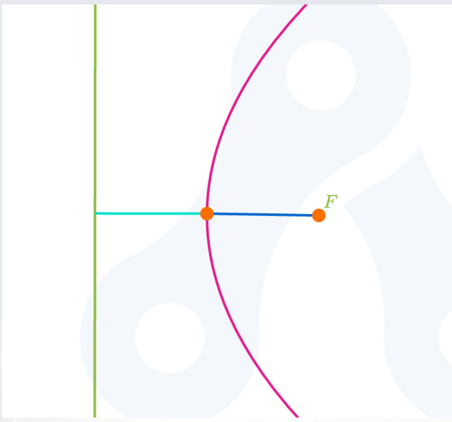
Najděte rovnici paraboly, která má

a) vrchol v počátku a ohnisko $F = [-2; 0]$,

b) vrchol $V = [-2; -1]$ a řídicí přímku $q: \ y = -2$.

Zápis z online hodiny 15.4.2021





Příklad 10.2 Najděte vrchol, ohnisko a řídicí přímku paraboly, která je dána rovnicí $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.

Najít vrcholovou rovnici:

$$x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$$
$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 4y + 16 = 0$$
$$(x-2)^2 - 4y + 12 = 0$$
$$(x-2)^2 = 4y - 12$$

vrcholová rovnice: $(x-2)^2 = 4(y-3)$

$m = 2,\ n = 3,\ p = 2$

$V = [m; n] = \underline{\underline{[2; 3]}}$

$F = [m; n + \frac{p}{2}] = [2; 3 + \frac{2}{2}] = \underline{\underline{[2; 4]}}$

Vrchol $V = [m; n]$, **ohnisko** $F = [m; n \pm \frac{p}{2}]$ $\ldots o \parallel o_y$

Vrcholová rovnice: $\boxed{(x-m)^2 = 2p(y-n)}$ $(\cup)$

Najdeme řídicí přímku:

- její body budou mít y-ovou souřadnici $n - \frac{p}{2} = 3 - \frac{2}{2} =$
- musí tedy být $\underline{\underline{q:\ y = 2}}$.

Příklad 10.3 Najděte vrchol, ohnisko a řídicí přímku paraboly, která je dána rovnicí $(y+1)^2 = 8(x-2)$.

$m = 2,\ n = -1,\ p = 4$

$V = [m; n] = \underline{\underline{[2; -1]}}$

$F = [m + \frac{p}{2}; n] = [2 + \frac{4}{2}; -1] = \underline{\underline{[4; -1]}}$

Vrchol $V = [m; n]$, **ohnisko** $F = [m \pm \frac{p}{2}; n]$ $\ldots o \parallel o_x$

Vrcholová rovnice: $\boxed{(y-n)^2 = 2p(x-m)}$ $(\subset)$

Najdeme řídicí přímku:

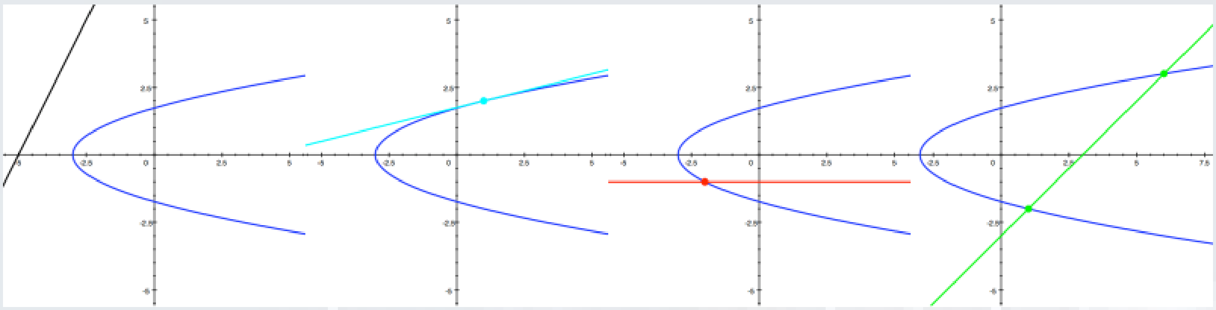
- její body budou mít x-ovou souřadnici $m - \frac{p}{2} = 2 - \frac{4}{2} = 0$
- musí tedy být $\underline{\underline{q:\ x = 0}}$.

Domácí úkol (zdroj: Rovnice paraboly na realisticky.cz)

Najděte vrchol, ohnisko a řídicí přímku paraboly

a) $x^2 - 4x + 6y + 4 = 0$, b) $y^2 - 6x - 10 = 0$, c) $y^2 + y + 4x + 3 = 0$.

Zápis z online hodiny 16.4.2021



Jestliže pro přímku p a parabolu k platí

- $p \cap k = \emptyset$, **přímka p leží vně paraboly k a nazývá se vnější přímka paraboly.**
- $p \cap k = \{P\}$,
  - **přímka p se dotýká paraboly k v bodě P a nazývá se tečna paraboly k.**
  - **přímka p je rovnoběžná s osou paraboly k, protíná pararbolu k v jednom bodě P a nazývá se sečna pararboly k.**
- $p \cap k = \{P, Q\}$, **přímka p protíná parabolu k v bodech P a Q a nazývá se sečna paraboly k.**

Příklad 10.4 Určete vzájemnou polohu přímky $2x - y + 5 = 0$ a paraboly $(y-3)^2 = -2(x-1)$.

$$2x - y + 5 = 0 \implies y = 2x + 5$$
$$(y-3)^2 = -2(x-1)$$

$$(2x+5-3)^2 = -2(x-1)$$
$$(2x+2)^2 = -2x+2$$
$$4x^2 + 8x + 4 + 2x - 2 = 0$$
$$4x^2 + 10x + 2 = 0$$
$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$D = (5)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 25 - 8 > 0 \implies$ 2 řešení $\implies$ 2 společné body

$\implies$ přímka je sečnou paraboly (protíná ji ve dvou bodech) ... **dopočítejte průsečíky!**

Příklad 10.5 Určete vzájemnou polohu přímky $2x - y + 5 = 0$ a paraboly $(y-3)^2 = 2(x-1)$.

$$2x - y + 5 = 0 \implies y = 2x + 5$$
$$(y-3)^2 = 2(x-1)$$

$$(2x+5-3)^2 = 2(x-1)$$
$$(2x+2)^2 = 2x-2$$
$$4x^2 + 8x + 4 - 2x + 2 = 0$$
$$4x^2 + 6x + 6 = 0$$
$$2x^2 + 3x + 3 = 0$$

$D = (3)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 9 - 24 < 0$

$\implies \nexists$ řešení $\implies \nexists$ společné body $\implies$ vnější přímka paraboly

Příklad 10.6 Určete vzájemnou polohu přímky $p:\ x - y - 4 = 0$ a paraboly $k:\ (x-3)^2 = 12(y-2)$.

$$x - y - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y + 4$$
$$(x-3)^2 = 12(y-2)$$

$$(y+4-3)^2 = 12(y-2)$$
$$(y+1)^2 - 12(y-2) = 0$$
$$y^2 + 2y + 1 - 12y + 24 = 0$$
$$y^2 - 10y + 25 = 0$$
$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0 \quad \Longrightarrow \text{1 řešení} \Longrightarrow \text{1 společný bod}$$

Tečna nebo sečna?

Rozhodne vzájemná poloha o a p. (Jsou-li rovnoběžné $\Longrightarrow$ sečna)

Lze zjistit ze vzájemné polohy normálových vektorů:

- podle vrcholové rovnice je $o \parallel o_y \implies \vec{n}_o = (1; 0)$ je normálový vektor přímky-osy o
- podle obecné rovnice p je $\vec{n}_p = (1; -1)$ normálový vektor přímky p
- je $\vec{n}_o \parallel \vec{n}_p$? Tj. existuje číslo $k \neq 0$ tak, že $(1; 0) = k(1; -1)$? **Neexistuje!**, tj. $\vec{n}_o \nparallel \vec{n}_p$

$\Longrightarrow o \nparallel p \Longrightarrow$ **Nejde o sečnu.** $\Longrightarrow$ p je tečna paraboly k.

Domácí úkol (zdroj: **Parabola a přímka na realisticky.cz**)

Určete vzájemnou polohu přímky $x - y - 3 = 0$ a paraboly $x^2 - 4x - y + 1 = 0$.

Zápis z online hodiny 20.4.2021

Příklad 10.7 Najděte rovnici tečny t paraboly $k: \ (y+1)^2 = 8(x-1)$ v jejím bodě $T = [9; 7]$.

$$\boxed{k: \quad (y-n)^2 = 2p(x-m)} \implies \boxed{t: \quad (y_T-n)(y-n) = p(x_T-m) + p(x-m)}$$

$$\begin{aligned} t: \ (y_T+1)(y+1) &= 4(x_T-1) + 4(x-1) \\ (7+1)(y+1) &= 4(9-1) + 4(x-1) \\ 8(y+1) &= 32 + 4(x-1) \\ -4(x-1) + 8(y+1) - 32 &= 0 \\ -4x + 8y - 20 &= 0 \\ \underline{\underline{t: \quad x - 2y + 5}} &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

Domácí úkol (zdroj: **Parabola a přímka na realisticky.cz**)

Napište rovnici tečny paperboly v jejím daném bodě (nejdříve dopočítejte jeho chybějící souřadnici):

a) $(x+1)^2 = 4(y+2), \quad T = [1; y_T]$, b) $y^2 = -x, \quad T = [x_T; 2]$.

Příklad 10.8 Najděte tečny k parabole $k: \ y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$ z bodu $B = [4; 1]$.

Vrcholová rovnice:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y + 4x + 1 &= 0 \\ (y^2 - 2y + 1) - 1 + 4x + 1 &= 0 \\ (y-1)^2 &= -4x \end{aligned}$$

$$\boxed{k: \quad (y-n)^2 = -2p(x-m)} \implies \boxed{t: \quad (y_T-n)(y-n) = -p(x_T-m) - p(x-m)}$$

$$t: \quad (y_T-1)(y-1) = -2x_T - 2x$$

$$[4;1] \in t \implies (y_T-1)(1-1) = -2x_T - 2\cdot 4$$

$$0 = -2x_T - 8 \implies x_T = -4$$

$$[x_T; y_T] \in k \implies y_T^2 - 2y_T + 4x_T + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} y_T^2 - 2y_T + 4\cdot(-4) + 1 &= 0 \\ y_T^2 - 2y_T - 15 &= 0 \\ (y_T-5)(y_T+3) &= 0 \implies y_T = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \implies T = \begin{cases} [-4; 5] \\ [-4; -3] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_1 = [-4; 5]}$$

$$\begin{aligned} t_1: \ (5-1)(y-1) &= (-2)\cdot(-4) - 2x \\ 4y - 4 &= 8 - 2x \\ 2x + 4y - 12 &= 0 \\ \underline{\underline{x + 2y - 6 = 0}} & \end{aligned}$$

$$\boxed{T_2 = [-4; -3]}$$

$$\begin{aligned} t_2: \ (-3-1)(y-1) &= (-2)\cdot(-4) - 2x \\ -4y + 4 &= 8 - 2x \\ 2x - 4y - 4 &= 0 \\ \underline{\underline{x - 2y - 2 = 0}} & \end{aligned}$$

Domácí úkol (zdroj: **Parabola a přímka na realisticky.cz**)

Najděte tečny k parabole $k: \ (y-2)^2 = 2(x-1)$ z bodu $B = [-3; 1]$.

Zápis z online hodiny 21.4.2021

Příklad 10.9 Pro jakou hodnotu parametru q je přímka $p: \ y = x + q$ tečnou paraboly $k: \ y^2 = 6x$?

Tj. pro jaké q mají jediný společný bod?

Tj. kdy bude mít následující soustava jediné řešení?

$$\begin{aligned} y &= x + q \\ y^2 &= 6x \\ \hline (x+q)^2 &= 6x \\ x^2 + 2qx + q^2 - 6x &= 0 \\ x^2 + (2q-6)x + q^2 &= 0 \end{aligned}$$

…bude-li diskriminant této kvadratické rovnice nulový, tj. $(2q-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot q^2 = 0$

$$\begin{aligned} 4q^2 - 24q + 36 - 4q^2 &= 0 \\ -24q + 36 &= 0 \\ -24q &= -36 \\ \underline{\underline{q = \frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nejde o sečnu? (Sečna může mít s parabolou také jediný spolený bod.)

To by muselo platit $p \parallel o$. Ale $\vec{n}_p = (1; -1)$ jistě není rovnoběžný s $\vec{n}_o = \vec{n}_x = (0; 1)$. $\implies$ **Nejde o sečnu!**

Příklad 10.10 Okamžitá poloha šikmo vzhůru vrženého tělesa je v homogenním gravitačním poli Země popsána rovnicemi:

$$x = v_0 t \cdot \cos\alpha,$$

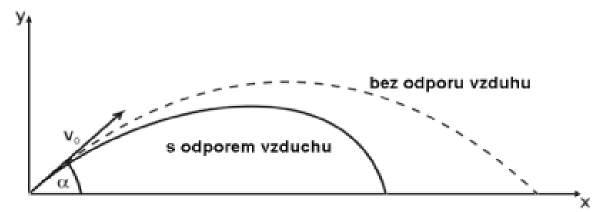
$$y = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

V případě, že pohyb není brzděn odporovými silami, je jeho trajektorií část paraboly. Určete rovnici paraboly, po jejíž části se pohybuje těleso, které je vrženo pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ počáteční rychlostí $v_0 = 10$ m/s. Tíhové zrychlení zaokrouhlete na hodnotu $g = 10$ m/s^2.

$$x = v_0 t \cdot \cos\alpha = 10 \cdot t \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\, t$$

$$y = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 10 \cdot t \cdot \sin 45^\circ - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$$

$$= 10 \cdot t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5t^2 = 5\sqrt{2}\, t - 5t^2$$



$$\begin{aligned} x &= 5\sqrt{2}\, t \qquad \implies t = \frac{x}{5\sqrt{2}} \\ y &= 5\sqrt{2}\, t - 5t^2 \end{aligned}$$

$$y = 5\sqrt{2} \cdot \frac{x}{5\sqrt{2}} - 5\left(\frac{x}{5\sqrt{2}}\right)^2$$

$$y = x - 5 \cdot \frac{x^2}{25 \cdot 2}$$

$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

$$10y = 10x - x^2$$

$$\underline{\underline{x^2 - 10x + 10y = 0}} \qquad \text{(obecná rovnice)}$$

Domácí úkol

a) Za jak dlouho vržené těleso dopadne?
b) Jak daleko vržené těleso dopadne?

Zápis z online hodiny 22.4.2021

Příklad 10.11 Určete typ kuželosečky

a) $y^2 + 8x - 4y - 20 = 0$ b) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 24y + 35 = 0$ d) $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 6 = 0$

---

a) bez počítání – parabola

b)

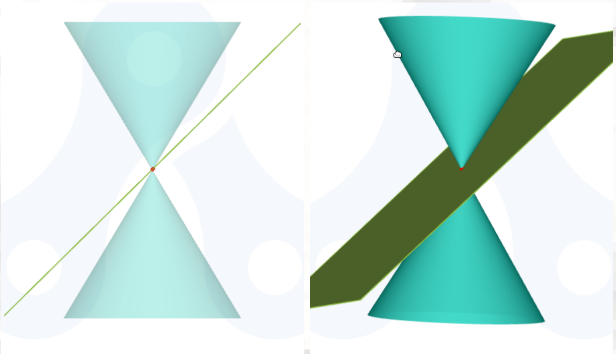
$$\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 1 &= 0 \\ 2x^2 - 4x - 3y^2 - 6y - 1 &= 0 \\ 2(x^2 - 2x + 1^2) - 2 - 3(y^2 + 2y + 1^2) + 3 - 1 &= 0 \\ 2(x-1)^2 - 3(y+1)^2 &= 0 \quad | : 6 \\ \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Nejde o známou (probranou) kuželosečku

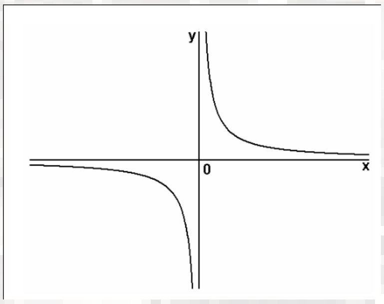
Poznámky ke kuželosečkám

Probrané učivo

- vybrané kuželosečky – pozor, průnikem roviny a kuželové plochy může být např. bod, přímka, dvě různoběžky. . .



- vybrané orientace osy (kromě kružnice): buď $o \parallel o_x$ nebo $o \parallel o_y$.
  – hyperbolou je také křivka popsaná rovnicí $y = \frac{1}{x}$ (graf lomené funkce)



- problematika kuželoseček je mnohem rozsáhlejší

Uplatnění

- astronomie – pohyb planet po elipse kolem slunce–ohniska, pohyb některých komet po hyperbole
- vrh tělesa, rovnoměrně zrychlený pohyb, zakřivení satelitních přijímačů – parabola
- nepřímá úměrnost, izotermický děj – hyperbola

Konec

(10. Parabola, příklady)