Funkce

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

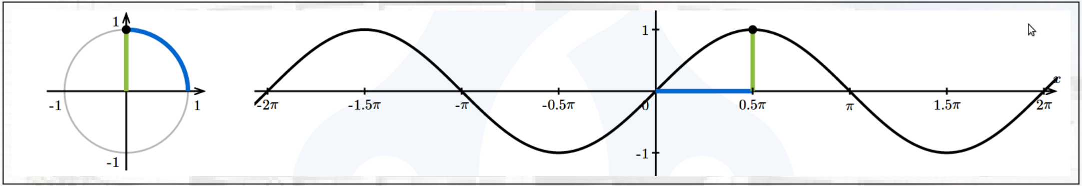
Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

8. Goniometrické funkce

GOA – ORLOVA.CZ

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.1 $\sin x = 1$

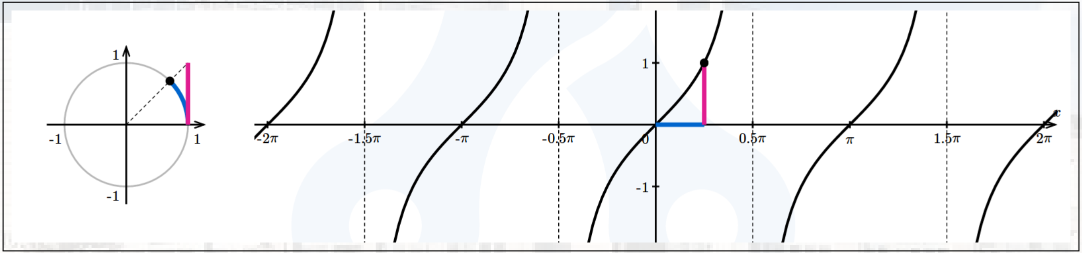


$\sin x$

- základní interval: $\langle 0; 2\pi \rangle$, základní perioda: 2π
- řešení v základním intervalu: $x = \frac{\pi}{2}$
- další řešení: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot (-1), \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2, \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 3, \ldots$
- všechna řešení: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.2 $\operatorname{tg} x = 1$

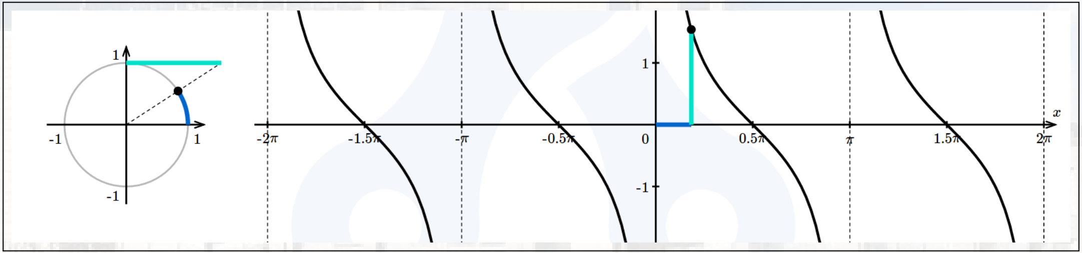


$\operatorname{tg} x$

- základní interval: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, základní perioda: π
- řešení v základním intervalu: $\underset{\sim\sim\sim}{x = \frac{\pi}{4}}$
- další řešení: $x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot (-1), \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 1, \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 2, \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 3, \dots$
- všechna řešení: $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}}$

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.3 $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ $(\doteq 1{,}7)$



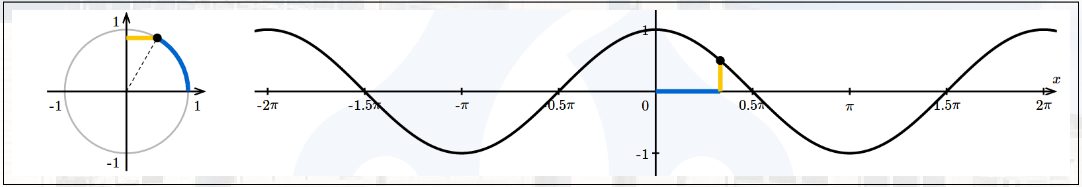
cotg x

- základní interval: $\langle 0; \pi)$, základní perioda: π
- řešení v základním intervalu: $x = \frac{\pi}{6}$
- další řešení: $x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot (-1), \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1,$
  $\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2, \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 3, \dots$
- všechna řešení: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

úhel (°)	0	30	45	60	90
úhel (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotg x	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.4 $\cos x = \frac{1}{2}$



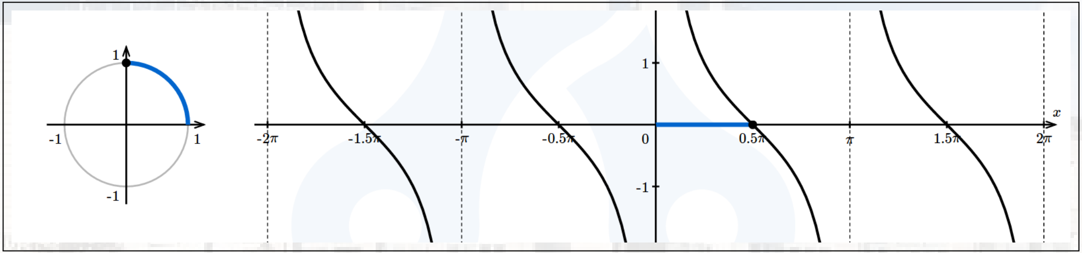
$\cos x$

- základní interval: $\langle 0; 2\pi)$, základní perioda: 2π
- řešení v základním intervalu: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$
- další řešení: $$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot(-1), \frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot 1, \frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot 2, \dots \\ \frac{5}{3}\pi + 2\pi\cdot(-1), \frac{5}{3}\pi + 2\pi\cdot 1, \frac{5}{3}\pi + 2\pi\cdot 2, \dots \end{cases}$$
- všechna řešení: $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x_2 &= \frac{5}{3}\pi + 2\pi k \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

úhel (°)	0	30	45	60	90
úhel (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.5 $\operatorname{cotg} x = 0$



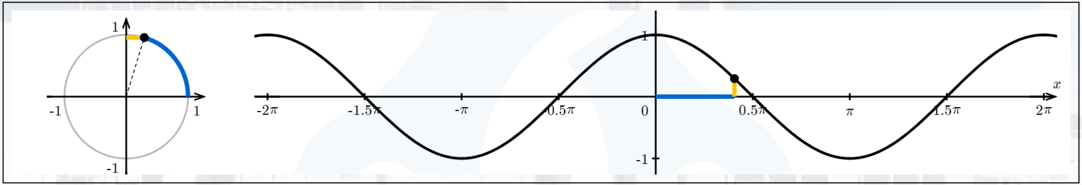
$\operatorname{cotg} x$

- základní interval: $\langle 0; \pi \rangle$, základní perioda: π
- řešení v základním intervalu: $x = \frac{\pi}{2}$
- další řešení: $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot (-1), \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 1, \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2, \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 3, \ldots$
- všechna řešení: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Příklad 8.6 $\cos x = 3 \ldots \emptyset$

Goniometrické rovnice v základním tvaru

Příklad 8.7 $\cos x = 0,3$



cos x

- základní interval: $\langle 0; 2\pi)$, základní perioda: 2π
- řešení v základním intervalu:

$x_1 = \arccos 0,3$

$x_2 = 2\pi - \arccos 0,3$

- všechna řešení:

$x_1 = \arccos 0,3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 2\pi - \arccos 0,3 + 2\pi k = -\arccos 0,3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Tabulka nepomůže:

úhel (°)	0	30	45	60	90
úhel (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Goniometrické rovnice v základním tvaru $f(x) = a, \quad a < 0$

V tabulce základních hodnot goniometrických funkcí záporné hodnoty nejsou. . .

$\boxed{\sin x = a, \quad \text{kde } a < 0,}$

lze řešit takto:

a) vyřešit rovnici pro opačnou hodnotu:

$$\sin x = -a,$$

b) ke zjištěným řešením přičíst π.

stejně lze řešit $\boxed{\cos x = a, \quad \text{kde } a < 0}$

$\boxed{\operatorname{tg} x = a, \quad \text{kde } a < 0,}$

lze řešit takto:

a) vyřešit rovnici pro opačnou hodnotu:

$$\operatorname{tg} x = -a,$$

b) u zjištěných řešení změnit znaménko.

stejně lze řešit $\boxed{\operatorname{cotg} x = a, \quad \text{kde } a < 0}$

Příklad 8.8 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ má řešení $\begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{11}{6}\pi + 2\pi k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \underline{\underline{\frac{7}{6}\pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}}} \\ x_2 = \pi + \frac{11}{6}\pi + 2\pi k = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}}} \end{cases}$

Příklad 8.9 $\operatorname{cotg} x = -61$

a) $\operatorname{cotg} x = 61$ má řešení $\operatorname{arccotg} 61 + \pi k$

b) $\underline{\underline{x = -\operatorname{arccotg} 61 - \pi k, \ k \in \mathbb{Z}}}$

Substituce v goniometrické rovnici

Příklad 8.10 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Jak docílit základního tvaru? Substitucí $\boxed{t = 2x + \frac{\pi}{3}}$

Potom $\cos t = \frac{1}{2}$

a takovou rovnici jsme již řešili (viz příklad 8.4): $\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ t_2 &= \frac{5}{3}\pi + 2\pi k \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$

Tyto výsledky dosadíme za t do substitučního vztahu:

$\boxed{t_1}$:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2x_1 + \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k &= 2x_1 + \frac{\pi}{3} \\ 2\pi k &= 2x_1 \\ x_1 &= \pi k \end{aligned}$$

$\boxed{t_2}$:

$$\begin{aligned} t_2 &= 2x_2 + \frac{\pi}{3} \\ \frac{5}{3}\pi + 2\pi k &= 2x_2 + \frac{\pi}{3} \\ \frac{4}{3}\pi + 2\pi k &= 2x_2 \\ x_2 &= \frac{2}{3}\pi + \pi k \end{aligned}$$

Dohromady $\left.\begin{aligned} x_1 &= \pi k \\ x_2 &= \frac{2}{3}\pi + \pi k \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$

Substituce v goniometrické rovnici

Příklad 8.11

$\operatorname{cotg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ subs.: $\boxed{t = \operatorname{cotg} x}$

$t^2 + (\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} = 0$

$t_1 = -\sqrt{3}, \quad t_2 = 1$

Podmínky řešitelnosti:

$x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$ (viz D_f funkce cotg)

$\boxed{t_1 = -\sqrt{3}}$: $-\sqrt{3} = \operatorname{cotg} x \longrightarrow \sqrt{3} = \operatorname{cotg} x$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{t_2 = 1}$: $1 = \operatorname{cotg} x$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

Substituce v goniometrické rovnici

Příklad 8.12

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$
$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2 x - 1 + \sin^2 x = \frac{1}{2}$$
$$2\sin^2 x - \frac{3}{2} = 0 \quad | : 2$$
$$\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0 \quad \boxed{t = \sin x}$$
$$t^2 - \frac{3}{4} = 0$$
$$\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$
$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}} : \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x$$
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

$$\boxed{t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}} : \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x$$
$$\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \pi + \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

Zkráceně:

$$\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad \frac{2}{3}\pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vzorce

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} \quad \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Součtové vzorce pro goniometrické funkce

Příklad 8.13 Zjednodušte výraz $\cos(\frac{\pi}{6} - x) - \cos(x + \frac{\pi}{6})$

$$
\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{6} - x) - \cos(x + \tfrac{\pi}{6}) &= \cos\tfrac{\pi}{6}\ \cos x + \sin\tfrac{\pi}{6}\ \sin x - \left(\cos x\ \cos\tfrac{\pi}{6} - \sin x\ \sin\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \cancel{\cos\tfrac{\pi}{6}\ \cos x} + \sin\tfrac{\pi}{6}\ \sin x \cancel{- \cos x\ \cos\tfrac{\pi}{6}} + \sin x\ \sin\tfrac{\pi}{6} \\
&= 2\sin x\ \sin\tfrac{\pi}{6} = 2\sin x \cdot \tfrac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{\sin x}}
\end{aligned}
$$

Vzorce

$$\boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \qquad \boxed{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Součtové vzorce pro goniometrické funkce

Příklad 8.14 Řešte rovnici $\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sin(x-\frac{\pi}{4})=0$

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})-\sin(x-\tfrac{\pi}{4})=0$$

$$\sin x\ \cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\ \sin\tfrac{\pi}{4}-\left(\sin x\ \cos\tfrac{\pi}{4}-\cos x\ \sin\tfrac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\cancel{\sin x\ \cos\tfrac{\pi}{4}}+\cos x\ \sin\tfrac{\pi}{4}\cancel{-\sin x\ \cos\tfrac{\pi}{4}}+\cos x\ \sin\tfrac{\pi}{4}=0$$

$$2\cos x\ \sin\tfrac{\pi}{4}=0$$

$$2\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\cos x=0$$

$$\underline{\underline{x=\tfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}}}$$

Vzorce

$$\boxed{\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y}\qquad\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

Vzorce pro dvojnásobný argument goniometrické funkce

Příklad 8.15 Zjednodušte výraz $\dfrac{\sin 2x + 2\cos^2 x \sin x}{2\cos x + \cos 2x + 1}$

$$\frac{\sin 2x + 2\cos^2 x \sin x}{2\cos x + \cos 2x + 1} = \frac{2\sin x\ \cos x + 2\cos^2 x \sin x}{2\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x(1+\cos x)}{2\cos x + 2\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x \cos x(1+\cos x)}{2\cos x(1+\cos x)} = \underline{\underline{\sin x}}$$

Definiční obor výrazu: lze určit až během úprav, nejpozději však před krácením!

$\Longrightarrow$ odložíme, až bude (jmenovatel) jednodušší

$$2\cos x(1+\cos x) \neq 0$$

$$\cos x \neq 0 \quad \wedge \quad 1+\cos x \neq 0$$

$$x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \cos x \neq -1$$

$$x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + \pi\, k : k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{\pi + 2\pi\, k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Vzorce

$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$ $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$ $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

Vzorce pro poloviční argument goniometrické funkce

Příklad 8.16 Určete přesnou hodnotu $\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\underset{\sim\sim\sim}{\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|} = \left|\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$$

Protože $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, odstraníme absolutní hodnotu beze změny znaménka:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}}$$

Vzorce

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \qquad \left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Vzorce pro poloviční argument goniometrické funkce

Příklad 8.17 Zjednodušte výraz $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$

Definiční obor výrazu:

I. omezení pro tg :

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

II. omezení pro zlomek:

$\underbrace{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}_{\text{vždy } >0} \neq 0$

$$\frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \underline{\underline{\sin x}}$$

Vzorce

$\boxed{\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$ $\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$

Vzorce pro součet goniometrických funkcí

Příklad 8.18 Upravte na součin výraz $\cos 5a + \cos 3a$.

$$\cos 5a + \cos 3a = 2\cos\frac{5a+3a}{2}\cdot\cos\frac{5a-3a}{2} = 2\cos\frac{8a}{2}\cdot\cos\frac{2a}{2} = \underline{\underline{2\cos 4a\cdot\cos a}}$$

Příklad 8.19 Vypočtěte $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$.

$$\sin 105^\circ - \sin 15^\circ = 2\cos\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\cdot\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

Vzorce

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Konec

(8. Goniometrické funkce)