Analytická geometrie

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

7. Kružnice, příklady

Zápis z online hodiny 17.3.2021

Příklad 7.1 Najděte středovou a obecnou rovnici kružnice se středem S[3; 5] a poloměrem r = 2.

$\boxed{S = [m; n] \qquad k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$

$m = 3, n = 5$

$$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-5)^2 = 2^2}}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 + 25 - 4 = 0$$
$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0}}$$

$\boxed{k : qx^2 + ry^2 + sx + ty + w = 0}$

Příklad 7.2 Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0$.

Leží bod $D = [2; 3]$ na této kružnici?

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 11 = 0$$
$$(x^2 - 2x + (-1)^2) - (-1)^2 + (y^2 + 4y + 2^2) - 2^2 - 11 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 16 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

$m = 1, n = -2, r = 4$

$\underline{\underline{S = [1; -2],\ r = 4}}$

$$D \in k \iff (2-1)^2 + (3+2)^2 = 4^2$$
$$1 + 25 = 16$$
$$26 \neq 16$$

<u>*D* neleží na kružnici.</u>

Příklad 7.3 Zjistěte, zda body A[2; 1], B[2; 5], C[4; 5] a D[-1; 2] leží na stejné kružnici.

$$A = [2; 1] \in k \iff (2-m)^2 + (1-n)^2 = r^2 \implies r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad (1)$$
$$B = [2; 5] \in k \iff (2-m)^2 + (5-n)^2 = r^2 \qquad (2)$$
$$C = [4; 5] \in k \iff \underline{(4-m)^2 + (5-n)^2 = r^2} \qquad (3)$$

Vyřadíme (eliminujeme) r^2:

$$\cancel{(2-m)^2} + (1-n)^2 - \cancel{(2-m)^2} - (5-n)^2 = r^2 - r^2 \qquad (1)\text{-}(2)$$
$$\underline{(2-m)^2 + \cancel{(5-n)^2} - (4-m)^2 - \cancel{(5-n)^2} = r^2 - r^2} \qquad (2)\text{-}(3)$$
$$1 - 2n + \cancel{n^2} - 25 + 10n - \cancel{n^2} = 0$$
$$\underline{4 - 4m + \cancel{m^2} - 16 + 8m - \cancel{m^2} = 0}$$
$$-24 + 8n = 0$$
$$\underline{-12 + 4m = 0}$$
$$n = 3$$
$$m = 3$$

Zápis z online hodiny 18.3.2021

$$\begin{aligned} k:\quad (x-3)^2+(y-3)^2&=5\\ D=[-1;2]\in k \iff (-1-3)^2+(2-3)^2&=5\\ 16+1&=5\\ 17&\neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ od D neleží na k. Uvedené body neleží na stejné kružnici.

Příklad 7.4 Určete vzájemnou polohu přímky $p:\ x-y+5=0$ a kružnice $k:\ x^2+2x+y^2-4y+1=0.$

$$\begin{aligned} x-y+5&=0 \qquad \implies x=y-5\\ x^2+2x+y^2-4y+1&=0\\ (y-5)^2+2(y-5)+y^2-4y+1&=0\\ y^2-10y+25+2y-10+y^2-4y+1&=0\\ 2y^2-12y+16&=0\\ y^2-6y+8&=0\\ y_1=2,\ y_2&=4\\ x_1=y_1-5&=-3\\ x_2=y_2-5&=-1 \end{aligned}$$

Společné body: $[x_1;y_1]=[-3;2]$, $[x_2;y_2]=[-1;4]$

Přímka je sečnou kružnice.

Zápis z online hodiny 19.3.2021

Příklad 7.5 Najděte rovnici tečny kružnice $(x-3)^2+(y+7)^2=5$ v jejím bodě $T=[2;-5]$.

Tečna kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r v bodě $T=[x_T;y_T]$

$$\boxed{(x_T-m)(x-m)+(y_T-n)(y-n)=r^2}$$

$$\begin{aligned}(2-3)(x-3)+(-5+7)(y+7)&=5\\ -(x-3)+2(y+7)&=5\\ -x+3+2y+14&=5\\ -x+2y+12&=0\\ t:\quad \underline{\underline{x-2y-12}}&\underline{\underline{=0}}\end{aligned}$$

Příklad 7.6 Napište rovnici tečny ke kružnici $k:\ x^2-6x+y^2-4y-5=0$, která je rovnoběžná s přímkou $p:\ 3x-1y+2=0$. $(\implies \vec{n}_p=(3;-1))$

Tečna kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r v bodě $T=[x_T;y_T]$

$$\boxed{(x_T-m)(x-m)+(y_T-n)(y-n)=r^2}$$

$$x^2-6x+y^2-4y-5=0$$

$$(x^2-6x+(-3)^2)-(-3)^2+(y^2-4y+(-2)^2)-(-2)^2-5=0\quad\ldots m=3,n=2,r=\sqrt{18}$$

$$k:\quad (x-3)^2+(y-2)^2=18$$

$$t:\quad (x_T-3)(x-3)+(y_T-2)(y-2)=18$$

$$t:\quad (x_T-3)x-3(x_T-3)+(y_T-2)y-2(y_T-2)=18$$

$$t:\quad (x_T-3)x+(y_T-2)y-3(x_T-3)-2(y_T-2)-18=0$$

$$\implies \vec{n}_t=(x_T-3;y_T-2)$$

Protože má platit $p\parallel t$, musí být také $\vec{n}_p\parallel\vec{n}_t$. Potom existuje číslo $k\neq 0$ takové, že

$$\begin{aligned}k\vec{n}_p&=\vec{n}_t\\ k(3;-1)&=(x_T-3;y_T-2)\\ (3k;-k)&=(x_T-3;y_T-2)\end{aligned}$$

První složky se rovnají: $3k=x_T-3$. Druhé složky se rovnají: $-k=y_T-2$.

$$[x_T;y_T]\in k \iff (x_T-3)^2+(y_T-2)^2=18$$

$$\begin{aligned}(3k)^2+(-k)^2&=18\\ 10k^2&=18\\ k&=\pm\sqrt{\tfrac{18}{10}}\end{aligned}$$

$\boxed{k_1=\sqrt{\frac{18}{10}}}$: $\quad 3\cdot\sqrt{\frac{18}{10}}=x_T-3 \qquad -\sqrt{\frac{18}{10}}=y_T-2$

$$\begin{aligned}(x_T-3)x+(y_T-2)y-3(x_T-3)-2(y_T-2)-18&=0\\ 3\cdot\sqrt{\tfrac{18}{10}}x-\sqrt{\tfrac{18}{10}}y-9\cdot\sqrt{\tfrac{18}{10}}+2\sqrt{\tfrac{18}{10}}-18&=0 \qquad \Big|:\sqrt{\tfrac{18}{10}}\\ 3x-y-9+2-18\cdot\sqrt{\tfrac{10}{18}}&=0\\ t_1:\quad \underline{\underline{3x-y-7-6\sqrt{5}}}&\underline{\underline{=0}}\end{aligned}$$

$\boxed{k_2=-\sqrt{\frac{18}{10}}}$: $\quad\ldots$

Zápis z online hodiny 23.3.2021

Příklad 7.7 Napište rovnici tečny ke kružnici $k: \ (x-3)^2+(y-2)^2=18$, která je rovnoběžná s přímkou $p: \ x+y-4=0. \quad (\implies \vec{n}_p=(1;1))$

Tečna kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r v bodě $T=[x_T;y_T]$

$$\boxed{(x_T-m)(x-m)+(y_T-n)(y-n)=r^2}$$

$\ldots \underset{\sim\sim\sim}{m=3, n=2, r^2=18}$

$$t: \quad (x_T-3)(x-3)+(y_T-2)(y-2)=18$$
$$t: \quad (x_T-3)x-3(x_T-3)+(y_T-2)y-2(y_T-2)=18$$
$$t: \quad (x_T-3)x+(y_T-2)y-3(x_T-3)-2(y_T-2)-18=0$$
$$\implies \vec{n}_t=(x_T-3;y_T-2)$$

Protože má platit $p \parallel t$, musí být také $\vec{n}_p \parallel \vec{n}_t$. Potom existuje číslo $k \neq 0$ takové, že

$$\vec{n}_t=k\vec{n}_p$$
$$(x_T-3;y_T-2)=k(1;1)$$
$$(x_T-3;y_T-2)=(k;k)$$

První složky se rovnají: $x_T-3=k$. Druhé složky se rovnají: $y_T-2=k$.

$[x_T;y_T]\in k \iff (x_T-3)^2+(y_T-2)^2=18$
$$k^2+k^2=18$$
$$k^2=9$$
$$k=\pm 3$$

$\boxed{k_1=3}$: $\quad 3=x_T-3 \quad 3=y_T-2$

$$(x_T-3)x+(y_T-2)y-3(x_T-3)-2(y_T-2)-18=0$$
$$3x+3y-3\cdot 3-2\cdot 3-18=0$$
$$3x+3y-33=0$$
$$t_1: \quad \underline{\underline{x+y-11=0}}$$

$\boxed{k_2=-3}$: $\quad -3=x_T-3 \quad -3=y_T-2$

$$(x_T-3)x+(y_T-2)y-3(x_T-3)-2(y_T-2)-18=0$$
$$-3x-3y-3\cdot(-3)-2\cdot(-3)-18=0$$
$$-3x-3y-3=0$$
$$t_2: \quad \underline{\underline{x+y+1=0}}$$

Domácí úkol:

Napište rovnice tečen ke kružnici

a) $k: \ x^2+y^2-6x+4y+8=0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: \ 2x+4y-7=0$. $\quad [x+2y-4=0, \ x+2y+6=0]$

b) $k: \ x^2+y^2=5$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: \ x+2y+1=0$. $\quad [x+2y-5=0, \ x+2y+5=0]$

Příklad 7.8 Najděte tečny ke kružnici $k:\ (x-1)^2+(y+3)^2=16$ z bodu $B=[5;1]$.

Tečna kružnice o středu $S=[m;n]$ a poloměru r v bodě $T=[x_T;y_T]$

$$\boxed{t:\quad (x_T-m)(x-m)+(y_T-n)(y-n)=r^2}$$

$$m=1\ n=-3,\ r^2=16 \implies (x_T-1)(x-1)+(y_T+3)(y+3)=16$$

$$[5;1]\in t \implies (x_T-1)(5-1)+(y_T+3)(1+3)=16$$

$$4(x_T-1)+4(y_T+3)=16 \implies x_T-1=4-(y_T+3)$$

$$=1-y_T$$

$$[x_T;y_T]\in k \implies (x_T-1)^2+(y_T+3)^2=16$$

$$(1-y_T)^2+(y_T+3)^2=16$$

$$1-2y_T+y_T^2+y_T^2+6y_T+9=16$$

$$2y_T^2+4y_T-6=0$$

$$y_T^2+2y_T-3=0$$

$$y_T=\begin{cases}1\\-3\end{cases} \implies x_T=2-y_T=\begin{cases}1\\5\end{cases} \implies T=\begin{cases}[1;1]\\[-3;5]\end{cases}$$

$\boxed{T=[1;1]}$:

$$t_1:\quad (1-1)(x-1)+(1+3)(y+3)=16$$

$$4(y+3)=16$$

$$y+3=4$$

$$\underline{\underline{y=1}}$$

$\boxed{T=[-3;5]}$:

$$t_2:\quad (5-1)(x-1)+(-3+3)(y+3)=16$$

$$4(x-1)=16$$

$$x-1=4$$

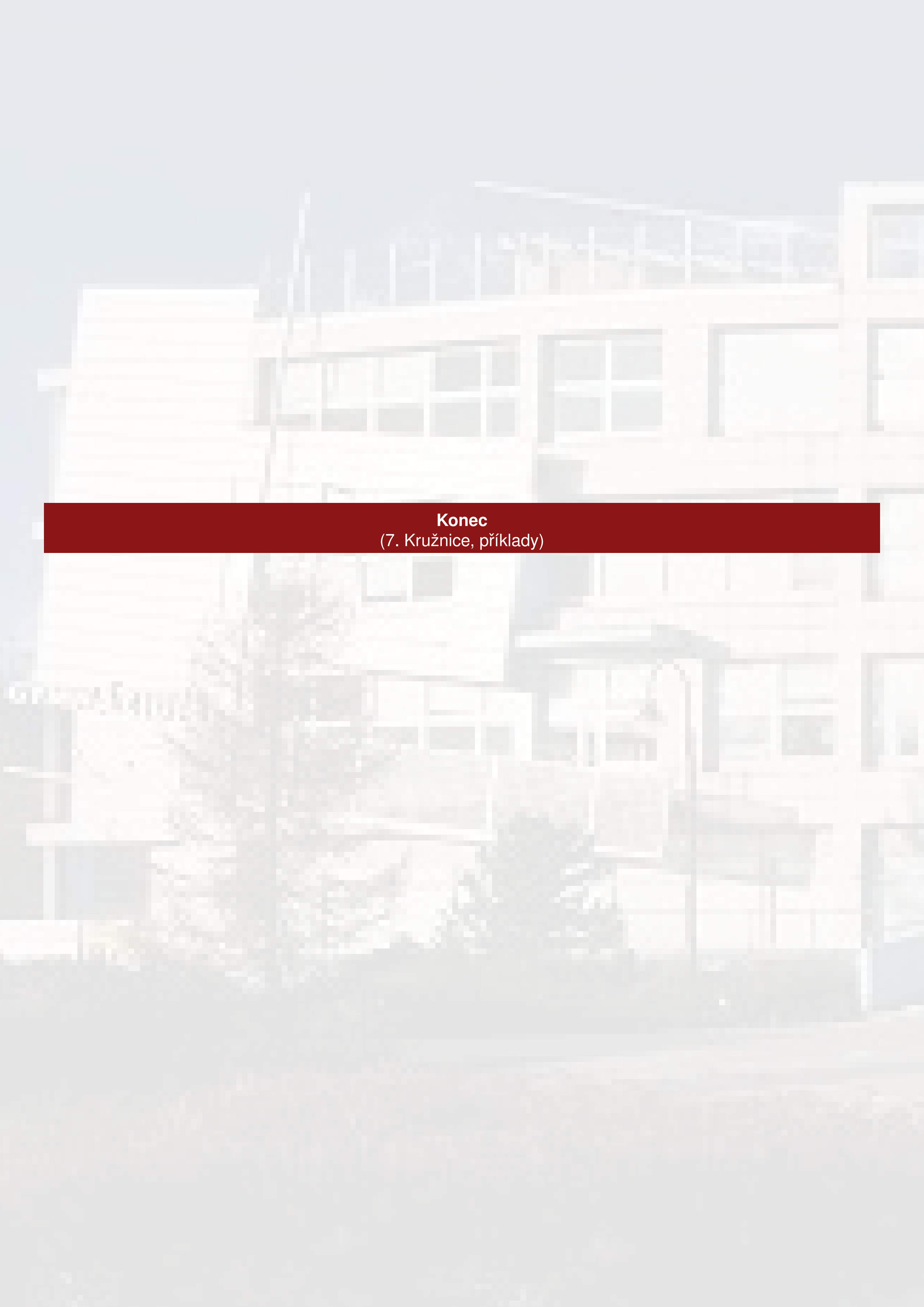
$$\underline{\underline{x=5}}$$

Domácí úkol:

Najděte tečny ke kružnici

a) $k:\ (x-1)^2+(y-1)^2=10$ z bodu $B=[5;-1]$. $[3x+y-14=0,\ x-3y-8=0]$

b) $k:\ (x-3)^2+(y+2)^2=5$ z bodu $B=[2;1]$. $[x+2y-4=0,\ 2x-y-3=0]$



Konec
(7. Kružnice, příklady)