

Kombinatorika

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

2. Kombinační čísla

GOA –
ORLOVA.CZ

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!(5!)!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinaciční číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} =$$

Pro všechna $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $k \leq n$, označujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a říkáme, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo n nad k .

Příklad 2.1

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{21}}$$

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56]

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56] b) $\binom{32}{2}$ [496]

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56]

b) $\binom{32}{2}$ [496]

c) $\binom{121}{120}$ [121]

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56] b) $\binom{32}{2}$ [496] c) $\binom{121}{120}$ [121]

Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:

a) $\binom{n+2}{2}$ $\left[\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56] b) $\binom{32}{2}$ [496] c) $\binom{121}{120}$ [121]

Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:

a) $\binom{n+2}{2}$ $\left[\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$ b) $\binom{n+3}{n}$ $\left[\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \right]$

Vypočtěte:

a) $\binom{8}{5}$ [56] b) $\binom{32}{2}$ [496] c) $\binom{121}{120}$ [121]

Vyjádřete ve tvaru mnohočlenu:

a) $\binom{n+2}{2}$ $\left[\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right]$ b) $\binom{n+3}{n}$ $\left[\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \right]$ c) $\binom{n+1}{n-1}$

Vlastnosti kombináčních čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\binom{n}{0} = 1$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{n} = 1$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{n} = 1$ c) $\binom{n}{1} = n$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{n} = 1$ c) $\binom{n}{1} = n$ d) $\binom{0}{0} = 1$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{n} = 1$ c) $\binom{n}{1} = n$ d) $\binom{0}{0} = 1$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

- a) $\binom{n}{0} = 1$
- b) $\binom{n}{n} = 1$
- c) $\binom{n}{1} = n$
- d) $\binom{0}{0} = 1$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{a) } \binom{n}{0} = 1 \quad \text{b) } \binom{n}{n} = 1 \quad \text{c) } \binom{n}{1} = n \quad \text{d) } \binom{0}{0} = 1$$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{a) } \binom{n}{0} = 1 \quad \text{b) } \binom{n}{n} = 1 \quad \text{c) } \binom{n}{1} = n \quad \text{d) } \binom{0}{0} = 1$$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{a) } \binom{n}{0} = 1 \quad \text{b) } \binom{n}{n} = 1 \quad \text{c) } \binom{n}{1} = n \quad \text{d) } \binom{0}{0} = 1$$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^{*} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{a) } \binom{n}{0} = 1 \quad \text{b) } \binom{n}{n} = 1 \quad \text{c) } \binom{n}{1} = n \quad \text{d) } \binom{0}{0} = 1$$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^* + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{5}{4} + \binom{5}{3}}^* + \binom{6}{3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3}$$

Vlastnosti kombinacích čísel

Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

- a) $\binom{n}{0} = 1$
- b) $\binom{n}{n} = 1$
- c) $\binom{n}{1} = n$
- d) $\binom{0}{0} = 1$

Věta

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, splňující $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Příklad 2.2

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}^{\clubsuit} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \overbrace{\binom{5}{4} + \binom{5}{3}}^{\clubsuit} + \binom{6}{3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3} \stackrel{\clubsuit}{=} \underline{\underline{\binom{7}{4}}}$$

Vlastnosti kombinačních čísel

Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

a) $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$

Vlastnosti kombinačních čísel

Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

a) $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$ b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{5}$

Vlastnosti kombinačních čísel

Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

a) $\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$

b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{5}$

c) $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4}$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

- I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

V. $x + 1 \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

$$\underbrace{x \geq 2}$$

V. $x + 1 \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

- I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$
- $\underbrace{x \geq 2}_{\sim}$ $\underbrace{x \geq 1}_{\sim}$
- V. $x + 1 \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

$\xrightarrow{x \geq 2}$ $\xrightarrow{x \geq 1}$ $\xrightarrow{x > -1}$

V. $x + 1 \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

$\xrightarrow{x \geq 2}$ $\xrightarrow{x \geq 1}$ $\xrightarrow{x > -1}$

V. $x + 1 \geq 2$
 $\xrightarrow{x \geq 1}$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x - 2 \geq 0$ III. $x - 1 \geq 0$ IV. $x + 1 \geq 0$

$\xrightarrow{x \geq 2}$ $\xrightarrow{x \geq 1}$ $\xrightarrow{x \geq -1}$

V. $x + 1 \geq 2$
 $\xrightarrow{x \geq 1}$

$x \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$
$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

$x \geq 2$

IV. $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

II. $x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$x \geq 1$

III. $x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$x \geq 0$

V. $x+1 \geq 2$

$x \geq 1$

$x \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

$x \geq 2$

II. $x - 2 \geq 0$

$x \geq 1$

III. $x - 1 \geq 0$

$x \geq -1$

IV. $x + 1 \geq 0$

$x \geq 1$

V. $x + 1 \geq 2$

$x \geq 1$

$x \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$ II. $x-2 \geq 0$ III. $x-1 \geq 0$ IV. $x+1 \geq 0$

$\xrightarrow{x \geq 2}$ $\xrightarrow{x \geq 1}$ $\xrightarrow{x \geq -1}$

V. $x+1 \geq 2$
 $\xrightarrow{x \geq 1}$

$x \geq 2$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

II. $x-2 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq 2} \geq 2$$

III. $x-1 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq 1} \geq 1$$

IV. $x+1 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq -1} \geq -1$$

V. $x+1 \geq 2$

$$\underbrace{x}_{\geq 1} \geq 1$$

$$x \geq 2$$



Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$



Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

II. $x-2 \geq 0$

$\xrightarrow{\sim}$
 $x \geq 2$

III. $x-1 \geq 0$

$\xrightarrow{\sim}$
 $x \geq 1$

IV. $x+1 \geq 0$

$\xrightarrow{\sim}$
 $x \geq -1$

V. $x+1 \geq 2$

$\xrightarrow{\sim}$
 $x \geq 1$

$x \geq 2$



Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$$



Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

II. $x - 2 \geq 0$

$$\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \hline \end{array}$$

III. $x - 1 \geq 0$

$$\begin{array}{l} x \geq 1 \\ \hline \end{array}$$

IV. $x + 1 \geq 0$

$$\begin{array}{l} x \geq -1 \\ \hline \end{array}$$

V. $x + 1 \geq 2$

$$\begin{array}{l} x \geq 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{x \geq 2}$$

**Řešte rovnice:**

a) $\binom{n}{n-3} + \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+4}{n+1} = \frac{n^3}{2} + 88 \quad [6]$

Příklad 2.3 Řešte rovnici v \mathbb{N}

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{x-1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \binom{x+1}{2}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$$



Podmínky řešitelnosti:

I. $x \geq 0$

II. $x-2 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq 2} \geq 2$$

III. $x-1 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq 1} \geq 1$$

IV. $x+1 \geq 0$

$$\underbrace{x}_{\geq -1} \geq -1$$

V. $x+1 \geq 2$

$$\underbrace{x}_{\geq 1} \geq 1$$

$$x \geq 2$$

**Řešte rovnice:**

a) $\binom{n}{n-3} + \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+4}{n+1} = \frac{n^3}{2} + 88 \quad [6]$

b) $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{5x}{2} \quad [4]$



Konec
(2. Kombinační čísla)