Analytická geometrie

Jaroslav Drobek

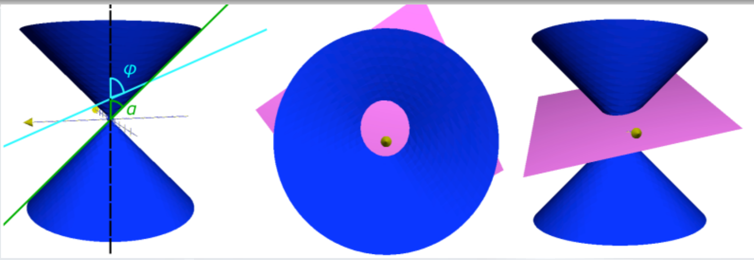
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

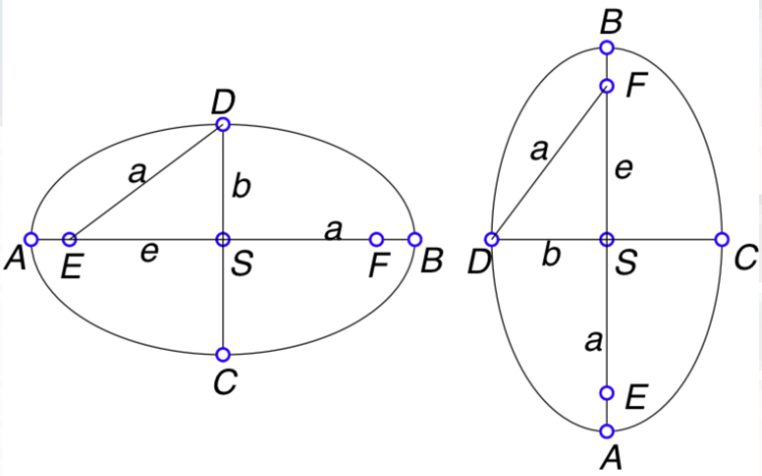
Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

8. Elipsa, příklady

GOA – ORLOVA.CZ

Zápis z online hodiny 24.3.2021





Příklad 8.1 Najděte středovou a obecnou rovnici elipsy, je-li $F = [5; 6]$, $A = [5; -2]$, $B = [5; 8]$.

$$x_A = 5 = x_B \implies AB \parallel o_y \implies \boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1}$$

$$a = |AS| = \tfrac{1}{2}|AB| = \tfrac{1}{2}\sqrt{(5-5)^2 + (-2-8)^2} = 5$$
$$S = \tfrac{1}{2}(A+B) = [5; 3] \implies m = 5,\ n = 3$$
$$e = |FS| = \sqrt{(5-5)^2 + (6-3)^2} = 3$$
$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\ell \quad \frac{(x-5)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1 \qquad | \cdot 4^2 \cdot 5^2$$
$$25(x-5)^2 + 16(y-3)^2 = 16 \cdot 25$$
$$25(x^2 - 10x + 25) + 16(y^2 - 6y + 9) = 400$$
$$25x^2 + 16y^2 - 250x - 96y + 625 + 144 = 400$$
$$\ell \quad 25x^2 + 16y^2 - 250x - 96y + 369 = 0$$

$$\boxed{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$$

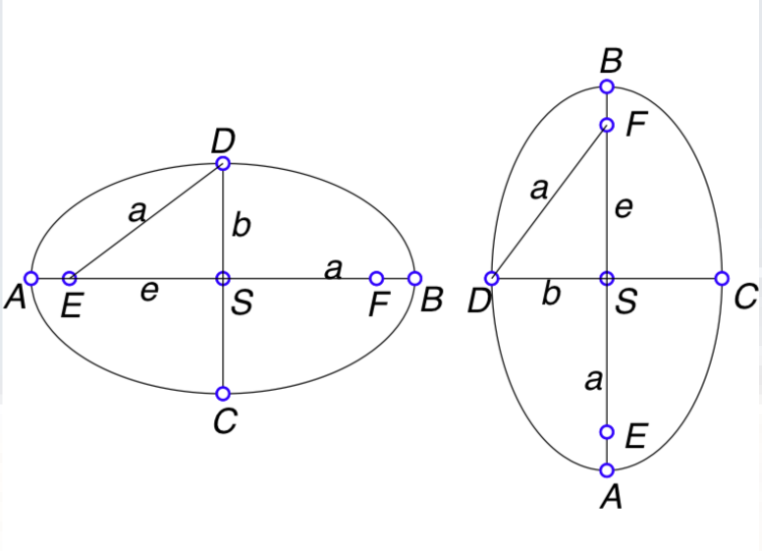
Domácí úkol (zdroj: Středová rovnice elipsy na realisticky.cz,)

Napiš středovou rovnici elipsy,

a) jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami a $C = [2; -1]$, $E = [1; 1]$.

b) která je shodná s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a má $S = [2; -1]$.

Zápis z online hodiny 25.3.2021



Příklad 8.2 Najděte střed, poloosy, výstřednost, ohniska, a vrcholy elipsy $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.

Najít středovou rovnici:

$$\begin{aligned}
(9x^2 - 54x) + (16y^2 + 64y) + 1 &= 0 \\
9(x^2 - 6x + 3^2) + (16y^2 + 64y) + 1 &= 9 \cdot 3^2 \\
9(x^2 - 6x + 3^2) + 16(y^2 + 4y + 2^2) + 1 &= 9 \cdot 3^2 + 16 \cdot 2^2 \\
9(x-3)^2 + 16(y+2)^2 &= 9 \cdot 3^2 + 16 \cdot 2^2 - 1 \\
9(x-3)^2 + 16(y+2)^2 &= 144 \qquad | : 144 \\
\frac{9(x-3)^2}{144} + \frac{16(y+2)^2}{144} &= 1 \\
\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} &= 1 \\
\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}$$

středová: $\boxed{\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad (AB \parallel o_x)}$

$AB \parallel o_x, \ m = 3, \ n = -2$

$\underline{\underline{S = [3; -2], \ a = 4, \ b = 3}}$

$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \underline{\underline{\sqrt{7}}}, \ \underline{\underline{E = [3 - \sqrt{7}; -2], \ F = [3 + \sqrt{7}; -2]}}$

$A = [3-4; -2] = \underline{\underline{[-1; -2]}}, \ B = [3+4; -2] = \underline{\underline{[7; -2]}}$

$C = [3; -2-3] = \underline{\underline{[3; -5]}}, \ D = [3; -2+3] = \underline{\underline{[3; 1]}}$

Domácí úkol (zdroj: **Obecná rovnice elipsy na realisticky.cz**,)

Najděte střed, poloosy, výstřednost, ohniska, a vrcholy elipsy,

a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0.$

b) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0.$

c) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0.$

Zápis z online hodiny 26.3.2021

Příklad 8.3 Určete vzájemnou polohu přímky $p:\ x+y=0$ a elipsy $\ell:\ \dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$.

$$x+y=0 \implies y=-x$$

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(-x-2)^2}{16}=1$$

$$16(x+1)^2+25(-x-2)^2=16\cdot 25$$

$$16(x^2+2x+1)+25(x^2+4x+4)=400$$

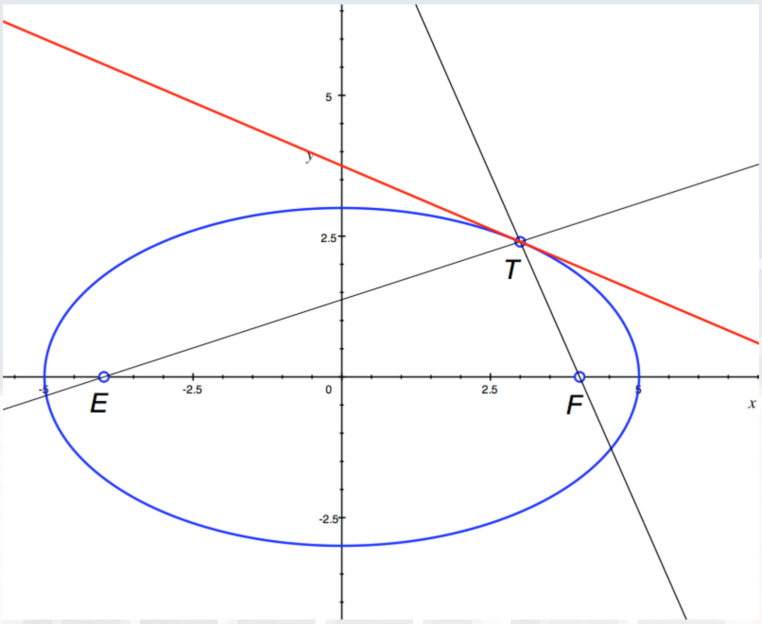
$$41x^2+132x+116=400$$

$$41x^2+132x-284=0$$

$D=132^2-4\cdot 41\cdot(-284)=132^2+4\cdot 41\cdot 284>0 \implies$ 2 řešení $\implies$ 2 společné body $\implies$ $\underline{\underline{p \text{ je sečna } \ell}}$

Domácí úkol (zdroj: Elipsa a přímka na realisticky.cz)

Určete vzájemnou polohu přímky $p:\ x+y-1=0$ a elipsy $\ell:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.



Příklad 8.4 Najděte rovnici tečny t elipsy

$$\ell: \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-3)^2}{40} = 1 \quad \text{v bodě } T = [1; -3].$$

$$\Longrightarrow \boxed{t: \quad \frac{(x_T - m)(x-m)}{b^2} + \frac{(y_T - n)(y-n)}{a^2} = 1,}$$

$$\frac{(1-2)(x-2)}{10} + \frac{(-3-3)(y-3)}{40} = 1 \qquad | \cdot 40$$

$$-4(x-2) - 6(y-3) = 40$$

$$-4x + 8 - 6y + 18 = 40$$

$$-4x - 6y - 14 = 0$$

$$t: \quad 2x + 3y + 7 = 0$$

Domácí úkol (zdroj: **Elipsa a přímka na realisticky.cz**)

1. Urči rovnici tečny elipsy $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ v bodě $T = [0; \frac{36}{5}]$
2. Urči rovnici tečny elipsy $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ procházející bodem $A = [0; -3]$.

Zápis z online hodiny 30.3.2021

Příklad 8.5 Najděte tečny k elipse $\ell: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ z bodu $B = [-6; -2]$.

$$\Longrightarrow \boxed{t: \quad \frac{(x_T - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_T - n)(y - n)}{b^2} = 1,}$$

$$m = n = 0,\ a^2 = 9,\ b^2 = 4 \implies t: \quad \frac{x_T x}{9} + \frac{y_T y}{4} = 1$$

$$t: \quad 4x_T x + 9y_T y = 36$$

$$[-6; -2] \in t \implies 4x_T \cdot (-6) + 9y_T \cdot (-2) = 36$$

$$-24x_T - 18y_T = 36$$

$$-4x_T - 3y_T = 6 \qquad \implies 3y_T = -4x_T - 6$$

$$[x_T; y_T] \in \ell \implies \frac{x_T^2}{9} + \frac{y_T^2}{4} = 1$$

$$4x_T^2 + 9y_T^2 = 36$$

$$4x_T^2 + (3y_T)^2 = 36$$

$$4x_T^2 + (-4x_T - 6)^2 = 36$$

$$4x_T^2 + 16x_T^2 + 48x_T + 36 = 36$$

$$20x_T^2 + 48x_T = 0$$

$$4x_T(5x_T + 12) = 0$$

$$x_T = \begin{cases} 0 \\ -\frac{12}{5} \end{cases} \implies y_T = \frac{1}{3}(-4x_T - 6) = \begin{cases} -2 \\ \frac{6}{5} \end{cases} \implies T = \begin{cases} [0; -2] \\ [-\frac{12}{5}; \frac{6}{5}] \end{cases}$$

$\boxed{T = [0; -2]}$:

$$t_1: \quad 4 \cdot 0 \cdot x + 9 \cdot (-2) \cdot y = 36$$

$$-18y = 36$$

$$\underline{\underline{y = -2}}$$

$\boxed{T = [-\frac{12}{5}; \frac{6}{5}]}$:

$$t_2: \quad 4 \cdot (-\tfrac{12}{5}) \cdot x + 9 \cdot \tfrac{6}{5} \cdot y = 36 \quad | \cdot 5$$

$$-48x + 54y = 180 \quad | :(-6)$$

$$\underline{\underline{8x - 9y + 30 = 0}}$$

Konec

(8. Elipsa, příklady)