Referát

Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Příklad 1.1:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
-3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\
4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1
\end{array}
\;\Big|\cdot\tfrac{1}{2}
\iff
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
-3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\
4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1
\end{array}
\quad \cdot 3 \quad \cdot(-4)
$$

$$
\iff
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
 & & & - & x_3 & = & 1 \\
 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3
\end{array}
\iff
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\
 & & & & -x_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$x_1 - 1 + (-1) = 1$$

$$\iff \qquad -x_2 + 2\cdot(-1) = -3 \qquad \vdots$$

$$\underline{\underline{x_3 = -1}} \qquad \underline{\underline{x_2 = 1}} \qquad \underline{\underline{x_1 = 3}}$$

Úpravy rovnic (ekvivalentní řádkové úpravy):

a) vynásobení b) přičtení násobku c) záměna

Příklad 1.1: (maticový zápis)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \boxed{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\widetilde{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \cdot\frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot(-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \iff \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ & & & & -x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} \ldots x_1 = 3 \\ \ldots x_2 = 1 \\ \ldots x_3 = -1 \end{array} \qquad \boxed{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Terminologie:

- A ... matice soustavy
- $\mathbf{b}$ ... vektor pravých stran
- $\widetilde{A}$ ... rozšířená matice soustavy
- $\mathbf{x}$ ... vektor řešení

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Matice jsou ekvivalentní (symbol $\boxed{\sim}$), jestliže jednu lze z druhé obdržet pomocí ekvivalentních řádkových úprav.
- Schodová matice může mít pod nenulovým řádkem jen řádky s více nulami zleva (a pod nulovým jen další nulové).
- Každá matice je ekvivalentní s nějakou schodovou maticí.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & -6 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Příklad 1.2:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & -6 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \iff \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -2 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\nexists \text{ řešení}}}$$

Příklad 1.3:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \iff \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} && 2x_1 + 4x_2 - 3(4-3t) + t &= -2 \\ x_3 + 3x_4 &= 4 & 2x_1 + 4s - 3(4-3t) + t &= -2 \\ x_3 + 3t &= 4 & 2x_1 + 4s - 12 + 10t &= -2 \\ &\vdots & &\vdots \\ x_4 = t \quad x_3 &= 4 - 3t & x_2 = s \quad x_1 &= 5 - 5t - 2s \end{aligned}$$

$$\exists\, \infty \text{ mnoho řešení: } \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5-5t-2s \\ s \\ 4-3t \\ t \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R} \qquad \ldots \text{pro } t = 0, s = 1: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Počet nenulových řádků ve schodové matici, která je ekvivalentní s maticí A, označíme $\boxed{h(A)}$; jde o tzv. hodnost matice A.
- Je-li $\boxed{h(\widetilde{A}) = h(A)}$, potom existuje řešení, a to $\begin{cases} \text{jediné pro } \boxed{n = h(A)} \\ \infty \text{ mnoho pro } \boxed{n > h(A)} \end{cases}$

  (Frobeniova věta) $n \dots$ počet neznámých $\dots (n - h(A))$ parametrů

Př. 1.1: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} h(\widetilde{A})=3 \\ h(A)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ řeš.}$$
$$n=3=h(A) \Rightarrow \text{jediné}$$

Př. 1.2: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $A \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} h(\widetilde{A})=3 \\ h(A)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \text{ řeš.}$$

Př. 1.3: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$ $A \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} h(\widetilde{A})=2 \\ h(A)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ řeš.}$$
$$n=4>h(A) \Rightarrow \infty \text{ mn.}$$

Shrnutí

- Určit odpovídající rozšířenou matici soustavy.
- Odvodit ekvivalentní schodovou matici.
- (Lze provést diskuzi řešení podle Frobeniovy věty)
- Vyřešit soustavu odpovídající schodové matici. Při určování složek řešení postupovat od poslední rovnice k první.

- Matice typu $m \times n$: $\boxed{A_{m\times n}}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 8.2 & 11 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

- Prvek matice A na pozici (i, j): $\boxed{a_{i,j}}$ $\qquad a_{2,3} = -2$
- Matice transponovaná k matici A:

$$\boxed{A^T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 1 \\ 8.2 & 4 & 3 \\ 11 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

- Čtvercová matice řádu m (tj. $m = n$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Příklad 1.1 (použití Cramerova pravidla pro případ $m = n$)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Cramerovo pravidlo:

determinanty

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = \underline{\underline{3}}, \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = \underline{\underline{1}}, \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2}{-2} = \underline{\underline{-1}}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \cdots = -6 \qquad \mathbf{x} = \underline{\underline{(3, 1, -1)^T}}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \cdots = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 2$$

- Rovnost: $\boxed{A_{m\times n} = B_{m\times n}} \iff \boxed{\forall\, i,j:\ a_{i,j} = b_{i,j}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 5 & v \end{pmatrix} \qquad \text{speciálně} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= y \\ x &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= z \\ 3 &= v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

- **Násobení skalárem**: $c \cdot A_{m\times n} = B_{m\times n}$ kde $\forall\, i,j:\; b_{i,j} = c \cdot a_{i,j}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(\text{-}2) \\ 2\cdot(\text{-}1) & 2\cdot 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}}$$

- **Sčítání**: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$ kde $\forall\, i,j:\; c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 & 4-2 \\ 2+0 & 3-3 & 4+2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}}}$$

- **Násobení**: $A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$ kde $\forall\, i,j:\; c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 \\ -\frac{3}{2}\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Maticový tvar soustavy

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}} \qquad \dots A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{array}$$

- $\boxed{E\,\mathbf{x} = \mathbf{x}}$ platí pro $\boxed{E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

  ... E je jednotková matice

- $\boxed{A^{-1} A = E}$ platí pro $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj} A}$ (je-li $|A| \neq 0$, ... A regulární)

  ... A^{-1} je matice inverzní k matici A

  ... $\operatorname{Adj} A$ je matice adjungovaná k matici A

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad \big| A^{-1} \cdot \\ A^{-1} A\,\mathbf{x} &= A^{-1}\,\mathbf{b} \\ E\,\mathbf{x} &= A^{-1}\,\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\,\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \quad \big| 3^{-1} \cdot \\ 3^{-1} \cdot 3x &= 3^{-1} \cdot 4 \\ 1x &= \tfrac{4}{3} \\ x &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Příklad 1.1 (použití inverzní matice pro případ $m = n$) adjungovaná matice

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Křížové pravidlo: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-4)\cdot(-5) = 18 - 20 = -2$

- Laplaceova věta (obecný případ): $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1)\cdot(-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 = \underline{\underline{-2}}$$

zpět Cramer

- Algebraický doplněk k prvku $a_{i,j}$ se označuje $\boxed{D_{i,j}}$:

$$a_{1,1} \longrightarrow D_{1,1} = -2, \qquad a_{1,2} \longrightarrow D_{1,2} = 2, \qquad a_{1,3} \longrightarrow D_{1,3} = 3$$

- Matice adjungovaná k matici A :

zpět inverze

$$\boxed{\operatorname{Adj} A} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Konec

(Referát)