

## 8. Soustavy lineárních rovnic

### Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I



**Definice 8.1**

Nechť  $m, n \in \mathbb{N}$  a necht'  $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Potom

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

se nazývá **soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, \dots, x_n$** .

- Uspořádaná  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  je **řešení soustavy (1)**, jestliže čísla  $x_1, \dots, x_n$  splňují (1).
- Soustava (1) je **řešitelná**, jestliže existuje její řešení.
- Řešení  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  soustavy (1) je **triviální**, jestliže

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

**Poznámka:**

Protože uspořádané  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  lze ztotožnit s maticemi typu  $n \times 1$ , můžeme soustavu (1) vyjádřit v tzv. **maticovém tvaru**:

$$A_{m \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1} .$$

## Definice 8.2

Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

- Je-li  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , potom soustava (1) se nazývá **homogenní**; v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Čísla  $a_{i,j}$  se nazývají **koefficienty soustavy (1)**.
- Matice  $A$  se nazývá **matice soustavy (1)**.
- Matice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy (1)**; označuje se  $\tilde{A}$ .

- Vektor  $\mathbf{b}$  se nazývá **vektor pravých stran soustavy (1)**.

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

## Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když

$$h(A) = h(\tilde{A}).$$

## Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li  $h(A) = n$ ,
- nekonečně mnoho řešení, je-li  $h(A) < n$ ; v takovém případě lze tato řešení vyjádřit v závislosti na  $n - h(A)$  parametrech.

## Důsledek

Homogenní soustava lineárních rovnic má triviální řešení; toto řešení je jediné, je-li  $h(A) = n$ .

## Věta 8.2

Soustavy, jejichž rozšířené matice jsou ekvivalentní, mají stejná řešení.



# Gaussova eliminační metoda

Umožňuje řešit soustavu (1):

- Odvodíme schodovou matici  $\tilde{B}$ , která je ekvivalentní s maticí  $\tilde{A}$ , a schodovou matici  $B$ , která je ekvivalentní s maticí  $A$ .
- Vyřešíme soustavu, jejíž rozšířená matice je  $\tilde{B}$ . Při učování složek řešení postupujeme od posledního řádku k prvnímu.
- Nalezená řešení jsou na základě věty 8.2 současně řešeními soustavy (1).

## Gaussova eliminační metoda

## Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a)  $x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$

$$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$$

b)  $2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

$2x_1 - x_2 - 2x_4 = 4$

$8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 = 19$

$6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9$

$$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$$

c)  $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$

$x_1 + x_2 - 2x_4 = 3$

... řešení neexistuje

d)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

$5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0$

$$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, t, -s, -t)^T}}$$

### Věta 8.3

Nechť  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je regulární matice a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Potom soustava (1) má jediné řešení  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a platí tzv. **Cramerovo pravidlo** :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

kde  $A_i$  je matice, která vznikne z matice  $A$  nahrazením  $i$ -tého sloupce vektorem  $\mathbf{b}$ . Dále platí

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

### Poznámka 8.1

**Věta 8.3** umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že  $m = n$ .

### Příklad 8.2

- a) Najděte  $x_2$  ze soustavy
- $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 & \dots x_2 &= \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}} \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

- b) Řešte stejnou soustavu s použitím inverzní matice.  $\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(6, 2, 7)^T}}$



**Konec**

(8. Soustavy lineárních rovnic)