Analytická geometrie

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

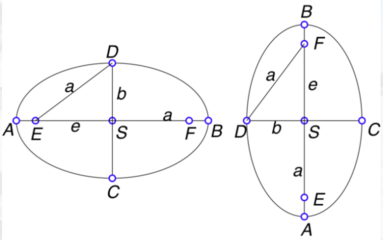
8. Elipsa

GOA – ORLOVA.CZ

Rovnice elipsy

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají stejný součet vzdáleností od dvou daných bodů, tzv. ohnisek elipsy.

- Bod S je střed elipsy.
- Body E, F jsou ohniska elipsy.
- Body A, B jsou hlavní vrcholy elipsy.
- Přímka AB je hlavní osa elipsy.
- Vzdálenost $|AS|$ $(= |BS|)$ je hlavní poloosa elipsy; označuje se $\boxed{a}$.
- Body C, D jsou vedlejší vrcholy elipsy.
- Přímka CD je vedlejší osa elipsy.
- Vzdálenost $|CS|$ $(= |DS|)$ je vedlejší poloosa elipsy; označuje se $\boxed{b}$.
- Vzdálenost $|ES|$ $(= |FS|)$ je výstřednost (excentricita) elipsy; označuje se $\boxed{e}$.



Platí

- $\boxed{|DE| = |DF| = a}$
- $\boxed{a^2 = b^2 + e^2}$.

Rovnice elipsy

Elipsa o středu $S = [m; n]$ a poloosách a, b

- Středová rovnice: $$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,}$$ je-li $AB \parallel o_x$,

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,}$$ je-li $AB \parallel o_y$.

- Obecná rovnice: $$\boxed{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0,}$$

kde
$$\left\{ \begin{array}{ll} p = b^2,\ q = a^2,\ r = -b^2 m,\ s = -a^2 n,\ t = m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2, & \text{je-li } AB \parallel o_x, \\ p = a^2,\ q = b^2,\ r = -a^2 m,\ s = -b^2 n,\ t = m^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2 b^2, & \text{je-li } AB \parallel o_y. \end{array} \right.$$

Rovnice elipsy

Příklad 8.1 Najděte středovou a obecnou rovnici elipsy se středem $S = [2; 1]$, hlavním vrcholem $A = [2; 6]$ a ohniskem $E = [2; -3]$.

Jak je elipsa orientovaná? $\ldots x_A = 2 = x_S \implies AS \parallel o_y \implies AB \parallel o_y$

$$S = [2; 1] \implies m = 2,\ n = 1,$$

$$a = |AS| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{5^2} = 5,$$

$$e = |ES| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{4^2} = 4,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3,$$

- středová: $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$
- obecná – upravíme středovou:

$$25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \cdot 9$$

$$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 225$$

$$25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y + 100 + 9 - 225 = 0$$

$$25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$$

- Středová rovnice elipsy pro $AB \parallel o_y$:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,}$$

- Výstřednost a poloosy:

$$\boxed{a^2 = b^2 + e^2}$$

- Obecná rovnice elipsy:

$$\boxed{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0.}$$

Rovnice elipsy

Příklad 8.2 Určete střed, ohniska a poloosy elipsy dané rovnicí $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$.

Zjistíme středovou rovnici – výraz na levé straně upravíme (dvojitým) doplněním na čtverec:

$$4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$$
$$4\left(x^2 + 4x\right) + 9\left(y^2 - 2y\right) - 11 = 0$$
$$4\left(x^2 + 4x + 2^2\right) - 4 \cdot 2^2$$
$$+ 9\left(y^2 - 2y + (-1)^2\right) - 9(-1)^2 - 11 = 0$$
$$4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 16 - 9 - 11 = 0$$
$$4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$
$$\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1,$$

- Středová rovnice elipsy pro $AB \parallel o_x$:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,}$$

- Středová rovnice elipsy pro $AB \parallel o_y$:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,}$$

- Výstřednost a poloosy:

$$\boxed{a^2 = b^2 + e^2}$$

odkud $m = -2,\ n = 1,\ \underline{\underline{S = [-2; 1]}},\ \underline{\underline{a = 3,\ b = 2}},$

Ohniska: Protože $AB \parallel o_x$, platí $E = [-2 - e; 1],\ F = [-2 + e; 1]$,

kde $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, tj. $\underline{\underline{E = [-2 - \sqrt{5}; 1],\ F = [-2 + \sqrt{5}; 1]}}$.

Rovnice elipsy

Příklad 8.3 Určete střed, ohniska a poloosy elipsy dané rovnicí $x^2 + 3x + 3y^2 + 3 = 0$.

Zjistíme středovou rovnici – výraz na levé straně upravíme (dvojitým) doplněním na čtverec:

$$x^2 + 3x + 3y^2 + 3 = 0$$

$$\left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$-\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

- Středová rovnice elipsy pro $AB \parallel o_x$:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,}$$

- Středová rovnice elipsy pro $AB \parallel o_y$:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,}$$

…nelze upravit do středového tvaru elipsy

$\Longrightarrow$ nejde o elipsu

Přímka a elipsa

Jestliže pro přímku p a elipsu k platí

- $\boxed{p \cap k = \emptyset}$, **přímka p leží vně elipsy k a nazývá se vnější přímka elipsy.**
- $\boxed{p \cap k = \{P\}}$, **přímka p se dotýká elipsy k v bodě P a nazývá se tečna elipsy k.**
- $\boxed{p \cap k = \{P, Q\}}$, **přímka p protíná elipsu k v bodech P a Q a nazývá se sečna elipsy k.**

Příklad 8.4 Určete vzájemnou polohu přímky $p: x - 3y + 1 = 0$ a elipsy $k: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

- Vyšetřujeme množinu $p \cap k$, tj. hledáme body $[x; y]$ takové, že $[x; y] \in p \wedge [x; y] \in k$.
- Bod patří do nějakého objektu, splňují-li jeho souřadnice rovnici tohoto objektu:

$$\begin{aligned} [x; y] \in p &\iff x - 3y + 1 = 0 \\ [x; y] \in k &\iff \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{aligned}$$

- Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ...má dvě řešení.

$\Longrightarrow$ Přímka p je sečnou elipsy k.

Tečna elipsy

Tečna elipsy o středu $S = [m; n]$ a poloosách a, b v bodě $T = [x_T; y_T]$

$$\boxed{\frac{(x_T - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_T - n)(y - n)}{b^2} = 1,} \quad \text{je-li } AB \parallel o_x,$$

$$\boxed{\frac{(x_T - m)(x - m)}{b^2} + \frac{(y_T - n)(y - n)}{a^2} = 1,} \quad \text{je-li } AB \parallel o_y.$$

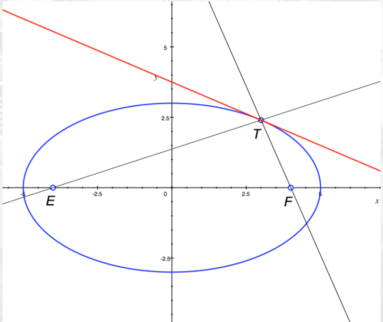
Příklad 8.5 Najděte rovnici tečny t elipsy

$$k: \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-3)^2}{40} = 1 \quad \text{v bodě } T = [3; 9].$$

$$\frac{(3-2)(x-2)}{10} + \frac{(9-3)(y-3)}{40} = 1$$

(dopočítejte) $\vdots$

$$t: \quad 2x + 3y - 33 = 0$$



Tečna elipsy

Příklad 8.6 Napište rovnici tečny k elipse $k: \frac{(x+1)^2}{32} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$, která je kolmá k přímce $p: 4x - y + 5 = 0$.

- Označíme-li $T = [x_T, y_T]$ bod dotyku, má tečna rovnici
$$\frac{(x_T+1)(x+1)}{32} + \frac{(y_T-2)(y-2)}{2} = 1$$
$$(x_T+1)(x+1) + 16(y_T-2)(y-2) = 32$$
$$(x_T+1)x + x_T + 1 + 16(y_T-2)y - 32(y_T-2) = 32$$
$$(x_T+1)x + (16y_T-32)y + c = 0$$
s normálovým vektorem $\vec{n}_t = (x_T+1; 16y_T-32)$.
- Protože $\vec{n}_p = (4; -1)$ je normálovým vektorem přímky p, musí platit $\vec{n}_t \perp \vec{n}_p$, tj.
$$\vec{n}_t \cdot \vec{n}_p = 0$$
$$(x_T+1; 16y_T-32) \cdot (4; -1) = 0$$
$$4x_T + 4 - 16y_T + 32 = 0$$
$$x_T - 4y_T + 9 = 0$$
- Současně platí $T \in k$, tj. $(x_T+1)^2 + 16(y_T-2)^2 = 32$
- Souřadnice bodu T lze tedy najít jako řešení soustavy
$$x_T - 4y_T + 9 = 0$$
$$(x_T+1)^2 + 16(y_T-2)^2 = 32$$
$\ldots T = [-5; 1],\ T' = [3; 3]$
- Parametrická rovnice hledané tečny je $-4x - 16y - 4 = 0$
$$t: \ x + 4y + 1 = 0$$
$$4x + 16y - 60 = 0$$
$$t': \ x + 4y - 15 = 0$$

Tečna elipsy

Příklad 8.7 Najděte tečny k elipse $k:\ 5x^2+9y^2-45=0$ z bodu $Z=[0;-3]$.

- Označíme-li $T=[x_T, y_T]$ bod dotyku, má tečna rovnici

$$t:\ 5x_Tx+9y_Ty-45=0.$$

- Protože $Z\in t$, platí $5x_T\cdot 0+9y_T\cdot(-3)-45=0$

$$y_T=-\tfrac{5}{3}$$

- Současně platí $T\in k$, tj. $5x_T^2+9y_T^2-45=0$
- Souřadnice bodu T lze tedy najít jako řešení soustavy

$$y_T=-\tfrac{5}{3}$$
$$\underline{5x_T^2+9y_T^2-45=0}$$
$$\ldots T=[2;-\tfrac{5}{3}],\ T'=[-2;-\tfrac{5}{3}]$$

- Parametrická rovnice hledané tečny je

$$5\cdot 2\cdot x+9\cdot(-\tfrac{5}{3})\cdot y-45=0 \qquad 5\cdot(-2)\cdot x+9\cdot(-\tfrac{5}{3})\cdot y-45=0$$
$$\underline{\underline{t:\ 2x-3y-9=0}} \qquad \underline{\underline{t':\ 2x+3y+9=0}}$$

Konec

(8. Elipsa)