Referát

Obyčejné diferenciální rovnice

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika II

Coffee time

Cíl: Zjistit, jak chladne kafe

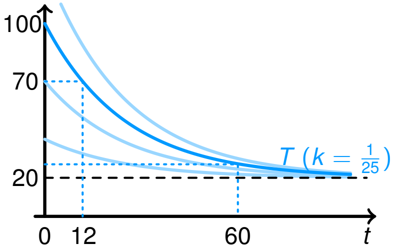
… a kdy jej pít.

Pozorování: $T'(t) < 0$

Model: $T'(t) = k(T_p - T(t))$,

$k = \frac{1}{25}$ … materiálová konstanta

$T_p = 20$ … teplota prostředí



Úkol: Najít funkci T splňující $\boxed{T'(t) = \frac{1}{25}(20 - T(t)), \quad t > 0}$

Řešení: $T(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{25}} + 20, \quad c \in \mathbb{R}$

… skutečně: $T'(t) = -\frac{c}{25} \cdot e^{-\frac{t}{25}} = \frac{1}{25}\left(20 - 20 - c \cdot e^{-\frac{t}{25}}\right) = \frac{1}{25}(20 - T(t))$

Doplňující úkol: Vybrat takové řešení T, že $\boxed{T(0) = 100}$

Doplňující řešení: $T(t) = 80 \cdot e^{-\frac{t}{25}} + 20$ $(c = 80)$ … skutečně: $T(0) = 100$

- Jakou teplotu bude mít za hodinu? … $T(60) \doteq \underline{\underline{27}}$ $(°C)$
- Kdy bude mít teplotu $70°C$? … $70 = 80 \cdot e^{-\frac{t}{25}} + 20 \iff t \doteq \underline{\underline{12}}\ (min)$

Příklad 2.1: $f(x) = 3x^5 - 10x^3$, $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$, $f(x,y,z) = \frac{xy+z}{x^2}$

$$T \sim y, \qquad t \sim x, \qquad T(t) \sim y(x), \qquad T'(t) \sim y'(x)$$

- ODR 1. řádu: $\boxed{F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (\clubsuit),}$ ... krátce: $\boxed{F(x,y,y') = 0}$

  ODR 2. řádu: $\boxed{F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,}$ ... $\boxed{F(x,y,y',y'') = 0}$
- řešení ODR (na $J \subset \mathbb{R}$): funkce y taková, že $(\clubsuit)$ platí pro každé $x \in J$
- integrální křivka: graf řešení ODR
- počáteční podmínka: $\boxed{y(x_0) = y_0}$
- Cauchyho úloha: Najít řešení ODR splňující počáteční podmínku(y)

Příklad 2.2: Je-li $F(x,y,z) = z - \frac{1}{25}(20-y)$, potom pro $x > 0$ dostáváme

chladnutí kafe: $y'(x) - \frac{1}{25}(20 - y(x)) = 0$

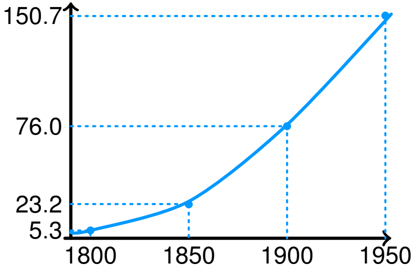
$$y'(x) = \frac{1}{25}(20 - y(x)) \quad \text{... krátce } y' = \frac{1}{25}(20 - y)$$

$$\vdots$$

$$y(x) = \underline{\underline{c \cdot e^{-\frac{x}{25}} + 20, \quad c \in \mathbb{R}}} \quad \text{... řešení ODR na } \mathbb{R}^+$$

$$y(0) = 100 \implies y(x) = \underline{\underline{80 \cdot e^{-\frac{x}{25}} + 20}} \quad \text{... řešení C.Ú.}$$

Population time



Cíl: Zjistit, jak nás přibývá.

Pozorování: $y'(x) > 0$

Model: $y'(x) = ay(x) - b(y(x))^2$,

$a = 0.0313 \ldots$ koeficient růstu

$b = 1.6 \cdot 10^{-10} \ldots$ koeficient tlumení

Cauchyho úloha: Najít funkci y splňující

$$y'(x) = 0.0313y(x) - 1.6 \cdot 10^{-10}(y(x))^2, \quad x > 1790,$$
$$y(1790) = 3.93$$

Řešení C.U.: $$y(x) = \frac{a}{\left(\frac{a}{3.93} - b\right) \cdot e^{a(1790-x)} + b}$$

rok	1790	1800	1850	1900	1950
skutečný počet	3.93	5.31	23.19	76.00	150.70
odhad podle modelu	3.93	5.34	23.19	76.87	148.70

Příklad 4.1: $y' = 3x^2$ $\qquad \underline{\underline{y = x^3 + c}}$

Příklad 4.2: $y' = \frac{1}{x}, \quad y(e) = 3$

$$\begin{aligned} y &= \ln|x| + c \\ 3 &= \ln|e| + c \\ c &= 2 \end{aligned} \qquad \underline{\underline{y = \ln|x| + 2}}$$

Příklad 4.3: $y' = e^{2x}, \quad y(1) = \frac{3}{2}e^2$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}e^{2x} + c \\ \frac{3}{2}e^2 &= \frac{1}{2}e^2 + c \\ c &= e^2 \end{aligned} \qquad \underline{\underline{y = \frac{1}{2}e^{2x} + e^2}}$$

$y' = f(x)$

$\boxed{\text{OŘ}: \quad y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c, \; c \in \mathbb{R}}$

Příklad 4.4: $y' = x(1-y)$

$$\underbrace{\frac{1}{1-y}}_{Q(y)} y' = \underbrace{x}_{P(x)} \quad (y \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$-\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y-1| = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-c}$$

$$y - 1 = e^{-\frac{x^2}{2}} c^*, \quad c^* \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}} c^*, \quad c^* \in \mathbb{R}}}$$

Příklad 4.5: $y' = \frac{1}{e^y\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \ldots x \in \langle -1, 1\rangle$

$$\underbrace{e^y}_{Q(y)} y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{P(x)}$$

$$\int e^y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$e^y = \arcsin x + c, \quad c > \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{y = \ln(\arcsin x + c), \quad c > \frac{\pi}{2}}}$$

$Q(y)y' = P(x)$ **(separovatelná)**

$$\boxed{\text{OŘ} : \int Q(y)\,\mathrm{d}y = \int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Příklad 4.6: $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$ $\quad \ldots y > 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\underbrace{\frac{1}{y \ln y}}_{Q(y)} y' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{P(x)} \quad (y \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{y \ln y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|\ln y| = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| e^c$$

$$\ln y = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| c^*, \quad c^* \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{y = e^{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| c^*}, \quad c^* \in \mathbb{R}}}$$

$Q(y)y' = P(x)$ (separovatelná)

$$\boxed{\text{OŘ} : \int Q(y)\,\mathrm{d}y = \int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Příklad 4.7: $x^2y' = y^2 - xy$

$$y' = \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (x \neq 0)$$

$$z'x + z = z^2 - z$$

$$z'x = z(z-2)$$

$$\underbrace{\frac{1}{z(z-2)}}_{Q(z)} z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} \quad (z \neq 0, z \neq 2)$$

$$\int \frac{1}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z}\right| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{z-2}{z}\right| = \ln x^2 + 2c$$

$$\left|\frac{z-2}{z}\right| = x^2 e^{2c}$$

$$\frac{z-2}{z} = x^2 c^*, \quad c^* \in \mathbb{R}$$

$$z = \frac{2}{1 - x^2 c^*}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{2x}{1 - x^2 c^*}, \quad c^* \in \mathbb{R}}}$$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní)

substituce $\boxed{y = zx \quad (y' = z'x + z)}$ vede na rovnici separovatelnou

$Q(z)z' = P(x)$ (separovatelná)

$\boxed{\text{OŘ}: \int Q(z)\,\mathrm{d}z = \int P(x)\,\mathrm{d}x}$

Příklad 4.8: $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ $\quad \dots x \neq 0,\ \frac{y(x)}{x} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y' = \underbrace{\frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (x \neq 0)$$

$$z'x + z = z + \operatorname{tg} z$$

$$z'x = \operatorname{tg} z$$

$$\underbrace{\frac{1}{\operatorname{tg} z}}_{Q(z)} z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} \quad (z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} z}\, \mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + c$$

$$|\sin z| = |x|\, e^c$$

$$\sin z = xc^*, \quad (xc^* \in \langle -1, 1 \rangle)$$

$$z = \arcsin xc^*$$

$$\underline{\underline{y = x \arcsin xc^*, \quad (xc^* \in \langle -1, 1 \rangle)}}$$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **(homogenní)**

substituce $\boxed{y = zx \quad (y' = z'x + z)}$ vede na rovnici separovatelnou

$Q(z)z' = P(x)$ **(separovatelná)**

$\boxed{\text{OŘ}: \int Q(z)\, \mathrm{d}z = \int P(x)\, \mathrm{d}x}$

Příklad 4.9: $xy' = 2x^4 + 2y$

$$\underbrace{y' - \frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{2x^3}_{q(x)} \quad (x \neq 0)$$

I. $y' - \frac{2}{x} y = 0$

$$y_1 = c \cdot e^{\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{OŘZ}: \; y_1 = cx^2$$

$$\dots u(x) = x^2$$

II. $y_2 = c(x)x^2, \quad y_2' = c'(x)x^2 + 2c(x)x$

$$c'(x)x^2 + 2c(x)x - \frac{2}{x}c(x)x^2 = 2x^3$$

$$c'(x)x^2 = 2x^3$$

$$c'(x) = 2x$$

$$c(x) = x^2$$

$$\text{PŘ}: \; y_2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

III. OŘ : $\underline{\underline{y = cx^2 + x^4, \quad c \in \mathbb{R}}}$

$y' + p(x)y = q(x)$ (lineární)

I. zkrácená: $y' + p(x)y = 0$ ... $\boxed{\text{OŘZ}: \; y_1 = cu(x), \text{ kde } u(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}$

II. variace konstanty: $\boxed{\text{PŘ}: \; y_2 = c(x)u(x),}$ $\quad y' = c'(x)u(x) + c(x)u'(x) \quad \dots c(x)$

III. $\boxed{\text{OŘ}: \; y = y_1 + y_2}$

Příklad 4.10: $y' = 3\frac{y}{x} - x$

$$\underbrace{y' - \frac{3}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x}_{q(x)}$$

I. $y' - \frac{3}{x}y = 0$

$$y_1 = c \cdot e^{\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{OŘZ}: \ y_1 = cx^3$$

$$\dots u(x) = x^3$$

II. $y_2 = c(x)x^3, \quad y_2' = c'(x)x^3 + 3c(x)x^2$

$$c'(x)x^3 + 3c(x)x^2 - \frac{3}{x}c(x)x^3 = x$$

$$c'(x)x^3 = x$$

$$c'(x) = x^{-2}$$

$$c(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\text{PŘ}: \ y_2 = -\frac{1}{x} \cdot x^3 = -x^2$$

III. $\text{OŘ}: \ \underline{\underline{y = cx^3 - x^2, \quad c \in \mathbb{R}}}$

$y' + p(x)y = q(x)$ (lineární)

I. zkrácená: $y' + p(x)y = 0 \quad \dots \boxed{\text{OŘZ}: y_1 = cu(x), \text{ kde } u(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}$

II. variace konstanty: $\boxed{\text{PŘ}: \ y_2 = c(x)u(x),} \quad y' = c'(x)u(x) + c(x)u'(x) \quad \dots c(x)$

III. $\boxed{\text{OŘ}: \ y = y_1 + y_2}$

Konec

(Referát)