Planimetrie

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

1. Základní geometrické útvary

GOA – ORLOVA.CZ

Úvod do planimetrie

Planimetrie

- matematická disciplína zaměřená na studium geometrických útvarů v rovině.

Dva geometrické útvary jsou

- **různé** ($\neq$), pokud nesplývají (nepokrývají totéž místo),
- **totožné** ($=$), pokud splývají (pokrývají totéž místo),
- **shodné** ($\cong$), pokud je lze přemístěním ztotožnit.

Přímka a její části

Bod

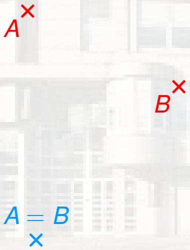
Bod je idealizované, bezrozměrné místo.

- modelujeme jako průsečík dvou čar
- značíme velkým písmenem
- body A, B jsou
  - a) různé (A nesplývá s B),

    $$\boxed{A \neq B}$$

  - b) totožné A splývá s B),

    $$\boxed{A = B}$$



Přímka

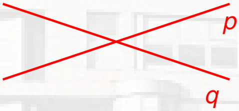
Přímka je idealizovaná nekonečná čára.

- modelujeme jako čáru
- značíme malým písmenem
- přímky p, q jsou
  a) různé (p nesplývá s q),

  $\boxed{p \neq q}$

  b) totožné (p splývá s q),

  $\boxed{p = q}$



Bod a přímka

- bod A a přímka p jsou
  a) incidentní (A leží na p, p prochází A),

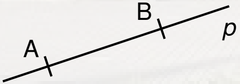
$$\boxed{A \in p}$$

  b) neincidentní (A neleží na p, p neprochází A),

$$\boxed{A \notin p}$$

Dvěma různými body prochází jediná přímka.

- přímku p procházející body $A \neq B$ označujeme také $\leftrightarrow AB$, tj.



$$\boxed{p = \leftrightarrow AB}$$

Polopřímka

- **Bod ležící na přímce rozděluje tuto přímku na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem**
- **Libovolný jiný bod ležící na uvažované přímce je vnitřním bodem jedné z těchto polopřímek.**

- bod $P \in p$ je společným počátkem dvou polopřímek
- bod $A \in p,\ A \neq P$ je vnitřním bodem jedné z těchto polopřímek
- polopřímku s počátkem P a vnitřním bodem A označujeme

$$\boxed{\mapsto PA}$$

Úsečka

- **část přímky mezi dvěma jejími různými body, včetně těchto bodů, se nazývá úsečka**
- **tyto dva různé body se nazývají krajní body úsečky**
- **všechny ostatní body úsečky se nazývají vnitřní body úsečky a tvoří vnitřek úsečky.**

- úsečku s krajními body A, B označujeme

$$\boxed{AB}$$

- platí: $AB = (\mapsto AB) \cap (\mapsto BA)$.

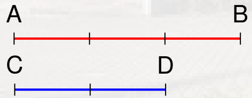
Délka úsečky

Délka úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů.

- délku úsečky *AB* označujeme

$$\boxed{|AB|}$$

- jestliže $|AB| > |CD|$, říkáme, že úsečka *AB* je větší než úsečka *CD* nebo že úsečka *CD* je menší než úsečka *AB*



Sčítání a odčítání úseček

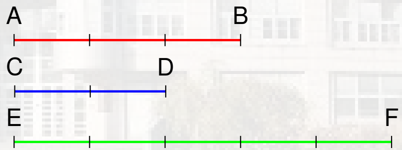
- **součet dvou úseček o délkách** a, b **je libovolná úsečka o délce** $a + b$
- **rozdíl dvou úseček o délkách** $a, b (a > b)$ **je libovolná úsečka o délce** $a - b$

- úsečka *EF* je součtem úseček *AB* a *CD*, protože

$$|EF| = |AB| + |CD|$$

- úsečka *AB* je rozdílem úseček *EF* a *CD*, protože

$$|AB| = |EF| - |CD|$$



Rovina a úhel

Polorovina

- **Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny a je jejich společnou hranicí neboli hraniční přímkou.**
- **Libovolný bod, který neleží na hraniční přímce dvou polorovin, je vnitřním bodem jedné z těchto polorovin.**

- přímka p je společnou hranicí dvou polorovin
- bod $M \notin p$ je vnitřním bodem jedné z těchto polorovin
- polorovinu s hranicí p (popř. $\leftrightarrow AB$) a s vnitřním bodem M označujeme

$$\boxed{\mapsto pM} \quad (\text{popř. } \boxed{\mapsto ABM})$$

- polorovinu opačnou k polorovině $\mapsto pM$ (popř. $\mapsto ABM$) označujeme

$$\boxed{\hookleftarrow pM} \quad (\text{popř. } \boxed{\hookleftarrow ABM})$$

Konvexita

- **Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka s krajními body ležícími v tomto geometrickém útvaru, je částí tohoto útvaru.**
- **Geometrický útvar se nazývá nekonvexní, jestliže není konvexní.**

Všechny doposud uvedené geometrické útvary s výjimkou bodu jsou konvexní.

Úhel

Dvě polopřímky se společným počátkem jednoznačně určují dvojici podmnožin roviny s těmito vlastnostmi:

1. sjednocením těchto podmnožin je celá rovina,
2. průnikem těchto podmnožin jsou právě obě určující polopřímky.

Uvažujme dvě polopřímky se společným počátkem.

- **Každá z dvojice podmnožin určených těmito přímkami se nazývá úhel.**
- **Uvažované polopřímky se nazývají ramena (obou) těchto úhlů.**
- **Společný počátek ramen se nazývá vrchol (obou) těchto úhlů.**
- **Libovolný bod, který neleží na ramenech, je vnitřním bodem jednoho z těchto úhlů.**

Všimněme si, že ramena jsou součástí každého z dvojice jimi určených úhlů.

Velikost úhlu

Délka oblouku, který je průnikem úhlu a jednotkové kružnice se středem v jeho vrcholu, se nazývá velikost úhlu.
Velikost úhlu o hodnotě

$\boxed{1}$ **se nazývá radián, označuje se rad,**

$\boxed{\frac{\pi}{180}}$ **se nazývá úhlový stupeň, označuje se** 1°**,**

$\boxed{\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60}}$ **se nazývá úhlová minuta, označuje se** $1'$**,**

$\boxed{\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}}$ **se nazývá úhlová vteřina, označuje se** $1''$**.**

- Velikost úhlu se označuje zápisem úhlu ve svislicích, např. $\boxed{|\sphericalangle AVB\,|}$.
- Úhel se často ztotožňuje s jeho velikostí a k jeho označení se používá malých písmen řecké abecedy, např. $\boxed{\alpha, \beta, \gamma}$.
- Úhly lze mezi sebou porovnávat podle velikosti.

Nechť $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \leq 2\pi$. Potom Součtem dvou úhlů o velikostech α, β rozumíme libovolný úhel o velikosti $\alpha + \beta$.

Nechť $\alpha, \beta \geq 0,\ 0 \leq \alpha - \beta \leq 2\pi$. Potom Rozdílem dvou úhlů o velikostech α, β (v tomto pořadí) rozumíme libovolný úhel o velikosti $\alpha - \beta$.

Speciální úhly

Každý z dvojice úhlů určených dvěma opačnými přímkami se nazývá přímý úhel.

Jeden z dvojice úhlů, které jsou určeny dvěma totožnými polopřímkami, je s těmito polopřímkami totožný a druhý je totožný s celou rovinou.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Úhel totožný se svými rameny se nazývá nulový. Úhel totožný s rovinou se nazývá plný.

- Opačné nebo totožné polopřímky určují vždy dvojici konvexních úhlů; tj. přímý, nulový a plný úhel jsou konvexní.
- Ve všech ostatních případech je jeden z dvojice úhlů konvexní a druhý nekonvexní.

Polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu, která úhel rozděluje na dva shodné úhly, se nazývá osa úhlu.

Dva úhly se nazývají

- **styčné, mají-li společné jedno rameno, které je zároveň jejich průnikem,**
- **vedlejší, mají-li jedno rameno společné a jsou-li zbývající ramena opačné polopřímky.**

- vedlejší úhly jsou styčné.
- každé dva konvexní úhly, nejsou-li oba současně přímé, lze přemístit tak, aby byly styčnými.
- Každé dva vedlejší úhly jsou konvexní.
- Ke každému konvexnímu úhlu existuje jiný konvexní úhel tak, že tyto dva úhly jsou vedlejší.

Dva úhly, pro které platí, že ramena jednoho jsou polopřímkami opačnými k ramenům úhlu druhého, se nazývají vrcholové.

Vrcholové úhly jsou shodné.

Úhel, který je shodný se svým vedlejším úhlem, se nazývá pravý.

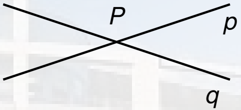
Všechny pravé úhly jsou shodné.

Konvexní úhel se nazývá

- **ostrý, je-li menší než pravý úhel,**
- **tupý, je-li větší než pravý úhel,**
- **kosý, je-li ostrý nebo tupý.**

Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky jsou různoběžné, mají-li jediný společný bod, tzv. průsečík.



Je-li P průsečíkem přímek p, q, píšeme

$\boxed{P \in p \cap q}$ nebo $\boxed{p \cap q = \{P\}}$.

Dvě přímky jsou rovnoběžné, nejsou-li různoběžné.

Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, píšeme $\boxed{p \parallel q}$.

a) Jsou-li dvě přímky rovnoběžné různé, nemají společné body.

b) Jsou-li dvě přímky rovnoběžné totožné, mají všechny své body společné.

- O polopřímkách a úsečkách ležících na rovnoběžných přímkách říkáme, že jsou rovnoběžné.
- Rovnoběžnost je reflexivní, tj.

$$\boxed{p \parallel p}\,.$$

- Rovnoběžnost je symetrická, tj.

$$\boxed{p \parallel q \iff q \parallel p}\,.$$

- Rovnoběžnost je tranzitivní, tj.

$$\boxed{p \parallel q \wedge q \parallel r \implies p \parallel r}\,.$$

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu rovnoběžku.

Odchylka přímek

Odchylka přímek

- **různoběžných je velikost nejmenšího ze čtyř úhlů, na které tyto různoběžky rozdělují rovinu;**
- **rovnoběžných je nula.**

- **Dvě přímky jsou kolmé (též kolmice), je-li jejich odchylka $\frac{\pi}{2}$ (90°).**
- **Průsečík kolmých přímek se nazývá pata kolmice.**
- **Jsou-li přímky p, q kolmé, píšeme $p \perp q$.**
- **Význam pojmu kolmice je stejný, uvažujeme-li místo přímky úsečku nebo polopřímku na ní ležící.**

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu kolmici.

Konec

(1. Základní geometrické útvary)