

Funkce

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

1. Základní pojmy

GOA –
ORLOVA.CZ

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$



$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$
 $[1, \quad], [2, \quad], [3, \quad]$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$
$$[1, 4], [2, 5], [3, 5]$$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

► $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 6]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

► $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 6]\}$ je funkce z A do B

► 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
 $\{1, 2, 3\}$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 6]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
 $\{4, 5\}$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$
- tabulkou:

argument	1	2	3
funkční h.	4	5	5

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- 1, 2, 3 jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- 4, 5 jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$

- tabulkou:

argument	1	2	3
funkční h.	4	5	5

- graficky:



$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$



$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) =$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2}$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4,$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4, \quad f(1.2) =$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4, \quad f(1.2) = \frac{1.2+7}{2}$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

► Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4, \quad f(1.2) = \frac{1.2+7}{2} = 4.1, \quad \dots$

$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

- ▶ Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4, \quad f(1.2) = \frac{1.2+7}{2} = 4.1, \quad \dots$

- ▶ Jak vypadá graf funkce f ?

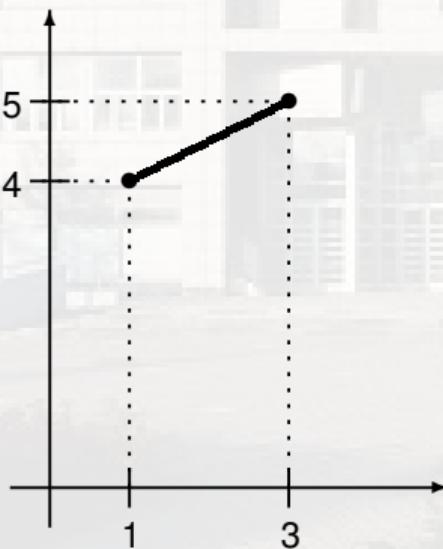
$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

- ▶ Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4$, $f(1.2) = \frac{1.2+7}{2} = 4.1$, ...

- ▶ Jak vypadá graf funkce f ?



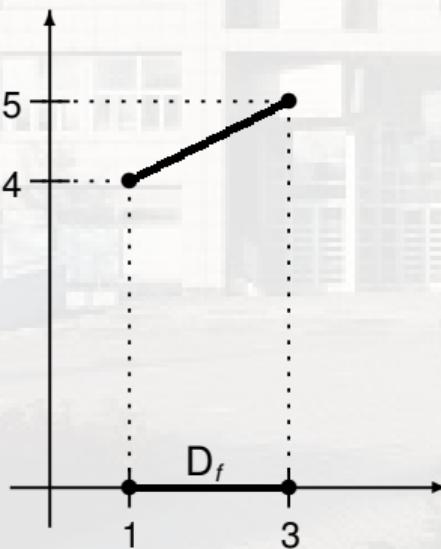
$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

- Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4$, $f(1.2) = \frac{1.2+7}{2} = 4.1$, ...

- Jak vypadá graf funkce f ?



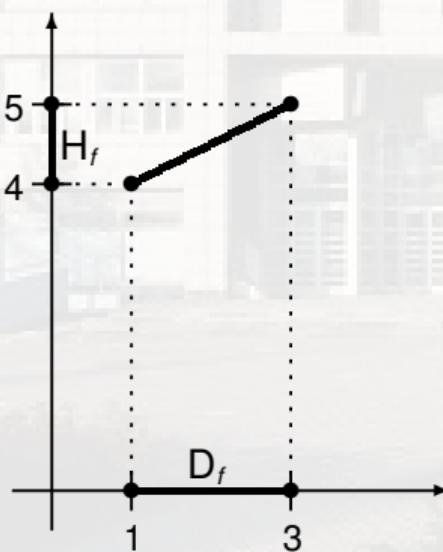
$$A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$$

- Jak zadat funkci f ?

$$f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

potom např. $f(1) = \frac{1+7}{2} = 4$, $f(1.2) = \frac{1.2+7}{2} = 4.1$, ...

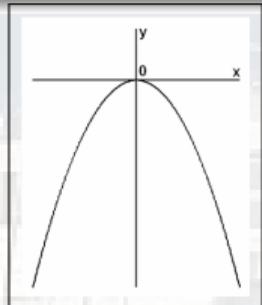
- Jak vypadá graf funkce f ?



Vlastnosti funkcí

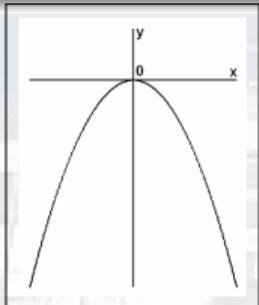


Vlastnosti funkcí

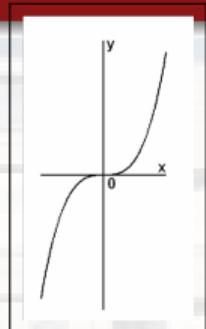


sudá

Vlastnosti funkcí

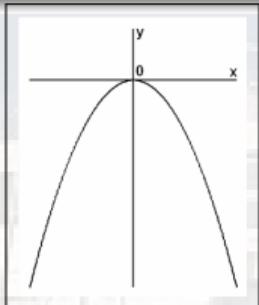


sudá

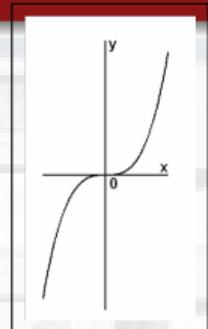


lichá

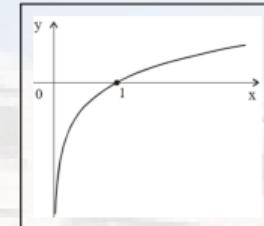
Vlastnosti funkcí



sudá

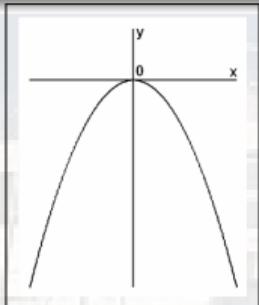


lichá

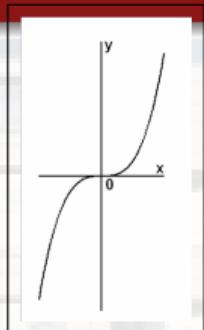


prostá

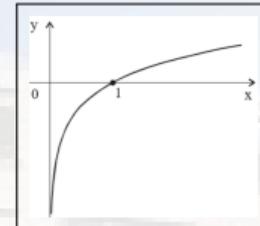
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá

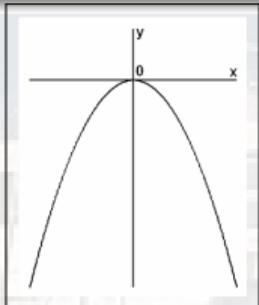


prostá

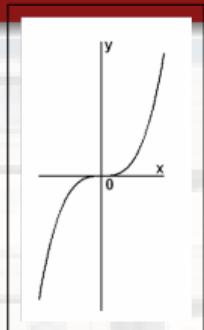
- pro prostou funkci f existuje **inverzní** funkce f^{-1} a platí

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

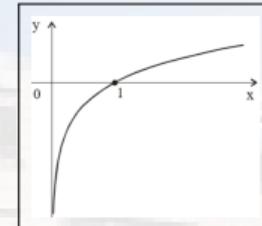
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



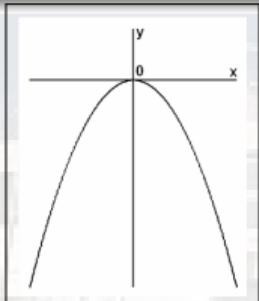
prostá

- pro prostou funkci f existuje **inverzní** funkce f^{-1} a platí

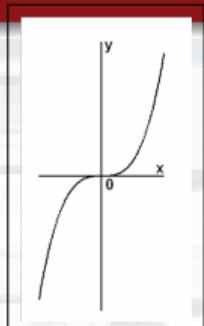
$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

např. $\log_2 x = 3$

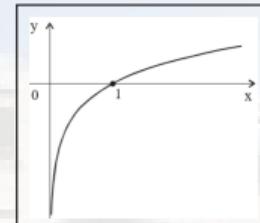
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

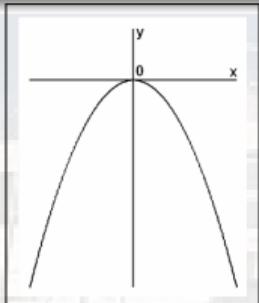
- pro prostou funkci f existuje **inverzní** funkce f^{-1} a platí

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

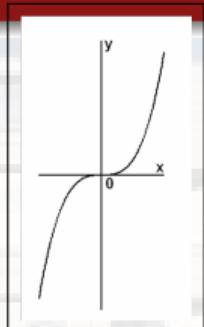
např. $\log_2 x = 3$

$$x = 2^3$$

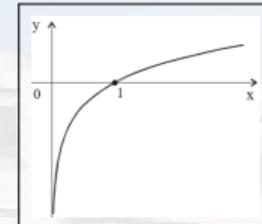
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

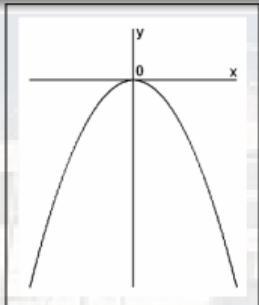
- pro prostou funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} a platí

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

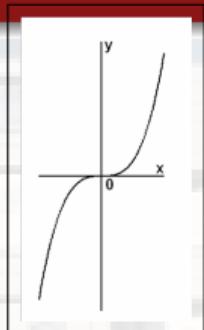
např. $\log_2 x = 3$ nebo $\sin x = 0.3$

$$x = 2^3$$

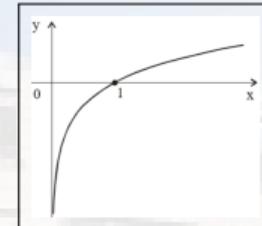
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

- pro prostou funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} a platí

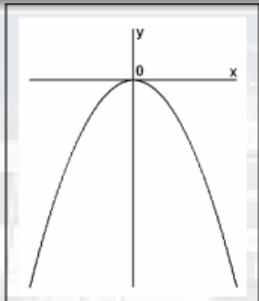
$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

např. $\log_2 x = 3$ nebo $\sin x = 0.3$

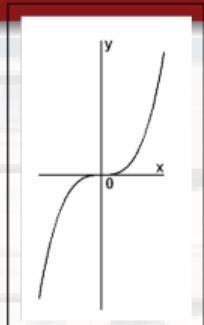
$$x = 2^3$$

$$x = \arcsin 0.3$$

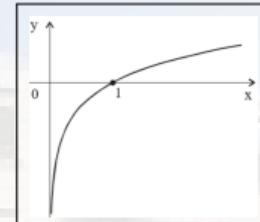
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

- pro prostou funkci f existuje **inverzní** funkce f^{-1} a platí

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

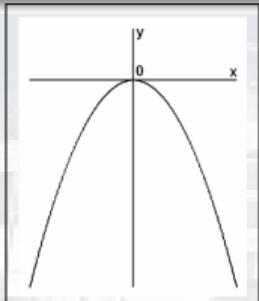
např. $\log_2 x = 3$ nebo $\sin x = 0.3$

$$x = 2^3$$

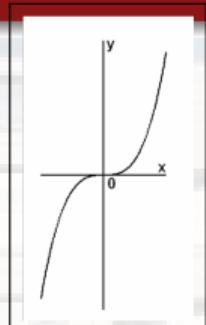
$$x = \arcsin 0.3$$

- grafy vzájemně inverzních funkcí jsou symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu:

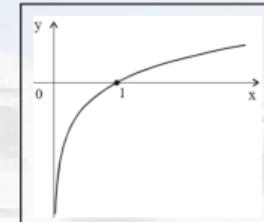
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

- pro prostou funkci f existuje **inverzní** funkce f^{-1} a platí

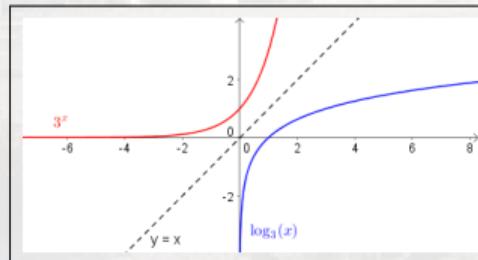
$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

např. $\log_2 x = 3$ nebo $\sin x = 0.3$

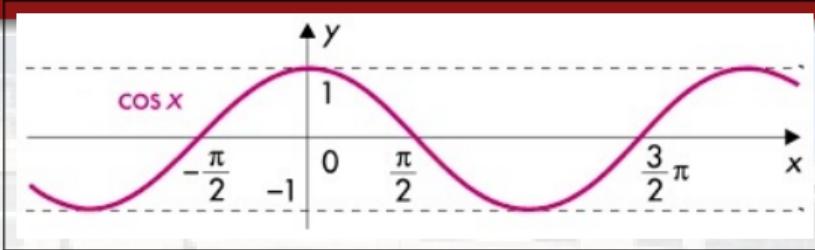
$$x = 2^3$$

$$x = \arcsin 0.3$$

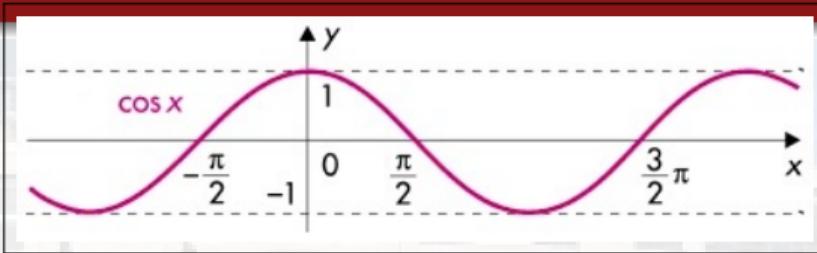
- grafy vzájemně inverzních funkcí jsou symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu:



Vlastnosti funkcí

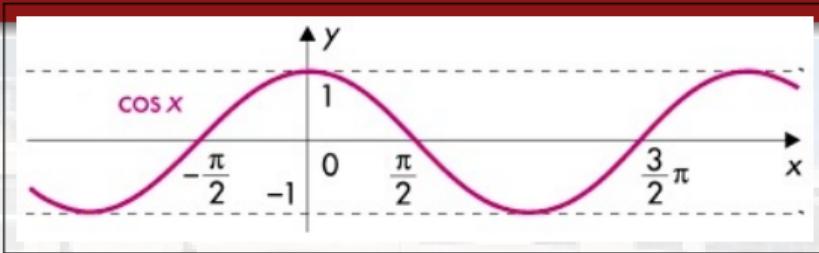


Vlastnosti funkcí



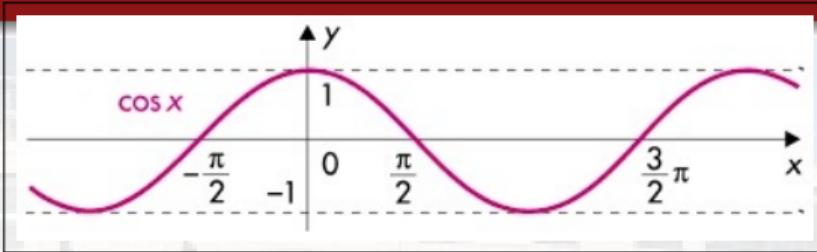
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená

Vlastnosti funkcí



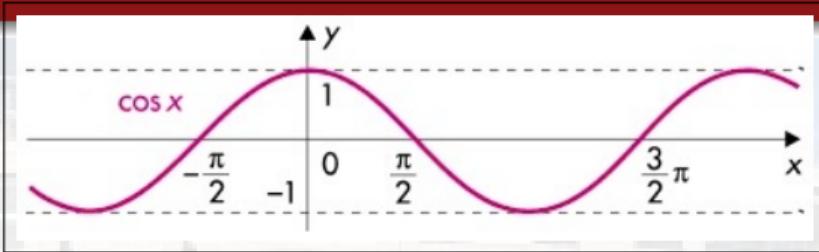
- ▶ ohrazená shora, ohrazená zdola \Rightarrow ohrazená
- ▶ periodická, základní perioda 2π

Vlastnosti funkcí



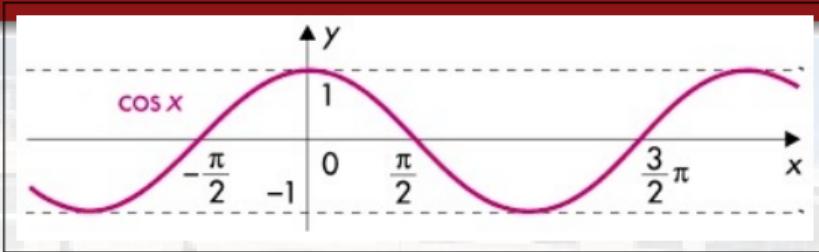
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$

Vlastnosti funkcí



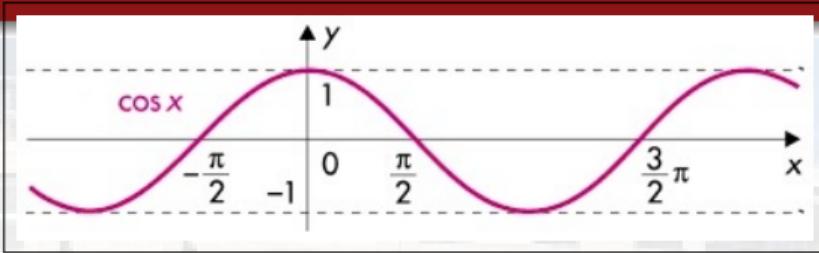
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$

Vlastnosti funkcí



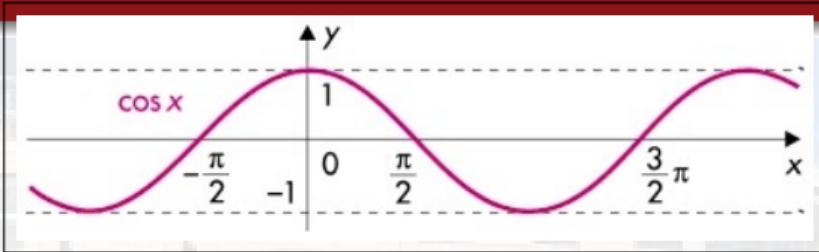
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$

Vlastnosti funkcí



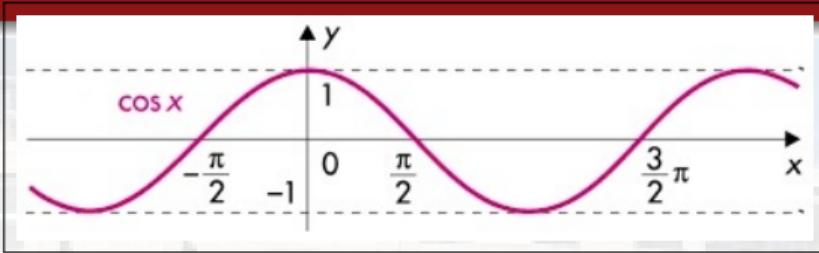
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$

Vlastnosti funkcí



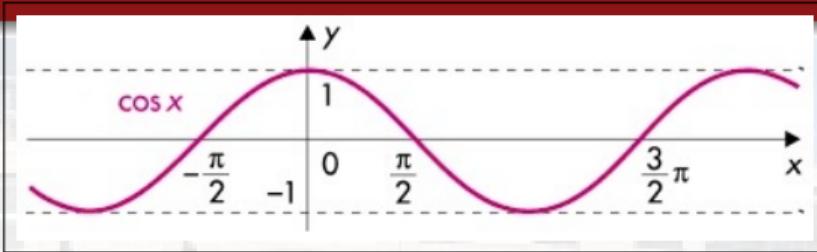
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$

Vlastnosti funkcí



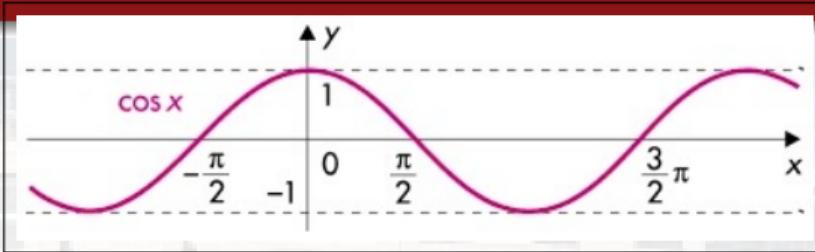
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$

Vlastnosti funkcí



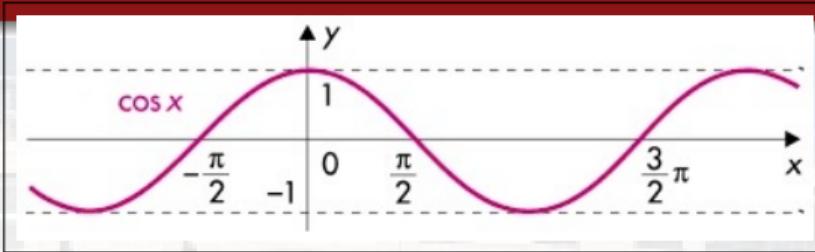
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$
- ▶ lokální maxima : $\dots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \dots$

Vlastnosti funkcí



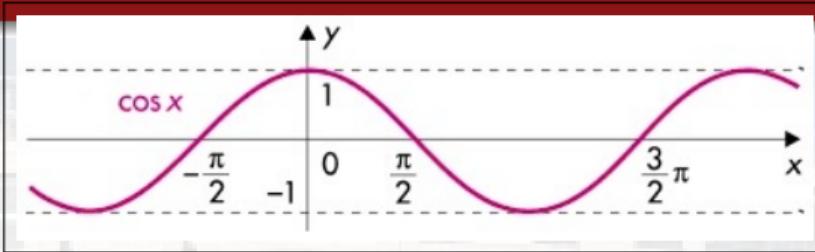
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$
- ▶ lokální maxima : $\dots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \dots$
- ▶ lokální minima : $\dots, [-\pi, \cos(-\pi)] = [-\pi, -1], [\pi, \cos \pi] = [\pi, -1], \dots$

Vlastnosti funkcí



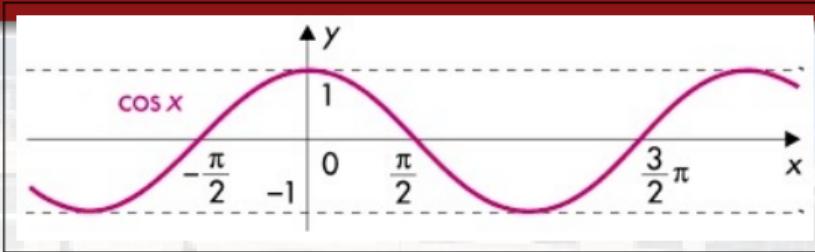
- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$
- ▶ lokální maxima : $\dots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \dots$
- ▶ lokální minima : $\dots, [-\pi, \cos(-\pi)] = [-\pi, -1], [\pi, \cos \pi] = [\pi, -1], \dots$
- ▶ konvexní : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$

Vlastnosti funkcí



- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$
- ▶ lokální maxima : $\dots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \dots$
- ▶ lokální minima : $\dots, [-\pi, \cos(-\pi)] = [-\pi, -1], [\pi, \cos \pi] = [\pi, -1], \dots$
- ▶ konvexní : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ konkávní : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$

Vlastnosti funkcí



- ▶ ohraničená shora, ohraničená zdola \Rightarrow ohraničená
- ▶ periodická, základní perioda 2π
- ▶ průsečíky s osou x : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$
- ▶ průsečík s osou y : $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- ▶ kladná : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ záporná : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ rostoucí : $\dots, \langle -\pi, 0 \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \dots$
- ▶ klesající : $\dots, \langle 0, \pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle, \dots$
- ▶ lokální maxima : $\dots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \dots$
- ▶ lokální minima : $\dots, [-\pi, \cos(-\pi)] = [-\pi, -1], [\pi, \cos \pi] = [\pi, -1], \dots$
- ▶ konvexní : $\dots, (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi), \dots$
- ▶ konkávní : $\dots, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi), \dots$
- ▶ inflexe : $\dots, [-\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{\pi}{2}, 0], [\frac{3}{2}\pi, 0], \dots$