Rovnice a nerovnice

Jaroslav Drobek

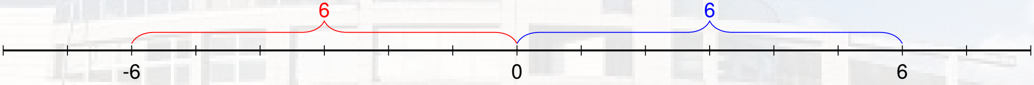
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

4. Rovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota reálného čísla ($x \in \mathbb{R}$)

Absolutní hodnota reálného čísla vyjadřuje na číselné ose vzdálenost tohoto čísla od nuly.



Pozorování:

$|6| = 6 \qquad |12| = 12 \qquad |0| = 0 \quad \ldots \quad \boxed{|x| = x\,, \quad \text{je-li } x \geq 0,}$

$|-6| = 6 \qquad |-12| = 12 \qquad\qquad\quad \ldots \quad \boxed{|x| = -x\,, \quad \text{je-li } x < 0.}$

Vidíme, že absolutní hodnotu lze odstranit

- beze změny znaménka, nabývá-li vyhodnocovaný výraz nezáporné hodnoty,
- se změnou znaménka, nabývá-li vyhodnocovaný výraz záporné hodnoty.

Příklad 4.1

$\left|91^2\right| = 91^2, \quad \text{protože } 91^2 > 0$

$\left|\sqrt{17} - 1\right| = \sqrt{17} - 1, \quad \text{protože } \sqrt{17} - 1 > 0$

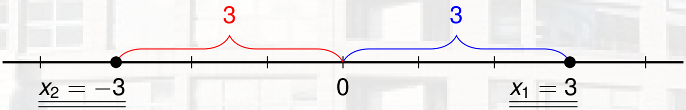
$\left|\frac{3}{-2}\right| = \frac{3}{2}, \quad \text{protože } \frac{3}{-2} < 0$

$\left|3 - \sqrt{2} \cdot 3\right| = -(3 - \sqrt{2} \cdot 3) \quad \text{protože } 3 - \sqrt{2} \cdot 3 < 0.$

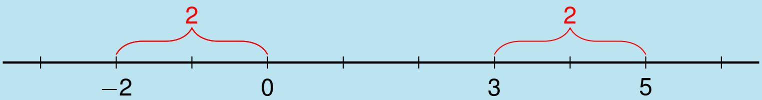
Rovnice s absolutní hodnotou

Příklad 4.2 Vyřešte rovnici $|x| = 3$.

Hledáme takové x, jehož vzdálenost od nuly na číselné ose je 3:



Pozorování:



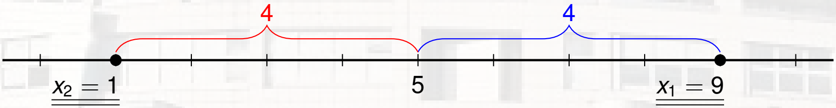
$$|3-5| = |-2| = 2,$$

tj. absolutní hodnota z rozdílu čísel 3 a 5 je rovna 2, což je jejich vzdálenost na číselné ose.

Absolutní hodnota rozdílu dvou reálných čísel vyjadřuje jejich vzdálenost na číselné ose.

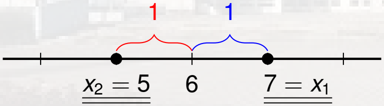
Příklad 4.3 Vyřešte rovnici $|x - 5| = 4$.

Hledáme takové x, jehož vzdálenost od čísla 5 je 4:



Příklad 4.4 Vyřešte rovnici $|6 - x| = 1$.

Hledáme takové x, jehož vzdálenost od čísla 6 je 1:



Pozorování:

$$|6| = 6 = |-6| \ \ldots \ \boxed{|x| = |-x|}$$

Zadání na středu 14.4:

a) $|x| = 5$ b) $|x + 9| = 3$ c) $|x - 7| = 2$ d) $|x - 3| = -5$

e) $|6 + x| = 4$ f) $|12 - x| = 7$ g) $|-x + 9| = 4$ h) $|-17 - x| = 1$

Příklad 4.5 Vyřešte rovnici $|2x+4| = 6.$

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $2x+4=0$

$$x = -2$$

Nulovým bodem rozdělíme obor řešitelnosti:

$x \in (-\infty; -2)$ | -2 | $x \in \langle -2; \infty)$

-3 | 0

$$2x+4 = 2\cdot(-3)+4 = -2 < 0$$

$$\Longrightarrow\ |2x+4| = -(2x+4)$$

Rovnice má tvar:

$$-(2x+4) = 6$$
$$2x+4 = -6$$
$$2x = -10$$
$$\underline{\underline{x = -5}} \quad \in (-\infty; -2)\checkmark$$

$$2x+4 = 2\cdot 0+4 = 4 > 0$$

$$\Longrightarrow\ |2x+4| = 2x+4$$

Rovnice má tvar:

$$2x+4 = 6$$
$$2x = 2$$
$$\underline{\underline{x = 1}} \quad \in \langle -2; \infty)\checkmark$$

Provedeme kontrolu, zda zjištěné výsledky patří do odpovídajících intervalů.

Příklad 4.6 Vyřešte rovnici $x + |2 - x| = 7$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $2 - x = 0$

$$x = 2$$

Nulovým bodem rozdělíme obor řešitelnosti:

$x \in (-\infty; 2)$ | 2 | $x \in \langle 2; \infty)$

0 | 3

$2 - x = 2 - 0 = 2 > 0$

$\Longrightarrow \; |2 - x| = 2 - x$

Rovnice má tvar:

$$x + (2 - x) = 7$$
$$2 = 7$$
$$\emptyset$$

$2 - x = 2 - 3 = -1 < 0$

$\Longrightarrow \; |2 - x| = -(2 - x)$

Rovnice má tvar:

$$x - (2 - x) = 7$$
$$x - 2 + x = 7$$
$$2x = 9$$
$$\underline{\underline{x = \tfrac{9}{2}}} \qquad \in \langle 2; \infty) \; \checkmark$$

Provedeme kontrolu, zda zjištěné výsledky patří do odpovídajících intervalů.

Rovnice s více absolutními hodnotami

Příklad 4.7 Vyřešte rovnici $|x-3|+|x+3|=2x+3.$

Zjistíme nulové body absolutních hodnot: $x-3=0$, $x=3$; $x+3=0$, $x=-3$

Nulovými body rozdělíme obor řešitelnosti:

$x\in(-\infty;-3)$, -3, $x\in\langle -3;3)$, 3, $x\in\langle 3;\infty)$

-5, 0, 5

$x\in(-\infty;-3)$:

$x-3=-5-3=-8<0$

$x+3=-5+3=-2<0$

Rovnice má tvar:

$$-(x-3)-(x+3)=2x+3$$
$$-x+3-x-3=2x+3$$
$$-2x-2x=3$$
$$x=-\frac{3}{4}$$
$$\notin(-\infty;-3)$$

$x\in\langle -3;3)$:

$x-3=0-3=-3<0$

$x+3=0+3=3>0$

Rovnice má tvar:

$$-(x-3)+(x+3)=2x+3$$
$$-x+3+x+3=2x+3$$
$$6=2x+3$$
$$\underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$$
$$\in\langle -3;3)$$

$x\in\langle 3;\infty)$:

$x-3=5-3=2>0$

$x+3=5+3=8>0$

Rovnice má tvar:

$$(x-3)+(x+3)=2x+3$$
$$2x=2x+3$$
$$0=3$$
$$\emptyset$$

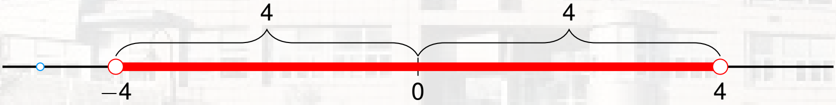
Řešte rovnice:

a) $|1+3x|=7$ b) $x+|2-x|=7$ c) $|x|-|x-1|=2$ d) $2\,|x+19|=|1-x|$

Nerovnice s absolutní hodnotou

Příklad 4.8 Vyřešte nerovnici $|x| < 4$.

- Hledáme taková x, jejichž vzdálenost od nuly na číselné ose je **menší** než 4.
- Víme již, jak najít x se vzdáleností **rovnou** 4: $x_1 = 4,\ x_2 = -4$.
- Např. číslo -5 má vzdálenost větší a např. číslo 3 má vzdálenost menší než 4.
- Všechna hledaná x leží mezi -4 a 4.



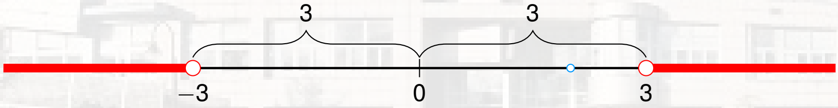
$$\underline{\underline{x \in (-4; 4)}}$$

Příklad 4.9 Vyřešte nerovnici $|x| \leq 4$.

$$\underline{\underline{x \in \langle -4; 4 \rangle}}$$

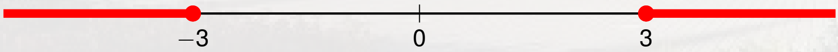
Příklad 4.10 Vyřešte nerovnici $|x| > 3$.

- Hledáme taková x, jejichž vzdálenost od nuly na číselné ose je **větší** než 3.
- Víme již, jak najít x se vzdáleností **rovnou** 3: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$.
- Např. číslo 2 má vzdálenost menší a např. číslo -4 má vzdálenost větší než 3.
- Všechna nehledaná x leží mezi -3 a 3 (včetně) a všechna hledaná x jsou ta zbývající.



$$\underline{\underline{x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)}}$$

Příklad 4.11 Vyřešte nerovnici $|x| \geq 3$.



$$\underline{\underline{x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)}}$$

Řešte rovnice:

a) $|1 + x| < 7$ b) $|2 - x| \leq 1$ c) $|x| > 5$ d) $|x - 19| \geq 2$

Konec

(4. Rovnice s absolutní hodnotou)