

Referát

Diferenciální počet funkce dvou proměnných

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika II



$$A = \{[2, 2], [3, -1], [4, 1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$

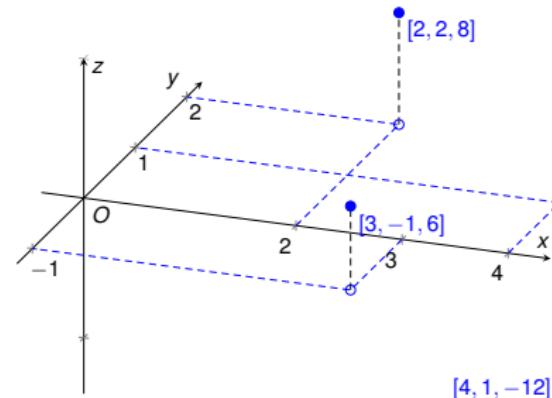
- $f = \{[2, 2, 8], [3, -1, 6], [4, 1, -12]\}$ je **funkce** z A do B
- $[2, 2], [3, -1], [4, 1]$ jsou **argumenty** funkce f
- $D_f = \{[2, 2], [3, -1], [4, 1]\}$ je **definiční obor** funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou **funkční hodnoty** funkce f
- $H_f = \{-12, 6, 8\}$ je **obor hodnot** funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(2, 2) = 8, f(3, -1) = 6, f(4, 1) = -12$
- tabulkou:

argument	$[2, 2]$	$[3, -1]$	$[4, 1]$
funkční h.	8	6	-12

- graficky:



$$A = \langle 0, 4 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle, \quad B = \mathbb{R}$$

- Jak zadat funkci f ?

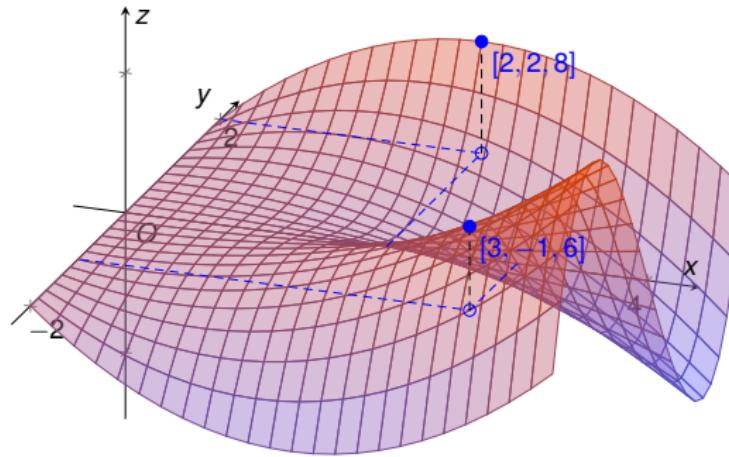
$$f(x, y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0, 4 \rangle, y \in \langle -2, 2 \rangle$$

potom např. $f(2, 2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2 = 8,$

$$f(3, -1) = 3 \cdot (-1)^3 - 3^2 \cdot (-1) = 6$$

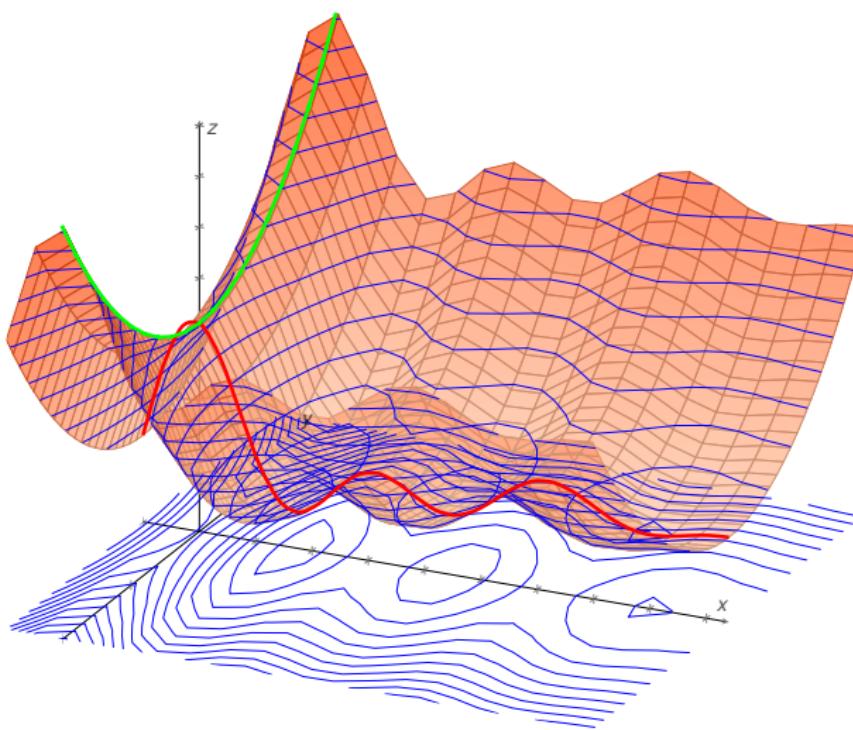
⋮

- Jak vypadá graf funkce f ?



Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou $y = 0, x = 0, z = 0$ (vrstevnice)



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(\dots x^2 + y^2 = 4)$$

II. $x + 1 > 0$

$$x > -1$$

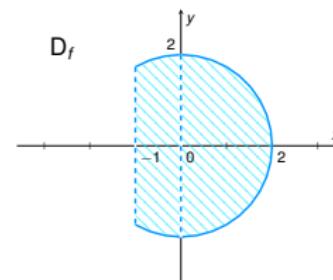
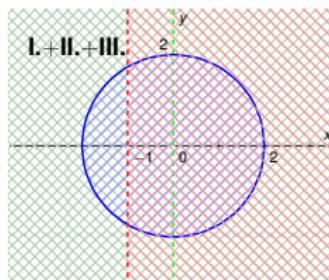
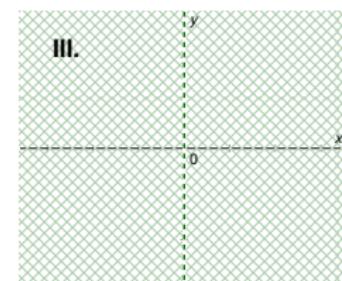
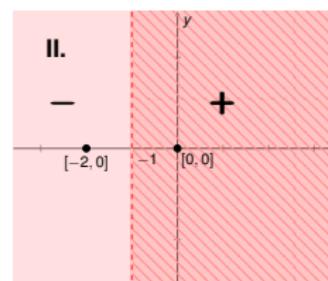
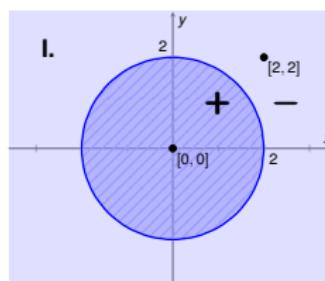
$$(\dots x = -1)$$

III. $\ln(x + 1) \neq 0$

$$x + 1 \neq 1$$

$$x \neq 0$$

$$\underline{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}}$$

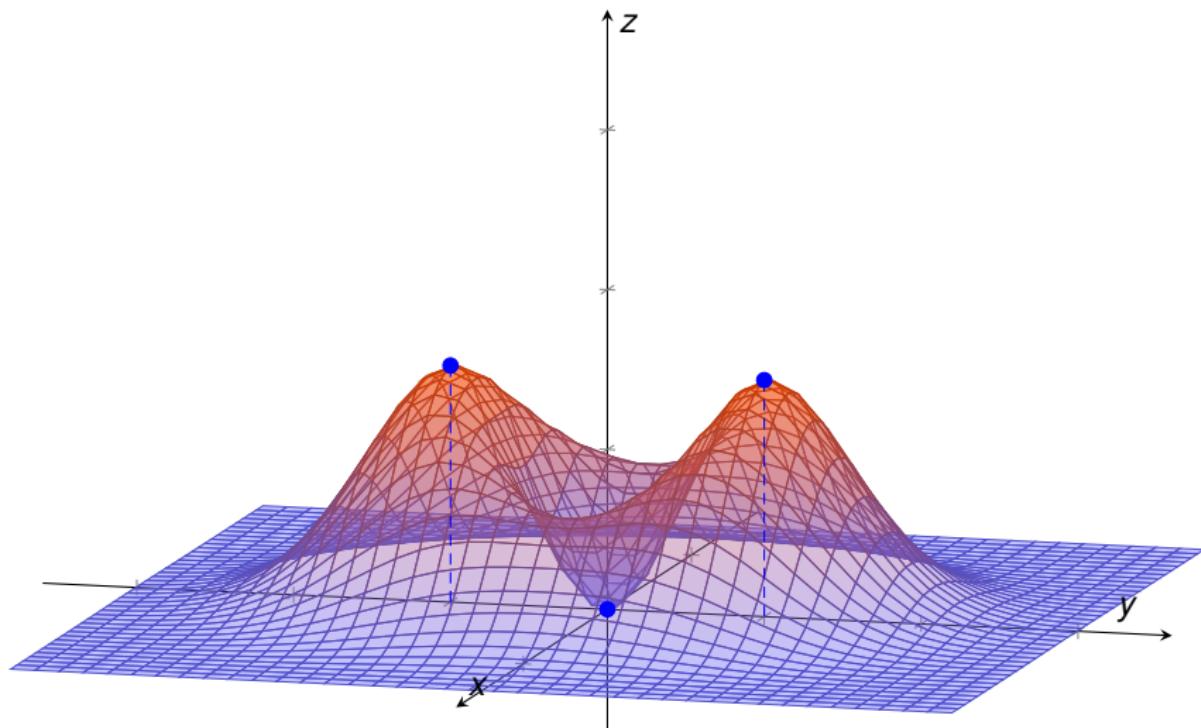


Funkce
○○○○

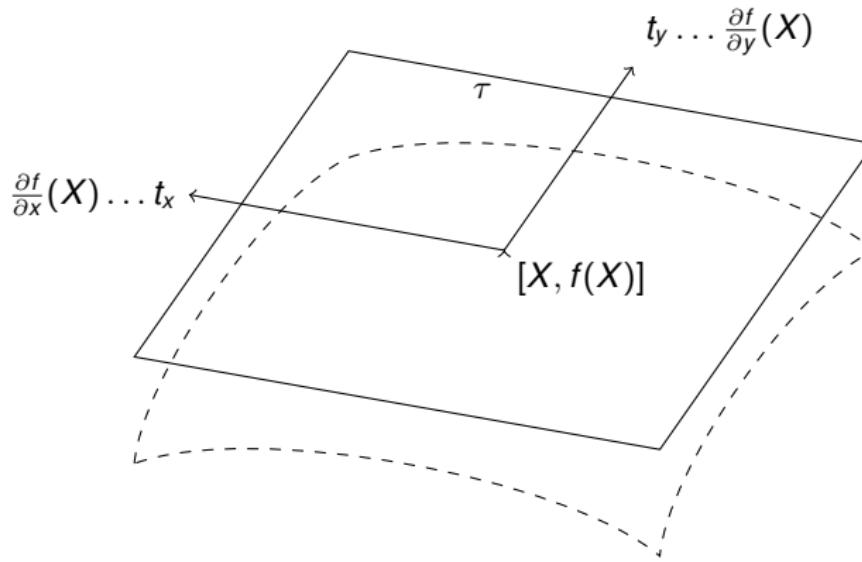
Extrémy funkce
●○○○○

Tečná rovina a normála
○

Lokální extrémy



Parciální derivace



- parciální derivace 1.řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- parciální derivace 2.řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Vyšetřete lokální extrémy funkce f **Příklad 2.1:** $f(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$10x + 20 = 0$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\begin{array}{r} 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \end{array}$$

 $\Rightarrow f$ má lok. extrém v X

$$\begin{array}{r} \\ y = -3 \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 10 > 0 \Rightarrow f \text{ má lok. minimum v } X$$

$$X = [-2, -3];$$

$$f(X) = -38 \Rightarrow \underline{\underline{\text{lok. min. } f \text{ v } X \text{ je } -38}}$$

teorie

f má lok. extrém v $X \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$

$J < 0 \Rightarrow f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \Rightarrow f$ má lok. extrém v X

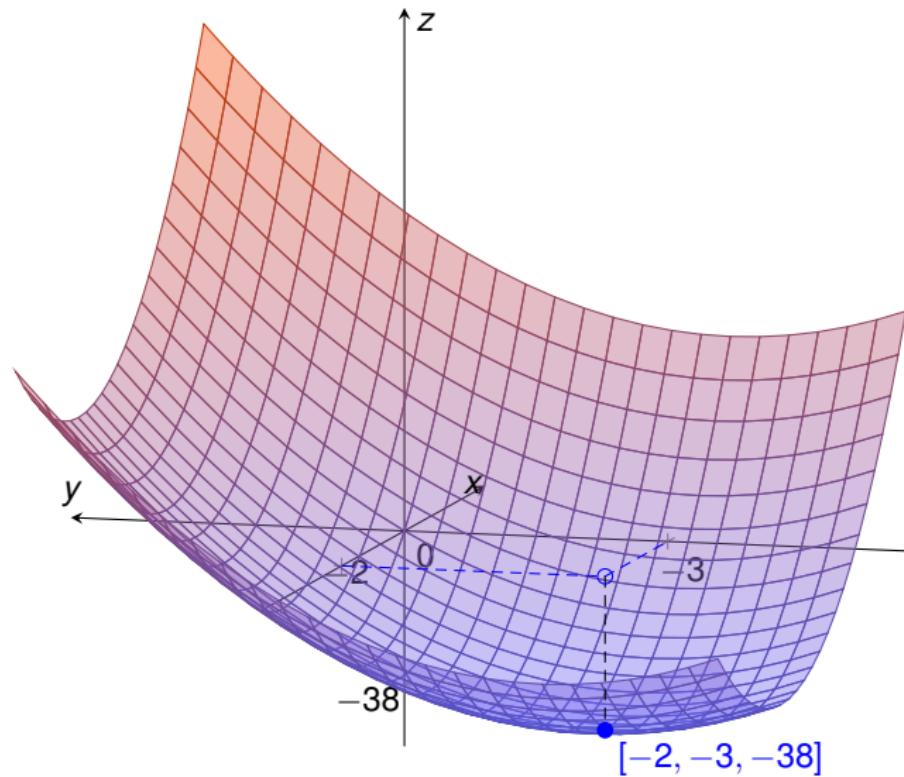
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \Rightarrow f$ má lok. maximum v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \Rightarrow f$ má lok. minimum v X



Vyšetřete lokální extrémy funkce f

obrázek k příkladu 2.1:



Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\dots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$\begin{aligned} h(y) &:= f(40 - 2y, y) = (40 - 2y)^2 + 2y^2 + 40(40 - 2y) + 168y \\ &= 6y^2 - 72y + 3200 \quad \dots D_h = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\dots h$ má v bodě $y = 6$ (glob.) minimum o hodnotě 2984

$\implies f$ má v bodě $[x, y] = [28, 6]$ vázané (glob.) minimum o hodnotě 2984

$[28, 6] \in \Omega \implies [x, y] = [28, 6]$ je řešení úlohy



Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ ($X_0 = [x_0, y_0]$, $f(X_0) = z_0$).

Příklad 3.1: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, $X_0 = [1, 2]$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2 \\ y_0 &= 2 & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6 \\ z_0 &= f(x_0, y_0) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - 5 &= -2(x - 1) + 6(y - 2) \\ \tau : \quad 2x - 6y + z + 5 &= 0 \end{aligned} \qquad n : \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = 2 + 6t \\ z(t) = 5 - t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

vzorce

$$\boxed{\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)}$$

$$\boxed{n : \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = x_0 + t \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) = y_0 + t \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) = z_0 - t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}}$$



Konec
(Referát)