2. Limity

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Okolí vlastního bodu

Definice 2.1

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$. Potom

- $\boxed{U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}}$ je okolí bodu x_0,

  $\boxed{P_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}}$ je redukované okolí bodu x_0;
- $\boxed{U_\delta^-(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x \leq x_0\}}$ je levé okolí bodu x_0,

  $\boxed{P_\delta^-(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0\}}$ je redukované levé okolí bodu x_0;
- $\boxed{U_\delta^+(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x < x_0 + \delta\}}$ je pravé okolí bodu x_0,

  $\boxed{P_\delta^+(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \delta\}}$ je redukované pravé ok. bodu x_0.

Poznámka 2.1

V názvosloví z definice 2.1 se někdy místo slova „okolí“ používá přesnější výraz „δ-okolí“.

Okolí nevlastního bodu

Definice 2.2

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Potom

- $\boxed{U_K(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > K\} \cup \{\infty\}}$ je okolí bodu ∞,
- $\boxed{P_K(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > K\}}$ je redukované okolí bodu ∞,
- $\boxed{U_K(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x < K\} \cup \{-\infty\}}$ je okolí bodu $-\infty$,
- $\boxed{P_K(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x < K\}}$ je redukované okolí bodu $-\infty$.

Úkol:

Promyslete si analogii mezi definicemi 2.1 a 2.2.

Vlastní limita ve vlastním bodě

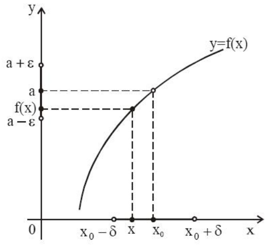
Definice 2.3

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom funkce f má limitu a v bodě x_0, jestliže

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f : \qquad x \in P_\delta(x_0) \implies f(x) \in U_\varepsilon(a),}$$

symbolicky

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a.}$$



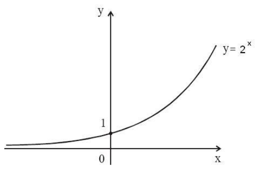
Úkol:

Zformulujte implikaci z definice 2.3 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.1

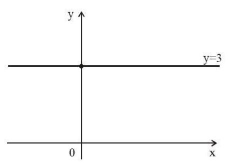
Určete $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, je-li

a) $f(x) = 2^x$



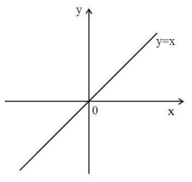
$$\lim_{x\to 4} 2^x = \underline{\underline{16}}$$

b) $f(x) = 3$



$$\lim_{x\to 4} 3 = \underline{\underline{3}}$$

c) $f(x) = x$



$$\lim_{x\to 4} x = \underline{\underline{4}}$$

Vlastní limita v nevlastním bodě

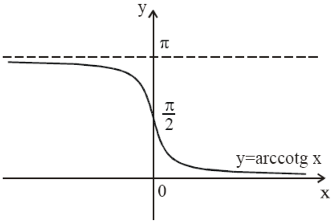
Definice 2.4

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$) a nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom funkce f má limitu a v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f : \qquad x \in P_K(\infty) \implies f(x) \in U_\varepsilon(a)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f : \qquad x \in P_K(-\infty) \implies f(x) \in U_\varepsilon(a)}\right),$$

symbolicky $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a}$ $\left(\text{resp. } \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a}\right)$.



Úkol:

Zformulujte implikace z definice 2.4 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.2

Určete $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x$. $\ldots = \underline{\underline{\pi}}$

Nevlastní limita ve vlastním bodě

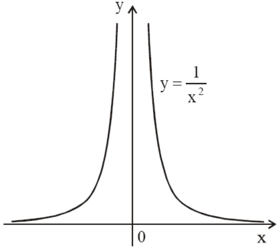
Definice 2.5

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom funkce f má limitu ∞ (resp. $-\infty$) v bodě x_0, jestliže

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad x \in D_f : \qquad x \in P_\delta(x_0) \implies f(x) \in P_k(\infty)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad x \in D_f : \qquad x \in P_\delta(x_0) \implies f(x) \in P_k(-\infty)}\right),$$

symbolicky $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty}$ $\left(\text{resp. } \boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty}\right)$.



Úkol:

Zformulujte implikace z definice 2.5 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.3

Určete $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$. $\quad \ldots = \underline{\underline{\infty}}$

Nevlastní limita v nevlastním bodě ∞

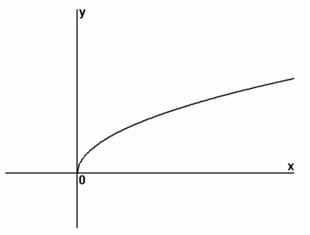
Definice 2.6

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu ∞. Potom **funkce f má limitu ∞ (resp. $-\infty$) v bodě ∞**, jestliže

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad x \in D_f : \qquad x \in P_K(\infty) \implies f(x) \in P_k(\infty)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad x \in D_f : \qquad x \in P_K(\infty) \implies f(x) \in P_k(-\infty)}\right),$$

symbolicky $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty}$ $\left(\text{resp. } \boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty}\right)$.



Úkol:

Zformulujte implikaci z definice 2.6 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.4

Určete $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$. $\ldots = \underline{\underline{\infty}}$

Nevlastní limita v nevlastním bodě $-\infty$

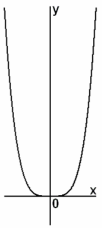
Definice 2.7

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu $-\infty$. Potom **funkce f má limitu ∞ (resp. $-\infty$) v bodě $-\infty$**, jestliže

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad x \in D_f: \quad x \in P_K(-\infty) \implies f(x) \in P_k(\infty)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad x \in D_f: \quad x \in P_K(-\infty) \implies f(x) \in P_k(-\infty)}\right),$$

symbolicky $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty}$ $\left(\text{resp. } \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}\right)$.



Úkol:

Zformulujte implikace z definice 2.7 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.5

Určete $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$. $\ldots = \underline{\underline{\infty}}$

Jednostranné limity

Definice 2.8

Nechť funkce f je definovaná v nějakém redukovaném levém (resp. pravém) okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom funkce f má limitu zleva (resp. zprava) o hodnotě

- $a \in \mathbb{R}$ v bodě x_0, jestliže

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f : \qquad x \in P_\delta^-(x_0) \implies f(x) \in U_\varepsilon(a)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f : \qquad x \in P_\delta^+(x_0) \implies f(x) \in U_\varepsilon(a)}\right).$$

- $a \in \{-\infty, \infty\}$ v bodě x_0, jestliže

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f : \qquad x \in P_\delta^-(x_0) \implies f(x) \in P_k(a)}$$

$$\left(\text{resp. } \boxed{\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f : \qquad x \in P_\delta^+(x_0) \implies f(x) \in P_k(a)}\right).$$

V obou případech používáme symbolický zápis

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a} \qquad \left(\text{resp. } \boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a}\right).$$

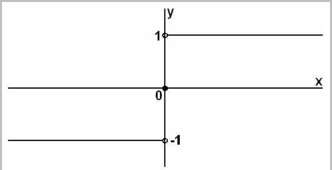
Úkol:

Zformulujte implikace z definice 2.8 bez použití pojmu okolí bodu.

Příklad 2.6

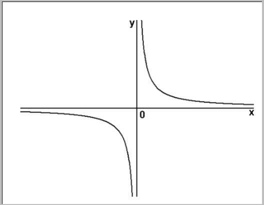
Určete

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x.$



$\dots = \underline{\underline{-1}},\ \underline{\underline{1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$



$\dots = \underline{\underline{-\infty}},\ \underline{\underline{\infty}}$

Poznámky k terminologii

- Nechť $x_0, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Skutečnost, že

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a,}$$

se slovně vyjadřuje také některým z následujících způsobů:

„hodnoty funkce f konvergují k a pro x jdoucí k x_0“,

„a je limita funkce f v bodě x_0“.

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Skutečnost, že

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a} \qquad \left(\text{resp. } \boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a}\right),$$

se slovně vyjadřuje také některým z následujících způsobů:

„hodnoty funkce f konvergují k a pro x jdoucí k x_0 zleva (resp. zprava)“,

„a je levostranná (resp. pravostranná) limita funkce f v bodě x_0“.

Věta 2.1

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nejvýše jednu limitu.

Věta 2.2

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a,}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \implies \nexists \lim_{x \to x_0} f(x).}$$

Příklad 2.7

Rozhodněte, zda existuje $\lim\limits_{x \to -2} \operatorname{sgn} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$.

Věta 2.3

Nechť funkce f, g jsou si rovny na nějakém redukovaném okolí (resp. levém redukovaném okolí, pravém redukovaném okolí) bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Má-li funkce f limitu (resp. levostrannou limitu, pravostrannou limitu) v bodě x_0, potom tutéž limitu má v bodě x_0 funkce g.

Příklad 2.8

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x-12}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{3(x-4)}{x-4} \overset{V\ 2.3}{=} \lim_{x\to 4} 3 = \underline{\underline{3}}$$

Limita součtu, součinu, podílu

podrobnosti

Věta 2.4

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

Potom

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b,} \quad \boxed{\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b.}$$

Je-li navíc $b \neq 0$, potom

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = \frac{a}{b}.}$$

Poznámka 2.2

Věta 2.4 bude platit i v případě, že v její formulaci předpoklad $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ změníme („zesílíme“) na $x_0 \in \mathbb{R}$ a místo limitních přechodů $x \to x_0$ budeme uvažovat limitní přechody $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$); tj. pro levostranné (resp. pravostranné) limity.

Příklad 2.9

a) $\lim\limits_{x\to 4} 3x \overset{V\,2.4}{=} \left(\lim\limits_{x\to 4} 3\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right) = 3\lim\limits_{x\to 4} x = \underline{\underline{12}}$

$\ldots \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} c\,f(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x).}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \log_2^2 x \overset{V\,2.4}{=} \left(\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x\right)$

$= \left(\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}$ $\ldots \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n.}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}(3x - \log_2^2 x) \overset{V\,2.4}{=} \lim\limits_{x\to 4} 3x - \lim\limits_{x\to 4}\log_2^2 x = 12 - 4 = \underline{\underline{8}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x - \log_2^2 x}{2^x} \overset{V\,2.4}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 4}(3x - \log_2^2 x)}{\lim\limits_{x\to 4} 2^x} = \dfrac{8}{16} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

Limita složené funkce

Věta 2.5

Nechť $x_0, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y \to a} g(y) = b$.
a nechť $f(x) \neq a$ na nějakém redukovaném okolí bodu x_0. Potom

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b.}$$

Úkol

řešení

Formulujte tvrzení obdobná jako je Věta 2.5 s různými kombinacemi jednostranných limit.

Příklad 2.10

$$\lim_{x \to 1} 2^{5-x} \overset{V\ 2.5}{=} \lim_{y \to 4} 2^y = \underline{\underline{16}}$$

Věta 2.6

Nechť f je elementární funkce definovaná v nějakém okolí (resp. levém okolí, pravém okolí) bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \qquad \left(\text{resp. } \boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)}\right).$$

Příklad 2.11

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x^2+5x+6} \overset{V\,2.6}{=} \sqrt{(-2)^2+5(-2)+6} = \underline{\underline{0}}$$

$$D_f = (-\infty, -3\rangle \cup \langle -2, \infty)$$

Aritmetika nevlastních bodů

Věta 2.7

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

a nechť g je kladná na nějakém redukovaném okolí bodu x_0.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, symbolicky $\boxed{\frac{a^+}{0^+} = \infty.}$ Dále

$$\frac{a^-}{0^+} = -\infty \qquad \frac{a^+}{0^-} = -\infty \qquad \frac{a^-}{0^-} = \infty \qquad \frac{a}{\infty} = 0 \qquad \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$a^+ \cdot \infty = \infty \qquad a^- \cdot \infty = -\infty \qquad a^+ \cdot (-\infty) = -\infty \qquad a^- \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \qquad -\infty \cdot \infty = -\infty \qquad -\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

$$a + \infty = \infty \qquad a - \infty = -\infty \qquad \infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty^{a^+} = \infty \qquad \infty^{\infty} = \infty$$

Poznámka 2.3

Stále nevíme, jak vyčíslit tzv. neurčité výrazy, např.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^\infty}$$

Poznámky k počítání limit

1. Použití věty 2.6 (dosazení)

Příklady:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-1}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x + 2)$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)$

2. Použití věty 2.7 ; speciálně pro symbolický výraz

$\boxed{\frac{a}{0}}$ je vhodné nejdříve určit jednostranné limity a o limitě oboustranné rozhodnout na základě věty 2.2.

Příklady:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Poznámky k počítání limit

3. Některé neurčité výrazy lze pomocí věty 2.3 a vhodných úprav převést na předchozí dva případy:

$\boxed{\frac{0}{0}}$ Zlomek se snažíme zkrátit výrazem konvergujícím k nule nebo rozšířit jedničkou ve vhodném tvaru.

Příklady:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$

$\boxed{\infty - \infty}$ Snažíme se vytknout vhodný výraz konvergující k nekonečnu.

Příklady:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-2x)$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3+5x^2-2x+3)$

Poznámky k počítání limit

$\boxed{\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}}$

Lze použít l'Hopitalovo pravidlo (viz kapitolu Derivace funkce); speciálně první z uvedených neurčitých výrazů může být reprezentován limitou racionální nebo iracionální lomené funkce v nevlastním bodě – je vhodné vytknout nejvyšší mocniny x v čitateli a ve jmenovateli a pokračovat po zkrácení zlomku.

Příklady:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-x+1}{3x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{1-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$

4. Použití známých limit

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\frac{q}{p}} \frac{\sin(px+q)}{px+q} = \lim_{x\to -\frac{q}{p}} \frac{\mathrm{tg}(px+q)}{px+q} = 1, \qquad (p,q\in\mathbb{R},\ p\neq 0)}$$

Asymptoty bez směrnice

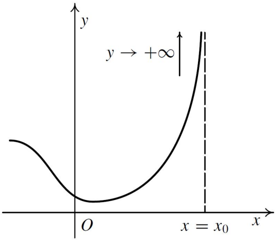
Definice 2.9

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka o rovnici $x = x_0$ je asymptota ke grafu funkce f v bodě x_0, jestliže

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \{-\infty, \infty\}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}.$$

Poznámka 2.4

Asymptota ke grafu funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ se také nazývá asymptota bez směrnice. Může existovat jen za předpokladu, že f je definovaná v nějakém levém nebo pravém redukovaném okolí bodu x_0.



Asymptoty se směrnicí

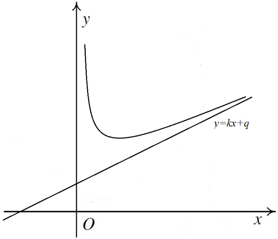
Definice 2.10

Nechť $k, q \in \mathbb{R}$. Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptota ke grafu funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0} \quad \left(\text{resp.} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0}\right).$$

Poznámka 2.5

Asymptota ke grafu funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$) se také nazývá asymptota se směrnicí. Může existovat jen za předpokladu, že funkce f je definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$).



Asymptota se směrnicí

Asymptoty se směrnicí

Věta 2.8 (O asymptotě se směrnicí)

podrobnosti

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptota ke grafu funkce f v bodě ∞.

(ii) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}} \quad \wedge \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}}$.

Poznámka 2.6

- Zaměníme-li ve formulaci věty 2.8 symbol ∞ za symbol $-\infty$, obdržíme analogické tvrzení pro asymptotu v bodě $-\infty$.
- Věta 2.8 má praktický význam; vyšetřují se podle ní asymptoty se směrnicí.

Vyšetřování asymptot explicitně zadané funkce f

- Vyjádříme $\boxed{D_f}$ ve tvaru sjednocení komponent.
- Asymptotu bez směrnice vyšetřujeme v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, je-li tento krajním bodem některé komponenty množiny D_f:
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$ nebo $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$,

    potom přímka $\boxed{a:\ x = x_0}$ je asymptota. V opačném případě asymptota v bodě x_0 neexistuje.
- Asymptotu se směrnicí vyšetřujeme v bodě ∞, je-li tento krajním bodem některé komponenty množiny D_f:
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}$ existuje a je vlastní, označíme ji $\boxed{k}$. V opačném případě asymptota v bodě ∞ neexistuje.
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)}$ existuje a je vlastní, označíme ji $\boxed{q}$,

    načež přímka $\boxed{a:\ y = kx + q}$ je asymptota. V opačném případě asymptota v bodě ∞ neexistuje.

  Analogicky postupujeme pro bod $-\infty$.

Vyšetřování asymptot explicitně zadané funkce f

Příklad 2.12

Určete asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Limita součtu a součinu – zobecnění

zpět

Úmluva

Dodefinujeme $\boxed{\operatorname{sgn}(-\infty) = -1,\ \operatorname{sgn}(\infty) = 1.}$

Věta 2.4 (součet a součin)

Nechť $x_0, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Potom

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \begin{cases} a+b, & \text{je-li} \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{je-li} \quad (a = \infty \wedge b \neq -\infty) \vee (a \neq -\infty \wedge b = \infty), \\ -\infty, & \text{je-li} \quad (a = -\infty \wedge b \neq \infty) \vee (a \neq \infty \wedge b = -\infty), \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} a \cdot b, & \text{je-li} \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{je-li} \quad (a = \pm\infty \vee b = \pm\infty) \wedge \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b), \\ -\infty, & \text{je-li} \quad (a = \pm\infty \vee b = \pm\infty) \wedge \operatorname{sgn}(a) = -\operatorname{sgn}(b). \end{cases}$$

Limita podílu – příprava na zobecnění

zpět

Úmluva

- Budeme předpokládat, že

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \implies x < \infty,} \qquad \boxed{x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \implies x > -\infty.}$$

- Zápis

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a^-} \qquad \left(\text{resp. } \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a^+}\right),$$

bude znamenat, že platí

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,

(ii) $\exists \delta > 0 : \; x \in P_\delta(x_0) \implies f(x) < a \quad (\text{resp. } f(x) > a).$

- Další úmluvu vyjádřeme formulací předchozí úmluvy se změnou
  - limitních přechodů $x \to x_0$ na $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$),
  - okolí $P_\delta(x_0)$ na $P_\delta^-(x_0)$ (resp. $P_\delta^+(x_0)$).

Limita podílu – zobecnění

zpět

Věta 2.4 (podíl, mocnina)

Nechť $x_0, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Potom

$$\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{je-li} \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{je-li} \quad (a > 0 \wedge b = 0^+) \vee (a < 0 \wedge b = 0^-), \\ -\infty, & \text{je-li} \quad (a > 0 \wedge b = 0^-) \vee (a < 0 \wedge b = 0^+), \\ 0, & \text{je-li} \quad a \in \mathbb{R} \wedge b = \pm\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty, \quad \text{je-li} \quad a = \infty \wedge b > 0.$$

Poznámka 2.2

Obě varianty věty 2.4 budou platit i v případě, že v jejich formulacích předpoklad $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ změníme („zeslabíme“) na $x_0 \in \mathbb{R}$ a místo limitních přechodů $x \to x_0$ budeme uvažovat limitní přechody $x \to x_0^-$ (resp. $x \to x_0^+$); tj. pro levostranné (resp. pravostranné) limity.

Limita složené funkce – jednostranné varianty

zpět

Věta 2.5′

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{y \to a} g(y) = b$.

  a nechť $f(x) \neq a$ na nějakém redukovaném levém okolí bodu x_0. Potom

  $$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} (g \circ f)(x) = b.}$$

- Nechť $a \in \mathbb{R}$, $x_0, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a^-$, $\lim_{y \to a^-} g(y) = b$.

  a nechť $f(x) \neq a$ na nějakém redukovaném okolí bodu x_0. Potom

  $$\boxed{\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b.}$$

- Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a^-$, $\lim_{y \to a^-} g(y) = b$.

  a nechť $f(x) \neq a$ na nějakém redukovaném levém okolí bodu x_0. Potom

  $$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} (g \circ f)(x) = b.}$$

Asymptoty se směrnicí

zpět

Je zajímavé, že platí

Věta 2.8′ (O asymptotě se směrnicí)

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptota ke grafu funkce f v bodě ∞.

(ii) $\boxed{k \in \mathbb{R}} \quad \wedge \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}}$.

Je-li některá z těchto podmínek splněna, potom

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k}.$$

Poznámka 2.7

Zaměníme-li ve formulaci věty 2.8′ symbol ∞ za symbol $-\infty$, obdržíme analogické tvrzení pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Konec

(2. Limity)