

Analytická geometrie

Jaroslav Drobek

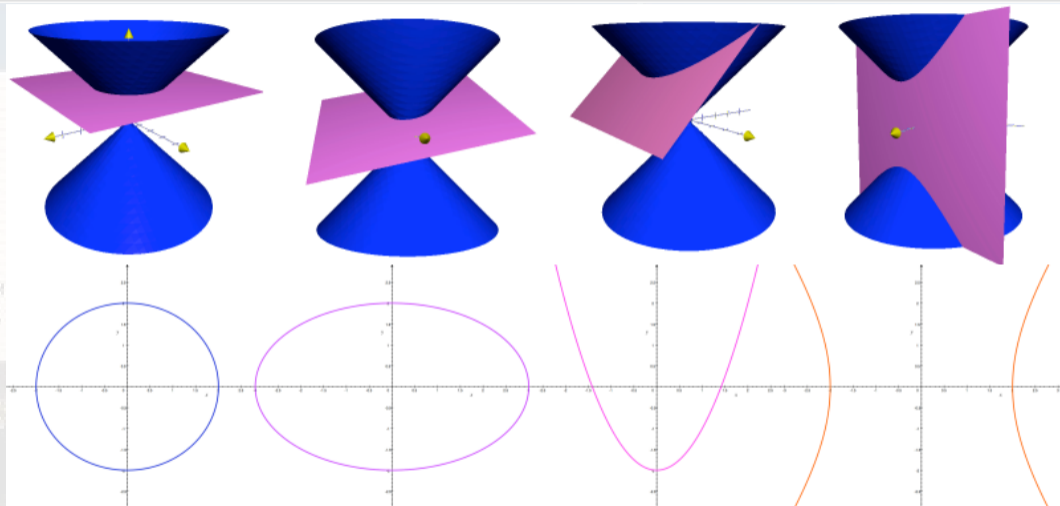
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

6. Kuželosečky

GOA –
ORLOVA.CZ

Kuželosečky



Kružnice

Elipsa

Parabola

Hyperbola

Definice a rovnice kružnice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu, tzv. **středu** kružnice, danou vzdálenost, tzv. **poloměr** kružnice.

Kružnice o středu $S = [m; n]$ a poloměru r

► **středová** rovnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = q$, kde $q = r^2$

► **obecná** rovnice: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$, kde $p = m^2 + n^2 - r^2$

Příklad 6.1 Najděte středovou a obecnou rovnici kružnice se středem $S = [2; 3]$ a polom. $r = 4$.

► středová:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$\underline{\underline{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16}}$$

► obecná:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot x - 2 \cdot 3 \cdot y + (2^2 + 3^2 - 4^2) = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0}}$$

Stejného tvaru lze dosáhnout roznásobením a přeuspořádáním rovnice středové – ověřte!

Rovnice kružnice

Příklad 6.2 Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$.

Zjistíme středovou rovnici – výraz na levé straně upravíme (dvojitým) **doplněním na čtverec**:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) + 12 = 0$$

$$(x^2 - 4x + (-2)^2) - (-2)^2 + (y^2 - 6y + (-3)^2) - (-3)^2 + 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 - 9 + 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$\text{Odtud } m = 2, n = 3 \implies \underline{\underline{S = [2; 3]}} \quad \text{a} \quad \underline{\underline{r = 1}}.$$

$$\dots \quad (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

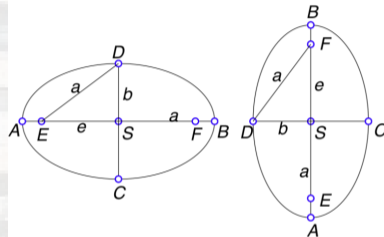
Domácí úkol (zdroj: [Středová a obecná rovnice kružnice na realisticky.cz](http://Stredova-a-obecná-rovnice-kružnice-na-realistically.cz))

Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$.

Definice elipsy

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají stejný součet vzdáleností od dvou daných bodů, tzv. **ohnisek** elipsy.

- ▶ Bod S je **střed** elipsy.
- ▶ Body E, F jsou **ohniska** elipsy.
- ▶ Body A, B jsou **hlavní vrcholy** elipsy.
- ▶ Přímka AB je **hlavní osa** elipsy.
- ▶ Vzdálenost $|AS|$ ($= |BS|$) je **hlavní poloosa** elipsy; označuje se **a** .
- ▶ Body C, D jsou **vedlejší vrcholy** elipsy.
- ▶ Přímka CD je **vedlejší osa** elipsy.
- ▶ Vzdálenost $|CS|$ ($= |DS|$) je **vedlejší poloosa** elipsy; označuje se **b** .
- ▶ Vzdálenost $|ES|$ ($= |FS|$) je **výstřednost (excentricita)** elipsy; označuje se **e** .



Platí

- ▶ $|DE| = |DF| = a$
- ▶ $a^2 = b^2 + e^2$

Rovnice elipsy

Elipsa o středu $S = [m; n]$ a poloosách a, b

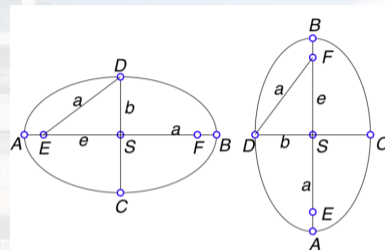
► Středová rovnice:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad \text{je-li } AB \parallel o_x,$$

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1, \quad \text{je-li } AB \parallel o_y.$$

► Obecná rovnice:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0, \quad \text{kde } p, q, r, s, t \in \mathbb{R}.$$



Příklad 6.3 Určete střed, ohniska a poloosy elipsy dané rovnicí $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Střed: $m = -2, n = 1, \underline{S = [-2; 1]},$ **Poloosy:** $\underline{a = 3, b = 2},$

Ohniska: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

Protože $AB \parallel o_x,$ platí $\underline{E = [-2 - e; 1] = [-2 - \sqrt{5}; 1]},$ $\underline{F = [-2 + e; 1] = [-2 + \sqrt{5}; 1]}.$

Rovnice elipsy

Příklad 6.4 Najděte středovou a obecnou rovnici elipsy se středem $S = [2; 1]$, hlavním vrcholem $A = [2; 6]$ a ohniskem $E = [2; -3]$.

Jak je elipsa orientovaná? $\dots x_A = 2 = x_S \implies AS \parallel o_y \implies \underline{AB \parallel o_y}$

$$S = [2; 1] \implies m = 2, n = 1,$$

$$a = |AS| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{5^2} = 5,$$

$$e = |ES| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{4^2} = 4,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3,$$

► středová:
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

► obecná – upravíme středovou:

$$25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \cdot 9$$

$$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 225$$

$$25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y + 100 + 9 - 225 = 0$$

$$\underline{\underline{25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0}}$$

► **Středová** rovnice elipsy pro $AB \parallel o_y$:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,$$

► Výstřednost a poloosy:

$$a^2 = b^2 + e^2$$

► **Obecná** rovnice elipsy:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0.$$

Rovnice elipsy

Domácí úkol (zdroj: Obecná rovnice elipsy na realisticky.cz,)

Najděte střed, poloosy, výstřednost, ohniska, a vrcholy elipsy,

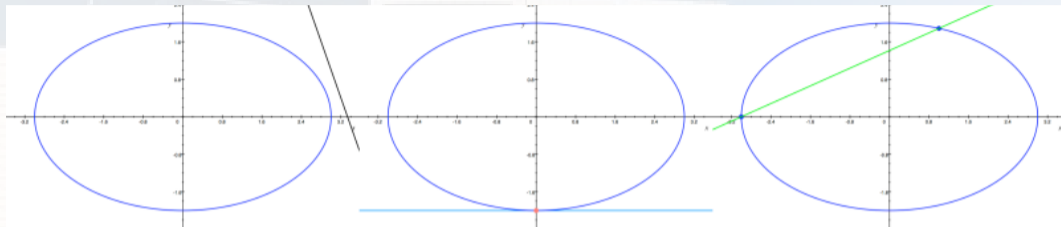
- a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0.$
- b) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0.$
- c) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0.$

Domácí úkol (zdroj: Středová rovnice elipsy na realisticky.cz,)

Napiš středovou rovnici elipsy,

- a) jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami a $C = [2; -1]$, $E = [1; 1]$.
- b) která je shodná s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a má $S = [2; -1]$.

Přímka a elipsa



Jestliže pro přímku p a elipsu k platí

- ▶ $p \cap k = \emptyset$, přímka p leží vně elipsy k a nazývá se **vnější přímka** elipsy.
- ▶ $p \cap k = \{P\}$, přímka p se **dotýká** elipsy k v bodě P a nazývá se **tečna** elipsy k .
- ▶ $p \cap k = \{P, Q\}$, přímka p **protíná** elipsu k v bodech P a Q a nazývá se **sečna** elipsy k .

Stejně se klasifikují vzájemné polohy přímky a kružnice.

Přímka a kuželosečka

Příklad 6.5 Určete vzáj. polohu přímky $p : x - 2y - 3 = 0$ a kružnice $k : x^2 + 4x + y^2 - 1 = 0$.

► Vyšetřujeme množinu $p \cap k$, tj. hledáme body $[x; y]$ takové, že $[x; y] \in p \wedge [x; y] \in k$.

► Bod patří do nějakého útvaru, splňují-li jeho souřadnice rovnici tohoto útvaru:

$$[x; y] \in p \iff x - 2y - 3 = 0$$

$$[x; y] \in k \iff x^2 + 4x + y^2 - 1 = 0$$

► Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ... má jediné řešení $[x; y] = [-1; -2]$.

\implies p je tečna k (v bodě $[-1; -2]$).

Příklad 6.6 Určete vzájemnou polohu přímky $p : x + y = 0$ a elipsy $\ell : \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

Řešíme soustavu $x + y = 0$ Ověřte, že má 2 řešení. \implies 2 společné body

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

\implies p je sečna ℓ

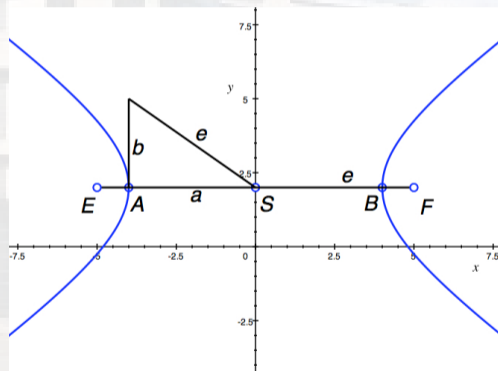
Domácí úkol (zdroj: [Elipsa a přímka na realisticky.cz](http://Elipsa.a.přímka.na.realisticky.cz))

Určete vzájemnou polohu přímky $p : x + y - 1 = 0$ a elipsy $\ell : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Definice hyperboly

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou velikost rozdílu vzdáleností od dvou daných bodů, tzv. **ohnisek** hyperboly.

- Bod S je **střed** hyperboly.
- Body E, F jsou **ohniska** hyperboly.
- Body A, B jsou **hlavní vrcholy** hyperboly.
- Přímka AB je **hlavní osa** hyperboly.
- Vzdálenost $|AS|$ ($= |BS|$) je **hlavní poloosa** hyperboly; označuje se **a** .
- Vzdálenost $|ES|$ ($= |FS|$) je **výstřednost** (**excentricita**) hyperboly; označuje se **e** .
- Vzdálenost **b** $= \sqrt{e^2 - a^2}$ je **vedlejší poloosa** hyperboly.



Rovnice hyperboly

Hyperbola o středu $S = [m; n]$ a poloosách a, b

► Středová rovnice:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

je-li $AB \parallel o_x$,

$$-\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1,$$

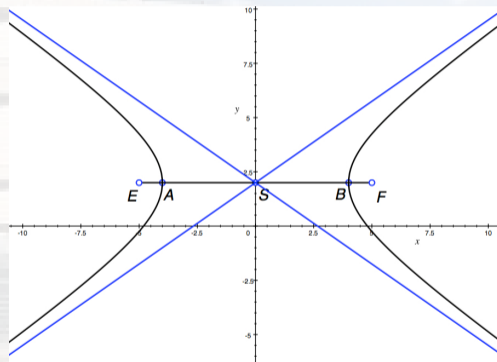
je-li $AB \parallel o_y$.

► Obecná rovnice:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0, \quad p, \dots, t \in \mathbb{R}.$$

► Asymptoty:

$$\frac{x - m}{a} = \pm \frac{y - n}{b}$$



Rovnice hyperboly

Příklad 6.7 Najděte rovnice hyperboly, je-li $F = [7; -1]$, $A = [0; -1]$, $B = [4; -1]$.

$$y_A = -1 = y_B \implies AB \parallel o_x$$

$$\implies \frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

$$S = \frac{1}{2}(A + B) = [2; -1] \implies m = 2, n = -1$$

$$a = |AS| = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-1 - (-1))^2} = 2$$

$$e = |FS| = \sqrt{(7 - 2)^2 + (-1 - (-1))^2} = 5$$

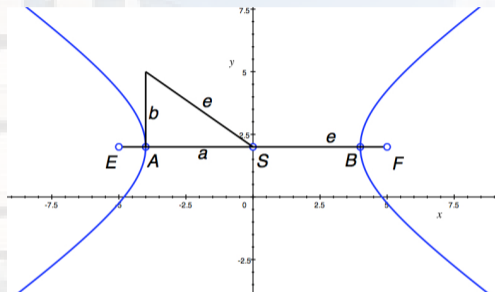
$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$h: \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{21} = 1 \quad | \cdot 4 \cdot 21$$

$$21(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) = 4 \cdot 21$$

$$h: 21x^2 - 4y^2 - 84x - 8y - 4 = 0$$

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$$



Domácí úkol (zdroj: [hledání hyperbol na realisticky.cz](https://hledani-hyperbol-na-realisticky.cz))

Najděte rovnici hyperboly a jejích asymptot, má-li ohniska $E = [-5; 3]$, $F = [7; 3]$ a hlavní poloosou $a = 5$.

Rovnice hyperboly

Příklad 6.8 Najděte střed, ohniska, vrcholy a asymptoty hyperboly $4x^2 - 25y^2 + 32x + 150y = 261$.

Z obecné rovnice najdeme středovou:

$$4x^2 + 32x - 25y^2 + 150y - 261 = 0$$

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$$

$$4(x^2 + 8x) - 25(y^2 - 6y) - 261 = 0$$

$$4(x^2 + 8x + 4^2) - 4 \cdot 4^2 - 25(y^2 - 6y + 3^2) + 25 \cdot 3^2 - 261 = 0$$

$$4(x + 4)^2 - 25(y - 3)^2 - 64 + 225 - 261 = 0$$

$$4(x + 4)^2 - 25(y - 3)^2 = 100 \quad | : 100$$

středová rovnice: $\frac{(x + 4)^2}{25} - \frac{(y - 3)^2}{4} = 1 \quad (AB \parallel o_x)$

$$\frac{(x + 4)^2}{5^2} - \frac{(y - 3)^2}{2^2} = 1 \quad \dots \quad \frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

$$m = -4, \quad n = 3, \quad a = 5, \quad b = 2$$

$$\underline{S = [-4; 3]}, \quad A = [-4 - a; 3] = \underline{[-9; 3]}, \quad B = [-4 + a; 3] = \underline{[1; 3]}$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29}, \quad E = [-4 - e; 3] = \underline{[-4 - \sqrt{29}; 3]}, \quad F = [-4 + e; 3] = \underline{[-4 + \sqrt{29}; 3]}$$

Rovnice hyperboly

$$\frac{(x+4)^2}{5^2} - \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

...

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Asymptoty:

$$\frac{x-m}{a} = \pm \frac{y-n}{b},$$

$$a_1: \frac{x+4}{5} = \frac{y-3}{2}$$

$$a_2: \frac{x+4}{5} = -\frac{y-3}{2}$$

$$2(x+4) = 5(y-3)$$

$$2(x+4) = -5(y-3)$$

$$\underline{\underline{2x - 5y + 23 = 0}}$$

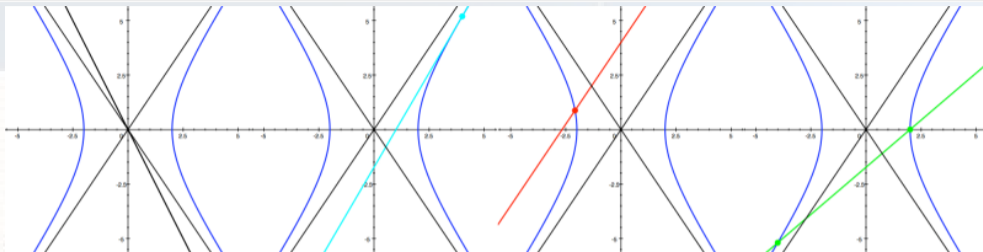
$$\underline{\underline{2x + 5y - 7 = 0}}$$

Domácí úkol (zdroj: Obecná rovnice hyperboly na realisticky.cz)

Najděte střed, ohniska, vrcholy a asymptoty hyperboly

$$a) \quad 4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0, \quad b) \quad 2x^2 - 4y^2 + 4x + 8y + 2 = 0.$$

Přímka a hyperbola



Jestliže pro přímku p a hyperbolu h platí

- ▶ $p \cap h = \emptyset$, přímka p **leží vně** hyperboly h a nazývá se **vnější přímka** hyperboly.
- ▶ $p \cap h = \{P\}$,
 - ▶ přímka p **se dotýká** hyperboly h v bodě P a nazývá se **tečna** hyperboly h .
 - ▶ přímka p je rovnoběžná s některou asymptotou, **protíná** hyperbolu h v jednom bodě P a nazývá se **sečna** hyperboly h .
- ▶ $p \cap h = \{P, Q\}$, přímka p **protíná** hyperbolu h v bodech P a Q a nazývá se **sečna** hyperboly h .

Přímka a hyperbola

Příklad 6.9 Určete vzájemnou polohu přímky $x - 3y - 1 = 0$ a hyperboly $\frac{(x-1)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$.

$$x - 3y - 1 = 0 \implies x = 3y + 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(3y+1-1)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(3y)^2 - 9y^2 = 81$$

$$0 = 81 \implies \nexists \text{ řešení} \implies \nexists \text{ společné body} \implies \underline{\underline{\text{vnější přímka hyperboly}}}$$

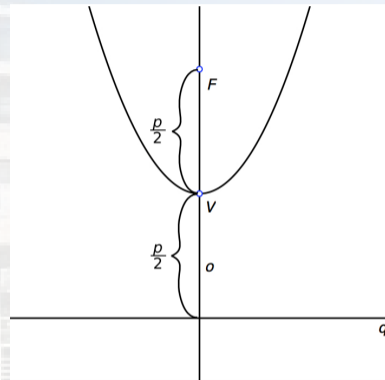
Domácí úkol (zdroj: [Hyperbola a přímka na realisticky.cz](http://Hyperbola.a.přímka.na.realisticky.cz))

Určete vzájemnou polohu přímky $5x - 4y + 9 = 0$ a hyperboly $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Definice paraboly

Parabola je množina všech bodů v rovině se stejnou vzdáleností od daného bodu a od dané přímky, které nejsou incidentní. Jde o tzv. **ohnisko** a **řídící přímku** paraboly.

- ▶ Bod V je **vrchol** paraboly.
- ▶ Bod F je **ohnisko** paraboly.
- ▶ Přímka q je **řídící přímka** paraboly.
- ▶ Přímka FV je **osa** paraboly; označuje se o .
- ▶ Vzdálenost $|Fq|$ je **parametr** paraboly; označuje se p .



Platí

- ▶ $|FV| = |Vq| = \frac{p}{2}$
- ▶ $o \perp q$

Rovnice paraboly

Parabola s vrcholem $V = [m; n]$ a s parametrem $p \dots o \parallel o_y$

► **Vrcholová rovnice:** $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ (\cup) $(x - m)^2 = -2p(y - n)$ (\cap)

► **Obecná rovnice:** $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$

Parabola s vrcholem $V = [m; n]$ a s parametrem $p \dots o \parallel o_x$

► **Vrcholová rovnice:** $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ (\subset) $(y - n)^2 = -2p(x - m)$ (\supset)

► **Obecná rovnice:** $y^2 + 2sx + 2ry + t = 0$

Rovnice paraboly

Příklad 6.10 Určete vrcholovou rovnici paraboly s ohniskem $F = [2; 4]$ a řídící přímkou $q : y = -2$.

Orientace:

- ▶ $q \parallel o_x \implies o \parallel o_y$
- ▶ $y_F = 4 > -2 \implies F$ leží nad přímkou $q \implies$ parabola leží nad přímkou q , jde o „údolíčko“

Najdeme souřadnice vrcholu:

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \quad (U)$$

- ▶ V leží na ose o , stejně jako ohnisko $F \implies \underline{m = 2}$
- ▶ $p = |qF| = 6$
- ▶ V leží přesně uprostřed mezi ohniskem F a přímkou $q \implies n = y_F - \frac{p}{2} = 4 - 3 = 1$

Nyní lze sestavit vrcholovou rovnici: $(x - 2)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (y - 1)$

$$\underline{\underline{(x - 2)^2 = 12 \cdot (y - 1)}}$$

Domácí úkol (zdroj: [hledání parabol na realisticky.cz](http://hledani-parabol-na-realistically.cz))

Najděte rovnici paraboly, která má

- a) vrchol $[0; 0]$ a ohnisko $[-2; 0]$, b) vrchol $[-2; -1]$ a řídící přímkou $y = -2$.

Rovnice paraboly

Příklad 6.11 Najděte vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly $x^2 - 4x + 16 = 4y$.

Najdeme vrcholovou rovnici:

$$x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 4y + 16 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4y + 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 4y - 12$$

Vrcholová rovnice: $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$

$$m = 2, n = 3, p = 2 \quad \dots V = [m; n] = \underline{\underline{[2; 3]}}$$

$$F = [m; n + \frac{p}{2}] = [2; 3 + \frac{2}{2}] = \underline{\underline{[2; 4]}}$$

Najdeme řídící přímku:

► její body budou mít y-ovou souřadnici
 $n - \frac{p}{2} = 3 - \frac{2}{2} = 2$

► musí tedy jít o přímku $q : y = 2$.

Vrchol $V = [m; n]$, **parametr** $p \quad \dots o \parallel o_y$

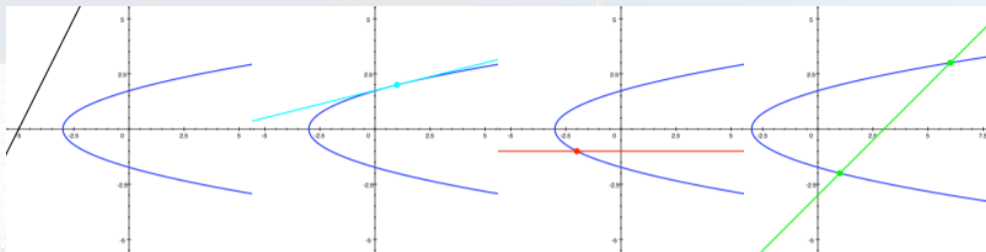
Vrcholová rovnice: $(x - m)^2 = 2p(y - n) \quad (U)$

Domácí úkol (zdroj: [Rovnice paraboly na realisticky.cz](http://Rovniceparaboly.na.realisticky.cz))

Najděte vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly

a) $x^2 - 4x + 6y + 4 = 0$, b) $y^2 - 6x - 10 = 0$, c) $y^2 + y + 4x + 3 = 0$.

Přímka a parabola



Jestliže pro přímku p a parabolu k platí

- ▶ $p \cap k = \emptyset$, přímka p **leží vně** paraboly k a nazývá se **vnější přímka** paraboly.
- ▶ $p \cap k = \{P\}$,
 - ▶ přímka p **se dotýká** paraboly k v bodě P a nazývá se **tečna** paraboly k .
 - ▶ přímka p je rovnoběžná s osou paraboly k , **protíná** parabolu k v jednom bodě P a nazývá se **sečna** paraboly k .
- ▶ $p \cap k = \{P, Q\}$, přímka p **protíná** parabolu k v bodech P a Q a nazývá se **sečna** paraboly k .

Přímka a parabola

Příklad 6.12 Určete vzájemnou polohu přímky $2x - y + 5 = 0$ a paraboly $(y - 3)^2 = -2(x - 1)$.

$$2x - y + 5 = 0 \quad \implies y = 2x + 5$$

$$(y - 3)^2 = -2(x - 1)$$

$$(2x + 5 - 3)^2 = -2(x - 1)$$

$$(2x + 2)^2 = -2x + 2$$

$$4x^2 + 8x + 4 + 2x - 2 = 0$$

$$4x^2 + 10x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$D = (5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 > 0 \implies 2 \text{ řešení} \implies 2 \text{ společné body}$$

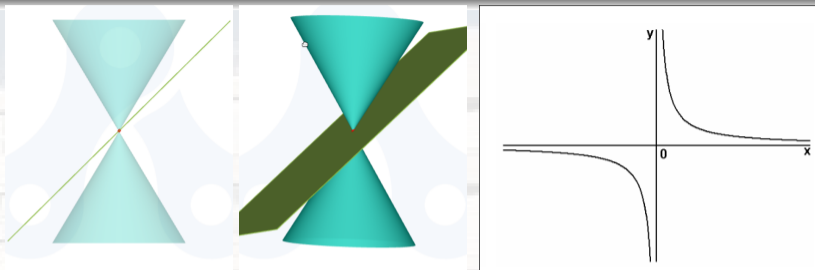
\implies přímka je sečnou paraboly (protíná ji ve dvou bodech)

...dopočítejte průsečíky!

Domácí úkol (zdroj: [Parabola a přímka na realisticky.cz](http://Parabola.a.přímka.na.realisticky.cz))

Určete vzájemnou polohu přímky $x - y - 3 = 0$ a paraboly $x^2 - 4x - y + 1 = 0$.

Poznámky ke kuželosečkám



Probrané učivo

- ▶ vybrané kuželosečky – pozor, průnikem roviny a kuželové plochy může být např. bod, přímka, dvě různoběžky...
- ▶ vybrané orientace osy (kromě kružnice): buď $o \parallel o_x$ nebo $o \parallel o_y$.
– hyperbolou je také křivka popsaná rovnicí $y = \frac{1}{x}$ (graf lomené funkce)

Uplatnění

- ▶ astronomie – pohyb planet po elipse kolem slunce–ohniska
- ▶ vrh tělesa, rovnoměrně zrychlený pohyb, zakřivení satelitních přijímačů – parabola
- ▶ nepřímá úměrnost, izotermický děj – hyperbola

Identifikace kželoseček

Domácí úkol

Najděte vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly

a) $y^2 + 8x - 4y - 20 = 0$

b) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 24y + 35 = 0$

d) $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 6 = 0$





Konec
(6. Kuželosečky)