9. Přímka a rovina v Euklidovském prostoru

Analytická geometrie

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \dots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \dots, a_n$,

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \dots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \dots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \dots, a_n]$;

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \ldots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$;
- zápis $\boxed{A \in E_n}$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$.

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \ldots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$;
- zápis $\boxed{A \in E_n}$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$.
- Zaveďme operace $+ : E_n \times \mathbb{R}^n \to E_n$, $- : E_n \times E_n \to \mathbb{R}^n$ předpisy

$$\boxed{A + \mathbf{u} := [a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n], \qquad (A, \mathbf{u}) \in E_n \times \mathbb{R}^n,}$$

$$\boxed{B - A := (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n), \qquad (A, B) \in E_n \times E_n.}$$

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \ldots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$;
- zápis $\boxed{A \in E_n}$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$.
- Zaveďme operace $+ : E_n \times \mathbb{R}^n \to E_n$, $- : E_n \times E_n \to \mathbb{R}^n$ předpisy

$$\boxed{A + \mathbf{u} := [a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n], \qquad (A, \mathbf{u}) \in E_n \times \mathbb{R}^n,}$$

$$\boxed{B - A := (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n), \qquad (A, B) \in E_n \times E_n.}$$

- n-dimenzionálním Euklidovským prostorem budeme rozumět trojici $(E_n, \mathbb{R}^n, +)$; zkráceně se o této trojici budeme vyjadřovat jako o „Euklidovském prostoru E_n“.

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \ldots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$;
- zápis $\boxed{A \in E_n}$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$.
- Zaveďme operace $+ : E_n \times \mathbb{R}^n \to E_n$, $- : E_n \times E_n \to \mathbb{R}^n$ předpisy

$$\boxed{A + \mathbf{u} := [a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n], \qquad (A, \mathbf{u}) \in E_n \times \mathbb{R}^n,}$$

$$\boxed{B - A := (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n), \qquad (A, B) \in E_n \times E_n.}$$

- n-dimenzionálním Euklidovským prostorem budeme rozumět trojici $(E_n, \mathbb{R}^n, +)$; zkráceně se o této trojici budeme vyjadřovat jako o „Euklidovském prostoru E_n“.
- Prvky množiny E_n budeme nazývat body Euklidovského prostoru E_n.

Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $\boxed{[a_1, \ldots, a_n]}$ uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$,
- $\boxed{E_n}$ množinu všech uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$;
- zápis $\boxed{A \in E_n}$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$.
- Zaveďme operace $+ : E_n \times \mathbb{R}^n \to E_n$, $- : E_n \times E_n \to \mathbb{R}^n$ předpisy

$$\boxed{A + \mathbf{u} := [a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n], \qquad (A, \mathbf{u}) \in E_n \times \mathbb{R}^n,}$$

$$\boxed{B - A := (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n), \qquad (A, B) \in E_n \times E_n.}$$

- *n-dimenzionálním Euklidovským prostorem* budeme rozumět trojici $(E_n, \mathbb{R}^n, +)$; zkráceně se o této trojici budeme vyjadřovat jako o „Euklidovském prostoru E_n“.
- Prvky množiny E_n budeme nazývat *body* Euklidovského prostoru E_n.
- E_1, resp. E_2, E_3, je přímka, resp. rovina, „prostor“.

Orientovaná úsečka

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- Úsečka AB (v E_3) je množina

$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- Úsečka AB (v E_3) je množina

$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$

- Body A, B jsou krajní body úsečky AB.

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- Úsečka AB (v E_3) je množina

$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$

- Body A, B jsou krajní body úsečky AB.
- Délka úsečky AB je číslo

$$\boxed{d(AB) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.}$$

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- Úsečka AB (v E_3) je množina

$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$

- Body A, B jsou krajní body úsečky AB.
- Délka úsečky AB je číslo

$$\boxed{d(AB) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.}$$

- Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ (v E_3) je úsečka AB nenulové délky, jejíž krajní body mají stanovené pořadí;

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- **Úsečka** AB (v E_3) je množina
$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$
- Body A, B jsou **krajní body** úsečky AB.
- **Délka úsečky** AB je číslo
$$\boxed{d(AB) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.}$$
- **Orientovaná úsečka** $\overrightarrow{AB}$ (v E_3) je úsečka AB nenulové délky, jejíž krajní body mají stanovené pořadí; první bod (zde A) se nazývá **počáteční bod** a druhý bod (zde B) se nazývá **koncový bod** orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

Orientovaná úsečka

Definice 9.1

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- Úsečka AB (v E_3) je množina
$$\boxed{\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.}$$
- Body A, B jsou krajní body úsečky AB.
- Délka úsečky AB je číslo
$$\boxed{d(AB) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.}$$
- Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ (v E_3) je úsečka AB nenulové délky, jejíž krajní body mají stanovené pořadí; první bod (zde A) se nazývá počáteční bod a druhý bod (zde B) se nazývá koncový bod orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
- Směr orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ je vektor
$$\boxed{\mathbf{s}_{AB} = \frac{\mathbf{u}}{d(AB)}.}$$

Geometrický vektor

Geometrický vektor

Definice 9.2

- Nulový geometrický vektor je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.

Geometrický vektor

Definice 9.2

- **Nulový geometrický vektor** je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.
- **Nenulový geometrický vektor** je množina všech orientovaných úseček (v E_3), které mají stejný směr a délku.

Geometrický vektor

Definice 9.2

- Nulový geometrický vektor je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.
- Nenulový geometrický vektor je množina všech orientovaných úseček (v E_3), které mají stejný směr a délku.

Poznámka 9.1

- Nulový geometrický vektor se ztotožňuje s aritmetickým vektorem
$$\boxed{\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3} \; .$$

Geometrický vektor

Definice 9.2

- **Nulový geometrický vektor** je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.
- **Nenulový geometrický vektor** je množina všech orientovaných úseček (v E_3), které mají stejný směr a délku.

Poznámka 9.1

- Nulový geometrický vektor se ztotožňuje s aritmetickým vektorem
$$\boxed{\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3}\,.$$
- Nenulový geometrický vektor se ztotožňuje s vektorem
$$\boxed{B - A \in \mathbb{R}^3}\,,$$
kde A, B jsou počáteční a koncový bod orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ z množiny představující uvažovaný geometrický vektor.
- Množina všech geometrických vektorů je takto ztotožněna s množinou $\mathbb{R}^3$.

Geometrický vektor

Definice 9.2

- Nulový geometrický vektor je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.
- Nenulový geometrický vektor je množina všech orientovaných úseček (v E_3), které mají stejný směr a délku.

Poznámka 9.1

- Nulový geometrický vektor se ztotožňuje s aritmetickým vektorem
$$\boxed{\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3}\,.$$
- Nenulový geometrický vektor se ztotožňuje s vektorem
$$\boxed{B - A \in \mathbb{R}^3}\,,$$
kde A, B jsou počáteční a koncový bod orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ z množiny představující uvažovaný geometrický vektor.
- Množina všech geometrických vektorů je takto ztotožněna s množinou $\mathbb{R}^3$.
- Tím jsou pro geometrické vektory zpřístupněny všechny pojmy zavedené dříve pro vektory aritmetické (rovnost, součet, c-násobek,...).

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. ... $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{3}}$

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. … $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{3}}$

Věta 9.1

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},}$$

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. ... $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{3}}$

Věta 9.1

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},}$$

$$\boxed{c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v},}$$

Skalární součin vektorů

podrobnosti

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. … $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{3}}$

Věta 9.1

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},}$$

$$\boxed{c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v},}$$

$$\boxed{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},}$$

Definice 9.3

- Velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.

Definice 9.3

- Velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.
- Odchylka (úhel) nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}.}$$

Definice 9.3

- Velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.
- Odchylka (úhel) nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}.}$$
- Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou kolmé, jestliže $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.}$

Definice 9.3

- Velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.
- Odchylka (úhel) nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}.}$$
- Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou kolmé, jestliže $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.}$

Příklad 9.2

Určete odchylku vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

Definice 9.3

- Velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.
- Odchylka (úhel) nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}.}$$
- Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou kolmé, jestliže $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.}$

Příklad 9.2

Určete odchylku vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. $\quad \ldots\ \varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

Věta 9.2

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{|c\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{u}|,}$$

Věta 9.2

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{|c\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{u}|,}$$

$$\boxed{|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,}$$

Věta 9.2

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{|c\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{u}|,}$$

$$\boxed{|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,}$$

$$\boxed{|\mathbf{u}| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}.}$$

Vektorový součin vektorů

Vektorový součin vektorů

Úmluva

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět vektor

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\, u_2 v_3 - u_3 v_2 \,,\, u_3 v_1 - u_1 v_3 \,,\, u_1 v_2 - u_2 v_1 \,).}$$

Vektorový součin vektorů

Úmluva

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět vektor

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\, u_2 v_3 - u_3 v_2 \,,\; u_3 v_1 - u_1 v_3 \,,\; u_1 v_2 - u_2 v_1 \,).}$$

Příklad 9.3

Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

Vektorový součin vektorů

Úmluva

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět vektor

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\, u_2 v_3 - u_3 v_2 \,,\; u_3 v_1 - u_1 v_3 \,,\; u_1 v_2 - u_2 v_1 \,).}$$

Příklad 9.3

Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

$$\ldots\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underline{\underline{(-2, 1, 2)}}$$

Vektorový součin vektorů

Úmluva

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět vektor

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\ u_2 v_3 - u_3 v_2\ ,\ u_3 v_1 - u_1 v_3\ ,\ u_1 v_2 - u_2 v_1\ ).}$$

Příklad 9.3

Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

$\ldots\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underline{\underline{(-2, 1, 2)}}$

Úkol:

Rozmyslete si, proč pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.}$$

Věta 9.3

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},}$$

Věta 9.3

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},}$$

$$\boxed{c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v},}$$

Věta 9.3

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},}$$

$$\boxed{c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v},}$$

$$\boxed{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.}$$

Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.

Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

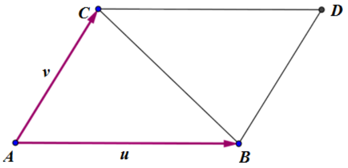
Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- číslo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vyjadřuje obsah rovnoběžníka $ABCD$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$.



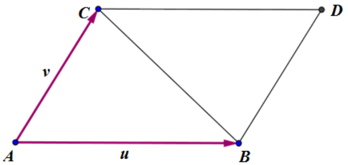
Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- číslo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vyjadřuje obsah rovnoběžníka *ABCD* určeného vektory $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$.



Příklad 9.4

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$ kolineární a určete nějaký vektor, který je k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kolmý.

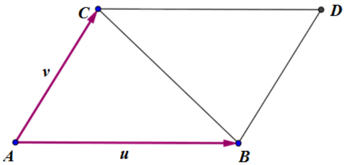
Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- číslo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vyjadřuje obsah rovnoběžníka $ABCD$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$.



Příklad 9.4

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$ kolineární a určete nějaký vektor, který je k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kolmý.

b) Určete obsah trojúhelníka ABC, jestliže $A = [1, 1, 0]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [3, 3, 1]$.

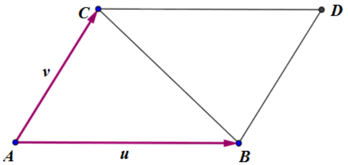
Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají kolineární.

Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- číslo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vyjadřuje obsah rovnoběžníka *ABCD* určeného vektory $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$.



Příklad 9.4

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$ kolineární a určete nějaký vektor, který je k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kolmý.

b) Určete obsah trojúhelníka ABC, jestliže $A = [1, 1, 0]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [3, 3, 1]$. $\quad \ldots S = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Smíšený součin vektorů

Smíšený součin vektorů

Úmluva

Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).}$$

Smíšený součin vektorů

Úmluva

Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).}$$

Příklad 9.5

Určete smíšený součin vektorů

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (1, -6, 3).$$

Smíšený součin vektorů

Úmluva

Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).}$$

Příklad 9.5

Určete smíšený součin vektorů

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (1, -6, 3). \qquad \ldots\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \underline{\underline{-2}}$$

Smíšený součin vektorů

Úmluva

Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět číslo

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).}$$

Příklad 9.5

Určete smíšený součin vektorů

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (1, -6, 3). \qquad \ldots\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \underline{\underline{-2}}$$

Úkol:

Rozmyslete si, proč pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ platí

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.}$$

Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.

Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou komplanární.

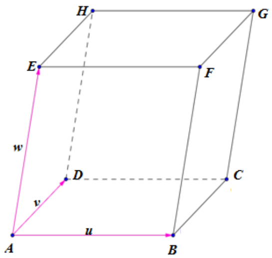
Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou komplanární.
- číslo $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A, \mathbf{w} = E - A$.



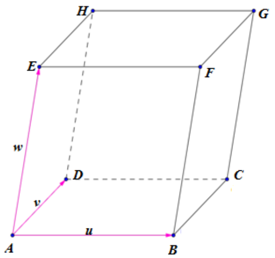
Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou komplanární.
- číslo $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH* určeného vektory $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A, \mathbf{w} = E - A$.



Příklad 9.6

a) Zjistěte, zda jsou vektory
$\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$,
$\mathbf{w} = (1, -6, 3)$ komplanární.

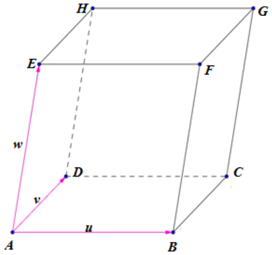
Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou komplanární.
- číslo $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A, \mathbf{w} = E - A$.



Příklad 9.6

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -6, 3)$ komplanární.

b) Určete objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, jestliže $A = [1, 1, 2], B = [2, 1, 3], D = [3, 3, 3]$, $E = [2, -5, 5]$.

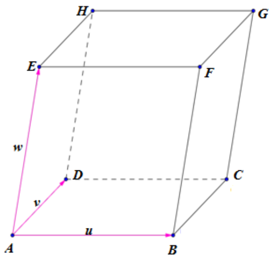
Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z R^3 se nazývají komplanární.

Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou komplanární.
- číslo $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A, \mathbf{w} = E - A$.



Příklad 9.6

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -6, 3)$ komplanární.

b) Určete objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, jestliže $A = [1, 1, 2], B = [2, 1, 3], D = [3, 3, 3]$, $E = [2, -5, 5]$. $\ldots V = \underline{\underline{2}}$

Přímka v E_3

Přímka v E_3

Pozorování

- Intuitivně chápeme, že přímka v E_3 je jednoznačně určena dvěma různými body $A, B \in E_3$, resp. bodem $A \in E_3$ a nenulovým vektorem $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

Přímka v E_3

Pozorování

- Intuitivně chápeme, že přímka v E_3 je jednoznačně určena dvěma různými body $A, B \in E_3$, resp. bodem $A \in E_3$ a nenulovým vektorem $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.
- Uvažujme takovou přímku a libovolný její bod X. Potom vektor $X - A$ lze vyjádřit jako násobek vektor $\mathbf{u}$, tj. existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že

$$X - A = t\mathbf{u}.$$

Definice 9.6

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá směrový vektor přímky z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této přímky lze vyjádřit jako násobek tohoto vektoru.

Definice 9.6

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá směrový vektor přímky z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této přímky lze vyjádřit jako násobek tohoto vektoru.

Věta 9.6

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový.

Definice 9.6

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá směrový vektor přímky z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této přímky lze vyjádřit jako násobek tohoto vektoru.

Věta 9.6

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový. Potom množina

$$\boxed{p(A, \mathbf{u}) = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}}$$

je přímka v E_3,

Definice 9.6

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá směrový vektor přímky z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této přímky lze vyjádřit jako násobek tohoto vektoru.

Věta 9.6

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový. Potom množina

$$\boxed{p(A, \mathbf{u}) = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}}$$

je přímka v E_3, která má směrový vektor $\mathbf{u}$ a obsahuje bod A.

Parametrické rovnice přímky v E_3

Parametrické rovnice přímky v E_3

Poznámka 9.2

Věta 9.6 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a nenulového vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit přímku $p(A, \mathbf{u})$.

Parametrické rovnice přímky v E_3

Poznámka 9.2

Věta 9.6 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a nenulového vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit přímku $p(A, \mathbf{u})$. Tatáž přímka může být ale jednoznačně určena jiným bodem a nenulovým vektorem!

Parametrické rovnice přímky v E_3

Poznámka 9.2

Věta 9.6 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a nenulového vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit přímku $p(A, \mathbf{u})$. Tatáž přímka může být ale jednoznačně určena jiným bodem a nenulovým vektorem!

Věta 9.6 nám umožňuje popsat body $X \in p(A, \mathbf{u})$ parametricky vektorovou rovnicí

$$\boxed{X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},}$$

Parametrické rovnice přímky v E_3

Poznámka 9.2

Věta 9.6 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a nenulového vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit přímku $p(A, \mathbf{u})$. Tatáž přímka může být ale jednoznačně určena jiným bodem a nenulovým vektorem!

Věta 9.6 nám umožňuje popsat body $X \in p(A, \mathbf{u})$ parametricky vektorovou rovnicí

$$\boxed{X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},}$$

popř. po složkách:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 \\ x_3 &= a_3 + tu_3 \end{aligned}\right\} \; t \in \mathbb{R}.}$$

Příklad 9.7

a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.

Příklad 9.7

a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.

$$\dots \; X = [1, 2, 5] + t(-2, -4, -1), \quad t \in \mathbb{R},$$

Příklad 9.7

a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.

$$\ldots \; X = [1, 2, 5] + t(-2, -4, -1), \quad t \in \mathbb{R},$$

…popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 1 & - & 2t \\ x_2 & = & 2 & - & 4t \\ x_3 & = & 5 & - & t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Příklad 9.7

a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.

$$\ldots \; X = [1, 2, 5] + t(-2, -4, -1), \quad t \in \mathbb{R},$$

. . . popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1 & - & 2t \\ x_2 & = & 2 & - & 4t \\ x_3 & = & 5 & - & t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

b) Lze zvolit čísla x_2, x_3 tak, aby $X = [5, x_2, x_3]$ byl bodem této přímky?

Příklad 9.7

a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.

$$\ldots \; X = [1, 2, 5] + t(-2, -4, -1), \quad t \in \mathbb{R},$$

…popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1 & - & 2t \\ x_2 & = & 2 & - & 4t \\ x_3 & = & 5 & - & t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

b) Lze zvolit čísla x_2, x_3 tak, aby $X = [5, x_2, x_3]$ byl bodem této přímky?

$$\ldots \; \text{ano: } x_2 = 10, \; x_3 = 7$$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$

$$\underline{\underline{p: \quad X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}}$$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$

$$\underline{\underline{p: \quad X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}}$$

$$= [1, 2, 5] + (t, 0, t)$$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p: \quad X}} &\underline{\underline{= [1, 2, 5] + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}} \\ &= [1, 2, 5] + (t, 0, t) \\ &= [1 + t, 2, 5 + t] \end{aligned}$$

Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$

$$\underline{\underline{p: \quad X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}}$$

$$= [1, 2, 5] + (t, 0, t)$$
$$= [1 + t, 2, 5 + t]$$

$$p: \quad \left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 1 & + & t \\ x_2 & = & 2 & & \\ x_3 & = & 5 & + & t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Rovina v E_3

Rovina v E_3

Pozorování

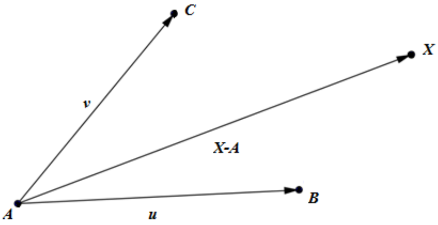
- Intuitivně chápeme, že rovina v E_3 je jednoznačně určena třemi navzájem různými body $A, B, C \in E_3$, kterými nelze proložit přímku, resp. bodem $A \in E_3$ a dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Rovina v E_3

Pozorování

- Intuitivně chápeme, že rovina v E_3 je jednoznačně určena třemi navzájem různými body $A, B, C \in E_3$, kterými nelze proložit přímku, resp. bodem $A \in E_3$ a dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
- Uvažujme takovou rovinu a libovolný její bod X. Potom vektor $X - A$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, tj. existují $t, s \in \mathbb{R}$ taková, že

$$X - A = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$



Přímka a rovina v E_3

Definice 9.7

Dva lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^3$ se nazývají směrové vektory roviny z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Definice 9.7

Dva lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^3$ se nazývají směrové vektory roviny z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Věta 9.7

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 9.7

Dva lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^3$ se nazývají směrové vektory roviny z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Věta 9.7

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Potom množina

$$\boxed{\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}}$$

je rovina v E_3,

Definice 9.7

Dva lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^3$ se nazývají směrové vektory roviny z E_3, jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Věta 9.7

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Potom množina

$$\boxed{\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}}$$

je rovina v E_3, která má směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a obsahuje bod A.

Parametrické rovnice roviny v E_3

Parametrické rovnice roviny v E_3

Poznámka 9.3

Věta 9.7 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit rovinu $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Parametrické rovnice roviny v E_3

Poznámka 9.3

Věta 9.7 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit rovinu $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tatáž rovina může být ale jednoznačně určena jiným bodem a dvojicí vektorů!

Parametrické rovnice roviny v E_3

Poznámka 9.3

Věta 9.7 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit rovinu $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tatáž rovina může být ale jednoznačně určena jiným bodem a dvojicí vektorů!

Věta 9.7 nám umožňuje popsat body $X \in \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ parametricky vektorovou rovnicí

$$\boxed{X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},}$$

Parametrické rovnice roviny v E_3

Poznámka 9.3

Věta 9.7 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit rovinu $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tatáž rovina může být ale jednoznačně určena jiným bodem a dvojicí vektorů!

Věta 9.7 nám umožňuje popsat body $X \in \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ parametricky vektorovou rovnicí

$$\boxed{X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},}$$

popř. po složkách:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}\right\} \ t, s \in \mathbb{R}.}$$

Příklad 9.9

a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.

Příklad 9.9

a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.

$$\ldots\ \rho: \quad X = [1, 1, 0] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

Příklad 9.9

a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.

$$\ldots \; \rho : \quad X = [1, 1, 0] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

... popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + t + 2s \\ x_2 & = & 1 \phantom{{}+t} + 2s \\ x_3 & = & \phantom{1+{}} t + s \end{array}\right\} \; t, s \in \mathbb{R}$$

Příklad 9.9

a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.

$$\ldots \; \rho : \quad X = [1, 1, 0] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

…popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + t + 2s \\ x_2 & = & 1 \quad\;\; + 2s \\ x_3 & = & \quad\;\; t + s \end{array}\right\} t, s \in \mathbb{R}$$

b) Lze zvolit číslo x_3 tak, aby $X = [2, -1, x_3]$ byl bodem této roviny?

Příklad 9.9

a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.

$$\ldots \rho : \quad X = [1, 1, 0] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

…popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + t + 2s \\ x_2 &= 1 \phantom{{}+t} + 2s \\ x_3 &= \phantom{1+{}} t + s \end{aligned}\right\} t, s \in \mathbb{R}$$

b) Lze zvolit číslo x_3 tak, aby $X = [2, -1, x_3]$ byl bodem této roviny?

$$\ldots \text{ano: } x_3 = 2$$

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body
$A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$,

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = B - A$

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = B - A = (2, 2, 1)$

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = B - A = (2, 2, 1)$

$$\underline{\underline{\rho: \quad X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}}}$$

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje body $A=[1,2,5]$, $B=[2,2,6]$, $C=[3,4,6]$.

$\mathbf{u} = B - A = (1,0,1), \quad \mathbf{v} = B - A = (2,2,1)$

$$\rho: \quad X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \quad t,s \in \mathbb{R}$$

…popř. po souřadnicích:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & t & + & 2s \\ x_2 & = & 2 & & & + & 2s \\ x_3 & = & 5 & + & t & + & s \end{array}\right\} \; t,s \in \mathbb{R}$$

Obecná rovnice roviny

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové.

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové. Potom množina

$$\boxed{\rho(a, b, c, d) = \{[x_1, x_2, x_3] \in E_3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}}$$

je rovina v E_3

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové. Potom množina

$$\boxed{\rho(a, b, c, d) = \{[x_1, x_2, x_3] \in E_3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}}$$

je rovina v E_3 a vektor (a, b, c) je normálový vektor této roviny.

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové. Potom množina

$$\boxed{\rho(a, b, c, d) = \{[x_1, x_2, x_3] \in E_3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}}$$

je rovina v E_3 a vektor (a, b, c) je normálový vektor této roviny.

Věta 9.8 nám umožňuje popsat body $X = [x_1, x_2, x_3]$ roviny $\rho(a, b, c, d)$ rovnicí

$$\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.}$$

Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor roviny z E_3, jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové. Potom množina

$$\boxed{\rho(a, b, c, d) = \{[x_1, x_2, x_3] \in E_3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}}$$

je rovina v E_3 a vektor (a, b, c) je normálový vektor této roviny.

Věta 9.8 nám umožňuje popsat body $X = [x_1, x_2, x_3]$ roviny $\rho(a, b, c, d)$ rovnicí

$$\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.}$$

Příklad 9.9′ Určete obecnou rovnici roviny z předchozího příkladu.

$$\ldots \underline{\underline{-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0}}$$

Základní příklady na určení roviny

Příklad 9.11

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Základní příklady na určení roviny

Příklad 9.11

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Příklad 9.12

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která obsahuje body $A = [0, 1, 2]$, $B = [1, 3, 0]$, $C = [2, 2, 3]$.

Základní příklady na určení roviny

Příklad 9.11

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Příklad 9.12

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která obsahuje body $A = [0, 1, 2]$, $B = [1, 3, 0]$, $C = [2, 2, 3]$.

Příklad 9.13

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má normálový vektor $\mathbf{n} = (4, -5, -3)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Základní příklady na určení roviny

Příklad 9.11

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Příklad 9.12

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která obsahuje body $A = [0, 1, 2]$, $B = [1, 3, 0]$, $C = [2, 2, 3]$.

Příklad 9.13

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má normálový vektor $\mathbf{n} = (4, -5, -3)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

... výsledky předchozích tří příkladů mohou mít tento tvar:

parametrická: $\underline{\underline{X = [0, 1, 2] + t(1, 2, -2) + s(2, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}}},$

obecná: $\underline{\underline{4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 11 = 0}}$

Konverze mezi parametrickou a obecnou rovnicí roviny

Příklad 9.14

a) Určete obecnou rovnici roviny
$\rho: \; X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \; t, s \in \mathbb{R}.$

Konverze mezi parametrickou a obecnou rovnicí roviny

Příklad 9.14

a) Určete obecnou rovnici roviny
$\rho: \; X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \; t,s \in \mathbb{R}$.

$$\ldots \underline{\underline{\rho: \; -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0}}$$

Konverze mezi parametrickou a obecnou rovnicí roviny

Příklad 9.14

a) Určete obecnou rovnici roviny
$\rho: \ X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1), \ t,s \in \mathbb{R}.$

$$\ldots \underline{\underline{\rho: \ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0}}$$

b) Určete parametrickou rovnici roviny $\eta: \ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 30 = 0.$

Konverze mezi parametrickou a obecnou rovnicí roviny

Příklad 9.14

a) Určete obecnou rovnici roviny
$\rho:\ X = [1,2,5] + t(1,0,1) + s(2,2,1),\ t,s \in \mathbb{R}.$

$\ldots \underline{\underline{\rho:\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0}}$

b) Určete parametrickou rovnici roviny $\eta:\ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 30 = 0.$

$\ldots \underline{\underline{\eta:\ X = [0,0,15] + t(1,0,2) + s(0,1,-4),\ t,s \in \mathbb{R}}}$

Implicitní vyjádření přímky v E_3

Implicitní vyjádření přímky v E_3

Věta 9.9

Nechť normálové vektory rovin $\rho, \sigma \subset E_3$ nejsou kolineární. Potom množina $p = \rho \cap \sigma$ je přímka v E_3.

Implicitní vyjádření přímky v E_3

Věta 9.9

Nechť normálové vektory rovin $\rho, \sigma \subset E_3$ nejsou kolineární. Potom množina $p = \rho \cap \sigma$ je přímka v E_3.

Poznámka 9.4

Za předpokladů z věty 9.9 má soustava obecných rovnic rovin ρ, σ nekonečně mnoho řešení, která lze vyjádřit v závislosti na 1 parametru. Těmito řešeními jsou určeny parametrické rovnice přímky $p = \rho \cap \sigma$.

Implicitní vyjádření přímky v E_3

Věta 9.9

Nechť normálové vektory rovin $\rho, \sigma \subset E_3$ nejsou kolineární. Potom množina $p = \rho \cap \sigma$ je přímka v E_3.

Poznámka 9.4

Za předpokladů z věty 9.9 má soustava obecných rovnic rovin ρ, σ nekonečně mnoho řešení, která lze vyjádřit v závislosti na 1 parametru. Těmito řešeními jsou určeny parametrické rovnice přímky $p = \rho \cap \sigma$.

Příklad 9.15

Zjistěte, zda $p = \rho \cap \sigma$, kde

$$\begin{aligned} \rho: &\quad 2x - y - 7 = 0 \\ \sigma: &\quad 2x + y - 3z + 1 = 0, \end{aligned}$$

je přímka v E_3, popř. určete parametrické rovnice této přímky.

Konec

(9. Přímka a rovina v Euklidovském prostoru)