

Kombinatorika

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

5. Skupiny s opakováním

GOA –
ORLOVA.CZ

Variace s opakováním

Definice 5.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná k -tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá **k -členná variace s opakováním z n prvků**. Počet všech k -členných variací s opakováním z n prvků se označuje $V'(k, n)$.

Pozorování:

Všimněme si, že na rozdíl od variací (bez opakování) může u variací s opakováním být $k > n$.

Na základě kombinatorického pravidla součinu lze snadno dokázat následující

Věta 5.1

$$V'(k, n) = n^k$$

Permutace s opakováním

Definice 5.2

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- ▶ Jakákoliv uspořádaná množina sestavená z n daných prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň na jedné pozici, se nazývá **permutace s opakováním z n prvků**.
- ▶ Počet všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž je j -tý prvek na k_j různých pozicích, kde $j = 1, \dots, n$, (tj. 1. prvek na k_1 pozicích, 2. prvek na k_2 pozicích, \dots), se označuje $P'(k_1, \dots, k_n)$.

Pozorování:

Srovnáním s **definicí 5.1** vidíme, že permutace s opakováním z n prvků je speciálním případem variace s opakováním, u které navíc požadujeme, aby se každý z n daných prvků vyskytoval; obecně u variací taková podmínka není splněna např. kdykoliv je $k < n$. Je-li $k \geq n$, potom např.

- ▶ $(1, 1, 2)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (jednička i dvojka se vyskytují)
- ▶ $(1, 1, 1)$ je 3-členná variace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ a současně **není** permutace s opakováním z prvků $\{1, 2\}$ (dvojka se nevyskytuje)

Počet permutací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.2

$$P'(k_1, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Platí ale ještě další vztahy se skupinami bez opakování, které lze využít:

Věta 5.3

$$P'\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \times} = P(n) ,$$

$$P'(k_1, n - k_1) = K(k_1, n)$$

Kombinace s opakováním

Definice 5.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Neuspořádaná k -tice sestavená z n daných prvků, které se mohou opakovat, se nazývá **k -členná kombinace s opakováním z n prvků**. Počet všech k -členných kombinací s opakováním z n prvků se označuje $K'(k, n)$.

Počet kombinací s opakováním se obvykle určuje podle vztahu z tohoto tvrzení:

Věta 5.4

$$K'(k, n) = \binom{n+k+1}{k}$$

Platí ale ještě další vztahy s jinými skupinami, které lze využít:

Věta 5.5

$$K'(k, n) = P'(k, n-1) = K(k, n+k-1).$$



Konec
(5. Skupiny s opakováním)