6. Vektory

Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Reálný vektorový prostor

Definice 6.1

Nechť V je množina a oprace $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ splňují

(i) $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ii) $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V: \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(iii) $\exists\, \mathbf{o} \in V, \forall\, \mathbf{u} \in V: \quad \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$

(iv) $\forall\, \mathbf{u} \in V, \exists\, (-\mathbf{u}) \in V: \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

(v) $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall\, c \in \mathbb{R}: \quad c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}$

(vi) $\forall\, \mathbf{u} \in V, \forall\, c, d \in \mathbb{R}: \quad (c + d) \cdot \mathbf{u} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{u}$

(vii) $\forall\, \mathbf{u} \in V, \forall\, c, d \in \mathbb{R}: \quad (c\,d) \cdot \mathbf{u} = c \cdot (d \cdot \mathbf{u})$

(viii) $\forall\, \mathbf{u} \in V: \quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$

Potom

- trojice $(V, +, \cdot)$ se nazývá reálný vektorový prostor ,
- prvky množiny V se nazývají vektory,
- vektor $\boxed{\mathbf{o}}$ se nazývá nulový vektor,
- vektor $\boxed{-\mathbf{u}}$ se nazývá vektor opačný k vektoru $\mathbf{u}$.

Jsou-li U, V vektorové prostory a $U \subset V$, říkáme, že U je podprostorem V.

Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice 6.2

podrobnosti

Nechť V je vektorový prostor a nechť $m \in \mathbb{N}$. Vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m} \in V$ jsou

- lineárně závislé, jestliže pro $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ platí

$$\boxed{\exists j \in \{1, \ldots, m\} : \quad c_j \neq 0 \quad \wedge \quad c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o}.}$$

- lineárně nezávislé, jestliže pro $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ platí

$$\boxed{c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0.}$$

Definice 6.3

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N}_0$ je největší číslo takové, že z množiny V lze vybrat n lineárně nezávislých vektorů. Potom

- říkáme, že V je n-dimenzionální,
- n se nazývá dimenze vektorového prostoru V.
- libovolná množina n lineárně nezávislých vektorů z V se nazývá báze vektorového prostoru V.

Poznámka 6.1

- Zápis $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ znamená, že symbol $\boxed{\mathbf{u}}$ reprezentuje uspořádanou *n*-tici $\boxed{(u_1, \ldots, u_n)}$ reálných čísel.
- Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{v}}$ právě tehdy, když $\boxed{u_1 = v_1, \ \ldots \ , u_n = v_n}$.

Věta 6.1

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde operace $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jsou definované předpisy

$$\boxed{\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n), \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,} \tag{1}$$

$$\boxed{c \cdot \mathbf{u} := (c\, u_1, \ldots, c\, u_n), \qquad (c, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,} \tag{2}$$

je *n*-dimenzionální vektorový prostor s bází tvořenou vektory

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).} \tag{3}$$

Definice 6.4

- Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ se nazývá aritmetický vektorový prostor.
- Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá n-složkový aritmetický vektor; je-li $j \in \{1, \ldots, n\}$, potom u_j se nazývá j-tá složka vektoru $\mathbf{u}$.
- Operace definovaná předpisem (1) se nazývá sčítání aritmetických vektorů; vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se nazývá součet aritmetických vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- Operace definovaná předpisem (2) se nazývá násobení aritmetického vektoru skalárem; vektor $c \cdot \mathbf{u}$ se nazývá c-násobek aritmetického vektoru $\mathbf{u}$.
- Báze prostoru $\mathbb{R}^n$ tvořená vektory (3) se nazývá kanonická .

Poznámka 6.2

- Složky nulového vektoru z $\mathbb{R}^n$ jsou nuly, tj. $\boxed{\mathbf{o} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ krát}})}$.
- Složky vektoru opačného k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ jsou čísla opačná ke složkám tohoto vektoru, tj. $\boxed{-\mathbf{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)}$.

Lineární kombinace vektorů

Pozorování:

Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ lze zapsat ve tvaru $\boxed{v_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e_n}}$.

Definice 6.2′ a)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m} \in \mathbb{R}^n$. Potom vektor

$$\boxed{c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} \in \mathbb{R}^n} \tag{4}$$

se nazývá lineární kombinace vektorů $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m}$.
Lineární kombinace (5) se nazývá

- triviální, jestliže $\boxed{c_1 = \cdots = c_m = 0}$,
- netriviální, jestliže $\boxed{\exists j \in \{1, \ldots, m\} : \quad c_j \neq 0}$,
- nulová, jestliže je rovna nulovému vektoru.

Příklad 6.1

Je vektor $\mathbf{v} = (-2, 2, -3)$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u_1} = (1, 2, 0)$ a $\mathbf{u_2} = (3, 0, 3)$?

Lineární nezávislost vektorů

Pozorování:

- Každá triviální lineární kombinace libovolných vektorů je nulová.
- Existuje netriviální nulová lineární kombinace vektorů $\mathbf{u_1} = (3,3)$, $\mathbf{u_2} = (1,1)$; stačí vzít $c_1 = 1$, $c_2 = -3$.
- Pro vektory $\mathbf{u_1} = (1,2)$, $\mathbf{u_2} = (2,1)$ to však neplatí; jejich nulovou lineární kombinaci docílíme jedině volbou $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Definice 6.2′ b)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m} \in \mathbb{R}^n$ jsou

- lineárně závislé, jestliže existuje jejich netriviální nulová lineární kombinace, tj. jestliže platí

$$\boxed{\exists j \in \{1, \ldots, m\} : \quad c_j \neq 0 \quad \wedge \quad c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o}.}$$

- lineárně nezávislé, jestliže každá jejich nulová lineární kombinace je triviální, tj. jestliže platí

$$\boxed{c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0.}$$

Věta 6.2

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m} \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Důsledek

Dva vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden je násobkem druhého.

Příklad 6.2 Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé:

a) $\mathbf{u_1} = (4, 1),\ \mathbf{u_2} = (12, 3)$

b) $\mathbf{u_1} = (-1, -2, 0),\ \mathbf{u_2} = (3, 0, 1),\ \mathbf{u_3} = (2, -1, 1)$

Poznámky:

(i) Lineární závislost (resp. nezávislost) nezáleží na pořadí vektorů.

(ii) Nahradíme-li jeden vektor z množiny lineárně závislých (resp. nezávislých) vektorů jeho c-násobkem, kde $c \neq 0$, dostaneme opět množinu lineárně závislých (resp. nezávislých) vektorů.

(iii) Nahradíme-li jeden vektor z množiny lineárně závislých (resp. nezávislých) vektorů součtem tohoto vektoru s c-násobkem jiného vektoru z této množiny, dostaneme opět množinu lineárně závislých (resp. nezávislých) vektorů.

Lineární kombinace vektorů

zpět

Úmluva:

Reálný vektorový prostor $(V, +, \cdot)$ budeme obvykle krátce označovat V a nazývat „vektorový prostor“.

Definice 6.2 a)

Nechť V je vektorový prostor a $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_m} \in V$.
Potom vektor

$$\boxed{c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} \in V} \qquad (5)$$

se nazývá lineární kombinace vektorů $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_m}$.
Lineární kombinace (5) se nazývá

- triviální, jestliže $\boxed{c_1 = \cdots = c_m = 0}$,
- netriviální, jestliže $\boxed{\exists j \in \{1, \dots, m\}: \quad c_j \neq 0}$,
- nulová, jestliže je rovna vektoru $\mathbf{o}$.

Lineární nezávislost vektorů

zpět

Definice 6.2 b)

Nechť V je vektorový prostor a $m \in \mathbb{N}$. Vektory $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_m} \in V$ jsou

- lineárně závislé, jestliže existuje jejich netriviální nulová lineární kombinace, tj. jestliže platí

$$\exists j \in \{1, \dots, m\} : \quad c_j \neq 0 \quad \wedge \quad c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o}.$$

- lineárně nezávislé, jestliže každá jejich nulová lineární kombinace je triviální, tj. jestliže platí

$$c_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + c_m \cdot \mathbf{u_m} = \mathbf{o} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0.$$

Konec

(6. Vektory)