

5. Využití derivace

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I



Tečna a normála ke grafu funkce



Tečna a normála ke grafu funkce

Věta 5.1

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $y_0 = f(x_0)$.

- Přímka

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

je tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Tečna a normála ke grafu funkce

Věta 5.1

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $y_0 = f(x_0)$.

- Přímka

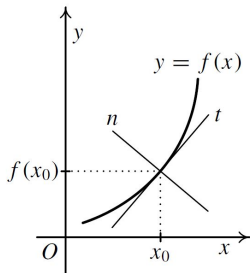
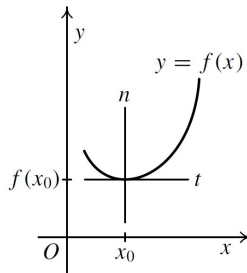
$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

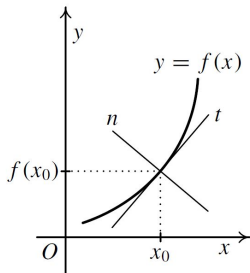
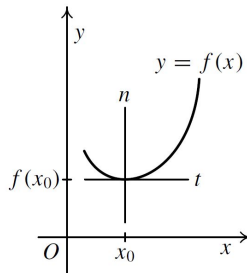
je tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

- Je-li $f'(x_0) \neq 0$ (resp. $f'(x_0) = 0$), potom přímka

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \left(\text{resp. } n: x = x_0 \right)$$

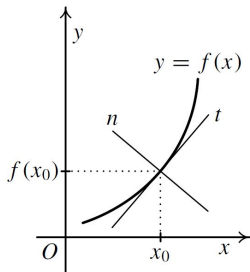
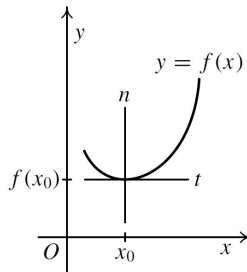
je normála ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

a) $f'(x_0) \neq 0$,b) $f'(x_0) = 0$

a) $f'(x_0) \neq 0$,b) $f'(x_0) = 0$

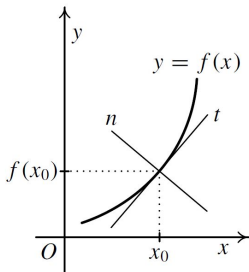
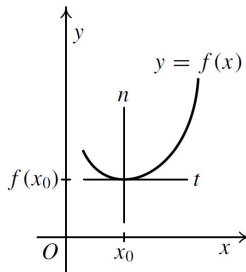
Příklad 5.1

- a) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$ v bodě T , jehož x -ová souřadnice je 2.

a) $f'(x_0) \neq 0$,b) $f'(x_0) = 0$

Příklad 5.1

- a) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$ v bodě T , jehož x -ová souřadnice je 2.
- b) Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, která je kolmá k přímce $p : 2x - y = 0$.

a) $f'(x_0) \neq 0$,b) $f'(x_0) = 0$

Příklad 5.1

- Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$ v bodě T , jehož x -ová souřadnice je 2.
- Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, která je kolmá k přímce $p : 2x - y = 0$.
- Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{2x}$, která je rovnoběžná s přímkou $a : 2x - y + 3 = 0$.

4. přednáška

○○●○

5. přednáška

oooooooooooo

6. přednáška

ooooo

Podrobnosti

oooooooo

L'Hospitalovo pravidlo



L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.2

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a necht' platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.2

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a necht' platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.2

Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a nechť platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 5.1

Věta 5.2 bude platit i v případě, že v její formulaci předpoklad $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ změníme („zeslabíme“) na $x_0 \in \mathbb{R}$ a místo limitních přechodů $x \rightarrow x_0$ budeme uvažovat limitní přechody $x \rightarrow x_0^-$ (resp. $x \rightarrow x_0^+$); tj. pro levostranné (resp. pravostranné) limity.

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převédeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převodeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převédeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převodeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Převodeme pomocí vztahu $x = e^{\ln x}$ na výpočet limity výrazu v exponentu, který je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převodeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Převodeme pomocí vztahu $x = e^{\ln x}$ na výpočet limity výrazu v exponentu, který je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.4

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$



Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převedeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Převedeme pomocí vztahu $x = e^{\ln x}$ na výpočet limity výrazu v exponentu, který je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.4

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Některé typy neurčitých výrazů, které lze řešit L'Hospitalovým pravidlem

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.2

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 + x + 2}$

$$\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty)$$

Převedeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.3

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Převedeme pomocí vztahu $x = e^{\ln x}$ na výpočet limity výrazu v exponentu, který je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 5.4

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

Základní věty diferenciálního počtu



Základní věty diferenciálního počtu

Rolleova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$.

Základní věty diferenciálního počtu

Rolleova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

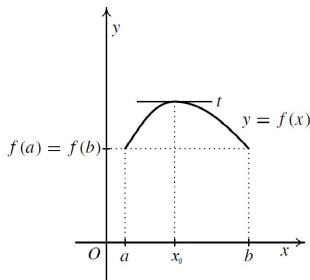
$$f'(x_0) = 0.$$

Základní věty diferenciálního počtu

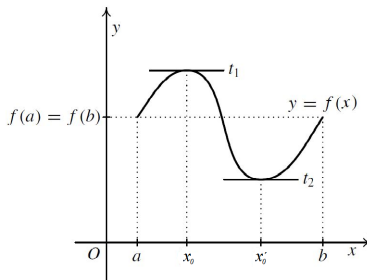
Rolleova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$f'(x_0) = 0.$$



a)



b)

2.1.1 Rolleova věta

Základní věty diferenciálního počtu

Lagrangeova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na intervalu (a, b) .

Základní věty diferenciálního počtu

Lagrangeova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

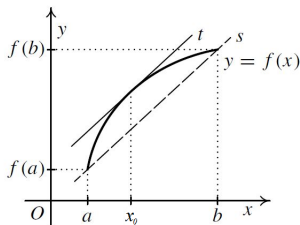
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Základní věty diferenciálního počtu

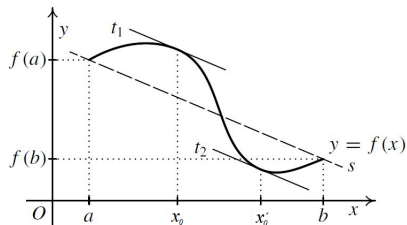
Lagrangeova věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na intervalu (a, b) . Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



a)



b)

Lagrangeova věta

Základní věty diferenciálního počtu

Cauchyova věta

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, mají derivaci na intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí $g'(x) \neq 0$.

Základní věty diferenciálního počtu

Cauchyova věta

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, mají derivaci na intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí $g'(x) \neq 0$. Potom existuje číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Monotónnost



Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením věty 5.3 neplatí;

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením **věty 5.3** neplatí; např. funkce $f(x) = x^3$, je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, ale $f'(0) = 0$.



Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením **věty 5.3** neplatí; např. funkce $f(x) = x^3$, je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, ale $f'(0) = 0$.

Příklad 5.5 Určete intervaly (ryzí) monotónnosti funkce

a) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením **věty 5.3** neplatí; např. funkce $f(x) = x^3$, je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, ale $f'(0) = 0$.

Příklad 5.5 Určete intervaly (ryzí) monotónnosti funkce

a) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$



Monotónnost

Věta 5.3 (Důsledek Lagrangeovy věty)

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, potom funkce f je nerostoucí na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, potom funkce f je konstantní na (a, b) .

Poznámka 5.2

Tvrzení opačná k tvrzením **věty 5.3** neplatí; např. funkce $f(x) = x^3$, je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, ale $f'(0) = 0$.

Příklad 5.5 Určete intervaly (ryzí) monotónnosti funkce

a) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$



Lokální extrém



Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

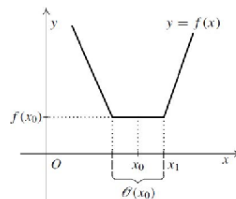
- lokální minimum v bodě x_0 , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.

Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

- lokální minimum v bodě x_0 , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.

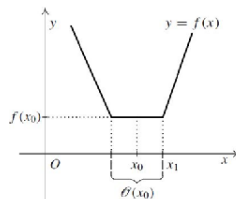


Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

- **lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **ostré lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá ostrého minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.

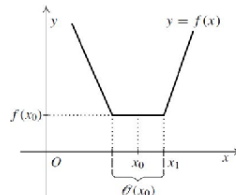
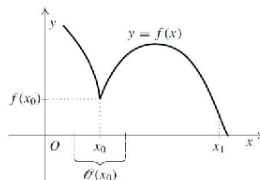
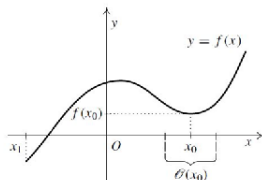


Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

- **lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **ostré lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá ostrého minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.



ostré lokální minimum

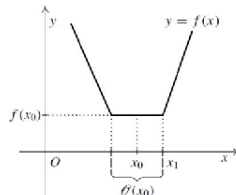
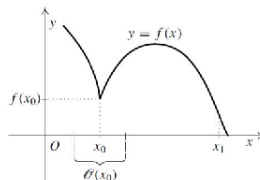
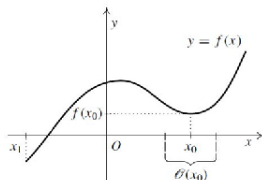
lokální minimum

Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

- **lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **ostré lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá ostrého minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **lokální maximum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá maxima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.



ostré lokální minimum

lokální minimum

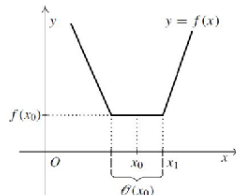
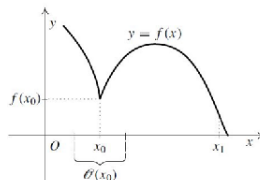
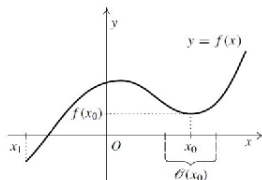


Lokální extrémy

Definice 5.1

Funkce f má

- **lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **ostré lokální minimum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá ostrého minima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **lokální maximum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá maxima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.
- **ostré lokální maximum v bodě x_0** , jestliže funkce f nabývá ostrého maxima v bodě x_0 na nějakém okolí tohoto bodu.



ostré lokální minimum

lokální minimum

Lokální extrémy

Poznámky

- Lze rovněž říct, že **funkce f má lokální minimum v bodě x_0** , jestliže existuje redukované okolí P bodu x_0 takové, že

$$x \in P \implies f(x) \geq f(x_0) .$$

Analogicky lze formulovat zbytek **definice 5.1**.

Lokální extrémy

Poznámky

- Lze rovněž říct, že **funkce f má lokální minimum v bodě x_0** , jestliže existuje redukované okolí P bodu x_0 takové, že

$$x \in P \implies f(x) \geq f(x_0) .$$

Analogicky lze formulovat zbytek **definice 5.1**.

- Má-li funkce f (ostré) lokální minimum nebo maximum v bodě x_0 , řekneme, že **funkce f má (ostrý) lokální extrém v bodě x_0** .

Lokální extrémy

Poznámky

- Lze rovněž říct, že **funkce f má lokální minimum v bodě x_0** , jestliže existuje redukované okolí P bodu x_0 takové, že

$$x \in P \implies f(x) \geq f(x_0) .$$

Analogicky lze formulovat zbytek **definice 5.1**.

- Má-li funkce f (ostré) lokální minimum nebo maximum v bodě x_0 , řekneme, že **funkce f má (ostrý) lokální extrém v bodě x_0** .

Definice 5.2

Stacionární bod funkce f je takové číslo $x_0 \in D_f$, pro které platí $f'(x_0) = 0$.

Lokální extrémy

Poznámky

- Lze rovněž říct, že **funkce f má lokální minimum v bodě x_0** , jestliže existuje redukované okolí P bodu x_0 takové, že

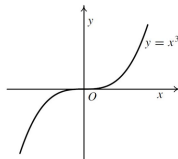
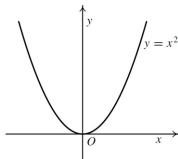
$$x \in P \implies f(x) \geq f(x_0) .$$

Analogicky lze formulovat zbytek **definice 5.1**.

- Má-li funkce f (ostré) lokální minimum nebo maximum v bodě x_0 , řekneme, že **funkce f má (ostrý) lokální extrém v bodě x_0** .

Definice 5.2

Stacionární bod funkce f je takové číslo $x_0 \in D_f$, pro které platí **$f'(x_0) = 0$** .



Nutná podmínka existence lokálního extrému

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď
nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$$f'(x_0) = 0$$

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď
nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$$f'(x_0) = 0$$

Poznámka 5.3

- Opačné tvrzení k větě 5.4 neplatí;

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď
nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$$f'(x_0) = 0$$

Poznámka 5.3

- Opačné tvrzení k **větě 5.4** neplatí; např. 0 je stacionární bod funkce $f(x) = x^3$, ale tato funkce nemá extrém v 0.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď
nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$$f'(x_0) = 0$$

Poznámka 5.3

- Opačné tvrzení k **větě 5.4** neplatí; např. 0 je stacionární bod funkce $f(x) = x^3$, ale tato funkce nemá extrém v 0. Podobně: derivace funkce sgn v 0 neexistuje, přesto tato funkce nemá extrém v 0.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Věta 5.4

Nechť funkce f má lokální extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď
nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$$f'(x_0) = 0$$

Poznámka 5.3

- Opačné tvrzení k **větě 5.4** neplatí; např. 0 je stacionární bod funkce $f(x) = x^3$, ale tato funkce nemá extrém v 0. Podobně: derivace funkce \sin v 0 neexistuje, přesto tato funkce nemá extrém v 0.
- Z **věty 5.4** plyne: je-li $f'(x_0) \neq 0$, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0 .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)



Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_{\delta}^{-}(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_{\delta}^{+}(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .



Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $f''(x_0) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $f''(x_0) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $f''(x_0) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .



Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $f''(x_0) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .

- $f''(x_0) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Příklad 5.6 Vyšetřete lokální extrémy funkce

a) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$



Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $f''(x_0) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .

- $f''(x_0) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Příklad 5.6 Vyšetřete lokální extrémy funkce

a) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = x^4$



Postačující podmínky existence lokálního extrému

[podrobnosti](#)

Věta 5.5

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

- f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního minima v bodě x_0 .

- f je rostoucí na $P_\delta^-(x_0)$ \wedge f je klesající na $P_\delta^+(x_0)$,

potom f nabývá ostrého lokálního maxima v bodě x_0 .

Věta 5.6

Jestliže $f'(x_0) = 0$ a

- $f''(x_0) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $f''(x_0) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Příklad 5.6 Vyšetřete lokální extrémy funkce

a) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5$



Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

- 1 Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

- 1 Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.
- 2 Vypočítáme funkční hodnoty v takových bodech intervalu (a, b) , v nichž je derivace funkce f nulová nebo neexistuje.

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

- 1 Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.
- 2 Vypočítáme funkční hodnoty v takových bodech intervalu (a, b) , v nichž je derivace funkce f nulová nebo neexistuje.
- 3 Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ minima (resp. maxima) v jednom z bodů, v nichž byla v předchozích krocích spočítána funkční hodnota, a to v bodě s nejmenší (resp. největší) funkční hodnotou.

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ minima a maxima. Při jejich vyšetřování lze postupovat takto:

- 1 Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.
- 2 Vypočítáme funkční hodnoty v takových bodech intervalu (a, b) , v nichž je derivace funkce f nulová nebo neexistuje.
- 3 Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ minima (resp. maxima) v jednom z bodů, v nichž byla v předchozích krocích spočítána funkční hodnota, a to v bodě s nejmenší (resp. největší) funkční hodnotou.

Příklad 5.7

Vyšetřete extrémy funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$.

4. přednáška
○○○○

5. přednáška
○○○○○○○○●○○

6. přednáška
○○○○○

Podrobnosti
○○○○○○○○

Konvexnost, konkávnost

[podrobnosti](#)



Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b) .

Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b) .
- $f''(x) < 0$, potom funkce f je ryze konkávní na (a, b) .

Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b) .
- $f''(x) < 0$, potom funkce f je ryze konkávní na (a, b) .
- $f''(x) \geq 0$, potom funkce f je konvexní na (a, b) .

Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b) .
- $f''(x) < 0$, potom funkce f je ryze konkávní na (a, b) .
- $f''(x) \geq 0$, potom funkce f je konvexní na (a, b) .
- $f''(x) \leq 0$, potom funkce f je konkávní na (a, b) .

Konvexnost, konkávnost

[podrobnosti](#)

Věta 5.7

Jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

- $f''(x) > 0$, potom funkce f je ryze konvexní na (a, b) .
- $f''(x) < 0$, potom funkce f je ryze konkávní na (a, b) .
- $f''(x) \geq 0$, potom funkce f je konvexní na (a, b) .
- $f''(x) \leq 0$, potom funkce f je konkávní na (a, b) .
- $f''(x) = 0$, potom funkce f je lineární na (a, b) .



4. přednáška
○○○

5. přednáška
○○○○○○○○●○

6. přednáška
○○○○

Podrobnosti
○○○○○○○

Inflexe



Definice 5.3

Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

f je ryze konvexní na $P_{\delta}^{-}(x_0)$

\wedge

f je ryze konkávní na $P_{\delta}^{+}(x_0)$

Inflexe

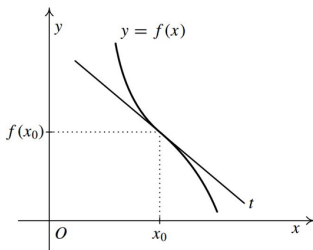
Definice 5.3

Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

f je ryze konvexní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

f je ryze konkávní na $P_\delta^+(x_0)$



Inflexe

Definice 5.3

Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

f je ryze konvexní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

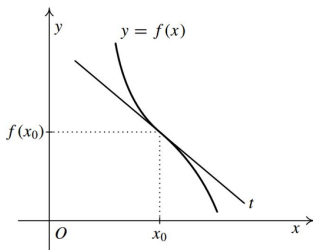
f je ryze konkávní na $P_\delta^+(x_0)$

nebo

f je ryze konkávní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

f je ryze konvexní na $P_\delta^+(x_0)$.



Inflexe

Definice 5.3

Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

f je ryze konvexní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

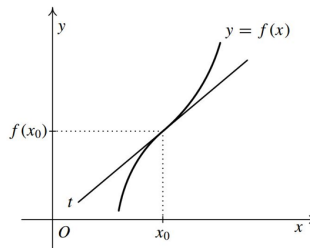
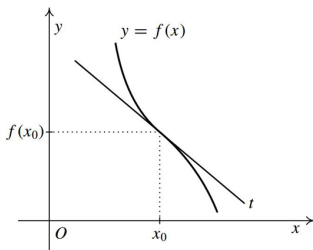
f je ryze konkávní na $P_\delta^+(x_0)$

nebo

f je ryze konkávní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

f je ryze konvexní na $P_\delta^+(x_0)$.



Inflexe

Definice 5.3

Funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má derivaci v bodě x_0 a existuje $\delta > 0$ takové, že platí

f je ryze konvexní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

f je ryze konkávní na $P_\delta^+(x_0)$

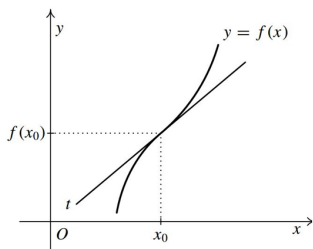
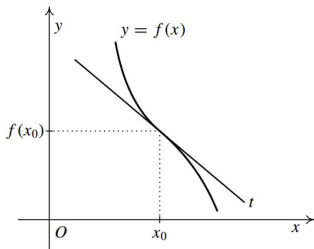
nebo

f je ryze konkávní na $P_\delta^-(x_0)$

\wedge

f je ryze konvexní na $P_\delta^+(x_0)$.

Má-li funkce f inflexi v bodě x_0 , potom bod $[x_0, f(x_0)]$ se nazývá **inflexní bod funkce f** .



4. přednáška
○○○○

5. přednáška
○○○○○○○○○○●

6. přednáška
○○○○○

Podrobnosti
○○○○○○○○

Nutná a postačující podmínka inflexe



Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

[podrobnosti](#)

Nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f'''(x_0) \neq 0 \right).$$

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

[podrobnosti](#)

Nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f'''(x_0) \neq 0 \right).$$

Potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

[podrobnosti](#)

Nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f'''(x_0) \neq 0 \right).$$

Potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .

Příklad 5.8

Určete intervaly (ryzí) konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

[podrobnosti](#)

Nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f'''(x_0) \neq 0 \right).$$

Potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .

Příklad 5.8

Určete intervaly (ryzí) konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Nutná a postačující podmínka inflexe

Věta 5.8 (Nutná podmínka)

Nechť funkce f má inflexi v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom buď $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta 5.9 (Postačující podmínka)

[podrobnosti](#)

Nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f'''(x_0) \neq 0 \right).$$

Potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .

Příklad 5.8

Určete intervaly (ryzí) konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

4. přednáška
○○○○

5. přednáška
○○○○○○○○○○○○

6. přednáška
●○○○○

Podrobnosti
○○○○○○○○

Průběh funkce



Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- ① Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- ② Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- ③ Znaménko funkce
- ④ Průsečíky grafu funkce s osami
- ⑤ Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- ⑥ Asymptoty

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- ① Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- ② Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- ③ Znaménko funkce
- ④ Průsečíky grafu funkce s osami
- ⑤ Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- ⑥ Asymptoty

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- ① Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- ② Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- ③ Znaménko funkce
- ④ Průsečíky grafu funkce s osami
- ⑤ Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- ⑥ Asymptoty

B Z první derivace se určí

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrém

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrém

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti
- 2 Inflexní body

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrém

C Z druhé derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti
- 2 Inflexní body

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti
- 2 Inflexní body

D Na základě dosažených výsledků se sestrojí graf.

Průběh funkce

A Ze zadání funkce se určí

- 1 Definiční obor ve tvaru sjednocení komponent
- 2 Sudost, lichost, popřípadě další vlastnosti funkce
- 3 Znaménko funkce
- 4 Průsečíky grafu funkce s osami
- 5 Limity v krajních bodech intervalů spojitosti
- 6 Asymptoty

B Z první derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí monotónnosti
- 2 Lokální extrémy

C Z druhé derivace se určí

- 1 Intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti
- 2 Inflexní body

D Na základě dosažených výsledků se sestrojí graf.

Příklad 5.9

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

řešení



4. přednáška

○○○○

5. přednáška

oooooooooooo

6. přednáška

○●○○

Podrobnosti

oooooooo

Diferenciál



Diferenciál

Definice 5.4

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' $k \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)] = 0.$$

Diferenciál

Definice 5.4

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $k \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)] = 0.$$

Potom lineární funkce

$$df_{x_0}(t) = k \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **diferenciál funkce f v bodě x_0** .

Diferenciál

Definice 5.4

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $k \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)] = 0.$$

Potom lineární funkce

$$df_{x_0}(t) = k \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **diferenciál funkce f v bodě x_0** .

Věta 5.10

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Diferenciál

Definice 5.4

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $k \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)] = 0.$$

Potom lineární funkce

$$df_{x_0}(t) = k \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **diferenciál funkce f v bodě x_0** .

Věta 5.10

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje diferenciál funkce f v bodě x_0 a platí

$$df_{x_0}(t) = f'(x_0) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál

Poznámka 5.4

- Obvykle se používá označení

$$dx = x - x_0, \quad dy = df_{x_0}(dx).$$

Diferenciál

Poznámka 5.4

- Obvykle se používá označení

$$dx = x - x_0, \quad dy = df_{x_0}(dx).$$

- Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x \neq x_0$, potom

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Diferenciál

Poznámka 5.4

- Obvykle se používá označení

$$dx = x - x_0, \quad dy = df_{x_0}(dx).$$

- Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x \neq x_0$, potom

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

- Pomocí diferenciálu funkce lze obvykle efektivně vyjádřit její přibližné hodnoty na základě vztahu

$$f(x) \approx f(x_0) + dy,$$

Diferenciál

Poznámka 5.4

- Obvykle se používá označení

$$dx = x - x_0, \quad dy = df_{x_0}(dx).$$

- Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x \neq x_0$, potom

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

- Pomocí diferenciálu funkce lze obvykle efektivně vyjádřit její přibližné hodnoty na základě vztahu

$$f(x) \approx f(x_0) + dy,$$

který odráží skutečnost, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) - (f(x_0) + dy) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) - f(x_0) - df_{x_0}(x - x_0) \right) = 0.$$



4. přednáška
○○○○

5. přednáška
○○○○○○○○○○○○

6. přednáška
○○●○

Podrobnosti
○○○○○○○○

Taylorův polynom



Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n -tého řádu.

Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n -tého řádu. Potom funkce

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **Taylorův polynom** n -tého stupně funkce f v bodě x_0 .

Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n -tého řádu. Potom funkce

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **Taylorův polynom n -tého stupně funkce f v bodě x_0** .

Poznámka 5.5

Taylorův polynom 1. stupně funkce f v bodě x_0 lze přepsat ve tvarech

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + dy,$$

Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n -tého řádu. Potom funkce

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **Taylorův polynom n -tého stupně funkce f v bodě x_0** .

Poznámka 5.5

Taylorův polynom 1. stupně funkce f v bodě x_0 lze přepsat ve tvarech

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + dy,$$

a tedy podle poznámky 5.4 vyjadřuje přibližné hodnoty funkce f .

Taylorův polynom

Definice 5.5

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci n -tého řádu. Potom funkce

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **Taylorův polynom n -tého stupně funkce f v bodě x_0** .

Poznámka 5.5

Taylorův polynom 1. stupně funkce f v bodě x_0 lze přepsat ve tvarech

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + dy,$$

a tedy podle poznámky 5.4 vyjadřuje přibližné hodnoty funkce f .

Lze ukázat, že totéž platí pro Taylorův polynom jakéhokoliv stupně, tj. že pro $n \in \mathbb{N}$ a pro x blízka x_0 platí

$$f(x) \approx T_n(x).$$



4. přednáška

○○○○

5. přednáška

oooooooooooo

6. přednáška

○○○○●

Podrobnosti

oooooooo

Taylorův rozvoj



Taylorův rozvoj

Definice 5.6

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů.

Taylorův rozvoj

Definice 5.6

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Potom funkce

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j, \quad x \in \mathbb{R} \quad \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \right)$$

se nazývá **Taylorův rozvoj funkce f** .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo věty 5.5 lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo věty 5.5 lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $(x - x_0)f'(x) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo věty 5.5 lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $(x - x_0)f'(x) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Zobecnění věty 5.6:

Věta 5.6'

Nechť $n \geq 2$ a necht

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo **věty 5.5** lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $(x - x_0)f'(x) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Zobecnění **věty 5.6**:

Věta 5.6'

Nechť $n \geq 2$ a necht

$$(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0) \quad \wedge \quad (f^n(x_0) \neq 0).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0 .



Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo **věty 5.5** lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $(x - x_0)f'(x) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Zobecnění **věty 5.6**:

Věta 5.6'

Nechť $n \geq 2$ a necht

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f má lokální minimum v x_0 .



Postačující podmínky existence lokálního extrému

Místo věty 5.5 lze použít její speciální případ:

Věta 5.5'

Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $(x - x_0)f'(x) > 0$, potom f má ostré lokální minimum v bodě x_0 .
- $(x - x_0)f'(x) < 0$, potom f má ostré lokální maximum v bodě x_0 .

Zobecnění věty 5.6:

Věta 5.6'

Nechť $n \geq 2$ a necht

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f nemá lokální extrém v bodě x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f má lokální minimum v x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) < 0$, potom f má lokální maximum v x_0 .



4. přednáška
○○○○

5. přednáška
○○○○○○○○○○○○○○

6. přednáška
○○○○○

Podrobnosti
○●○○○○○

Konvexnost, konkávnost

zpět



Konvexnost, konkávnost

Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

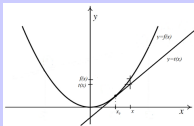
- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .

Konvexnost, konkávnost

Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .



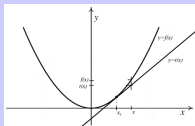
ryze konvexní

Konvexnost, konkávnost

Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je **konvexní v bodě x_0** .



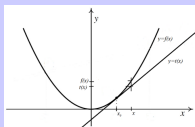
ryze konvexní

Konvexnost, konkávnost

Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je **konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) < t(x)$, potom funkce f je **ryze konkávní v bodě x_0** .



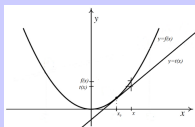
ryze konvexní

Konvexnost, konkávnost

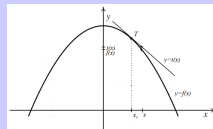
Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je **konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) < t(x)$, potom funkce f je **ryze konkávní v bodě x_0** .



ryze konvexní



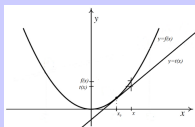
ryze konkávní

Konvexnost, konkávnost

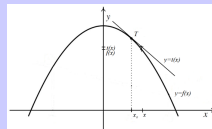
Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je **konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) < t(x)$, potom funkce f je **ryze konkávní v bodě x_0** .
- $f(x) \leq t(x)$, potom funkce f je **konkávní v bodě x_0** .



ryze konvexní



ryze konkávní

Konvexnost, konkávnost

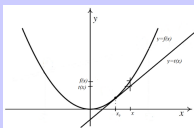
Definice 5.7

Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a necht' t je lineární funkce, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Jestliže pro každé x z nějakého redukovaného okolí bodu x_0 platí

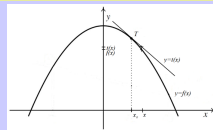
- $f(x) > t(x)$, potom funkce f je **ryze konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) \geq t(x)$, potom funkce f je **konvexní v bodě x_0** .
- $f(x) < t(x)$, potom funkce f je **ryze konkávní v bodě x_0** .
- $f(x) \leq t(x)$, potom funkce f je **konkávní v bodě x_0** .

Věta 5.11

Nechť funkce f má derivaci na intervalu (a, b) . Potom funkce f je (ryze) konvexní (konkávní) na intervalu (a, b) právě tehdy, když je (ryze) konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.



ryze konvexní



ryze konkávní

Věta 5.12

Nechť $n \geq 3$ a nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .

Postačující podmínka inflexe

Věta 5.12

Nechť $n \geq 3$ a nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f je konvexní v x_0 .

Postačující podmínka inflexe

Věta 5.12

Nechť $n \geq 3$ a nechť

$$\left(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \right) \quad \wedge \quad \left(f^n(x_0) \neq 0 \right).$$

- Je-li n liché číslo, potom funkce f má inflexi v bodě x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) > 0$, potom f je konvexní v x_0 .
- Je-li n sudé a $f^n(x_0) < 0$, potom f je konkávní v x_0 .

Vzorové vypracování průběhu funkce

$$A: f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1. Definiční obor:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\neq 0 \\ (x - 1)(x + 1) &\neq 0 \\ x &\neq \pm 1 \end{aligned} \quad \implies D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

2. Sudost, lichost funkce:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \implies f \text{ je lichá}$$

Vzorové vypracování průběhu funkce

zpět

3. Znaménko výrazu $f(x)$:

$$\begin{array}{lcl}
 f(x) = 0 & \begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \\
 \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 & \text{kladná: } (-1, 0), (1, \infty) \\
 x = 0 & \text{záporná: } (-\infty, -1), (0, 1)
 \end{array}$$

4. Průsečíky: s osou $x \dots P_x = [0, 0]$;
s osou $y \dots f(0) = 0 \implies P_y = [0, 0]$

5. Limity v krajních bodech komponent definičního oboru:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \dots = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \infty & \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -\infty
 \end{aligned}$$



Vzorové vypracování průběhu funkce

6. Asymptoty:

bez směrnice... $a_1 : x = 1$, $a_1 : x = -1$

se směrnicí...

$$\boxed{\infty} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - (x^3 - x)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

... $a_2 : y = x$

$$\boxed{-\infty} \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \dots = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \dots = 0$$

... $a_3 \sim a_2$

Vzorové vypracování průběhu funkce

$$B: f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$$

$$\dots D_{f'} = D_f$$

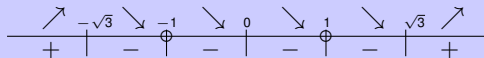
1. Znaménko výrazu $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = 0$$

$$x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$



rostoucí: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$

klesající: $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$

2. Lokální extrémy:

$$\text{lok. minimum.} \dots D = [\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = [\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [\sqrt{3}, 2.6]$$

$$\text{lok. maximum.} \dots V = [-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = [-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [-\sqrt{3}, -2.6]$$



Vzorové vypracování průběhu funkce

zpět

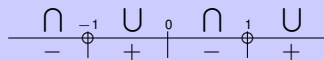
V

$$\begin{aligned}
 \text{C: } f''(x) &= \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 3) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} \\
 &= \dots = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x - 1)^3(x + 1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\dots D_{f''} = D_f$$

1. Znaménko výrazu $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \frac{2x(x^2 + 3)}{(x - 1)^3(x + 1)^3} &= 0 \\
 2x(x^2 + 3) &= 0 \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

konvexní: $(-1, 0), (1, \infty)$ konkávní: $(-\infty, -1), (0, 1)$ 2. Inflexní bod: $\dots I = [0, 0]$

D: Graf funkce



Konec
(5. Využití derivace)