Referát

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$

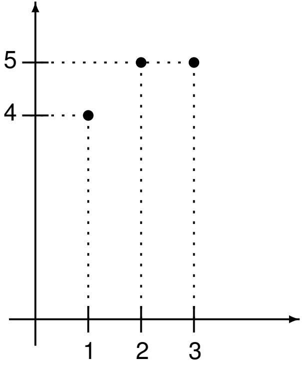
- $f = \{[1, 4], [2, 5], [3, 5]\}$ je funkce z A do B
- $1, 2, 3$ jsou argumenty funkce f
- $\mathrm{D}_f = \{1, 2, 3\}$ je definiční obor funkce f
- $4, 5$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $\mathrm{H}_f = \{4, 5\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(1) = 4, \; f(2) = 5, \; f(3) = 5$
- tabulkou:

argument	1	2	3
funkční h.	4	5	5

- graficky:



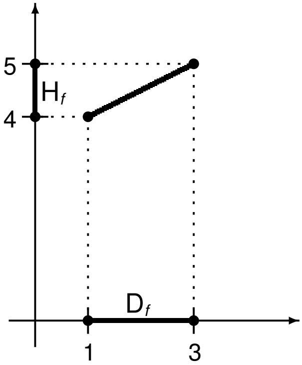
$A = \langle 1, 3) \,, \quad B = \langle 4, 5 \rangle$

- Jak zadat funkci f ?

$$\boxed{f(x) = \frac{x+7}{2}, \quad x \in \langle 1, 3)}$$

potom např. $\quad f(1) = \dfrac{1+7}{2} = 4, \quad f(1.2) = \dfrac{1.2+7}{2} = 4.1, \quad \ldots$

- Jak vypadá graf funkce f ?

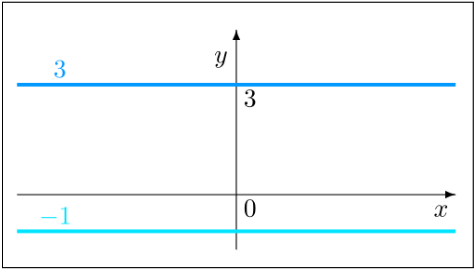


Konstantní funkce

$$3, \ -1, \ \ldots$$

$$\boxed{f(x) = c, \quad \text{kde} \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$$

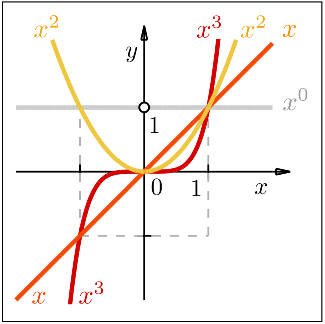


Mocnina

$x, x^2, x^3, \ldots$

$\boxed{f(x) = x^n, \quad \text{kde} \ n \in \mathbb{N}}$

$D_f = (-\infty, \infty)$

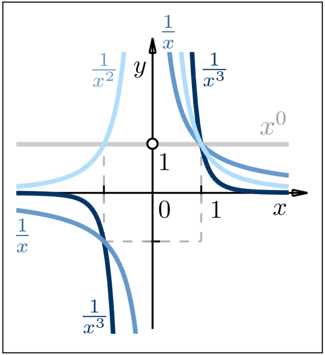


$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad \text{kde} \ n \in \mathbb{N}}$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $x \neq 0$

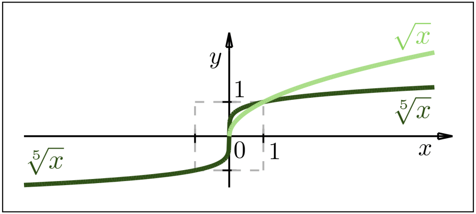


Odmocnina

$$\sqrt{x},\ \sqrt[5]{x},\ \dots$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \text{kde} \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$\mathrm{D}_f = \begin{cases} (-\infty, \infty) & \text{pro } n \text{ liché} \\ \langle 0, \infty) & \text{pro } n \text{ sudé} \implies \boxed{\textbf{podmínka:} \quad x \geq 0} \end{cases}$$

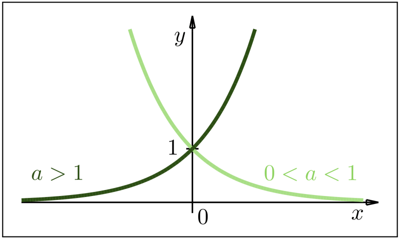


Exponenciální a logaritmická funkce

e^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, ...

$$\boxed{f(x) = a^x, \quad \text{kde} \ \ a > 0, \ a \neq 1}$$

$$D_f = (-\infty, \infty)$$

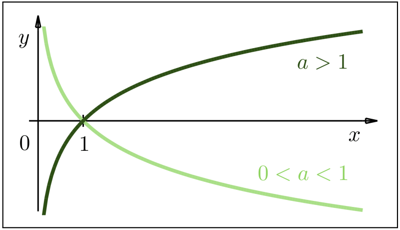


$\log x$, $\ln x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$, ...

$$\boxed{f(x) = \log_a x, \quad \text{kde} \ \ a > 0, \ a \neq 1}$$

$$D_f = (0, \infty)$$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $x > 0$



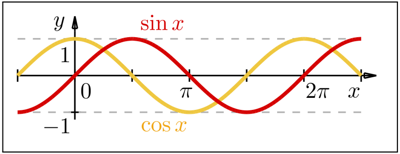
Goniometrické funkce

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$\boxed{f(x) = \cos x}$

$D_f = (-\infty, \infty)$



$\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x}$

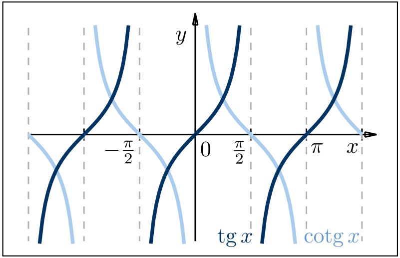
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{f(x) = \operatorname{cotg} x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$



Cyklometrické funkce

$f(x) = \arcsin x$

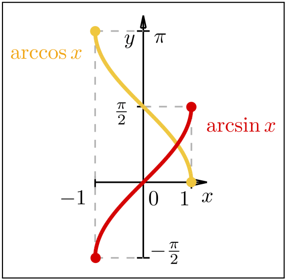
$D_f = \langle -1, 1 \rangle$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $-1 \leq x \ \wedge \ x \leq 1$

$f(x) = \arccos x$

$D_f = \langle -1, 1 \rangle$

$\Longrightarrow$ **podmínka:** $-1 \leq x \ \wedge \ x \leq 1$

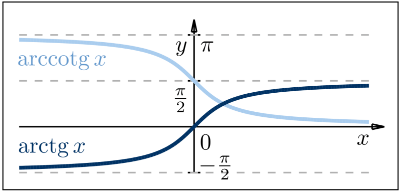


$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$

$D_f = (-\infty, \infty)$



Operace s funkcemi

Funkce lze

- sčítat:
$$f(x) = x^2 + \ln x \quad \ldots \mathrm{D}_f = (0, \infty)$$
- odčítat:
$$f(x) = \sqrt{x} - \arcsin x \quad \ldots \mathrm{D}_f = \langle 0, 1\rangle$$
- násobit:
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x \quad \ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$$
- dělit:
$$f(x) = \frac{3}{e^x} \quad \ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$$
- skládat:
$$f(x) = (\sin x)^2 \quad \ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$$
- a tyto operace kombinovat a opakovat:
$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3 \quad \ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, \infty) \quad \ldots \text{Polynom}$$

$\Longrightarrow$ vzniká „bohatá“ třída tzv. elementárních funkcí

Příklad 1.1: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$

$$= k(z^2 - z), \qquad \text{kde} \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

$$= k\big(m(z) - l(z)\big), \qquad \text{kde} \quad m(x) = x^2, \; l(x) = x$$

- v zadání chybí D_f ... rozumí se všechna z vyhovující **podmínkám** na definiční obory dílčích funkcí k, l, m
- určete D_f !

Podmínky:

$$\underbrace{\begin{array}{rl} \text{na } \mathrm{D}_k: & \boxed{x \neq 0} \qquad \text{na } \mathrm{D}_m,\ \mathrm{D}_l \text{ nejsou podmínky} \\ & z^2 - z \neq 0 \\ & z(z-1) \neq 0 \\ & z \neq 0,\ z \neq 1 \end{array}}$$

$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)}}$$

Příklad 1.2: $f(z) = \sqrt{z^2 + 5z - 14}$

$$\boxed{x \geq 0}$$

$$z^2 + 5z - 14 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \underline{\underline{D_f = (-\infty, -7\rangle \cup \langle 2, \infty)}}$$

Příklad 1.3: $f(x) = \ln(2 - 3x)$

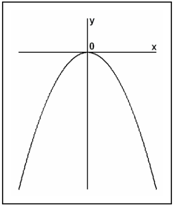
$$2 - 3x > 0 \qquad \Longrightarrow \underline{\underline{D_f = \left(-\infty, -\tfrac{2}{3}\right)}}$$

Příklad 1.4: $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\log(x-1)}$

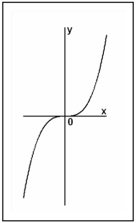
$$\underbrace{\begin{array}{llllll} \text{I.} & 7 - x \geq 0 & \text{II.} & x - 1 > 0 & \text{III.} & \log(x-1) \neq 0 \\ & 7 \geq x & & x > 1 & & x - 1 \neq 10^0 \\ & & & & & x \neq 2 \end{array}}$$

$$\underline{\underline{D_f = (1, 2) \cup (2, 7\rangle}}$$

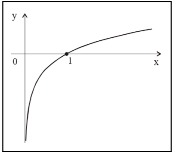
Vlastnosti funkcí



sudá



lichá



prostá

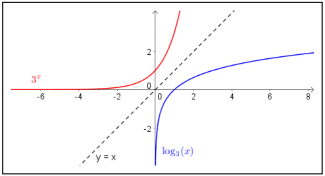
- pro prostou funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} a platí

$$\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$$

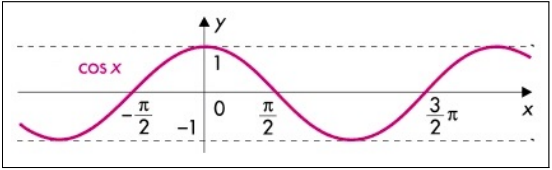
např. $\log_2 x = 3$ nebo $\sin x = 0.3$

$x = 2^3$ $\qquad$ $x = \arcsin 0.3$

- grafy vzájemně inverzních funkcí jsou symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu:



Vlastnosti funkcí



- ohraničená shora, ohraničená zdola $\Longrightarrow$ ohraničená
- periodická, základní perioda 2π
- průsečíky s osou $\boxed{x}$: $\ldots, \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{3}{2}\pi, 0\right], \ldots$
- průsečík s osou $\boxed{y}$: $[0, \cos 0] = [0, 1]$
- kladná : $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \ldots$
- záporná : $\ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots$
- rostoucí : $\ldots, \langle -\pi, 0\rangle, \langle \pi, 2\pi\rangle, \ldots$
- klesající : $\ldots, \langle 0, \pi\rangle, \langle 2\pi, 3\pi\rangle, \ldots$
- lokální maxima : $\ldots, [0, \cos 0] = [0, 1], [2\pi, \cos 2\pi] = [2\pi, 1], \ldots$
- lokální minima :
  $\ldots, [-\pi, \cos(-\pi)] = [-\pi, -1], [\pi, \cos \pi] = [\pi, -1], \ldots$
- konvexní : $\ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots$
- konkávní : $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \ldots$
- inflexe : $\ldots, \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{3}{2}\pi, 0\right], \ldots$

Vyšetřování monotónnosti a lokálních extrémů

Příklad 2.1: $f(x) = 3x^5 - 10x^3 \qquad \ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$

a) První derivace:

$$f'(x) = (3x^5 - 10x^3)' = 15x^4 - 30x^2 = 15x^2(x^2 - 2) = 15x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

b) Znaménko první derivace:

$$f'(x) = 0$$
$$15x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{2} \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \nearrow & -\sqrt{2} & \searrow & 0 & \searrow & \sqrt{2} & \nearrow \\ + & | & - & | & - & | & + \end{array}$$

rostoucí: $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, \infty\right)$

klesající: $\left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(0, \sqrt{2}\right)$

c) Lokální extrémy:

LOKMAX: $[-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})] = [-\sqrt{2}, 3(-\sqrt{2})^5 - 10(-\sqrt{2})^3] \approx \underline{\underline{[-1.4, 11.3]}}$

LOKMIN: $[\sqrt{2}, f(\sqrt{2})] = [\sqrt{2}, 3(\sqrt{2})^5 - 10(\sqrt{2})^3] \approx \underline{\underline{[1.4, -11.3]}}$

Vyšetřování konvexnosti, konkávnosti a inflexních bodů

Příklad 2.2: $f(x) = 3x^5 - 10x^3 \qquad \dots D_f = (-\infty, \infty)$

a) Druhá derivace:

$$f''(x) = (3x^5 - 10x^3)'' = (15x^4 - 30x^2)' = 60x^3 - 60x = 60x(x-1)(x+1)$$

b) Znaménko druhé derivace:

$$f''(x) = 0$$
$$60x(x-1)(x+1) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$

	-1		0		1	
$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$
$-$		$+$		$-$		$+$

konvexní: $(-1, 0), (1, \infty)$

konkávní: $(-\infty, -1), (0, 1)$

c) Inflexe:

$$[-1, f(-1)] = [-1, 3(-1)^5 - 10(-1)^3] = [-1, 7]$$
$$[0, f(0)] = [0, 0]$$
$$[1, f(1)] = [1, -7]$$

Extremální úloha

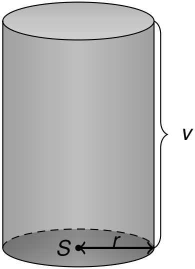
Příklad 2.3: Válcový sud má mít objem 32π m^3. Náklady na výrobu 1 m^2 pláště jsou poloviční ve srovnání s náklady na výrobu 1 m^2 dna sudu. Navrhněte rozměry sudu tak, aby náklady na jeho výrobu byly minimální.

$$\begin{aligned}
N &= N_d + N_p \\
&= S_d \cdot n_d + S_p \cdot n_p \\
&= \pi r^2 \cdot n_d + 2\pi r v \cdot n_p \\
N(r) &= \pi r^2 \cdot 2n_p + 2\pi r \tfrac{32}{r^2} \cdot n_p \\
&= 2\pi n_p (r^2 + 32 r^{-1})
\end{aligned}$$

$$n_d = 2n_p$$

$$32\pi = \pi r^2 v$$

$$v = \tfrac{32}{r^2}$$



$$\begin{aligned}
N'(r) &= 2\pi n_p (2r - 32 r^{-2}) \\
&= 4\pi n_p \frac{r^3 - 16}{r^2} \\
&= 4\pi n_p \frac{(r - \sqrt[3]{16})\overbrace{(r^2 + \cdots)}^{>0}}{r^2}
\end{aligned}$$

$$N'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{16}$$

× × ×	0	$\searrow$ $-$	$\sqrt[3]{16}$	$\nearrow$ $+$

Funkce N nabývá lok. min. pro $r = \sqrt[3]{16}$; tomu odpovídá $v = \frac{32}{r^2} = \cdots = 4\sqrt[3]{2}$.

$\Longrightarrow$ Náklady budou minimální při rozměrech $\underline{\underline{r = \sqrt[3]{16} \doteq 2.5,\ v = 4\sqrt[3]{2} \doteq 5}}$.

$(\ldots$pro $n_p = 100,$- je $N(\sqrt[3]{16}) = 11\,969,-$, $N(2) = 12566,-)$

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Příklad 2.4:

Vyšetřete extrémy funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$ na intervalu $\langle 1, 3\rangle$.

1. Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle 1, 3\rangle$:

$$f(1) = -3, \quad f(3) = 13$$

2. Vypočítáme funkční hodnoty v takových bodech intervalu $(1, 3)$, v nichž je derivace funkce f nulová nebo neexistuje.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 - 16x &= 0 \\ 4x(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2$$

$$f(2) = -12$$

3. Vyhodnotíme nejvyšší a nejnižší zjištěné funkční hodnoty

$$\underline{\underline{\text{MAX: } V = [3, 13]}} \qquad \underline{\underline{\text{MIN: } D = [2, -12]}}$$

Příklad 2.5:

$$(3x^5 - 10x^3)' = (3x^5)' - (10x^3)' = 3(x^5)' - 10(x^3)' = 3 \cdot 5x^4 - 10 \cdot 3x^2$$
$$= \underline{\underline{15x^4 - 30x^2}}$$

vzorce (derivace rozdílu, násobku)

$\boxed{(f - g)' = f' - g'}$ $\boxed{(cf)' = cf'}$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

Příklad 2.6:

$$\left(\sqrt{x} - \tfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-1}\right)' = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}}}$$

Příklad 2.7:

$$(-2\cos x + e^x + \ln x + 5)' = -2(\cos x)' + (e^x)' + (\ln x)' + (5)'$$
$$= \underline{\underline{2\sin x + e^x + \tfrac{1}{x}}}$$

vzorce

$\boxed{(cosx)' = -\sin x}$ $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $\boxed{(\ln x)' = \tfrac{1}{x}}$ $\boxed{(c)' = 0}$

Příklad 2.8:

$$(x^2 \cdot 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' \quad = \underline{\underline{2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3}}$$

vzorce (derivace součinu)

$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$

Příklad 2.9:

$$\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x-1)'(x^2+1)-(2x-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}}}$$

vzorce (derivace podílu)

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

Příklad 2.10:

$$(\sin x^3)' = (x^3)' \cdot \sin'(x^3) = \underline{\underline{3x^2 \cdot \cos(x^3)}}$$

vzorce (derivace složené funkce)

$\boxed{(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)}$ $\boxed{\sin' = \cos}$

Derivace funkce dané parametricky

$M \subset \mathbb{R}$, $\phi, \psi \ldots$ funkce def. na M se speciálními vlastnostmi podrobnosti

$$f = \{[\phi(t), \psi(t)] : t \in M\}$$

$$f' = \left\{ \left[\phi(t), \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right] : t \in M \right\}$$

$$f'' = \left\{ \left[\phi(t), \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'(t))^3} \right] : t \in M \right\}$$

Příklad 2.11:

Určete 1. a 2. derivaci funkce $f : \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^3 - 1 \\ y(t) & = & \ln t \end{array}\right\} t > 0$

---

tj.

$$\phi(t) = t^3 - 1, \qquad \psi(t) = \ln t, \qquad f = \left\{ \left[t^3 - 1, \ln t \right] : t > 0 \right\}$$

$$\phi'(t) = 3t^2, \qquad \psi'(t) = \frac{1}{t}, \qquad f' = \left\{ \left[t^3 - 1, \frac{\frac{1}{t}}{3t^2} \right] : t > 0 \right\}$$

$$\phi''(t) = 6t, \qquad \psi''(t) = -\frac{1}{t^2}, \qquad f'' = \left\{ \left[t^3 - 1, \frac{-\frac{1}{t^2} \cdot 3t^2 - \frac{1}{t} \cdot 6t}{(3t^2)^3} \right] : t > 0 \right\}$$

$$\phi(t) = t^3 - 1, \qquad \psi(t) = \ln t, \qquad f = \left\{ \left[t^3 - 1, \ln t \right] : t > 0 \right\}$$

$$\phi'(t) = 3t^2, \qquad \psi'(t) = \frac{1}{t}, \qquad f' = \left\{ \left[t^3 - 1, \frac{\frac{1}{t}}{3t^2} \right] : t > 0 \right\}$$

$$\phi''(t) = 6t, \qquad \psi''(t) = -\frac{1}{t^2}, \qquad f'' = \left\{ \left[\frac{-\frac{1}{t^2} \cdot 3t^2 - \frac{1}{t} \cdot 6t}{(3t^2)^3} \right] : t > 0 \right\}$$

$$\underline{\underline{f' : \left. \begin{array}{rcl} x(t) & = & t^3 - 1 \\ y(t) & = & \dfrac{1}{3t^3} \end{array} \right\} t > 0}}, \qquad \underline{\underline{f'' : \left. \begin{array}{rcl} x(t) & = & t^3 - 1 \\ y(t) & = & -\dfrac{1}{3t^6} \end{array} \right\} t > 0}}$$

Derivace inverzní funkce

- inverzní funkce: $\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$
- její derivace: $\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$

Příklad 2.12: $f(x) = e^x, \qquad f^{-1}(y) = \ln y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y}$$

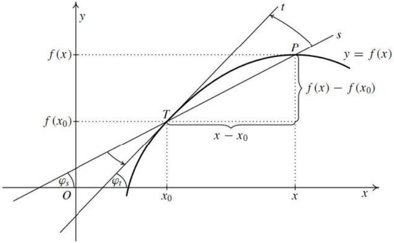
Ověření: $\qquad (f^{-1})'(y) = (\ln y)' = \dfrac{1}{y}$

Geometrická motivace

Úkol:

Vyjádřete směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 \in D_f$.

- Zvolíme $x \in D_f$, $x \neq x_0$, a potažmo bod $P = [x, f(x)]$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0, přičemž bod P se bude pohybovat po grafu funkce f k bodu T.
- V okamžiku, kdy x splyne s x_0, splyne také bod P s bodem T, sečna s s tečnou t a směrnice sečny s se směrnicí tečny t.



Směrnice sečny s :

$$\boxed{k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Směrnice tečny t :

$$\boxed{f'(x_0) := k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Tečna a normála

Příklad 2.13: Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11} \quad = \left(x^2 - 3x + 11\right)^{\frac{1}{2}}$$

v bodě T, jehož x-ová souřadnice je 2.

$T = [x_0, y_0] = [2, f(2)] = [2, 3]$

$$f'(x) = (2x - 3) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 3x + 11\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 11}}$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{6}$$

$$t : y - 3 = \frac{1}{6}(x - 2)$$

$$t : y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}$$

$$n : y - 3 = -\frac{1}{\frac{1}{6}}(x - 2)$$

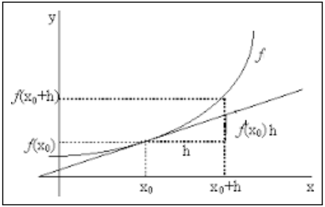
$$n : y = -6x + 15$$

vzorce (rovnice tečny a normály)

$$\boxed{t \ : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$\boxed{f'(x_0) \neq 0 \implies n : \ y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Diferenciál



$$\boxed{f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, h}$$

Příklad 2.14: Vyjádřete v desetinném tvaru (přibližnou) hodnotu $(1.02)^{11}$.

$$(1.02)^{11} = \underbrace{1.02 \cdot 1.02 \cdot \cdots \cdot 1.02}_{11 \text{ krát}} = \cdots \approx \underline{\underline{1.2438}}$$

$$= (1+0.02)^{11} \approx 1^{11} + 11 \cdot 1^{10} \cdot 0.02 = 1 + 0.22 = \underline{\underline{1.22}}$$

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = x^{11}, \quad x_0 = 1, \quad h = 0.02 \\ f'(x) = 11x^{10} \end{array} \right|$$

$\boxed{\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}}$ ... diferenciál funkce f v bodě x_0.

Taylorův rozvoj

- Taylorův polynom 1. stupně $\qquad h = x - x_0 \quad \dots$ pro x „blízko“ x_0.

$$f(x_0 + hx) \approx \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h(x - x_0)}$$

- Taylorův polynom 2. stupně

$$f(x) \approx \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2}$$

- Taylorův polynom 3. stupně

$$f(x) \approx \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3}$$

- Taylorův polynom *n*-tého stupně

$$f(x) \approx \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n}$$

$\vdots$

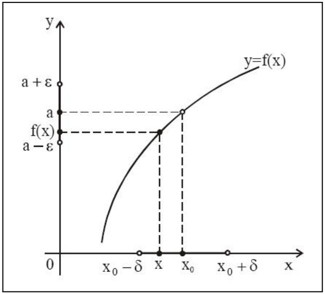
- Taylorův rozvoj

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j}$$

Předpokládejme, že $x \longrightarrow x_0$.

- Jestliže $f(x) \longrightarrow a$, říkáme, že a je limita funkce f v bodě x_0,

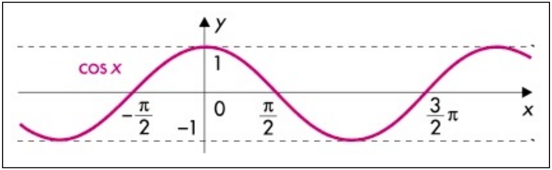
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$



- V opačném případě říkáme, že neexistuje limita funkce f v bodě x_0

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Např. $\nexists \lim_{x \to \infty} \cos(x)$:

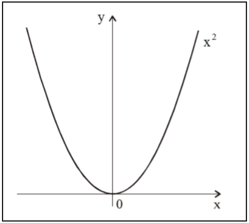


Příklad 3.1:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = \underline{\underline{4}}$$ . . . vlastní limita ve vlastním bodě

$$\lim_{x\to \infty} x^2 = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^2 = \underline{\underline{\infty}}$$ . . . nevlastní limita v nevlastním bodě

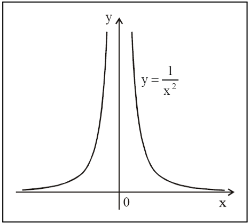


Příklad 3.2:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{0}}$$ . . . vlastní limita v nevlastním bodě

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{\infty}}$$ . . . nevlastní limita ve vlastním bodě

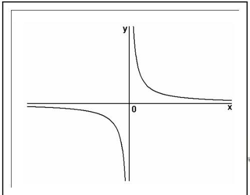


Příklad 3.3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \underline{\underline{\nexists}}$$ . . . oboustranná limita

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = \underline{\underline{-\infty}}$$ . . . levostranná limita

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \underline{\underline{\infty}}$$ . . . pravostranná limita



- limitu vyhodnotit podle grafu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$
- limitu vyhodnotit dosazením $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{2\cdot 2-1}{2+3} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$
- nevede-li dosazení na vlastní limitu, vyhodnotit dílčí limity a dále
  - lze rozhodnout $\boxed{\frac{a^+}{0^+}, \quad \frac{a}{\infty}, \quad a^+\cdot\infty, \quad \infty\cdot\infty, \quad a+\infty, \quad \infty+\infty\ldots}$

$$\lim_{x\to\infty} 2x \overset{\boxed{a^+\cdot\infty}}{=} \underline{\underline{\infty}} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} \overset{\boxed{\frac{a^+}{0^+}}}{=} \underline{\underline{\infty}}$$

  - nelze rozhod. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^\infty\ldots}$

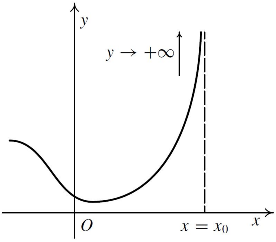
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x) \overset{\boxed{\infty-\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x}\right) \overset{\boxed{\infty\cdot a^+}}{=} \underline{\underline{\infty}}$$

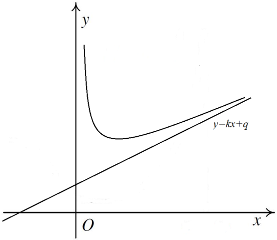
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{3x^2} \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-2x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{6x} \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-2)'}{(6x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

… pro $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ nebo $\boxed{\frac{0}{0}}$ lze použít L'Hospitalovo pravidlo

Asymptoty



Vertikální asymptota $x = x_0$



Asymptota se směrnicí

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$ nebo $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$.

$x = x_0$ je asymptota bez směrnice

$k, q \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0}$ $\left(\text{resp.} \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0}\right)$

$y = kx + q$ je asymptota se směrnicí

Vyšetřování asymptot explicitně zadané funkce f

- Vyjádříme $\boxed{D_f}$ ve tvaru sjednocení komponent.
- Asymptotu bez směrnice vyšetřujeme v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, je-li tento krajním bodem některé komponenty množiny D_f:
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$ nebo $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \{-\infty, \infty\}}$,

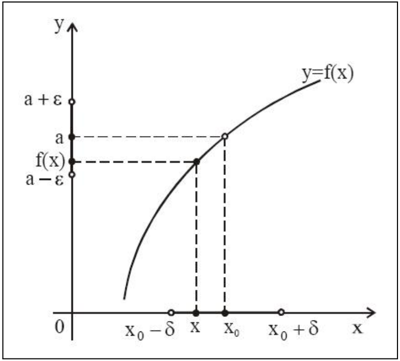
    potom přímka $\boxed{a: \; x = x_0}$ je asymptota. V opačném případě asymptota v bodě x_0 neexistuje.
- Asymptotu se směrnicí vyšetřujeme v bodě ∞, je-li tento krajním bodem některé komponenty množiny D_f:
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}$ existuje a je vlastní, označíme ji $\boxed{k}$. V opačném případě asymptota v bodě ∞ neexistuje.
  - Jestliže $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)}$ existuje a je vlastní, označíme ji $\boxed{q}$,

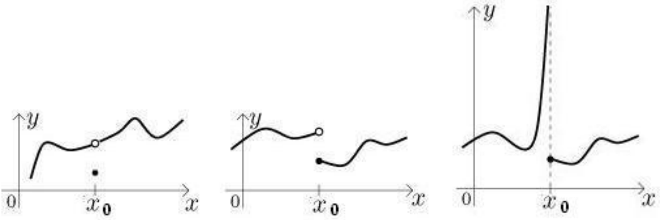
    načež přímka $\boxed{a: \; y = kx + q}$ je asymptota. V opačném případě asymptota v bodě ∞ neexistuje.

Analogicky postupujeme pro bod $-\infty$.

Spojitost

- funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f$, jestliže
  $$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$
- funkce je spojitá na intervalu, je-li spojitá v každém jeho bodě
  … graf je souvislá křivka
- element. funkce jsou spojité na každém intervalu svého definičního oboru
- nespojitost odstranitelná, 1. druhu, 2. druhu





Vzorové vypracování průběhu funkce

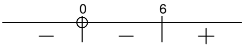
A: $f(x) = (x-6)e^{-\frac{1}{x}}$

1. Definiční obor: $x \neq 0 \implies D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
2. Sudost, lichost funkce:

$$f(-1) = -7e \neq -\frac{5}{e} = f(1) \implies f \text{ není sudá}$$
$$f(-1) = -7e \neq \frac{5}{e} = -f(1) \implies f \text{ není lichá}$$

3. Znaménko výrazu $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x-6)e^{-\frac{1}{x}} &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



kladná: $(6, \infty)$

záporná: $(-\infty, 0), (0, 6)$

4. Průsečíky: s osou $x \ldots P_x = [6, 0]$; s osou $y \ldots 0 \notin D_f \implies \nexists$

5. Limity v krajních bodech komponent definičního oboru:

$\ldots \mathrm{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-6)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x-6)e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-6)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-6)e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

5. Asymptoty:
bez směrnice $\ldots a_1 : \; x = 0$

se směrnicí… $\dots \mathrm{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$\boxed{\infty} \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-6}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{6}{x}\right)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left[(x-6)e^{-\frac{1}{x}} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \left[\frac{x-6}{x} e^{-\frac{1}{x}} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-6}{x} e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-(x-6)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x-6}{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x-6}{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-6e^{-\frac{1}{x}} - \frac{x-6}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-7e^{-\frac{1}{x}} + \frac{6}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = -7$$

$\dots a_2 : y = x - 7$

$$\boxed{-\infty} \quad k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-6}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \dots = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left[(x-6)e^{-\frac{1}{x}} - x\right] = \dots = -7$$

$\dots a_3 \sim a_2$

$$\dots f(x) = (x-6)e^{-\frac{1}{x}}$$

B: $$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x-6)e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2+x-6}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{(x-2)(x+3)}{x^2}$$

$$\dots D_{f'} = D_f$$

1. Znaménko výrazu $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\frac{(x-2)(x+3)}{x^2} = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$+$		$-$		$-$		$+$

rostoucí: $(-\infty,-3)\,,(2,\infty)$

klesající: $(-3,0)\,,(0,2)$

2. Lokální extrémy:

lokální minimum… $D = [2, f(2)] = [2, -\frac{4}{\sqrt{e}}] \approx [2, -2.4]$

lokální maximum… $V = [-3, f(-3)] = [-3, -9\sqrt[3]{e}] \approx [-3, -12.6]$

$$\dots f(x) = (x-6)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\dots f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2+x-6}{x^2} = e^{-x^{-1}}\left(1+x^{-1}-6x^{-2}\right)$$

C: $f''(x) = x^{-2}e^{-x^{-1}}\left(1+x^{-1}-6x^{-2}\right) + e^{-x^{-1}}\left(-x^{-2}+12x^{-3}\right)$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(x^2+x-6-x^2+12x\right) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{13x-6}{x^4}$$

$$\dots D_{f''} = D_f$$

1. Znaménko výrazu $f''(x)$:

$$f''(x) = 0$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\frac{13x-6}{x^4} = 0$$

$$x = \frac{6}{13}$$

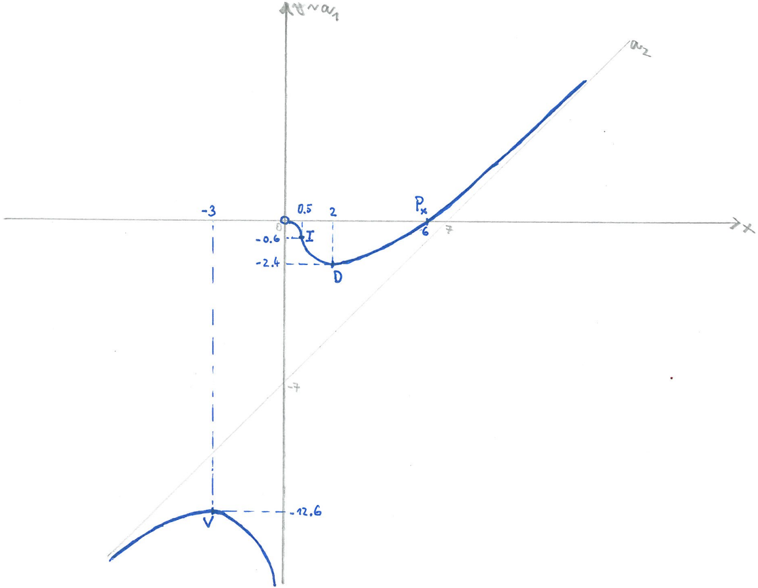
	0		$\frac{6}{13}$	
$\cap$		$\cap$		$\cup$
$-$		$-$		$+$

konvexní: $\left(\frac{6}{13}, \infty\right)$

konkávní: $(-\infty, 0)\,,\, \left(0, \frac{6}{13}\right)$

2. Inflexní body: $\dots I = [\frac{6}{13}, f(\frac{6}{13})] = [\frac{6}{13}, -\frac{72}{13}e^{-\frac{13}{6}}] \approx [0.5, -0.6]$

D: Graf funkce:



Vzorové vypracování průběhu funkce

A: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

1. Definiční obor:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &\neq 0 \\
(x-1)(x+1) &\neq 0 \\
x &\neq \pm 1 \qquad \Longrightarrow \quad D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)
\end{aligned}
$$

2. Sudost, lichost funkce:

$$
f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \implies f \text{ je lichá}
$$

3. Znaménko výrazu $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\frac{x^3}{x^2 - 1} &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

	-1		0		1	
$-$		$+$		$-$		$+$

kladná: $(-1, 0), (1, \infty)$

záporná: $(-\infty, -1), (0, 1)$

4. Průsečíky: s osou $x \dots P_x = [0, 0]$;

   s osou $y \dots f(0) = 0 \implies P_y = [0, 0]$

5. Limity v krajních bodech komponent definičního oboru:

   $\dots \mathrm{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dots = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$

6. Asymptoty:
bez směrnice… $a_1 : \ x = 1, \qquad a_2 : \ x = -1$

se směrnicí…

$$\boxed{\infty} \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - (x^3 - x)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

… $a_3 : y = x$

$$\boxed{-\infty} \quad k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \cdots = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \cdots = 0$$

… $a_4 \sim a_3$

B: $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$\dots D_{f'} = D_f$

1. Znaménko výrazu $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2} = 0$$
$$x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$

rostoucí: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, \infty\right)$

klesající: $\left(-\sqrt{3}, -1\right), (-1, 0), (0, 1), \left(1, \sqrt{3}\right)$

2. Lokální extrémy:

lok. minimum... $D = [\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = [\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [\sqrt{3}, 2.6]$

lok. maximum... $V = [-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = [-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}] \approx [-\sqrt{3}, -2.6]$

C: $$f''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \dots = \frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$\dots D_{f''} = D_f$$

1. Znaménko výrazu $f''(x)$:

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3} = 0$$
$$2x(x^2+3) = 0$$
$$x = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cap & & \cup & & \cap & & \cup \\ & -1 & & 0 & & 1 & \\ - & \circ & + & | & - & \circ & + \end{array}$$

konvexní: $(-1, 0)\,,(1, \infty)$

konkávní: $(-\infty, -1)\,,(0, 1)$

2. Inflexní bod: $\dots I = [0, 0]$

D: Graf funkce

Funkce daná parametricky

zpět

Definice 0.1

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $\phi : M \to \mathbb{R}$, $\psi : M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Nechť existuje ϕ^{-1}. Potom funkce $f : H_\phi \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\boxed{f(x) := \psi(\phi^{-1}(x)), \qquad x \in H_\phi,}$$

se nazývá funkce daná parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$ a $y = \psi(t)$.

Konec

(Referát)