Kombinatorika

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

4. Skupiny bez opakování

GOA – ORLOVA.CZ

Variace (bez opakování)

Definice 4.1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Uspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se neopakují, se nazývá *k-členná variace z n prvků*. Počet všech k-členných variací z n prvků se označuje $\boxed{V(k,n)}$.

Příklad 4.1 V základní části oblastního přeboru ČBF se hraje systémem „každý s každým“, přičemž se dvojice týmů utká vždy jak na domácí, tak na soupeřově palubovce. Kolik utkání se odehraje, jsou-li ve skupině týmy Start Havířov, Snakes Orlová, NH Ostrava a Basketpoint Frýdek-Místek?

- Utkání hrajou dva týmy ze čtyř možných $\Longrightarrow$ sestavujeme dvojice ze čtyř prvků
- Start Havířov vs. Snakes Orlová (hraje se v Havířově), Snakes Orlová vs. Start Havířov (hraje se v Orlové) jsou dvě utkání $\Longrightarrow$ záleží na pořadí
- utkání Snakes Orlová vs. Snakes Orlová je nesmysl $\Longrightarrow$ prvky se nemohou opakovat

Jde o 2-členné variace ze čtyř prvků. Jejich počet lze určit pomocí komb. pravidla součinu:

$$V(2,4) = 4 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$$

GOA ORLOVA.CZ

Pozorování:

Na základě komb. pravidla součinu dostáváme

$$V(2,4) = \overbrace{4 \cdot 3}^{2} \qquad V(3,4) = \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}^{3} \qquad V(4,4) = \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{4}$$

$$V(6,10) = \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{6}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} V(k,n) &= \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}^{k} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \cdot \frac{(n-k)(n-(k+1)) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-(k+1)) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

- kombinatorické pravidlo umožňuje mj. vyčíslit $V(k,n)$.
- dříve nám pomohlo i v jiných (komplikovanějších) situacích!

Věta 4.1

$$\boxed{V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Příklad 4.2 Urči počet čísel od 100 do 80000, v jejichž zápisu se každá cifra vyskytuje jen jednou.

Určíme postupně počet čísel s touto vlastností, která mají

- 3-cifry: $p_3 = V(3,10) - V(2,9) = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = \cdots = \underset{\sim}{648}$
- 4-cifry: $p_4 = V(4,10) - V(3,9) = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \cdots = \underset{\sim}{4536}$
- 5-cifer: $p_5 = V(5,10) - V(4,9) - V(4,9) - V(4,9) = \frac{10!}{5!} - 3\frac{9!}{5!} = \cdots = \underset{\sim}{21168}$
  (vyřazujeme čísla začínající nulou, osmičkou, devítkou)

Na základě komb. pravidla součtu potom celkový počet uvažovaných čísel dostaneme jako součet

$$p_3 + p_4 + p_5 = 648 + 4536 + 21168 = \underline{\underline{26352}}$$

Příklad 4.3 Ukažte, že pro $\mathbb{N} \ni n \leq 10$ je počet n-ciferných a $(n-1)$-ciferných čísel, sestavených v obou případech z n různých cifer $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, stejný.
(Např. počet 4-ciferných a počet 3-ciferných z cifer $\{0, 1, 2, 3\}$).

Podobně jako v předchozím příkladě vyjádříme počet čísel s touto vlastností, která mají

- n cifer: $p_n = V(n, n) - V(n-1, n-1)$
- $n-1$ cifer: $p_{n-1} = V(n-1, n) - V(n-2, n-1)$

(vyřazujeme čísla začínající nulou)

Protože

$$V(n, n) = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = V(n-1, n),$$

$$V(n-1, n-1) = \frac{(n-1)!}{0!} = \frac{(n-1)!}{1!} = V(n-2, n-1),$$

je jistě rovněž $p_n = p_{n-1}$.

Příklad 4.4

Kolik verzí šestihodinového čtvrtečního rozvrhu lze sestavit pro jednu třídu z 10 předmětů, které se nesmí během dne opakovat? $\left[\frac{10!}{4!}\right]$

V kolika verzích je čeština zařazena na 1. hodinu? $\left[\frac{9!}{4!}\right]$

V kolika verzích figuruje matematika? $\left[6\frac{9!}{4!}\right]$

Příklad 4.5

Určete počet prvků, z nichž lze utvořit

(a) 240 dvoučlenných variací, [16]

(b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací. [5]

Příklad 4.6

O svém číselném přístupovém kódu k internetovému bankovnictví si Karel zapamatoval, že byl šestimístný, žádná číslice v něm nebyla vícekrát, začínal dvojkou a jeho poslední dvojčíslí bylo dělitelné 25. Kolik kódů má tyto vlastnosti? [420]

Příklad 4.7

Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet 3-členných variací

(a) desetkrát, [3]

(b) o 150. [5]

Určete původní počet prvků.

Permutace (bez opakování)

Definice 4.2

Definice Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uspořádaná n-tice sestavená z n daných prvků, které se neopakují, se nazývá permutace z n prvků. Počet všech permutací z n prvků se označuje $\boxed{P(n)}$.

Příklad 4.8 Vypište všechny permutace z prvků $\{a, b, c\}$.

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$

Pozorování:

Srovnáním s definicí 4.1 (variace) vidíme, že permutace z n prvků je vlastně n-členná variace z n prvků. Potom počet permutací lze odvodit z věty 4.1...

Věta 4.2

$$\boxed{P(n) = n!}$$

Příklad 4.9 V historicky nejrychlejším finálovém běhu na 100 m mělo dojít k souboji dvou neporažených sprintérů: Usaina Bolta a Tysona Gaye.

a) Kolik pořadí v cíli je teoreticky možných? (Doběhnou-li všichni do cíle)

b) V kolika pořadích mohl skončit Gay bezprostředně za Boltem?

c) V kolika pořadích mohli Gay s Boltem skončit bezprostředně za sebou při vítězství Powella?

Zajímají nás osmice z 8 sprintérů, když jistě na pořadí záleží a opakování jednoho sprinéra na více pozicích není přípustné. Jde tedy o permutace z 8 prvků.

a) $P(8) = 8! = \underline{\underline{40320}}$

b) Každou osmici lze ztotožnit se sedmicí, v níž jeden prvek je tandem Bolt–Gay Např.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
CHAMBERS	BURNS	BAILEY	BOLT–GAY	POWELL	PATTON	THOMPSON

Počet uvažovaných pořadí je pak $P(7) = 7! = \underline{\underline{5040}}$

c) V těchto případech nás zajímají sedmice s tandemem Bolt–Gay a nově taky Gay–Bolt. Takové sedmice lze ale ztotožnit s šesticemi sprinterů umístěných za Powellem. Např.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
POWELL	BURNS	BAILEY	GAY–BOLT	CHAMBERS	PATTON	THOMPSON

Počet těchto šestic, a tedy uvažovaných pořadí běhu, je $2P(6) = 2 \cdot 6! = \underline{\underline{1440}}$.

Příklad 4.10

V lavici na 6 židlích má sedět 6 žáků, mezi kterými jsou dvojčata. Kolika způsoby můžeme žáky v lavici posadit tak, aby dvojčata neseděla vedle sebe? [480]

Příklad 4.11

Určete počet prvků tak, aby

a) z nich bylo možno sestavit právě 5040 permutací. [7]
b) při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 42-krát. [5]
c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil 30-krát. [6]

Příklad 4.12

Desetimístné heslo k trezoru musí obsahovat všechna písmena z množiny $\{A, B, C, D\}$ a všechny číslice z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kolik různých hesel se dá v trezoru nastavit,

a) mohou-li být písmena a číslice libovolně promíchána. [10!]
b) mají-li být na prvních čtyřech místech písmena a na zbývajících číslice. $[4! \cdot 6!]$

Kombinace (bez opakování)

Definice 4.3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Neuspořádaná k-tice sestavená z n daných prvků, které se neopakují, se nazývá k-členná kombinace z n prvků. Počet všech k-členných kombinací z n prvků se označuje

$$\boxed{K(k, n)}.$$

Příklad 4.13 Kluky mají k venkovnímu utkání v basketbalu odvézt rodiče auty. Kvůli uvalené karanténě však na smluvené nástupní místo dorazí jen Sorďa s tátou v sedmimístném opelu Zafira a dále jeho spoluhráči Machi, Váša, Wikys, Kopec, Urbec, Domča a Marťas, avšak tito bez doprovodu, a tedy bez možnosti přepravy v jiném autě. Kolika způsoby lze v této situaci vybrat Sorďovy spoluhráče k přepravě uvedeným autem, je-li z přítomných k řízení způsobilý jen Sorďův otec a Sorďa pojede automaticky?

- Na 5 zbývajících míst se vybírá ze 7 spoluhráčů $\Longrightarrow$ sestavujeme pětice ze sedmi prvků
- Výběry

	Machi	Váša
Wikys	Kopec	Marťas

	Kopec	Váša
Machi	Wikys	Marťas

jsou z hlediska přepravy stejné $\Longrightarrow$ nezáleží na pořadí

- jeden spoluhráč nezabere dvě místa $\Longrightarrow$ prvky se nemohou opakovat

Jde o 5-členné kombinace ze sedmi prvků. Pro určení jejich počtu uvažujme takto:

Sestavíme-li ze sedmi spoluhráčů všechny uspořádané pětice, bude jich $V(5,7)$.

Budou mezi nimi určitě všechny výběry, o které nám jde…

…každý výběr bude ale prezentován všemi svými pořadími, tj. $P(5)$-krát.

Když jde „jen“ o počet výběrů, potom

$$K(5,7) = \frac{V(5,7)}{P(5)} = \frac{\frac{7!}{2!}}{5!} = \frac{7!}{5!2!} = \underline{\underline{21}}$$

Pozorování:

Úvahu z předchozího příkladu lze zobecnit: Při stejných n daných prvcích vždy jedné k-členné kombinaci odpovídá $P(k)$ k-členných variací s týmiž prvky. Proto

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{P(k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Věta 4.3

$$\boxed{K(k,n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Příklad 4.14

Před kabinou lanovky o kapacitě 6 míst se shromáždilo 10 zájemců o přepravu. Kolika způsoby lze kabinu obsadit? [210]

Příklad 4.15

Jedna holka má narozeniny. Neumí šetřit, pročež ze svých kamarádek Mirky, Jarky, Dáši, Zuzky, Míši a Peťana musí vybrat jen čtyři, které pozve na skromnou oslavu. Kolika má možností sestavit pozvánky na oslavu? [15]

Příklad 4.16

Na hokejovém MS skupiny A v roce 1985 se 8 mužstev nejdříve utkalo v základní části jednokolově systémem každý s každým. Mužstva umístěná po této základní části na 1.- 4. místě postupovala do finálové skupiny, kde se hrálo opět jednokolově systémem každý s každým, stejně jako ve skupině zbývajících mužstev, tj. těch, která byla po základní části na 5.–8. místě.

a) Kolik utkání bylo celkem odehráno? [40]

b) Které mužstvo získalo mistrovský titul? [domácí]

Příklad 4.17

a) Kolika způsoby lze z 21 zájemců sestavit skupinu účastníků vnitřní volnočasové aktivity v nouzovém stavu, tj. s limitem 10 osob? [352 716]

b) Kolika způsoby to lze v případě, že mezi zájemci jsou dvě 4-členné a jedna 5-členná rodina, které uplatňují společný vstup na základě výjimky umožňující účast dalších osob sdílejících společnou domácnost s některým účastníkem a narozdíl od něj nezapočítávaných do rozhodného počtu účastníků? [11]

c) Jaký je v situaci z b) nejvyšší možný počet účastníků vnitřní volnočasové aktivity? [20]

Konec

(4. Skupiny bez opakování)