Extremální úlohy

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

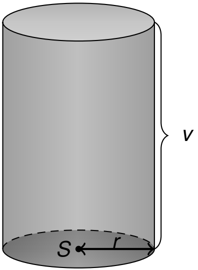
Příklad 1.1: Válcový sud má mít objem 32π m^3. Náklady na výrobu 1 m^2 pláště jsou poloviční ve srovnání s náklady na výrobu 1 m^2 dna sudu. Navrhněte rozměry sudu tak, aby náklady na jeho výrobu byly minimální.

$$\begin{aligned}
N &= N_d + N_p \\
&= S_d \cdot n_d + S_p \cdot n_p \\
&= \pi r^2 \cdot n_d + 2\pi r v \cdot n_p \\
N(r) &= \pi r^2 \cdot 2n_p + 2\pi r \tfrac{32}{r^2} \cdot n_p \\
&= 2\pi n_p (r^2 + 32 r^{-1})
\end{aligned}$$

$$n_d = 2n_p$$

$$32\pi = \pi r^2 v$$

$$v = \tfrac{32}{r^2}$$



$$\begin{aligned}
N'(r) &= 2\pi n_p (2r - 32 r^{-2}) \\
&= 4\pi n_p \frac{r^3 - 16}{r^2} \\
&= 4\pi n_p \frac{(r - \sqrt[3]{16})\overbrace{(r^2 + \cdots)}^{>0}}{r^2}
\end{aligned}$$

$$N'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{16}$$

	0	$\searrow$	$\sqrt[3]{16}$	$\nearrow$
$\times\times\times$		$-$		$+$

Funkce N nabývá lok. min. pro $r = \sqrt[3]{16}$; tomu odpovídá $v = \frac{32}{r^2} = \cdots = 4\sqrt[3]{2}$.

$\Longrightarrow$ Náklady budou minimální při rozměrech $\underline{\underline{r = \sqrt[3]{16} \doteq 2.5,\ v = 4\sqrt[3]{2} \doteq 5}}$.

(…pro $n_p = 100$,- je $N(\sqrt[3]{16}) = 11\,969, -$, $N(2) = 12566, -$)

Příklad 1.2:

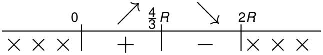
Navrhněte výšku kužele s největším objemem vepsaného do koule o poloměru R.

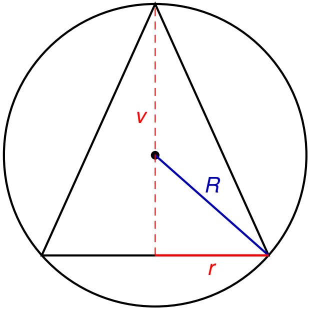
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$V(v) = \frac{1}{3}\pi(2vR - v^2)v = \frac{1}{3}\pi(2Rv^2 - v^3)$$

$$V'(v) = \frac{1}{3}\pi(4Rv - 3v^2) = \frac{1}{3}\pi v(4R - 3v)$$

$$V'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 = 0 \quad \vee \quad v_2 = \frac{4}{3}R$$





$$r^2 = R^2 - (v - R)^2 = 2vR - v^2$$

Funkce V nabývá lok. max. pro $v = \frac{4}{3}R$.

$\Longrightarrow$ Objem bude největší při výšce $v = \frac{4}{3}R$.

Příklad 1.3:

Navrhněte výšku kužele s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru R.

$$P = \pi r s$$

$$P(v) = \pi\sqrt{2vR - v^2} \cdot \sqrt{2vR} = \pi\sqrt{4R^2v^2 - 2Rv^3}$$

$$P'(v) = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (4R^2v^2 - 2Rv^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8R^2v - 6Rv^2)$$

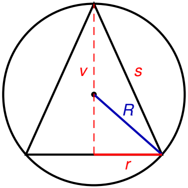
$$= \frac{\pi(8R^2v - 6Rv^2)}{2\sqrt{4R^2v^2 - 2Rv^3}} = \frac{\pi Rv(4R - 3v)}{\sqrt{4R^2v^2 - 2Rv^3}}$$

$$V'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 = 0 \quad \vee \quad v_2 = \frac{4}{3}R$$

	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}R$	$\searrow$	$2R$	
$\times\ \times\ \times$		$+$		$-$		$\times\ \times\ \times$

Funkce P nabývá lok. max. pro $v = \frac{4}{3}R$.

$\Longrightarrow$ Obsah pláště bude největší při výšce $\underline{\underline{v = \frac{4}{3}R}}$.



$$r^2 = R^2 - (v - R)^2$$
$$= 2vR - v^2$$
$$r = \sqrt{2vR - v^2}$$

$$s^2 = r^2 + v^2$$
$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{2vR}$$

Příklad 1.4:

Plášť nahoře otevřené krabičky ve tvaru kvádru má být pořízen ze čtvercového listu papíru o straně 10 cm odstraněním čtverců v jeho rozích. Navrhněte rozměry krabičky tak, aby její objem byl maximální.

$$V = a \cdot b \cdot c \qquad\qquad 2c + a = 10$$

$$b = a = 10 - 2c$$

$$V(c) = (10 - 2c)(10 - 2c)c = 4c^3 - 40c^2 + 100c$$

$$V'(c) = 12c^2 - 80c + 100 = 12(c - \tfrac{5}{3})(c - 5)$$

$$V'(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = \frac{5}{3} \quad \vee \quad c_2 = 5$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & \nearrow & \frac{5}{3} & \searrow & 5 & \\ \hline \times\ \times\ \times & | & + & | & - & | & \times\ \times\ \times \end{array}$$

Funkce V nabývá lok. max. pro $c = \frac{5}{3}$. $\quad \ldots\ b = a = 10 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

$\Longrightarrow$ Objem krabičky bude největší při rozměrech $\underline{\underline{a = b = \frac{20}{3}\text{ cm},\ c = \frac{5}{3}\text{ cm}}}$.

Příklad 1.5:

Z kanálu šířky a vychází pod pravým úhlem kanál šířky b. Zjistěte největší délku d trámu, který je možno splavit z jednoho kanálu do druhého.

$$d = d_a + d_b \qquad \sin\alpha = \frac{a}{d_a} \implies d_a = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{d_b} \implies d_b = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$d(\alpha) = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = a\sin^{-1}\alpha + b\cos^{-1}\alpha \quad \ldots\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$d'(\alpha) = -a\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + b\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{b\sin^3\alpha - a\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$d'(\alpha) = 0$$

$$\sqrt[3]{b}\sin\alpha - \sqrt[3]{a}\cos\alpha = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 0 \quad \searrow & \alpha_0 \quad \nearrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline \times\ \times\ \times & - & + & \times\ \times\ \times \end{array}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Funkce d nabývá lok. min. pro $\alpha = \alpha_0$.

$\implies d(\alpha_0)$ je největší délka trámu, tj. $\underline{\underline{a\sin^{-1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + b\cos^{-1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)}}$

Příklad 1.6:

Ponorka pluje směrem na východ, loď pluje směrem na jih. Ponorka i loď směřují k bodu O. Rychlost ponorky je 30 km/h a rychlost lodi je 40 km/h. V okamžiku vyplutí byla ponorka od bodu O vzdálena 200 km a loď byla od bodu O vzdálena 150 km. Dostřel torpéd ponorky je 3 km. Má ponorka šanci zasáhnout loď?

. . . ne, jejich nejmenší vzdálenost bude 70 km

Příklad 1.7:

Muž plující ve člunu na jezeře je od přímé části břehu jezera vzdálen 1 km. Nejbližší pobřežni bod je od bodu Q ležícího na stejné části pobřeží vzdálen 10 km. Muž je schopen plout rychlostí 3 km/h a jít rychlostí 5 km/h. Navrhněte trasu, po které se muž dostane k bodu Q za nejkratší dobu.

> Lomená čára VPQ, (kde V je výchozí poloha muže a P je bod na přímé části břehu vzdálený $\frac{37}{4}$ km od bodu Q a $\frac{5}{4}$ km od bodu V).

Konec

(Extremální úlohy)