Finanční matematika

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

1. Základní pojmy

GOA – ORLOVA.CZ

Úroková míra, úrok, daň z úroku

- Věřitel je osoba, která něco hodnotného (peníze) půjčuje.
- Dlužník je osoba, která si něco hodnotného (peníze) vypůjčuje.
- Úrok je odměna věřiteli od dlužníka za to, že mu něco hodnotného (peníze) půjčil.
- Úroková míra je poměr úroku a hodnoty půjčovaného předmětu (peněz) vztažený k časovému období (tzv. úrokovací období); např. $\frac{3}{100}$ ročně
- Daň je odměna státu od občana za to, že mu vytváří podmínky pro uskutečnění jeho potřeb (např. věřiteli umožňuje půjčováním získávat úrok)
- Daňová sazba je poměr daně a hodnoty uskutečněné potřeby (úrok); např. $\frac{15}{100}$

$$\boxed{\text{úrok} = \text{úroková míra} \times \text{hodnota půjčky}}$$

$$\boxed{\text{daň} = \text{daňová sazba} \times \text{hodnota uskutečněné potřeby}}$$

- Věřitel odvádí daň z úroku.
- Typicky se používá úroková míra vztažená k období jednoho roku, tzv. roční úroková míra (zkratka p. a. –- per annum).
- Úroková míra se často vyjadřuje v procentech nebo desetinným číslem; např. 3% nebo $0,03$.

Úroková míra, úrok, daň z úroku

Příklad 1.1 Počáteční (a jediná) transakce na bankovním účtu je vklad 68 000 Kč. Jaký bude stav účtu po jednom roce při roční úrokové míře $2,3\%$ p. a a při 15 % ní daňové sazbě pro úrok?

Vkladatel bance půjčuje. $\Longrightarrow$ vkladatel = věřitel, banka = dlužník
Vkladatel dostane úrok a musí z něj odvést daň!

Stav na začátku $=$ hodnota půjčky: 68 000

Úroková míra $2,3\%$ p. a $\sim \frac{2{,}3}{100} = 0,023$

Daňová sazba 15% p. a $\sim \frac{15}{100} = 0{,}15$

Stav po roce: ?

$$\begin{aligned}
\text{stav po roce} &= \text{stav na začátku} + \text{úrok} - \text{daň z úroku} \\
&= \text{stav na začátku} + \text{úroková míra} \times \text{hodnota půjčky} - \text{daňová sazba} \times \text{úrok} \\
&= 68000 + 0,023 \times 68000 - 0,15 \times 0,023 \times 68000 \\
&= 68000 + 1564 - 234,6 \\
&= \underline{\underline{69329,4}}
\end{aligned}$$

Po roce bude na účtu stav 69329, 4 Kč.

Kapitál

Kapitál jsou prostředky, sloužící ke generování zisku v budoucnu.

Kapitál může mít různé podoby a významy:

- peníze a jejich formy (cenné papíry, např. akcie)
- výrobní prostředky
- licence
- ...

Úroková doba, standardy

- Úroková doba je časový úsek, ve kterém je úročen kapitál.
- Standard je souhrn pravidel pro stanovení úrokové doby a přepočet úrokové míry vzhledem k datu vkladu a výběru kapitálu.

Nejčastější standardy:

30E/360 německý standard, obchodní či německá metoda:
Každý měsíc má 30 dní, každý rok má 360 dní.

30A/360 americký standard:
Stejně jako 30E/360 s tímto rozdílem: jestliže den vkladu není 30. nebo 31. den v měsíci a zároveň den výběru je 31. den v měsíci, potom se započítá i den výběru.

ACT/360 mezinárodní standard, francouzská metoda:
Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby. Rok má 360 dní.

ACT/365 anglická metoda:
Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby, tj. skutečný počet dní v měsíci. Rok má 365 dní.

pro všechny platí: Den vkladu se nezapočítává a den výběru se započítává.

Úroková doba, standardy

Příklad 1.2 Rozhodneme se vložit do banky 100 000 Kč. Banka uvádí úrokovou míru 2% p. a. Vklad vložíme do banky 1. 1. 2021 a vybereme ho 31. 7. 2021. Banka úročí vklad jednou ročně, a to v den výběru. Vypočítejte výši úroku před zdaněním a výsledek zaokrouhlete na koruny, pokud požijeme standard: a) 30E/360 b) 30A/360 c) ACT/360 d) ACT/365

Standard	Úroková doba ve dnech	Přepočtená úroková míra	Zaokrouhlený úrok
30E/360	209	$0,02 \cdot \frac{209}{360}$	1161 Kč
30A/360	210	$0,02 \cdot \frac{210}{360}$	1167 Kč
ACT/360	211	$0,02 \cdot \frac{211}{360}$	1172 Kč
ACT/365	211	$0,02 \cdot \frac{211}{365}$	1156 Kč

Jednoduché úročení

Jednoduché úročení je přiznání úroku vypočítaného na konci každého úrokovacího období z počátečního kapitálu.

Příklad 1.3 Na začátku roku 2021 vložíme 1 000 Kč na 3 roky na bankovní účet. Banka uvádí roční úrokovou míru 1% (tj. úrokovací období je jeden rok) a používá jednoduché úročení. Neuvažujeme-li daň z úroku, jak velká bude výsledná naspořená částka po třech letech?

Hodnoty v Kč na konci jednotlivých let:

Rok	Úrok	Celkový úrok	Stav účtu
2021	$0,01 \cdot 1\,000 = 10$	10	1010
2022	$0,01 \cdot 1\,000 = 10$	20	1020
2023	$0,01 \cdot 1\,000 = 10$	30	1030

Po třech letech bude výsledná částka činit 1 030 Kč.

Jednoduché úročení $\sim$ aritmetická posloupnost

Jednoduché úročení bez danění úroku

$$\boxed{K_n = K_0(1 + n \cdot i)}$$

Obvyklé značení:

i ... roční úroková míra

n ... počet úrokovacích období

K_0 ... počáteční vklad (kapitál)

K_n ... stav účtu (kapitálu)

... po n úrokovacích obdobích

Postup z příkladu 1.3:

Období	Úrok	Celkový úrok	Stav účtu
1	$i \cdot K_0$	$i \cdot K_0$	$K_0 + i \cdot K_0 = K_0(1 + i)$
2	$i \cdot K_0$	$2 \cdot i \cdot K_0$	$K_0 + 2 \cdot i \cdot K_0 = K_0(1 + 2i)$
3	$i \cdot K_0$	$3 \cdot i \cdot K_0$	$K_0 + 3 \cdot i \cdot K_0 = K_0(1 + 3i)$
$\vdots$			
n	$i \cdot K_0$	$n \cdot i \cdot K_0$	$K_0 + n \cdot i \cdot K_0 = K_0(1 + n \cdot i)$

Jednoduché úročení

Příklad 1.4 Na začátku roku vložíme na bankovní účet 1 000 000 Kč na 5 let. Banka uvádí roční úrokovou míru 1,2% a používá jednoduché úročení. Neuvažujeme-li daň z úroku, jak velká bude výsledná naspořená částka po pěti letech?

$K_0 = 1\,000\,000, \quad n = 5, \quad i = 0{,}012$

$$\begin{aligned} K_n &= K_0(1 + n \cdot i) \\ K_5 &= 1\,000\,000(1 + 5 \cdot 0{,}012) \\ K_5 &= 1\,000\,000(1 + 0{,}06) \\ K_5 &= 1\,000\,000 \cdot 1{,}06 \\ \underline{\underline{K_5}} &\underline{\underline{= 1\,060\,000}} \end{aligned}$$

Po pěti letech bude výsledná částka činit 1 060 000 Kč.

Složené úročení

Složené úročení je přiznání úroku vypočítaného na konci každého úrokovacího období z kapitálu, který byl na konci předchozího úrokovacího období.

Příklad 1.5 Na začátku roku 2021 vložíme 1 000 Kč na 3 roky na bankovní účet. Banka uvádí roční úrokovou míru 1% (tj. úrokovací období je jeden rok) a používá složené úročení. Neuvažujeme-li daň z úroku, jak velká bude výsledná naspořená částka po třech letech?

Hodnoty v Kč na konci jednotlivých let:

Rok	Úrok	Celkový úrok	Stav účtu
2021	$0,01 \cdot 1000 = 10$	10	1010
2022	$0,01 \cdot 1010 = 10,1$	$20,1$	$1020,1$
2023	$0,01 \cdot 1\,020,1 = 10,201$	$30,301$	$1030,301$

Po třech letech bude výsledná částka činit $1\,030,301$ Kč.

Složené úročení $\sim$ geometrická posloupnost

Složené úročení bez danění úroku

$$\boxed{K_n = K_0(1+i)^n}$$

Obvyklé značení:

i . . . roční úroková míra

n . . . počet úrokovacích období

K_0 . . . počáteční vklad (kapitál)

K_n . . . stav účtu (kapitálu)

. . . po n úrokovacích obdobích

Postup z příkladu 1.7:

Období	**Úrok**	**Stav účtu**
1	$i \cdot K_0$	$K_0 + i \cdot K_0 = K_0(1+i)$
2	$i \cdot K_0(1+i)$	$K_0(1+i) + i \cdot K_0(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	$i \cdot K_0(1+i)^2$	$K_0(1+i)^2 + i \cdot K_0(1+i)^2 = K_0(1+i)^3$
$\vdots$		
n	$i \cdot K_0(1+i)^{n-1}$	$K_0(1+i)^{n-1} + i \cdot K_0(1+i)^{n-1} = K_0(1+i)^n$

Složené úročení

Příklad 1.6 Na začátku roku vložíme na bankovní účet 1 000 000 Kč na 5 let. Banka uvádí roční úrokovou míru 1,2% a používá složené úročení. Neuvažujeme-li daň z úroku, jak velká bude výsledná naspořená částka po pěti letech?

$K_0 = 1\,000\,000, \quad n = 5, \quad i = 0,012$

$$K_n = K_0(1+i)^n$$
$$K_5 = 1\,000\,000(1+0,012)^5$$
$$K_5 = 1\,000\,000 \cdot 1,012^5$$
$$K_5 \doteq 1\,000\,000 \cdot 0,061457$$
$$\underline{\underline{K_5 \doteq 1\,061\,457}}$$

Po pěti letech bude výsledná částka (zaokrouhlená na koruny) činit 1 061 457 Kč.
(Tj. o 1 457 Kč více než při jednoduchém úročení.)

Složené úročení

Složené úročení je přiznání úroku vypočítaného na konci každého úrokovacího období z kapitálu, který byl na konci předchozího úrokovacího období.

Příklad 1.7 Na začátku roku 2021 vložíme 1 000 Kč na 3 roky na bankovní účet. Banka uvádí roční úrokovou míru 1% (tj. úrokovací období je jeden rok) a používá složené úročení. Neuvažujeme-li daň z úroku, jak velká bude výsledná naspořená částka po třech letech?

Hodnoty v Kč na konci jednotlivých let:

Rok	Úrok	Celkový úrok	Stav účtu
2021	$0,01 \cdot 1000 = 10$	10	1010
2022	$0,01 \cdot 1010 = 10,1$	$20,1$	$1020,1$
2023	$0,01 \cdot 1\,020,1 = 10,201$	$30,301$	$1030,301$

Po třech letech bude výsledná částka činit $1\,030,301$ Kč.

Úvěr

- Úvěr je dočasné postoupení finančních prostředků věřitelem dlužníkovi.
- Anuitní splátka je konstantní platba hrazená v pravidelných časových intervalech po dané období za účelem postupného a úplného splacení úvěru a úroku, který byl za celé období splácení přiznán.
- Úmor je ta část anuitní splátky, která snižuje dlužnou částku.

$$\boxed{\text{anuitní splátka} \quad = \quad \text{úmor} \quad + \quad \text{úrok za poslední úrokovací období}}$$

Úvěr

Příklad 1.8 Na začátku roku 2021 si v bance půjčíme 10^6 Kč s roční úrokovou mírou 3% (tj. úrokovací období je jeden rok). Úvěr budeme splácet ve třech stejných splátkách ve výši s Kč vždy na konci roku. Kolik činí

a) výše jedné splátky,
b) částka, kterou celkově za úvěr zaplatíme,
c) částka, kterou zaplatíme navíc,
d) kolik procent z půjčené částky zaplatíme navíc?

Hodnoty v Kč na konci jednotlivých let:

Rok	**Dluh**
2021	$10^6 \cdot 1,03 - s$
2022	$(10^6 \cdot 1,03 - s) \cdot 1,03 - s = 10^6 \cdot 1,03^2 - s \cdot 1,03 - s$
2023	$(10^6 \cdot 1,03^2 - s \cdot 1,03 - s) \cdot 1,03 - s = 10^6 \cdot 1,03^3 - s \cdot 1,03^2 - s \cdot 1,03 - s$

Po třech splátkách má být úvěr splacen, tzn. dluh má být nulový:

$$10^6 \cdot 1,03^3 - s \cdot 1,03^2 - s \cdot 1,03 - s = 0$$

Úvěr

Řešme (lineární!) rovnici:

$$\boxed{10^6 \cdot 1,03^3 - s \cdot 1,03^2 - s \cdot 1,03 - s} = 0$$

$$10^6 \cdot 1,03^3 = s \cdot (1,03^2 + 1,03 + 1)$$

$$\frac{10^6 \cdot 1,03^3}{1,03^2 + 1,03 + 1} = s$$

$$s = 353\ 530$$

a) Výše jedné splátky činí $s =$ 353 530 Kč

b) Celkem za úvěr zaplatíme $3s =$ 1 060 591 Kč.

c) Kromě půjčené částky navíc zaplatíme $1\ 060\ 591 - 1\ 000\ 000 =$ 60 591 Kč.

d) Z půjčené částky navíc zaplatíme $\frac{60\ 591}{1\ 000\ 000} \cdot 100\% \doteq$ 6%.

Výraz $1,03^2 + 1,03 + 1$ je součet prvních tří členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1,03$ a prvním členem $a_1 = 1$. Tj. $1,03^2 + 1,03 + 1 = a_1 \cdot \frac{q^3-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{1,03^3-1}{1,03-1}$.

Výpočet anuitní splátky ∼ geometrická posloupnost

Obvyklé značení:

i . . . roční úroková míra

n . . . počet úrokovacích období

V . . . úvěr (půjčená částka)

s . . . anuitní splátka

Postup z příkladu 1.8:

Období	Dluh
1	$V \cdot (1+i) - s$
2	$(V \cdot (1+i) - s) \cdot (1+i) - s = V(1+i)^2 - s \cdot (1+i) - s$
3	$(V(1+i)^2 - s \cdot (1+i) - s) \cdot (1+i) - s = V(1+i)^2 - s \cdot (1+i) - s$

$\vdots$

n	$\cdots = V(1+i)^n - s \cdot (1+i)^{n-1} - \ldots - s(1+i) - s$

Výpočet anuitní splátky ∼ geometrická posloupnost

Řešme (lineární!) rovnici:

$$\boxed{V(1+i)^n - s\cdot(1+i)^{n-1} - \ldots - s(1+i) - s} = 0$$

$$V(1+i)^n = s\cdot\Big(\overbrace{(1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) + 1}^{=1\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}}\Big)$$

(geometrická posl., v níž $q = 1 + i$, $a_1 = 1$)

$$\frac{V(1+i)^n}{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}} = s$$

$$\frac{V(1+i)^n}{\frac{(1+i)^n-1}{i}} = s$$

$$\frac{V(1+i)^n\cdot i}{(1+i)^n-1} = s$$

Anuitní splátka úvěru

$$\boxed{s = \frac{V\cdot(1+i)^n\cdot i}{(1+i)^n-1}}$$

Výpočet anuitní splátky

Příklad 1.9 Banka poskytla paní B na konci roku 2018 úvěr na 10 let ve výši 4 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 6%, úrokovací období je jeden rok a paní B má úvěr splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Kolik činí

a) výše jedné splátky,
b) částka, kterou celkově paní B za úvěr zaplatí,
c) částka, kterou zaplatí navíc,
d) kolik procent z půjčené částky zaplatí navíc?

Inflace, míra inflace

- Inflace je znehodnocení měny způsobené růstem cen.
- Míra inflace je relativní nárůst cen za daný rok.
- Deflace je zhodnocení měny způsobené klesáním cen.

- Nárůst cen se stanovuje podle spotřebitelských cen vybraného zboží (spotřebitelský koš).
- V ČR stanovuje zboží ve spotřebitelském koši Český statistický úřad.
- Spotřebitelský koš obsahuje cca 700 výrobků a služeb.
- Za zdravou míru inflace se považuje hodnota do 3%.

Míra inflace v procentech v jednotlivých letech v České republice:

2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1,8	0,1	2,8	1,9	2,5	2,8	6,3	1,0	1,5	1,9	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5

Vliv inflace a daně na úročení

Reálná úroková míra je úroková míra zohledňující aktuální kondici peněžních prostředků ovlivněnou významnými vlivy, např. inflací, zdaněním úroku...

Reálná úroková míra se zdaněním úroku, po inflaci

$$\boxed{i_{real} = \frac{i(1-i_{tax})-i_{inf}}{1+i_{inf}}}$$

Obvyklé značení:

i ... roční úroková míra

i_{real} ... reálná roční úroková míra

i_{inf} ... roční míra inflace

i_{tax} ... roční daňová sazba

Příklad 1.10 Na začátku roku jsme vložili na bankovní účet 1 000 000 Kč. Banka uvádí roční úrokovou míru 5%. Míra inflace byla v tomto roce 2%, daň z úroku neuvažujeme. Jaká byla reálná úroková míra v tomto roce a reálná hodnota prostředků na účtu na konci roku?

$$i_{real} = \frac{i(1-i_{tax})-i_{inf}}{1+i_{inf}} = \frac{0{,}05(1-0)-0{,}02}{1+0{,}02} \doteq \underline{\underline{0,0294}} \quad (2,94\%)$$

$$K_{real} = K_0(1+i_{real}) \doteq 1\,000\,000 \cdot (1+0,0294) = \underline{\underline{1\,029\,400\text{ Kč}}}$$

Vliv inflace a daně na úročení

Příklad 1.11 Roční úroková míra je $1,8\%$. Roční míra inflace je 2%, daň z úroku je 15%. Jaká je reálná roční úroková míra?

$$i_{real} = \frac{i(1-i_{tax})-i_{inf}}{1+i_{inf}} = \frac{0{,}018(1-0{,}15)-0{,}02}{1+0{,}02} \doteq \underline{\underline{-0,0046}} \quad (-0,46\%)$$

Příklad 1.12 Jakou úrokovou míru by musela garantovat banka, aby reálná úroková míra byla kladná, jestliže daň z úroku je 15% a roční míra inflace se odhaduje na 2%?

$$\begin{aligned} i_{real} &> 0 \\ \frac{i(1-i_{tax})-i_{inf}}{1+i_{inf}} &> 0 \\ \frac{i(1-0{,}15)-0{,}02}{1+0{,}02} &> 0 \\ i \cdot 0,85 - 0,02 &> 0 \\ i &> \frac{0{,}02}{0{,}85} \doteq \underline{\underline{0,0235}} \quad (2,35\%) \end{aligned}$$

Banka by musela garantovat roční úrokovou míru alespoň $2,35\%$.

Investice

- **Aktiva** jsou prostředky, které nepřinášejí okamžitý prospěch, ale mají umožnit obohacení v budoucnosti (komodity, peníze v bance, nemovitost, cenné papíry).
- **Investice** je nákup aktiv za „hotovost".
- **Likvidita** je doba, za kterou je možno přeměnit aktiva zpět na „hotovost".

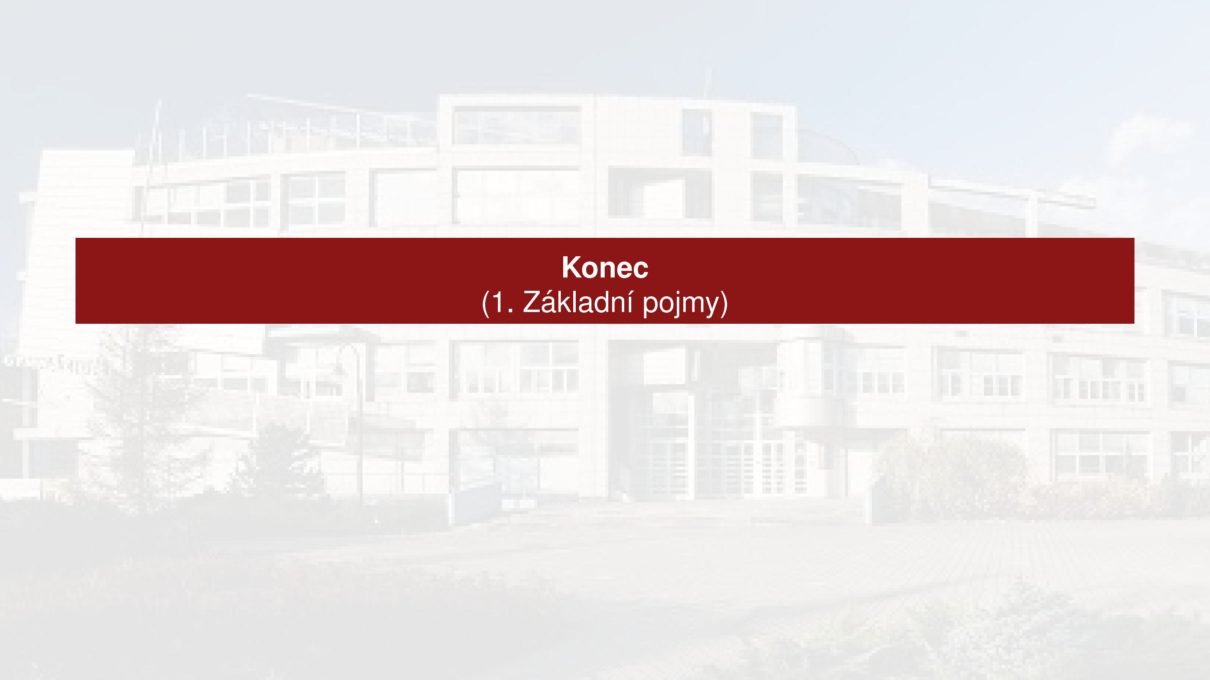
Dělení investic:

reálné (do hmotných produktů)

- movité – zlato, drahé kovy, umělecká díla,
- nemovité – budovy, pozemky, byty.

finanční (do peněžních produktů)

- vklady (banky, finanční instituce),
- poskytování úvěrů,
- nákup cenných papírů,
- nákup kryptoměny.



Konec

(1. Základní pojmy)