

# Funkce

Jaroslav Drobek

[jaroslav.drobek@goa-orlova.cz](mailto:jaroslav.drobek@goa-orlova.cz)

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

9. Trigonometrie

**GOA –**  
**ORLOVA.CZ**

# Sinová věta

## Sinová věta

Při obvyklém značení stran a úhlů v obecném trojúhelníku platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

### Důkaz:

Označíme-li  $v_c$  výšku na stranu  $c$ , potom

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b} \quad \sin \beta = \frac{v_c}{a} \quad \text{Potom musí být stejné levé strany, tj.} \quad b \sin \alpha = a \sin \beta$$

$$b \sin \alpha = v_c \quad a \sin \beta = v_c$$

$$\underbrace{\frac{b}{\sin \beta}}_{\sim} = \underbrace{\frac{a}{\sin \alpha}}_{\sim}$$

Podobně lze dokázat, že  $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

# Sinová věta

**Příklad 9.1** Určete zbývající strany a vnitřní úhly v trojúhelníku  $ABC$ , je-li  $a = 6$ ,  $b = 7$ ,  $\alpha = 55^\circ$ .

- ▶ Lze použít sinovu větu

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Vyberme její vhodný tvar:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a}$$

$$\sin \beta = 7 \cdot \frac{\sin 55^\circ}{6}$$

$$\sin \beta \doteq 0,96$$

$$\beta \doteq \arcsin 0,96$$

$$\underline{\underline{\beta \doteq 74^\circ}}$$

- ▶ Úhel  $\gamma$  lze zjistit dopočtem do  $180^\circ$ :

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180^\circ - (55^\circ + 74^\circ)$$

$$\underline{\underline{\gamma \doteq 51^\circ}}$$

- ▶ Stranu  $c$  lze zjistit opět ze sinové věty:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c = \sin \gamma \cdot \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c \doteq \sin 52^\circ \cdot \frac{6}{\sin 55^\circ}$$

$$\underline{\underline{c \doteq 5,8}}$$

# Kosinová věta

## Kosinová věta

Při obvyklém značení stran a úhlů v obecném trojúhelníku platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

**Příklad 9.2** V trojúhelníku  $ABC$  určete stranu  $c$ , je-li  $a = 6$ ,  $b = 9$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

Je potřeba vybrat vhodný tvar kosinové věty:  
(obsahující kromě  $c$  jen známé údaje)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cos 60^\circ$$

$$c^2 = 36 + 81 - 2 \cdot 54 \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 = 117 - 54$$

$$c^2 = 63$$

$$c = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \underline{\underline{3\sqrt{7}}}$$

úhel ( $^\circ$ )	0	30	45	60	90
úhel (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\not\exists$
$\operatorname{cotg} x$	$\not\exists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**Příklad 9.3** V trojúhelníku  $ABC$  určete velikosti vnitřních úhlů, je-li  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Postupně využijeme všechny tvary kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \beta$$

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$$

$$16 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos \alpha$$

$$25 = 16 + 36 - 48 \cdot \cos \beta$$

$$36 = 16 + 25 - 40 \cdot \cos \gamma$$

$$-45 = -60 \cdot \cos \alpha$$

$$-27 = -48 \cdot \cos \beta$$

$$-5 = -40 \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{3}{4} = \cos \alpha$$

$$\frac{9}{16} = \cos \beta$$

$$\frac{1}{8} = \cos \gamma$$

$$\alpha = \arccos \frac{3}{4}$$

$$\beta = \arccos \frac{9}{16}$$

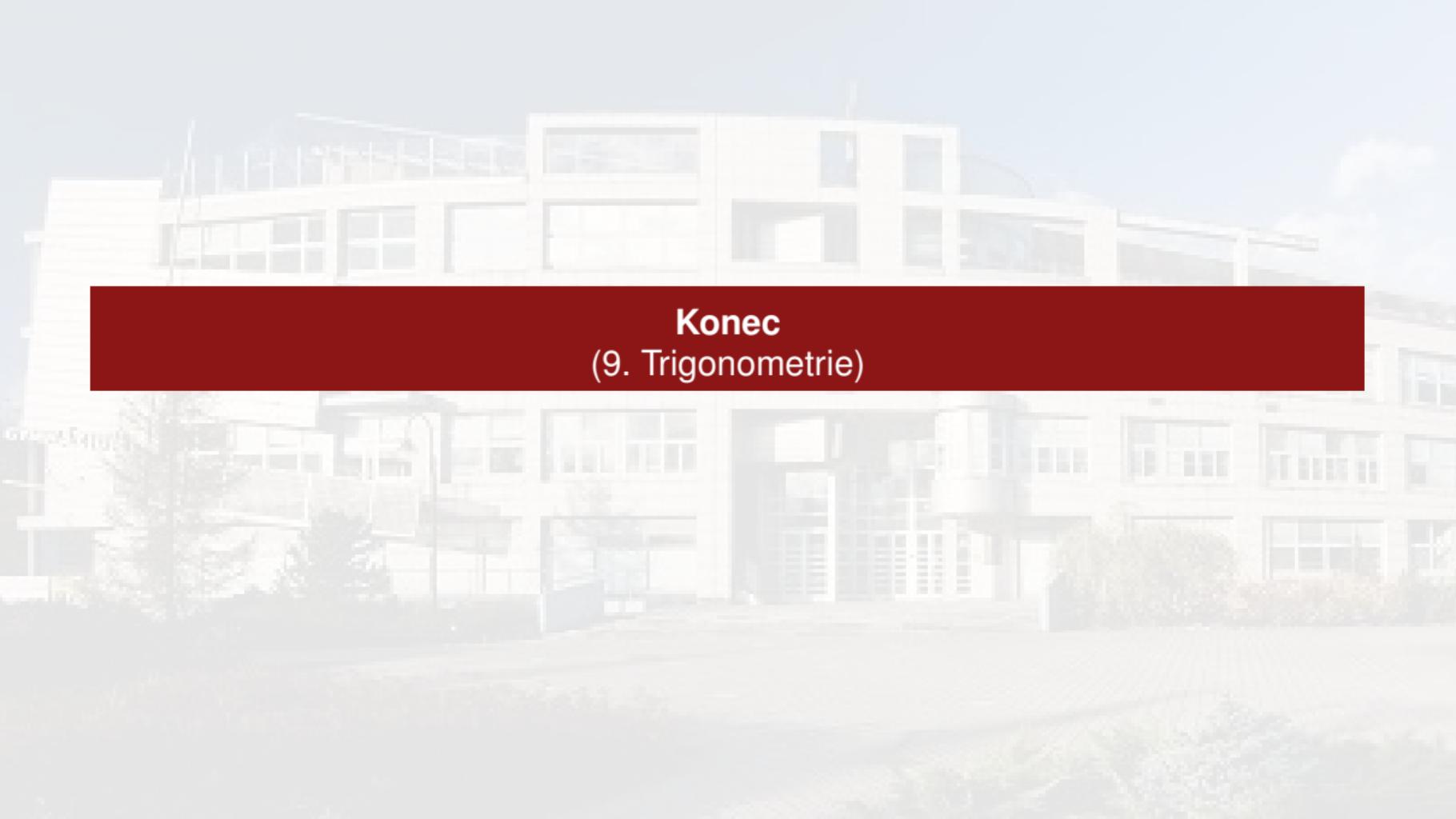
$$\gamma = \arccos \frac{1}{8}$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 41^\circ 25'}}$$

$$\underline{\underline{\beta \doteq 55^\circ 46'}}$$

$$\underline{\underline{\gamma \doteq 82^\circ 49'}}$$

Ověření:  $\alpha + \beta + \gamma \doteq 180^\circ$ .



**Konec**  
(9. Trigonometrie)