Funkce

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

7. Logaritmické funkce

GOA – ORLOVA.CZ

Číselné logaritmické výrazy

Vztah mezi logaritmickými a exponenciálními funkcemi

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Příklad 7.1

$\log_2 16 = ? \iff 2^? = 16$ …dvě na kterou je šestnáct?

$= \underline{\underline{4}}$

$\log_3 9 = ? \iff 3^? = 9$ …tři na kterou je devět?

$= \underline{\underline{2}}$

$\log_{10} 1000 = ? \iff 10^? = 1000$ …deset na kterou je tisíc?

$= \underline{\underline{3}}$

$\log_5 125 = ? \iff 5^? = 125$ …pět na kterou je stodvacetpět?

$= \underline{\underline{3}}$

$\log_3 \frac{1}{81} = ? \iff 3^? = \frac{1}{81}$ …3 na kterou je jednaosmdesátina?

$= \underline{\underline{-3}}$

Pravidla pro počítání s logaritmy

Věty o logaritmech

$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c}$ $\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ $\boxed{\log_a b^c = c \cdot \log_a b}$

Příklad 7.2 Zjednodušte:

$$\log_5 7 + \log_5 2 = \log_5(7 \cdot 2) = \underline{\underline{\log_5 14}}$$

$\log_3 4 + \log_2 9 = ?$ (různé základy logaritmů)

$$\log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 \frac{6}{9} = \underline{\underline{\log_2 \frac{2}{3}}}$$

$$\log_9 8 = \log_9 2^3 = \underline{\underline{3 \log_9 2}}$$

Příklad 7.3

$$2 \log a + 3 \log b - 4 \log c = \log a^2 + \log b^3 - \log c^4 = \log a^2 b^3 - \log c^4 = \underline{\underline{\log \frac{a^2 b^3}{c^4}}}$$

Řešení rovnic s využitím definice logaritmu

Příklad 7.4

$$\log_2 4x = 3$$
$$2^3 = 4x$$
$$4x = 8$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$4x > 0$$
$$\utilde{x > 0}$$

Příklad 7.5

$$\log_9 \frac{x}{2} = 1$$
$$9^1 = \frac{x}{2}$$
$$\frac{x}{2} = 9$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$\frac{x}{2} > 0$$
$$\utilde{x > 0}$$

Vzorce

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Příklad 7.6

$$\log_{17} (16x + 1) = 1$$
$$17^1 = 16x + 1$$
$$16 = 16x$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$16x + 1 > 0$$
$$16x > -1$$
$$\utilde{x > -\frac{1}{16}}$$

Řešení rovnic s využitím definice logaritmu

Příklad 7.7

$$\log_4(5x-1)-1=0$$
$$\log_4(5x-1)=1$$
$$4^1=5x-1$$
$$5=5x$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$5x-1>0$$
$$5x>1$$
$$x>\frac{1}{5}$$

Vzorce

$$\boxed{\log_a b=c \iff a^c=b}$$

Příklad 7.8

$$\log_2 8=\log_3(5x-3)$$
$$3=\log_3(5x-3)$$
$$5x-3=3^3$$
$$5x=30$$
$$\underline{\underline{x=6}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$5x-3>0$$
$$5x>3$$
$$x>\frac{3}{5}$$

Řešení rovnic s využitím definice logaritmu

Příklad 7.9

$$
\begin{aligned}
\log_4(\log_3(\log_2 8)) &= \log x - 3\\
\log_4(\log_3 3) &= \log x - 3\\
\log_4 1 &= \log x - 3\\
0 &= \log x - 3\\
\log x &= 3\\
10^3 &= x\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1000}}
\end{aligned}
$$

Podmínky řešitelnosti:

$\utilde{x > 0}$

Vzorce

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Řešení rovnic s využitím definice logaritmu

Příklad 7.10

$$\log_2(\log_3(x+4)) = 1$$
$$2^1 = \log_3(x+4)$$
$$\log_3(x+4) = 2$$
$$3^2 = x+4$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $x + 4 > 0$

$x > -4$

II. $\log_3(x+4) > 0$

?

Zkouška nutná !

Zkouška:

$$\left.\begin{array}{l} L = \log_2(\log_3(5+4)) = \log_2 \log_3 9 = \log_2 2 = 1 \\ P = 1 \end{array}\right\} L = P \implies 5\checkmark$$

Vzorce

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Řešení rovnic s využitím definice logaritmu

GOA ORLOVA.CZ

Příklad 7.11

$$\log_{0,5}(\log_4(2x-6)) = -1$$

$$0,5^{-1} = \log_4(2x-6)$$

$$\log_4(2x-6) = 2$$

$$4^2 = 2x-6$$

$$\underline{\underline{x = 11}}$$

Podmínky řešitelnosti:

I. $2x - 6 > 0$

$x > 3$

II. $\log_4(2x-6) > 0$

?

Zkouška nutná !

Zkouška:

$$\left.\begin{array}{l} L = \log_{0,5}(\log_4(2\cdot 11 - 6)) = \log_{0,5}(\log_4 16) = \log_{0,5} 2 = -1 \\ P = -1 \end{array}\right\} L = P \implies 11\checkmark$$

Vzorce

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Řešení rovnic úpravou na stejný základ

Příklad 7.12

$$\log_5(7x-3) = 2\log_5 3 + \log_5 2$$
$$\log_5(7x-3) = \log_5 3^2 + \log_5 2$$
$$\log_5(7x-3) = \log_5(3^2 \cdot 2)$$
$$\log_5(7x-3) = \log_5 18$$
$$7x-3 = 18$$
$$7x = 21$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$$7x-3 > 0$$
$$7x > 3$$
$$x > \frac{3}{7}$$

Vzorce

$\boxed{\log_a b^c = c \cdot \log_a b}$ $\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c}$

Řešení rovnic s využitím substituce

Příklad 7.13

$$\log^2 x + \log x^2 = 0$$
$$\log^2 x + 2\log x = 0$$
$$(\log x)^2 + 2\log x = 0 \qquad \text{substituce: } \boxed{t = \log x}$$
$$t^2 + 2t = 0$$
$$t(t+2) = 0$$
$$t_1 = 0, \quad t_2 = -2$$

$\boxed{t_1 = 0}$:

$$0 = \log x$$
$$x_1 = 10^0$$
$$\underline{\underline{x_1 = 1}}$$

$\boxed{t_2 = -2}$:

$$-2 = \log x$$
$$x_2 = 10^{-2}$$
$$\underline{\underline{x_2 = \frac{1}{100}}}$$

Podmínky řešitelnosti:

$x > 0$

Vzorce

Neplatí $\log_a^c b = c\log_a b$! $\boxed{\log_a b^c = c\log_a b}$ $\boxed{\log_a^c b = (\log_a b)^c}$ $\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$

Řešení rovnic s využitím substituce

Příklad 7.14

$$\log_3^2(x-1) - 3\log_3(x-1) = 10$$

$$\left(\log_3(x-1)\right)^2 - 3\log_3(x-1) = 10 \qquad \text{substituce: } \boxed{t = \log_3(x-1)}$$

$$t^2 - 3t = 10$$

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$t_1 = 5, \quad t_2 = -2$$

$\boxed{t_1 = 5}$: $5 = \log_3(x-1)$

$$x - 1 = 3^5$$

$$\underline{\underline{x_1 = 244}}$$

$\boxed{t_2 = -2}$: $-2 = \log_3(x-1)$

$$x - 1 = 3^{-2}$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{10}{9}}}$$

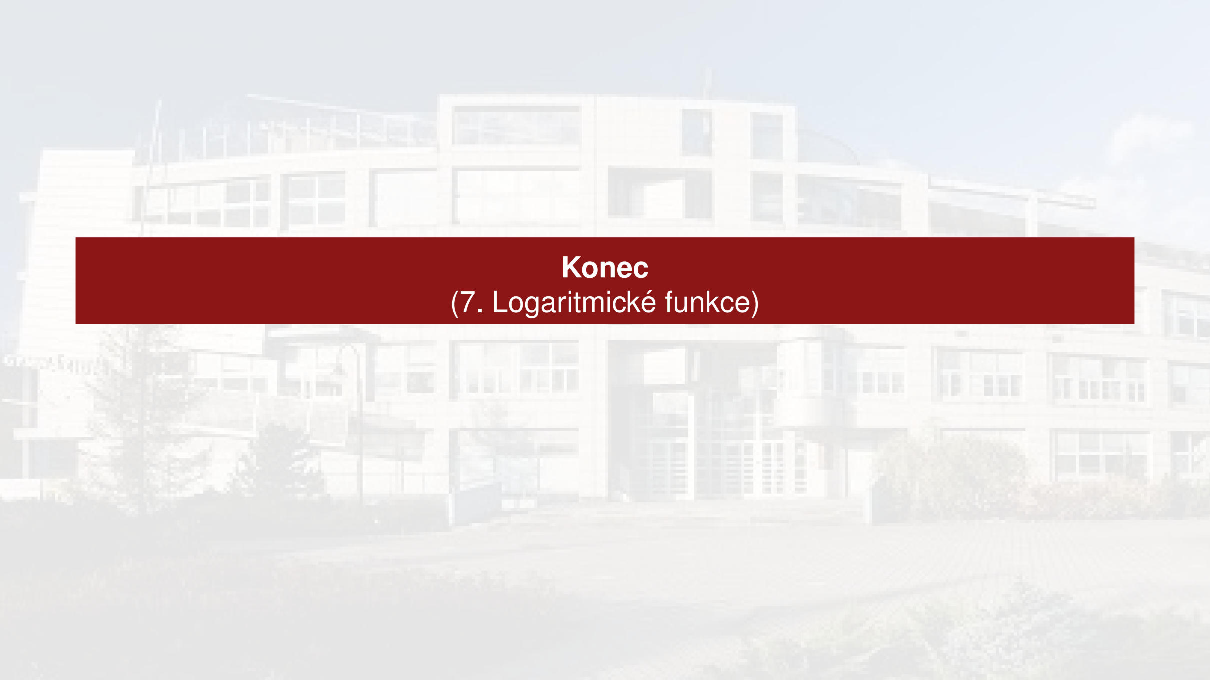
Podm. řešitelnosti:

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

Vzorce

$\boxed{\log_a^c b = (\log_a b)^c}$ $\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$



Konec

(7. Logaritmické funkce)