Analytická geometrie

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

4. Metrické úlohy

GOA – ORLOVA.CZ

Vzdálenost bodů, přímek

Vzdálenost bodu $B = [B_x, B_y]$ od přímky $p: \ ax + by + c = 0$

$$\boxed{|pB| = \frac{|aB_x + bB_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Příklad 4.1 Určete vzdálenost bodu $P = [-4; 2]$ od přímky $p: \ 3x - 4y - 5 = 0$.

normálový vektor přímky . . . $(a; b) = (3, -4)$

$\dots c = -5$

bod . . . $[P_x; P_y] = [-4; 2]$

$$|pP| = \frac{|aP_x + bP_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = \underline{\underline{5}}$$

Vzdálenost bodů, přímek

Vzdálenost bodu B od přímky $p: \ X = A + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{|pB| = \left| \vec{AB} - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} \right|}$$

Příklad 4.2 Určete vzdálenost bodu $M = [1;1]$ od přímky $p: x = 3 + t, \ y = 1 + t, \ t \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} p: x &= 3 + t \\ y &= 1 + t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}$$

tj. $p: \ [x;y] = [3;1] + t(1;1)$

směrový vektor přímky ... $\vec{u} = (1;1)$, bod přímky ... $A = [3;1]$

$\vec{AM} = M - A = (1-3; 1-1) = (-2;0)$

$$|pM| = \left| \vec{AM} - \left(\frac{\vec{AM} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} \right| = \left| (-2;0) - \left(\frac{(-2;0)\cdot(1;1)}{(1;1)\cdot(1;1)} \right)(1;1) \right|$$

$$= \left| (-2;0) - \left(\frac{-2}{2} \right)(1;1) \right| = |(-2;0) + (1;1)| = |(-1;1)| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Vzdálenost bodů, přímek

Příklad 4.3 Určete vzdálenost bodu $A = [-3; 13]$ od přímky $\leftrightarrow KL$, kde $K = [0; 4]$, $L = [-5; -6]$.

$$p: \ X = K + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R},$$

kde $\vec{u} = K - L = \big(0 - (-5); 4 - (-6)\big) = (5; 10)$

Vzdálenost bodu B od přímky $p: \ X = A + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{|pB| = \left| \vec{AB} - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} \right|}$$

$$\vec{KA} = A - K = (-3 - 0; 13 - 4) = (-3; 9)$$

$$|pA| = \left| \vec{KA} - \left(\frac{\vec{KA} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} \right| = \left| (-3; 9) - \left(\frac{(-3; 9) \cdot (5; 10)}{(5; 10) \cdot (5; 10)} \right) (5; 10) \right|$$

$$= \left| (-3; 9) - \left(\frac{-15 + 90}{25 + 100} \right) (5; 10) \right| = \left| (-3; 9) - \left(\frac{75}{125} \right) (5; 10) \right| = |(-3; 9) - (3; 6)| = |(-6; 3)|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}$$

Odchylky přímek

Odchylka α vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left|\vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v}_2\right| \cdot \cos\alpha}$$

Příklad 4.4 Určete odchylku φ přímek zadaných obecnými rovnicemi $x + y + 1 = 0$ a $x - y - 1 = 0$.

- normálové vektory přímek: … $\vec{n}_1 = (1; 1)$, $\vec{n}_2 = (1; -1)$
- označme α odchylku vektorů $\vec{n}_1, \vec{n}_2$
- potom $\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ je-li } \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ je-li } \alpha > 90^\circ \end{cases}$
- α určíme ze vztahu pro skalární součin:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right| \cdot \cos\alpha \\ (1; 1) \cdot (1; -1) &= |(1; 1)| \cdot |(1; -1)| \cdot \cos\alpha \\ 0 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha \\ 0 &= \cos\alpha \\ \alpha &= 90^\circ \end{aligned}$$

- $\underline{\underline{\varphi = 90^\circ}}$

Odchylky přímek

Odchylka α vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left|\vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v}_2\right| \cdot \cos\alpha}$$

Příklad 4.5 Určete odchylku φ přímky zadané obecnou rovnicí $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ a přímky zadané parametricky $\left.\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 5 \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}.$

- normálový vektor z obecné rovnice: . . . $\vec{n} = (1; \sqrt{3})$
- směrový vektor z parametrické rovnice: . . . $\vec{u} = (1; 0)$
- označme α odchylku vektorů $\vec{n}, \vec{u}$
- potom $\varphi = |90^\circ - \alpha|$
- α určíme ze vztahu pro skalární součin:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} &= \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \cos\alpha \\ (1; \sqrt{3}) \cdot (1; 0) &= \left|(1; \sqrt{3})\right| \cdot |(1; 0)| \cdot \cos\alpha \\ 1 &= 2 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \\ \tfrac{1}{2} &= \cos\alpha \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

- $\underline{\underline{\varphi = 30^\circ}}$

Odchylky přímek

Odchylka α vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left|\vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v}_2\right| \cdot \cos\alpha}$$

Příklad 4.6 Určete odchylku φ přímky $p: \ 2x - 3y + 1 = 0$ a přímky $q: \left.\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 3 - 4t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}$.

- normálový vektor přímky $p \ldots \vec{n}_p = (2; -3)$
- směrový vektor přímky $q \ldots \vec{u}_q = (3; -4) \implies$ normálový vektor přímky $q \ldots \vec{n}_q = (4; 3)$
- označme α odchylku vektorů $\vec{n}_p, \vec{n}_q$. Potom

$$\begin{aligned} \vec{n}_p \cdot \vec{n}_q &= \left|\vec{n}_p\right| \cdot \left|\vec{n}_q\right| \cdot \cos\alpha \\ (2; -3) \cdot (4; 3) &= \left|(2; -3)\right| \cdot \left|(4; 3)\right| \cdot \cos\alpha \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \cos\alpha \\ -1 &= \sqrt{13} \cdot 5 \cdot \cos\alpha \\ -\frac{1}{5\sqrt{13}} &= \cos\alpha \\ \alpha &\doteq \arccos(-0.06) \doteq 93^\circ \end{aligned}$$

- potom $\varphi \doteq 180^\circ - \alpha = \underline{\underline{87^\circ}}$

Konec

(4. Metrické úlohy)