

## 4. Derivace

Diferenciální počet

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

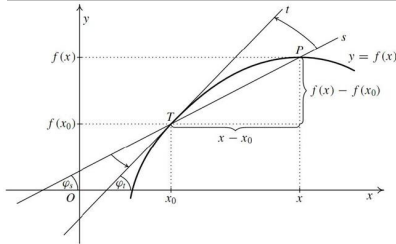


## Geometrická motivace

## Úkol:

Vyjádřete směrnicí tečny  $t$  ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T = [x_0, f(x_0)]$ , kde  $x_0 \in D_f$ .

- Zvolíme  $x \in D_f$ ,  $x \neq x_0$ , a potažmo bod  $P = [x, f(x)]$  na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu  $s$  grafu funkce  $f$  určenou body  $T$  a  $P$ .
- Bod  $x$  budeme přibližovat k bodu  $x_0$ , přičemž bod  $P$  se bude pohybovat po grafu funkce  $f$  k bodu  $T$ .
- V okamžiku, kdy  $x$  splyne s  $x_0$ , splyne také bod  $P$  s bodem  $T$ , sečna  $s$  s tečnou  $t$  a směrnicí sečny  $s$  se směrnicí tečny  $t$ .



Směrnicí sečny  $s$  :

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Směrnicí tečny  $t$  :

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

## Fyzikální motivace

## Úkol:

Vyjádřete okamžitou rychlost pohybujícího se hmotného bodu v čase  $t_0$ .

Je vhodné znázornit závislost vzdálenosti, kterou hmotný bod urazí, na čase. Můžeme využít předchozího obrázku, v němž popisné symboly zaměníme za fyzikálně zažité:

$$x_0 \sim t_0, \quad x \sim t, \quad f \sim s.$$

- Zvolíme  $t > t_0$ .
- Uvažujeme průměrnou rychlost odpovídající časovému intervalu  $\langle t_0, t \rangle$ .
- Budeme zkracovat časový interval  $\langle t_0, t \rangle$  přibližováním  $t$  k  $t_0$ .
- V okamžiku splynutí  $t$  s  $t_0$ , dojde také ke splynutí průměrné rychlosti s okamžitou rychlostí v čase  $t_0$ .

Průměrná rychlost odpovídající časovému intervalu  $\langle t_0, t \rangle$ :

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžitá rychlost v čase  $t_0$ :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$



# Matematická formulace

## Definice 4.1

Nechť  $f$  je funkce definovaná v nějakém okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Potom vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

se nazývá **vlastní derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a označuje se  $f'(x_0)$ .

## Dodatky

- Je-li limita (1) nevlastní, nazývá se **nevlastní derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .
- Nahradíme-li ve formulaci **definice 4.1** limitní přechod  $x \rightarrow x_0$  limitním přechodem  $x \rightarrow x_0^-$  (resp.  $x \rightarrow x_0^+$ ), obdržíme definici **levostranné** (resp. **pravostranné**) **derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$** , která se označuje

$$f'_-(x_0) \text{ (resp. } f'_+(x_0) \text{ )}.$$

- Skutečnost, že existuje (vlastní, nevlastní) limita (1), se slovně vyjadřuje také takto:

„Funkce  $f$  má (vlastní, nevlastní) derivaci v bodě  $x_0$ .“



# Matematická formulace

## Úmluva

V dalším textu bude výraz „derivace“ znamenat „vlastní derivace“.

### Poznámka 4.1

- Zavedené označení  $f'(x_0)$  může vyvolat představu nějaké funkce  $f'$ . Až budeme později zavádět pojem **derivace funkce na množině**, uvidíme, že tato představa je opodstatněná.
- Zápis  $f'(x)$  se někdy nahrazuje zápisem  $(f(x))'$ . V případě, že je funkce  $f$  zadána explicitně, spočívá výhoda tohoto zápisu v úspornosti: například  $(x^2 + 3x + 2)'$  znamená  $f'(x)$  pro funkci  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ .

## Derivace základních elementárních funkcí

## Věta 4.1

Každá z následujících rovností platí pro libovolné  $x \in D_f \cap D_g$ , kde  $f$  (resp.  $g$ ) je funkce, jejíž explicitní předpis je dán výrazem v závorce na levé straně (resp. výrazem na pravé straně) uvažované rovnosti.

$$(c)' = 0, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \text{kde } n \neq 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$



## Derivace součtu, součinu, podílu

## Věta 4.2

Nechť funkce  $f, g$  mají derivaci v bodě  $x \in \mathbb{R}$ . Potom funkce  $f + g$ ,  $f \cdot g$  mají derivaci v bodě  $x$  a platí

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Je-li navíc  $g(x) \neq 0$ , potom funkce  $f/g$  má derivaci v bodě  $x$  a platí

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

## Poznámka 4.2

Věta 4.2 bude platit i v případě, že v její formulaci budeme místo derivací uvažovat levostranné (resp. pravostranné) derivace.



# Derivace součtu, součinu, podílu

## Příklad 4.1 Vypočítejte

a)  $(x^5 - 3x^2 + 2x - 5)'$

b)  $(\sqrt{x})'$

c)  $(-2 \cos x + e^x + \ln x)'$

d)  $(\frac{1}{x})'$

e)  $(x \cdot e^x)'$

f)  $(\frac{2x-1}{x^2+1})'$

g)  $(\frac{\ln x}{x^2})'$

# Derivace složené funkce

## Věta 4.3

Nechť funkce  $f$  má derivaci v bodě  $x \in \mathbb{R}$  a funkce  $g$  má derivaci v bodě  $y = f(x)$ . Potom funkce  $g \circ f$  má derivaci v bodě  $x$  a platí

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(y).$$

## Úkol

Formulujte tvrzení obdobná jako je **Věta 4.3** s různými kombinacemi jednostranných derivací.

## Příklad 4.2 Vypočítejte

a)  $(\sin 3x)'$

b)  $(\sin x^3)'$

c)  $(\sin^3 x)'$

d)  $(\ln \cos x)'$

e)  $(\sqrt[3]{x^2 - 1})'$

f)  $(\arctg \sqrt{x})'$

g)  $(\ln(2x - 1)^2)'$

h)  $(x^x)'$



## Jednostranné derivace

## Věta 4.4

Nechť  $x_0, a \in \mathbb{R}$ . Potom

$$f'(x_0) = a \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a$$

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \implies \nexists f'(x_0)$$

## Věta 4.5

Má-li funkce derivaci (resp. levostrannou derivaci, pravostrannou derivaci) v nějakém bodě, potom je v tomto bodě spojitá (resp. zleva spojitá, zprava spojitá).

## Poznámka 4.3

Opačné tvrzení neplatí: funkce (zleva, zprava) spojitá v nějakém bodě nemusí mít v tomto bodě (levostrannou, pravostrannou) derivaci. Např.  $f(x) = |x|$  v bodě 0.



# Derivace inverzní funkce

## Věta 4.6

Nechť funkce  $f$  má nenulovou derivaci v bodě  $x \in \mathbb{R}$  a nechť existuje inverzní funkce  $f^{-1}$  k funkci  $f$ . Potom funkce  $f^{-1}$  má derivaci v bodě  $y$ , kde  $y = f(x)$ , a platí

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

## Derivace funkce dané parametricky

[podrobnosti](#)

## Věta 4.7

Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  a nechť funkce  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  mají v bodě  $t_0 \in M$  derivace  $\dot{\phi}(t_0)$ ,  $\dot{\psi}(t_0)$ , přičemž  $\dot{\phi}(t_0) \neq 0$ . Potom funkce  $f$  daná parametricky rovnicemi  $x = \phi(t)$  a  $y = \psi(t)$  má v bodě  $x_0 = \phi(t_0)$  derivaci a platí

$$f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\phi}(t_0)}.$$

Ma-jí-li navíc funkce  $\phi, \psi$  v bodě  $t_0$  druhé derivace  $\ddot{\phi}(t_0), \ddot{\psi}(t_0)$ , potom funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  druhou derivaci a platí

$$f''(x_0) = \frac{\ddot{\psi}(t_0)\dot{\phi}(t_0) - \dot{\psi}(t_0)\ddot{\phi}(t_0)}{[\dot{\phi}(t_0)]^3}.$$



# Derivace funkce dané parametricky

## Příklad 4.3

- a) Určete 1. a 2. derivaci funkce, která je dána parametrickými rovnicemi

$$\left. \begin{aligned} x &= t^3 - 1 \\ y &= \ln t \end{aligned} \right\} t > 0$$

- b) Určete rovnici tečny ke grafu funkce (půlkružnice), která je dána parametrickými rovnicemi

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \right\} t \in \langle -\pi, 0 \rangle$$

v bodě  $t_0 = -\frac{\pi}{4}$ .

# Derivace funkce na množině

[podrobnosti](#)

## Definice 4.2

Množina  $M \subset \mathbb{R}$  je otevřená, jestliže pro každé  $x \in M$  existuje  $\delta > 0$  takové, že  $U_\delta(x) \subset M$ .

## Definice 4.3

Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je otevřená. Derivace funkce  $f$  na množině  $M$  je funkce  $g$ , pro kterou platí  $g(x) = f'(x)$ ,  $x \in M$ ; označuje se  $f'$ .

## Dodatek

Skutečnost, že existuje derivace funkce  $f$  na množině  $M$ , se slovně vyjadřuje také takto:

„Funkce  $f$  má derivaci na množině  $M$ .“



# Druhá derivace

## Definice 4.4

- Jestliže existuje derivace funkce  $f'$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nazývá se **druhá derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a označuje se  $f''(x_0)$ .
- Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je otevřená. **Druhá derivace funkce  $f$  na množině  $M$**  je funkce  $g$ , pro kterou platí  $g(x) = f''(x), \quad x \in M;$  označuje se  $f''$ .

## Poznámky

- Zápis  $f''(x)$  se někdy nahrazuje zápisem  $(f(x))''$ . Potom
$$(f(x))'' = f''(x) \stackrel{D\ 4.4}{=} (f')'(x) \stackrel{Pozn\ 4.1}{=} (f'(x))' \stackrel{Pozn\ 4.1}{=} ((f(x))')'.$$
- Definici derivace resp. druhé derivace funkce v bodě zobecníme prostřednictvím následující rekurentní definice.
- Označení  $(n)$  použité v matematickém zápisu znamená „římsky  $n$ “.
- Funce  $f$  se někdy z formálních důvodů nazývá **nultá derivace funkce  $f$**  a označuje se  $f^{(0)}$ .



# Derivace vyšších řádů

## Definice 4.4'

- Jestliže existuje derivace funkce  $f^{(n-1)}$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nazývá se  **$n$ -tá derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a označuje se  $f^{(n)}(x_0)$ .
- Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je otevřená.  **$n$ -tá derivace funkce  $f$  na množině  $M$**  je funkce  $g$ , pro kterou platí  $g(x) = f^{(n)}(x)$ ,  $x \in M$ ; označuje se  $f^{(n)}$ .

## Poznámka 4.4

Zápis  $f^{(n)}(x)$  se někdy nahrazuje zápisem  $(f(x))^{(n)}$ . Potom

$$(f(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \stackrel{D\ 4.4}{=} (f^{(n-1)})'(x) \stackrel{Pozn\ 4.1}{=} \dots = ((f(x))^{(n-1)})'.$$

## Příklad 4.4 Vypočítejte

a)  $(3x^2 - 4x + 5)^{(3)}$       b)  $\left(\frac{x^2-4}{x^2+1}\right)^{(3)}$



## Funkce daná parametricky

[zpět](#)**Definice 4.5**

Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  a necht'  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Necht' existuje  $\phi^{-1}$ . Potom funkce  $f : H_\phi \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$f(x) := \psi(\phi^{-1}(x)), \quad x \in H_\phi,$$

se nazývá **funkce daná parametricky** rovnicemi  $x = \phi(t)$  a  $y = \psi(t)$ .



## Derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce na množině

[zpět](#)

## Věta 4.8

Nechť funkce  $f, g$  mají derivaci na neprázdné množině  $M$ . Potom funkce  $f + g, f \cdot g$  mají derivaci na množině  $M$  a platí

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{na } M$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{na } M.$$

Je-li navíc  $g(x) \neq 0$ , pro každé  $x \in M$ , potom funkce  $f/g$  má derivaci na množině  $M$  a platí

$$(f/g)' = (f' \cdot g + f \cdot g')/g^2 \quad \text{na } M.$$

## Věta 4.9

Nechť funkce  $f$  má derivaci na množině  $M$  a funkce  $g$  má derivaci na množině  $\{f(x) : x \in M\}$ . Potom funkce  $g \circ f$  má derivaci na množině  $M$  a platí

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$



**Konec**  
(4. Derivace)