Posloupnosti

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

3. Geometrická posloupnost

GOA – ORLOVA.CZ

Základní pojmy

Definice 3.1

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, existuje-li $q \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}.$$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 3.1 Dokažte, že posloupnost $\left(5^{n-1} \cdot 2^{2-n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická a určete její kvocient.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = 5^{n-1} \cdot 2^{2-n}$$

$$a_{n+1} = 5^n \cdot 2^{1-n} = 5 \cdot 5^{n-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{2-n} = a_n \cdot \frac{5}{2}.$$

Podle definice jde tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{5}{2}$.

Příklad 3.2 **Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí:**

a) $a_1 = 3,\ q = 2$

b) $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}$

c) $a_4 = 81,\ q = 3$

d) $a_3 = -1,\ q = -1$

Vlastnosti

Věta 3.1

Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q a pro libovolná čísla $n, r, s \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1},} \tag{1}$$

$$\boxed{a_s = a_r \cdot q^{s-r}.} \tag{2}$$

Příklad 3.3 Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určete a_1, q, platí-li

a) $a_1 + a_3 = 5,\ a_2 + a_4 = 10$

b) $a_1 - a_3 = -\dfrac{3}{2},\ a_2 + a_1 = \dfrac{3}{2}$

Součet členů

Věta 3.2

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) platí

$$\boxed{s_n = \begin{cases} n\,a_1, & \text{je-li } q = 1, \\ a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{je-li } q \neq 1. \end{cases}}$$

Důkaz

Nechť $q = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$, odkud $s_n = a_1 + \cdots + a_1 = n\,a_1$.
Nechť $q \neq 1$. Potom jistě

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1},$$

$$s_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n.$$

Od druhé rovnice odečteme první a dále upravíme:

$$\begin{aligned} s_n \cdot q - s_n &= -a_1 + a_1 q^n \\ s_n(q-1) &= a_1(q^n - 1) \\ s_n &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 3.4 **Najděte součet prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li**

a) $n = 8,\ a_1 = 5,\ a_2 = 10$ $[1275]$

b) $n = 10,\ a_4 = -\dfrac{1}{8},\ a_7 = \dfrac{1}{64}$ $\left[\frac{341}{512}\right]$

c) $n = 6,\ a_2 = -4,\ a_3 = 4$ $[0]$

Kombinace aritmetické a geometrické posloupnosti

Příklad 3.5 Z prvních devíti členů aritmetické posloupnosti, v níž platí $a_1 = 1$, $d = 1$, vybíráme uspořádanou trojici různých čísel tak, aby tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Kolik takových trojic lze vytvořit?

Označme A_9 množinu prvních devíti členů aritmetické posloupnosti ze zadání. Potom

$$A_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti označíme např. b_1, b_2, b_3.
Vybereme $b_1, b_2 \in A_9$ a k nim dopočítáme b_3 tak, aby šlo o geometrickou posloupnost.

Zvolme nejdříve $b_1 = 1 \in A_9$ a k němu postupně vybírejme všechny možné $b_2 \in A_9$:

$(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, ?)$ ... potom

$$\begin{aligned} b_2 &= q \cdot b_1 & \qquad b_3 &= q \cdot b_2 \\ 2 &= q \cdot 1 & b_3 &= 2 \cdot 2 \\ q &= 2 & b_3 &= 4 \end{aligned}$$

Protože $4 \in A_9$, má trojice $(1, 2, 4)$ požadované.vlastnosti $\surd$

$(b_1, b_2, b_3) = (1, 3, ?)$ ... potom $q = 3$, $b_3 = 9 \in A_9$, a tedy $(1, 3, 9)$ $\surd$

$(b_1, b_2, b_3) = (1, 4, ?)$ ... potom $q = 4$, $b_3 = 16 \notin A_9$, a tedy $(1, 4, 16)$ $\times$

Další volby b_2 jsou zbytečné, protože vidíme, že následně bude vždy $b_3 > 9$, a tedy $b_3 \notin A_9$.

Zvolíme-li $b_1 = 2 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(2, 1, \frac{1}{2}) \times$, $(2, 3, \frac{9}{2}) \times$, $(2, 4, 8) \surd$, $(2, 5, \frac{25}{2}) \times$, $(2, 6, \frac{9}{2}) \times$, a další volby b_2 jsou zbytečné Zvolíme-li $b_1 = 3 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(3, 1, \frac{1}{3}) \times$, $(3, 2, \frac{4}{3}) \times$, $(3, 4, \frac{16}{3}) \times$, $(3, 5, \frac{25}{3}) \times$, $(3, 6, 12) \times$, a další volby b_2 jsou zbytečné
Zvolíme-li $b_1 = 4 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(4, 1, \frac{1}{4}) \times$, $(4, 2, 1) \surd$, $(4, 3, \frac{9}{4}) \times$, $(4, 5, \frac{25}{4}) \times$, $(4, 6, 9) \surd$, a další volby b_2 jsou zbytečné Zvolíme-li $b_1 = 5 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(5, 1, \frac{1}{5}) \times$, $(5, 2, \frac{4}{5}) \times$, $(5, 3, \frac{9}{5}) \times$, $(5, 4, \frac{16}{5}) \times$, $(5, 6, \frac{36}{5}) \times$, $(5, 7, \frac{49}{5}) \times$, a další volby b_2 jsou zbytečné
Zvolíme-li $b_1 = 6 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(6, 1, \frac{1}{6}) \times$, $(6, 2, \frac{2}{3}) \times$, $(6, 3, \frac{3}{2}) \times$, $(6, 4, \frac{8}{3}) \times$, $(6, 5, \frac{25}{6}) \times$, $(6, 7, \frac{49}{6}) \times$, $(6, 8, \frac{64}{6}) \times$, a další volby b_2 jsou zbytečné
Zvolíme-li $b_1 = 7 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(7, 1, \frac{1}{7}) \times$, $(7, 2, \frac{4}{7}) \times$, $(7, 3, \frac{9}{7}) \times$, $(7, 4, \frac{16}{7}) \times$, $(7, 5, \frac{25}{7}) \times$, $(7, 6, \frac{36}{7}) \times$, $(7, 8, \frac{64}{7}) \times$, a další volby b_2 jsou zbytečné

Zvolíme-li $b_1 = 8 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(8, 1, \frac{1}{8}) \times$, $(8, 2, \frac{1}{2}) \times$, $(8, 3, \frac{9}{9}) \times$, $(8, 4, 2) \surd$, $(8, 5, \frac{25}{8}) \times$, $(8, 6, \frac{18}{4}) \times$, $(8, 7, \frac{49}{8}) \times$, $(8, 9, \frac{81}{8}) \times$,
a další volby b_2 jsou zbytečné

Zvolíme-li $b_1 = 9 \in A_9$, zjistíme obdobně, že:

$(9, 1, \frac{1}{9}) \times$, $(9, 2, \frac{4}{9}) \times$, $(9, 3, 1) \surd$, $(9, 4, \frac{16}{9}) \surd$, $(9, 5, \frac{25}{9}) \times$, $(9, 6, 4) \surd$, $(9, 7, \frac{49}{9}) \times$, $(9, 8, \frac{64}{9}) \times$,
a další volby b_2 jsou zbytečné

Celkem tedy lze vytvořit 8 trojic požadovaných vlastností

Konec

(3. Geometrická posloupnost)