

9. Přímka a rovina v Euklidovském prostoru

Analytická geometrie

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I



Úmluvy:

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Budeme označovat

- $[a_1, \dots, a_n]$ uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, \dots, a_n ,
- E_n množinu všech uspořádaných n -tic $[a_1, \dots, a_n]$;
- zápis $A \in E_n$ bude znamenat, že symbol A reprezentuje uspořádanou n -tici $[a_1, \dots, a_n]$.
- Zavedeme operace $+ : E_n \times \mathbb{R}^n \rightarrow E_n$, $- : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisy

$$A + \mathbf{u} := [a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n], \quad (A, \mathbf{u}) \in E_n \times \mathbb{R}^n,$$

$$B - A := (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n), \quad (A, B) \in E_n \times E_n.$$

- ***n*-dimenzionálním Euklidovským prostorem** budeme rozumět trojici $(E_n, \mathbb{R}^n, +)$; zkráceně se o této trojici budeme vyjadřovat jako o „Euklidovském prostoru E_n “.
- Prvky množiny E_n budeme nazývat **body** Euklidovského prostoru E_n .



Definice 9.1

Nechť $m \leq n$, V je m -dimenzionální podprostor prostoru \mathbb{R}^n a nechť $A \in E_n$. Potom množina

$$A + V := \{A + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in V\}$$

se nazývá *m-dimenzionální podprostor* Euklidovského prostoru E_n .

Definice 9.2

1-dimenzionální podprostor prostoru E_n se nazývá *přímka* v E_n .
2-dimenzionální podprostor prostoru E_n se nazývá *rovina* v E_n .



Skalární součin vektorů

Úmluva

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět reálné číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Příklad 9.1

Určete skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$. $\dots \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{3}}$

Věta 9.1

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$$

$$c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$



Definice 9.3

- **Velikost vektoru** $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ ($\dots = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$).
- **Odchylka (úhel) nenulových vektorů** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující
$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|};$$
označuje se také $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$
- Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou **kolmé**, jestliže $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$

Příklad 9.2

Určete odchylku vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1).$

$$\dots \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{4}$$



Věta 9.2

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$|c\mathbf{u}| = |c| |\mathbf{u}|,$$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

$$|\mathbf{u}| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$



Vektorový součin vektorů

Úmluva

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět vektor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Příklad 9.3

Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1)$.

$$\dots \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underline{\underline{(-2, 1, 2)}}$$

Úkol:

Rozmyslete si, proč pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$



Věta 9.3

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},$$

$$c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$



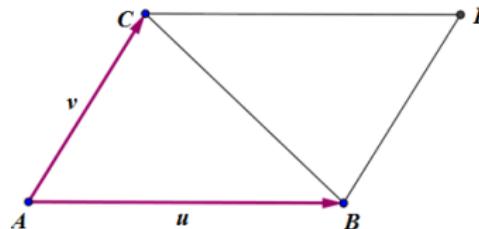
Věta 9.4

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- číslo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vyjadřuje obsah rovnoběžníka $ABCD$ určeného vektory $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$.
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.
- vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům \mathbf{u}, \mathbf{v} .

Definice 9.4

Lineárně závislé vektory z \mathbb{R}^3 se nazývají **kolineární**.



Příklad 9.4

- Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ kolineární a určete nějaký vektor, který je k vektorům \mathbf{u}, \mathbf{v} kolmý.
- Určete obsah trojúhelníka ABC , jestliže $A = [1, 1, 0]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [3, 3, 1]$. $\dots S = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$



Smíšený součin vektorů

Úmluva

Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ budeme rozumět číslo

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Příklad 9.5

Určete smíšený součin vektorů

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (1, -6, 3). \quad \dots \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \underline{\underline{-2}}$$

Úkol:

Rozmyslete si, proč pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ platí

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$



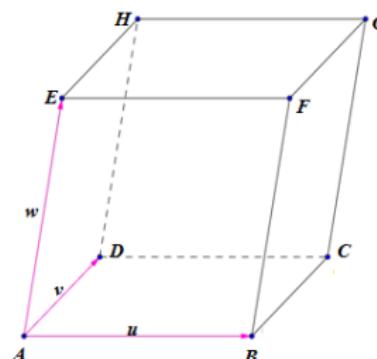
Věta 9.5

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Potom

- číslo $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ určeného vektory $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A, \mathbf{w} = E - A$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.
- $\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}$.

Definice 9.5

Lineárně závislé vektory z \mathbb{R}^3 se nazývají **komplanární**.



Příklad 9.6

- Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 1), \mathbf{w} = (1, -6, 3)$ komplanární.
- Určete objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, jestliže $A = [1, 1, 2], B = [2, 1, 3], D = [3, 3, 3], E = [2, -5, 5]$. $\dots V = 2 \underline{\underline{=}}$



Přímka a rovina v E_3 Přímka v E_3 **Definice 9.6**

Nenulový vektor z \mathbb{R}^3 se nazývá **směrový vektor přímky** z E_3 , jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této přímky lze vyjádřit jako násobek tohoto vektoru.

Věta 9.6

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový. Potom množina

$$p(A, \mathbf{u}) = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$$

je přímka v E_3 , která má směrový vektor \mathbf{u} a obsahuje bod A .



Parametrická rovnice přímky v E_3 **Poznámka 9.1**

Věta 9.6 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a nenulového vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit přímku $p(A, \mathbf{u})$. Tatáž přímka může být ale jednoznačně určena jiným bodem a nenulovým vektorem!

Věta 9.6 nám umožňuje popsat body $X \in p(A, \mathbf{u})$ tzv. **parametrickou rovnicí**:

$$X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

popř. po souřadnicích:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + t u_1 \\ x_2 &= a_2 + t u_2 \\ x_3 &= a_3 + t u_3 \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{R}.$$



Přímka a rovina v E_3

Příklad 9.7

- a) Určete parametrickou rovnici přímky, která má směrový vektor $\mathbf{u} = (-2, -4, -1)$ a obsahuje bod $A = [1, 2, 5]$.
-

... $X = [1, 2, 5] + t(-2, -4, -1), \quad t \in \mathbb{R}$,

... popř. po souřadnicích:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2 - 4t \\ x_3 = 5 - t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

- b) Lze zvolit čísla x_2, x_3 tak, aby $X = [5, x_2, x_3]$ byl bodem této přímky?
-

... ano: $x_2 = 10, x_3 = 7$



Příklad 9.8

Určete parametrickou rovnici přímky p , která obsahuje body $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$.

$$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} p : \quad X &= [1, 2, 5] + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R} \\ &= [1, 2, 5] + (t, 0, t) \\ &= [1 + t, 2, 5 + t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 5 + t \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Přímka a rovina v E_3 Rovina v E_3 **Definice 9.7**

Dva lineárně nezávislé vektory z \mathbb{R}^3 se nazývají **směrové vektory roviny** z E_3 , jestliže rozdíl libovolných dvou bodů této roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Věta 9.7

Nechť $A \in E_3$ a nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Potom množina

$$\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}$$

je rovina v E_3 , která má směrové vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} a obsahuje bod A .



Parametrická rovnice roviny v E_3 **Poznámka 9.2**

Věta 9.7 ukazuje, jak lze prostřednictvím bodu $A \in E_3$ a dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jednoznačně určit rovinu $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tatáž rovina může být ale jednoznačně určena jiným bodem a dvojicí vektorů!

Věta 9.7 nám umožňuje popsat body $X \in \rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ tzv. **parametrickou rovnicí**:

$$X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

popř. po souřadnicích:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned} \right\} t, s \in \mathbb{R}.$$



Příklad 9.9

- a) Určete parametrickou rovnici roviny ρ , která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ a obsahuje bod $A = [1, 1, 0]$.
-

$$\dots \underline{\rho : X = [1, 1, 0] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1)}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

... popř. po souřadnicích:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 + t + 2s \\ x_2 = 1 + 2s \\ x_3 = t + s \end{array} \right\} t, s \in \mathbb{R}$$

- b) Lze zvolit číslo x_3 tak, aby $X = [2, -1, x_3]$ byl bodem této roviny?
-

$$\dots \underline{\underline{\text{ano: } x_3 = 2}}$$



Přímka a rovina v E_3

Příklad 9.10

Určete parametrickou rovnici roviny ρ , která obsahuje body
 $A = [1, 2, 5]$, $B = [2, 2, 6]$, $C = [3, 4, 6]$.

$$\mathbf{u} = B - A = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = C - A = (2, 2, 1)$$

$$\underline{\underline{\rho : X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}}}$$

... popř. po souřadnicích:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t + 2s \\ x_2 &= 2 + 2s \\ x_3 &= 5 + t + s \end{aligned} \quad \left. \right\} t, s \in \mathbb{R}$$



Obecná rovnice roviny

Definice 9.8

Nenulový vektor z \mathbb{R}^3 se nazývá **normálový vektor roviny** z E_3 , jestliže je kolmý k rozdílu libovolných dvou bodů této roviny.

Věta 9.8

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové.
Potom množina

$$\rho(a, b, c, d) = \{[x_1, x_2, x_3] \in E_3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$$

je rovina v E_3 a vektor (a, b, c) je normálový vektor této roviny.

Věta 9.8 nám umožňuje popsat body $X = [x_1, x_2, x_3]$ roviny $\rho(a, b, c, d)$ rovnicí

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Příklad 9.9' Určete obecnou rovnici roviny z předchozího příkladu.

$$\dots -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$



Přímka a rovina v E_3

Základní příklady na určení roviny

Příklad 9.11

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má směrové vektory $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

Příklad 9.12

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která obsahuje body $A = [0, 1, 2]$, $B = [1, 3, 0]$, $C = [2, 2, 3]$.

Příklad 9.13

Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny, která má normálový vektor $\mathbf{n} = (4, -5, -3)$ a obsahuje bod $A = [0, 1, 2]$.

... výsledky předchozích tří příkladů mohou mít tento tvar:

parametrická: $X = [0, 1, 2] + t(1, 2, -2) + s(2, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R},$

obecná: $4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 11 = 0$



Přímka a rovina v E_3

Konverze mezi parametrickou a obecnou rovnicí roviny

Příklad 9.14

- a) Určete obecnou rovnici roviny

$$\rho : X = [1, 2, 5] + t(1, 0, 1) + s(2, 2, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

$$\dots \underline{\rho : -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0}$$

- b) Určete parametrickou rovnici roviny $\eta : 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 30 = 0$.

$$\dots \underline{\eta : X = [0, 0, 15] + t(1, 0, 2) + s(0, 1, -4), \quad t, s \in \mathbb{R}}$$



Implicitní vyjádření přímky v E_3 **Věta 9.9**

Nechť normálové vektory rovin $\rho, \sigma \subset E_3$ jsou lineárně nezávislé. Potom množina $p = \rho \cap \sigma$ je přímka v E_3 .

Poznámka 9.3

Za předpokladů z [věty 9.9](#) má soustava obecných rovnic rovin ρ, σ nekonečně mnoho řešení, která lze vyjádřit v závislosti na 1 parametru. Těmito řešeními jsou určeny parametrické rovnice přímky $p = \rho \cap \sigma$.

Příklad 9.15

Zjistěte, zda $\rho \cap \sigma$, kde

$$\begin{aligned}\rho : \quad & 2x - y - 7 = 0 \\ \sigma : \quad & 2x + y - 3z + 1 = 0,\end{aligned}$$

je přímka v E_3 , popř. určete parametrické rovnice této přímky.



Orientovaná úsečka

Definice 9.9

Nechť $A, B \in E_3$ a $\mathbf{u} = B - A$. Potom

- **Úsečka AB** (v E_3) je množina

$$\{A + t\mathbf{u} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

- Body A, B jsou **krajní body** úsečky AB .
- **Délka úsečky AB** je číslo

$$d(AB) = |B - A| \quad (\dots = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}).$$

- **Orientovaná úsečka \overrightarrow{AB}** (v E_3) je úsečka AB nenulové délky, jejíž krajní body mají stanovené pořadí; první bod (zde A) se nazývá **počáteční bod** a druhý bod (zde B) se nazývá **koncový bod** orientované úsečky \overrightarrow{AB} .
- **Směr orientované úsečky \overrightarrow{AB}** je vektor

$$\mathbf{s}_{AB} = \frac{\mathbf{u}}{d(AB)}.$$



Geometrický vektor

Definice 9.10

- **Nulový geometrický vektor** je množina všech úseček (v E_3) nulové délky.
- **Nenulový geometrický vektor** je množina všech orientovaných úseček (v E_3), které mají stejný směr a délku.

Poznámka 9.4

- Nulový geometrický vektor se ztotožňuje s aritmetickým vektorem

$$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3 .$$

- Nenulový geometrický vektor se ztotožňuje s vektorem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 ,$$

kde A, B jsou počáteční a koncový bod orientované úsečky \overrightarrow{AB} z množiny představující uvažovaný geometrický vektor.

- Množina všech geometrických vektorů je takto ztotožněna s množinou \mathbb{R}^3 .
- Tím jsou pro geometrické vektory zpřístupněny všechny pojmy zavedené dříve pro vektory aritmetické (rovnost, součet, c-násobek, ...).



Konec

(9. Přímka a rovina v Euklidovském prostoru)