7. Matice

Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I

Definice 7.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Reálná matice typu $m \times n$ je uspořádaná m-tice uspořádaných n-tic reálných čísel; každé z těchto $m \cdot n$ reálných čísel se nazývá prvek matice.

Úmluvy:

- V dalším textu bude výraz „matice“ znamenat „reálná matice“.
- Množinu všech matic typu $m \times n$, tj. množinu $(\mathbb{R}^n)^m$, budeme označovat

$$\boxed{\mathbb{R}^{m \times n}}\ .$$

- Matici budeme označovat velkým písmenem, např. $\boxed{A}$, její prvky pak příslušným malým písmenem opatřeným dvěma indexy, např. $\boxed{a_{i,j}}$; první z indexů budeme nazývat řádkový index prvku a bude vyjadřovat pozici n-tice, v níž se prvek nachází, druhý z indexů budeme nazývat sloupcový index prvku a bude vyjadřovat pozici prvku v této n-tici.
- Uspořádanou dvojici (i, j) budeme nazývat pozicí prvku $a_{i,j}$. Budeme hovořit o prvku $a_{i,j}$ na pozici (i, j).

Poznámka 7.1

Libovolnou uspořádanou n-tici reálných čísel lze přirozeným způsobem ztotožnit jak s maticí typu $1 \times n$, tak s maticí typu $n \times 1$.

Poznámka 7.2

- Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se běžně vyjadřuje schématem

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

- Schéma ukazuje motivaci zavedené terminologie (pozice, řádkový a sloupcový index prvku).
- Aby se předešlo nedorozumění, opatřuje se někdy symbol, popř. schéma, vyjadřující matici z $\mathbb{R}^{m \times n}$ indexem $m \times n$, např. $A_{m \times n}$.

Definice 7.2

- *i-tý řádek* matice $A_{m\times n}$ je uspořádaná n-tice $\boxed{(a_{i,1},\dots,a_{i,n})}$.
- *j-tý sloupec* matice $A_{m\times n}$ je uspořádaná m-tice $\boxed{(a_{1,j},\dots,a_{m,j})}$.
- Řádek resp. sloupec matice, jehož všechny prvky jsou nuly, se nazývá *nulový řádek* resp. *nulový sloupec*.
- Řádek resp. sloupec matice, který má aspoň jeden prvek různý od nuly, se nazývá *nenulový řádek* resp. *nenulový sloupec*.
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, se nazývá *nulová matice*; označuje se $\boxed{O}$.

Definice 7.3

- Hlavní diagonála matice $A_{m\times n}$ je uspořádaná k-tice $\boxed{(a_{1,1},\dots,a_{k,k})}$, kde $k=\min\{m,n\}$.
- Je-li $m\neq n$, potom $A_{m\times n}$ je obdélníková matice.
- $A_{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n.
- Čtvercová matice, jejíž prvky z hlavní diagonály jsou jedničky a ostatní prvky jsou nuly, se nazývá jednotková matice; označuje se $\boxed{E}$.

Definice 7.4

- Matice opačná k matici $A_{m\times n}$ je matice typu $m \times n$ taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ je její prvek na pozici (i,j) roven číslu $-a_{i,j}$; označuje se $\boxed{-A}$.
- Matice transponovaná k matici $A_{m\times n}$ je matice typu $n \times m$ taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ je její prvek na pozici (i,j) roven číslu $a_{j,i}$; označuje se $\boxed{A^T}$.

Příklad 7.1 Určete matici transponovanou k matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 7.5

Matice A je trojúhelníková, jestliže platí $\boxed{i > j \implies a_{i,j} = 0.}$

Definice 7.6

Nechť A je matice o m řádcích. Nechť pro každé $i \in \{1, \dots, m-1\}$ platí

(i) je-li i-tý řádek nenulový, potom $(i+1)$-ní řádek má zleva více nul než i-tý řádek

(ii) je-li i-tý řádek nulový, potom $(i+1)$-ní řádek je též nulový.

Potom matice A se nazývá schodová.

Příklad 7.2

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka 7.3

- Pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí $\boxed{A = B}$ právě tehdy, když

$$\boxed{a_{i,j} = b_{i,j}, \qquad i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}}\ .$$

- Rovnost dvou matic lze uvažovat jen v případě, že jsou obě stejného typu.

Definice 7.7

Operace $+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ definovaná předpisem

$$\boxed{A+B := \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}, \ (A,B) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n},}$$

se nazývá sčítání matic; matice $A+B$ se nazývá součet matic A, B.

Poznámka 7.4

- Součet dvou matic je definován jen v případě, že jsou obě stejného typu.
- Je-li $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $C = A+B$, potom $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a platí

$$\boxed{c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \qquad i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}.}$$

Definice 7.8

Operace $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ definovaná předpisem

$$\boxed{c \cdot A := \begin{pmatrix} c\,a_{1,1} & \cdots & c\,a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c\,a_{m,1} & \cdots & c\,a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad (c, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n},}$$

se nazývá násobení matice skalárem; matice $c \cdot A$ se nazývá c-násobek matice A.

Poznámka 7.5

- c-násobek matice je definován pro libovolnou matici.
- Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B = c \cdot A$, potom $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a platí

$$\boxed{b_{i,j} = c\,a_{i,j}, \qquad i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}.}$$

Věta 7.1

Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c, d \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $\boxed{A + B = B + A\,,}$

(ii) $\boxed{(A + B) + C = A + (B + C)\,,}$

(iii) $\boxed{A + O = A\,,}$

(iv) $\boxed{A + (-A) = O\,,}$

(v) $\boxed{c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B\,,}$

(vi) $\boxed{(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A\,,}$

(vii) $\boxed{(cd) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)\,,}$

(viii) $\boxed{1 \cdot A = A\,.}$

Tj. trojice $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ je vektorový prostor, matice O je nulový vektor a matice $-A$ je vektor opačný k vektoru A.

Definice 7.9

Operace $\cdot : \mathbb{R}^{m\times p} \times \mathbb{R}^{p\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ definovaná předpisem

$$\boxed{A\cdot B := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k,n} \end{pmatrix}, \ (A,B)\in \mathbb{R}^{m\times p}\times \mathbb{R}^{p\times n},}$$

se nazývá násobení matic; matice $A\cdot B$ se nazývá součin matic A, B.

Poznámka 7.6

- Součin matic A, B (v tomto pořadí) je definován jen v případě, že počet sloupců matice A je stejný jako počet řádků matice B.
- Je-li $A\in\mathbb{R}^{m\times p}$, $B\in\mathbb{R}^{p\times n}$ a $C = A\cdot B$, potom $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ a platí

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}, \qquad i\in\{1,\dots,m\},\ j\in\{1,\dots,n\}.}$$

Příklad 7.3 Vypočítejte součin matic

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ldots A \cdot B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & -8 & -2 \\ -11 & 11 & 6 \end{pmatrix}}}, \quad B \cdot A \quad \underline{\underline{\nexists}}$$

Věta 7.2

Nechť A, B, C jsou matice takových typů, aby bylo možno uvažovat výrazy na levých stranách následujících vztahů. Platí

(i) $\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C\,,}$

(ii) $\boxed{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C\,,}$

(iii) $\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)\,,}$

(iv) $\boxed{E \cdot A = A\,,}$

(v) $\boxed{A \cdot E = A\,,}$

(vi) $\boxed{O \cdot A = O\,,}$

(vii) $\boxed{A \cdot O = O\,.}$

Poznámka 7.7

Obecně neplatí $\boxed{A \cdot B = B \cdot A}$!

Poznámka

Budeme pracovat se třemi typy tzv. ekvivalentních řádkových (resp. sloupcových) úprav matic:

i) Vzájemná záměna dvou řádků (resp. sloupců).
ii) Vynásobení řádku (resp. sloupce) nenulovým skalárem.
iii) Přičtení libovolného násobku jednoho řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci).

Definice 7.10

Matice A, B jsou ekvivalentní, zkráceně $\boxed{A \sim B}$, jestliže matici B lze z matice A obdržet použitím konečného počtu ekvivalentních řádkových a sloupcových úprav.

Definice 7.11

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$ je libovolné prosté zobrazení $\boxed{\lambda : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}}$.

Úmluvy:

- Množinu všech permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$ budeme označovat $\boxed{\mathcal{N}}$.
- Je-li $\lambda \in \mathcal{N}$, potom počet vzájemných záměn dvou prvků, pomocí nichž lze z uspořádané n-tice $(1, 2, \ldots, n)$ dosáhnout uspořádané n-tice $(\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(n))$, budeme označovat $\boxed{p_\lambda}$.

Definice 7.12

Determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je číslo $\boxed{\sum_{\lambda \in \mathcal{N}} (-1)^{p_\lambda} \cdot a_{1,\lambda(1)} \cdot a_{2,\lambda(2)} \cdots a_{n,\lambda(n)}}$;

označuje se $\boxed{\det A}$, $\boxed{|A|}$ nebo $\boxed{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$.

Poznámka 7.8

- Determinant je definován jen pro čtvercové matice.
- Je-li $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, potom $\det A = a_{1,1}$.

Úmluva:

Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $n > 1$, a $k, l \in \{1, \dots, n\}$ budeme symbolem $\boxed{A_{k,l}}$ označovat čtvercovou matici řádu $n-1$, která vznikne z matice A vynecháním k-tého řádku a l-tého sloupce.

Definice 7.13

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$ a $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Potom

- subdeterminant příslušný k prvku $a_{k,l}$ je číslo $\boxed{\det A_{k,l}}$,
- algebraický doplněk prvku $a_{k,l}$ je číslo $\boxed{(-1)^{k+l} \cdot \det A_{k,l}}$.

Úmluva:

Algebraický doplněk prvku $a_{k,l}$ budeme označovat symbolem $\boxed{D_{k,l}}$.

Věta 7.3 (Laplaceova)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$. Potom pro libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} D_{k,j},}$$

(rozvoj podle k-tého řádku)

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} D_{i,k}.}$$

(rozvoj podle k-tého sloupce)

Věta 7.4

- Determinant matice A je roven determinantu matice A^T.
- Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů těchto matic.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků z její hlavní diagonály.
- Determinant matice, která má nulový řádek (resp. sloupec), je nulový.
- Determinant matice, která má dva stejné řádky (resp. sloupce), je nulový.

Věta 7.5 (Vliv ekvivalentních úprav matic na změnu determinantu)

Nechť A je čtvercová matice. Lze-li matici B obdržet z matice A

(i) vzájemnou záměnou dvou řádků (resp. sloupců), potom

$$\boxed{\det A = -\det B.}$$

(ii) vynásobením jednoho řádku (resp. sloupce) skalárem $c \neq 0$, potom

$$\boxed{\det A = \frac{1}{c}\det B.}$$

(iii) přičtením libovolného násobku jednoho řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci), potom

$$\boxed{\det A = \det B.}$$

Výpočet determinantů čtvercových matic 2. a 3. řádu

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}.$$

Příklad 7.4 Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \cdots = \underline{\underline{10}}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \underline{\underline{-1}}$

Výpočet determinantů čtvercových matic libovolného řádu

- Přímé použití Laplaceovy věty; pro rozvoj je vhodné vybrat řádek nebo sloupec, který má co nejvíce nul.
- Podle pravidel stanovených ve větě 7.5 lze výpočet determinantu zadané čtvercové matice řádu n převést na výpočet determinantu z matice, která
  - má v některém řádku nebo sloupci co nejvíce nul; potom lze s výhodou použít Laplaceovu větu.
  - je trojúhelníková nebo má nulový řádek (resp. sloupec) nebo má dva stejné řádky (resp. sloupce); potom výsledek lze stanovit okamžitě podle věty 7.4.

Příklad 7.5 Vypočítejte determinant různými způsoby

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = \underline{\underline{3}}$$

Definice 7.14

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Matice adjungovaná k matici A je matice

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \dots & D_{1,n} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \dots & D_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & D_{n,n} \end{pmatrix}^T ;}$$

označuje se $\boxed{\operatorname{Adj} A}$.

- Matice inverzní k matici A je taková matice B, pro kterou platí

$$\boxed{A \cdot B = E = B \cdot A.}$$

Poznámka 7.9

Existuje-li matice inverzní k matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, je jediná, patří do $\mathbb{R}^{n \times n}$ a označuje se $\boxed{A^{-1}}$.

Definice 7.15

Čtvercová matice A je

- regulární, jestliže $\boxed{\det A \neq 0.}$
- singulární, jestliže $\boxed{\det A = 0.}$

Věta 7.6

K matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když A je regulární.
V takové situaci platí

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj} A,} \qquad \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.}$$

Příklad 7.6 K matici A učete matici inverzní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Věta 7.7

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je regulární matice. Jestliže

- $B, X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom $\boxed{A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B\,.}$
- $B, X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, potom $\boxed{X \cdot A = B \iff X = B \cdot A^{-1}\,.}$

Věta 7.8

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou regulární matice a $C, X \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potom

$$\boxed{A \cdot X \cdot B = C \iff X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}\,.}$$

Příklad 7.7 Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \ldots X = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & -8 & -2 \\ -11 & 11 & 6 \end{pmatrix}}}$$

Věta 7.9

Každá matice je ekvivalentní s nějakou schodovou maticí.

Úmluva

podrobnosti

Hodnost matice A je počet nenulových řádků ve schodové matici, která je ekvivalentní s maticí A.

Příklad 7.8 Určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 1 & -13 & 19 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

zpět

Poznámka 7.10

- Řádek matice z $\mathbb{R}^{m\times n}$ je vektor z $\mathbb{R}^n$ nazývaný také řádkový vektor.
- Sloupec matice z $\mathbb{R}^{m\times n}$ je vektor z $\mathbb{R}^m$ nazývaný také sloupcový vektor.

Definice 7.16

Hodnost matice A je největší číslo $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že z řádkových vektorů matice A lze vybrat n lineárně nezávislých vektorů; označuje se $\boxed{h(A)}$.

Poznámka

- $\boxed{h(O) = 0}$
- Hodnost matice je maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků.
- Řádky matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$h(A) = m.$$

Věta 7.10

- Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.
- Každá matice je ekvivalentní s nějakou schodovou maticí.
- Nenulové řádky schodové matice jsou lineárně nezávislé.

Důsledek:

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových řádků ve schodové matici, která je ekvivalentní s maticí A.

Věta 7.11 Souvislost mezi regularitou a hodností matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je

- regulární právě tehdy, když $\boxed{h(A) = n.}$
- singulární právě tehdy, když $\boxed{h(A) < n.}$

Konec

(7. Matice)