Kombinatorika

Jaroslav Drobek
jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

3. Základní kombinatorická pravidla

GOA – ORLOVA.CZ

(Ne)uspořádaná k-tice

Kombinatorika se zabývá vytvářením skupin z daných prvků a určováním počtu těchto skupin.

- (Neuspořádaná) k-tice je každá k-členná skupina sestavená z daných prvků; budeme ji zapisovat jako obvyklou množinu. Např. čtveřici s prvky a, b, c, d zapíšeme ve tvaru

$$\boxed{\{a, b, c, d\}}.$$

- Uspořádaná k-tice je každá k-členná skupina sestavená z daných prvků v určitém pořadí. Pozice prvku v uspořádané k-tici se vyjadřuje indexem. Uspořádanou k-tici s prvky $a_1, a_2, \ldots, a_k$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\boxed{(a_1, a_2 \ldots, a_k)}.$$

Příklad 3.1 Uvažujme množinu $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Sestavte všechny její
  - a jednoprvkové podmnožiny $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
  - b dvouprvkové podmnožiny $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$
  - c tříprvkové podmnožiny $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
  - d čtyřprvkové podmnožiny $\{1, 2, 3, 4\}$
  - . . . tj. sestavujeme (neuspořádané) k-tice ze čtyř prvků.
- Z prvků množiny M sestavte všechna přirozená čísla
  - a jednociferná $1, 2, 3, 4$
  - b dvouciferná $12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43$
  - c tríciferná $123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, \ldots$
  - d čtyřciferná $1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, \ldots$

  přičemž lze každý prvek využít nejvýše jednou;
  . . . tj. sestavujeme uspořádané k-tice ze čtyř prvků.

Příklad 3.2 Kolika způsoby lze z prvků množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sestavit dvouciferné číslo?

Kolika způsoby lze vybrat první cifru? . . . 4

Kolika způsoby lze poté vybrat druhou cifru? . . . 4

$\boxed{\text{desítky}}$ $\boxed{\text{jednotky}}$

Počet možných dvouciferných čísel je $4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$.

Příklad 3.3 Kolika způsoby lze sestavit dvoučlennou posádku lodi z 10 chlapců a 15 dívek, má-li být zadákem chlapcem a háčkem dívka?

Kolika způsoby lze vybrat dívku? ... 15
Kolika způsoby lze poté vybrat chlapce? ... 10
Počet možných posádek je $15 \cdot 10 = \underline{\underline{150}}$.

zadák
háček

Příklad 3.4 Kolika způsoby lze sestavit hokejovou formaci (5 různých celoplošných rolí) ze 4 extraligových a 6 prvoligových hokejistů, mají-li v obraně (levý a pravý obránce) hrát výhradně extraligoví a v útoku (levý, střední a pravý útočník) výhradně prvoligoví hráčí?

Kolika způsoby lze vybrat

- levého obránce? ... 4
- následně pravého obránce? ... 3
- následně levého útočníka? ... 6
- následně středního útočníka? ... 5
- následně pravého útočníka? ... 4

LO PO

LÚ SÚ PÚ

Počet možných sestav je

$$4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 12 \cdot 120 = \underline{\underline{7!}}.$$

Poznámky

- Aktuální konvence vyžaduje zápis skupiny „do řádku“:

Př. 3.2: $\boxed{\text{desítky}}$ $\boxed{\text{jednotky}}$ . . . obvykle: (*desítky, jednotky*).

Př. 3.3: $\boxed{\text{zadák}}$ . . . přirozeně: (*zadák, háček*).

$\boxed{\text{háček}}$

Př. 3.4: $\boxed{\text{LO}}$ $\boxed{\text{PO}}$ . . . (*LO,PO,LÚ,SÚ,PÚ*) **?** nebo (*LÚ,SÚ,PÚ,LO,PO*) **?** nebo jinak**?**

$\boxed{\text{LÚ}}$ $\boxed{\text{SÚ}}$ $\boxed{\text{PÚ}}$

- Vzniká potřeba ztotožnění skupin s uspořádanými *k*-ticemi i v případech, kdy to nesouvisí s jejich podstatou (typicky praktická úloha).
- Např. roli „levého obránce“ v hokejové formaci lze ztotožnit s 1. pozicí v uspořádané pětici apod. Potom pro každou konkrétní uspořádanou pětici bude platit, že hráč uvedený na její první pozici má roli levého obránce apod.
- Postup intuitivně použitý v předchozích příkladech je ve skutečnosti využitím tzv. „kombinatorického pravidla součinu“, které se obvykle formuluje speciálně pro uspořádané *k*-tice.

Kombinatorické pravidlo součinu

Lze-li při vytváření uspořádaných k-tic (skupin)

- 1. člen vybrat $\boxed{n_1}$ způsoby,
- 2. člen (po výběru prvního členu) vybrat $\boxed{n_2}$ způsoby,

  $\vdots$
- k-tý člen (po výběru $(k-1)$-ního členu) vybrat $\boxed{n_k}$ způsoby,

potom počet všech takto vytvořených uspořádaných k-tic je roven $\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$.

Příklad 3.5 Ve filmu JÍZDA byla jedna ženská a dvě mužské hlavní role. Kolika způsoby mohl režisér Svěrák ml. obsadit hlavní role, když z potenciálních kandidátů projevili zájem hrát ve filmu jen Geislerová, Hayek(ová), Thurman(ová), Špalek, Jordan, Pastrňák a Atkinson?

Sestavujeme trojice (*řidič, spolujezdec, stopařka*). Např. (Špalek, Pastrňák, Geislerová)
Počet možných obsazení je $4 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{36}}$.

Příklad 3.6

Bára má 3 různá trička a 5 různých sukní. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak? $[3 \cdot 5 = 15]$

Příklad 3.7

V budově našeho gymnázia lze projít ze suterénu do 1. patra po šesti různých schodištích a z 1. patra do 2. patra po třech různých schodištích. Kolika způsoby lze s využitím těchto schodišť projít ze suterénu do 2. patra a zpět,

a) nejsou-li stanoveny další podmínky. $[6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 324]$
b) nemá-li být žádné schodiště použito dvakrát. $[6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 180]$
c) má-li být v obou směrech využito stejné schodiště mezi suterénem a 1. patrem a dvě různá schodiště mezi 1. a 2. patrem. $[6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36]$

Příklad 3.8

Podnikatel otevírá restauraci, jejíž provoz má zajišťovat kuchař, číšník, barmanka a uklízečka. Kolika způsoby může sestavit pracovní kolektiv, jestliže může vybírat mezi 2 uchazeči o pozici kuchař, 1 uchazečem o pozici číšníka a 3 uchazečkami, které mohou pracovat na obou zbývajících pozicích?

Příklad 3.9

V divadelní hře jsou dvě ženské a tři mužské role. Kolika způsoby může režisér volit herecké složení, má-li k dispozici 4 herečky (každá zvládne jakoukoliv ženskou roli) a 5 herců (každý zvládne jakoukoliv mužskou roli)? [$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720$]

Příklad 3.10

Kolik způsoby lze z 12 mladších a 6 starších žáků sestavit fotbalové družstvo (11 různých pozic: brankář, 4 různí obránci, 3 různí záložníci, 3 různí útočníci), mají-li v záloze a útoku (celkem 6 pozic) hrát výhradně mladší žáci a na ostatních pozicích výhradně starší žáci? [$12!$]

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3.11 Kolik neprázdných podmnožin má množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$?

---

a jednoprvkové podmnožiny . . . 4
b dvouprvkové podmnožiny . . . 6
c tříprvkové podmnožiny . . . 4
d čtyřprvkové podmnožiny . . . 1

Neprázdné podmnožiny jsou rozděleny do skupin a)–d).
(Nemůže být jedna podmnožina ve dvou skupinách. . .)
Počet podmnožin je $4 + 6 + 4 + 1 = \underline{\underline{15}}$.

Kombinatorické pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné a vzájemně disjunktní množiny, které mají po řadě $\boxed{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ prvků, potom počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ je roven

$$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots p_n}\,.$$

Příklad 3.12 Kolik odborných učeben máme na naší škole?

- Jazykové . . . 6
- Počítačové . . . 3
- Biologické . . . 2
- Fyzikální . . . 1
- Chemická . . . 1

Jde o navzájem disjunktní množiny.
Počet odborných učeben je $6 + 3 + 2 + 1 + 1 = \underline{\underline{13}}$.

Příklad 3.13

Čtverec o straně délky 4 cm je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 stejných čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců. [30]

Příklad 3.14

Určete počet všech dvojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. [81]

Konec

(3. Základní kombinatorická pravidla)