

8. Soustavy lineárních rovnic

Lineární algebra

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika I



Definice 8.1

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \cdots &\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých** x_1, \dots, x_n .

- Uspořádaná n -tice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je **řešení soustavy (1)**, jestliže čísla x_1, \dots, x_n splňují (1).
- Soustava (1) je **řešitelná**, jestliže existuje její řešení.
- Řešení $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ soustavy (1) je **triviální**, jestliže

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$



Poznámka:

Protože uspořádané n -tice $(x_1, \dots, x_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ lze ztotožnit s maticemi typu $n \times 1$, můžeme soustavu (1) vyjádřit v tzv. **maticovém tvaru**:

$$A_{m \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1} .$$



Definice 8.2

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, potom soustava (1) se nazývá **homogenní**; v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Čísla $a_{i,j}$ se nazývají **koeficienty soustavy (1)**.
- Matice A se nazývá **matice soustavy (1)**.
- Matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

- se nazývá **rozšířená matice soustavy (1)**; označuje se \tilde{A} .
- Vektor \mathbf{b} se nazývá **vektor pravých stran soustavy (1)**.



Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Frobeniova věta

Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když

$$h(A) = h(\tilde{A}).$$

Věta 8.1

Nechť soustava (1) je řešitelná. Potom má

- jediné řešení, je-li $h(A) = n$,
- nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) < n$; v takovém případě lze tato řešení vyjádřit v závislosti na $n - h(A)$ parametrech.

Důsledek

Homogenní soustava lineárních rovnic má triviální řešení; toto řešení je jediné, je-li $h(A) = n$.

Věta 8.2

Soustavy, jejichž rozšířené matice jsou ekvivalentní, mají stejná řešení.



Gaussova eliminační metoda

Umožňuje řešit soustavu (1):

- Odvodíme schodovou matici \tilde{B} , která je ekvivalentní s maticí \tilde{A} , a schodovou matici B , která je ekvivalentní s maticí A .
- Vyřešíme soustavu, jejíž rozšířená matice je \tilde{B} . Při učování složek řešení postupujeme od posledního řádku k prvnímu.
- Nalezená řešení jsou na základě věty 8.2 současně řešeními soustavy (1).



Gaussova eliminační metoda

Příklad 8.1 Řešte soustavy:

a) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$

$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(1, 2, -2)^T}}$

b) $2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

$2x_1 - x_2 - 2x_4 = 4$

$8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 = 19$

$6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9$

$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, 2s - 2t - 4, 5t + 3, t)^T}}$

c) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$

$x_1 + x_2 - 2x_4 = 3$

... řešení neexistuje

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

$5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0$

$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{(s, t, -s, -t)^T}}$



Věta 8.3

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom soustava (1) má jediné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a platí tzv. **Cramerovo pravidlo**:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} . Dále platí

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Poznámka 8.1

Věta 8.3 umožňuje najít řešení soustavy (1) v případě, že $m = n$.

Příklad 8.2

- a) Najděte x_2 ze soustavy
- $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$
- $$\dots x_2 = \underline{\underline{\underline{-1}}} = \underline{\underline{\underline{2}}}$$

- b) Řešte stejnou soustavu s použitím inverzní matice.
- $$\dots \mathbf{x} = \underline{\underline{\underline{(6, 2, 7)^T}}}$$



Konec
(8. Soustavy lineárních rovnic)