Referát

Diferenciální počet funkce dvou proměnných

Mgr. Jaroslav Drobek, Ph. D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Bakalářská matematika II

$$B = \{-12, 6, 8, 10\}$$

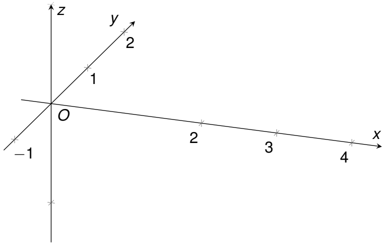
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$$

$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

$[2,2$

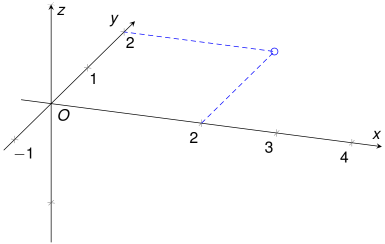
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$

$[2, 2$



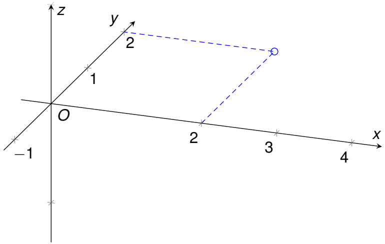
$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$

$[2, 2$



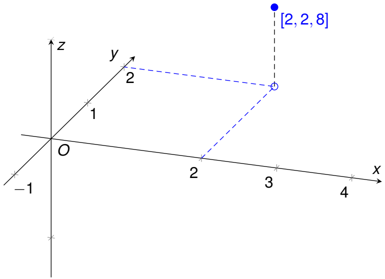
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$$

$$[2,2,8]$$



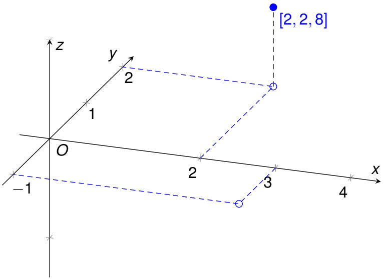
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$

$$[2,2,8]$$



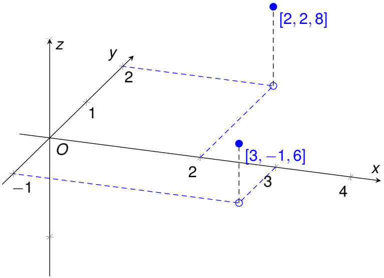
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$$

$$[2,2,8],[3,-1$$



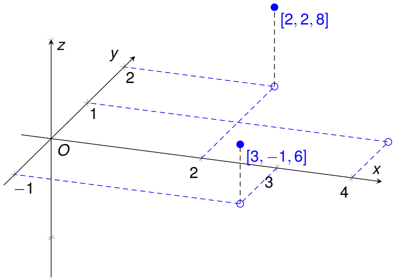
$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$

$$[2,2,8],[3,-1,6]$$

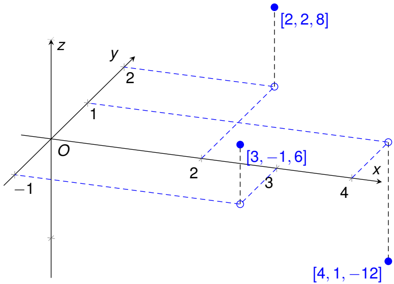


$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$$

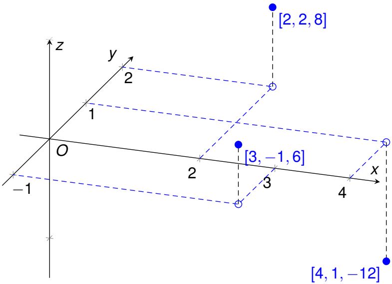
$$[2,2,8],[3,-1,6],[4,1$$



$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$
$$[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]$$

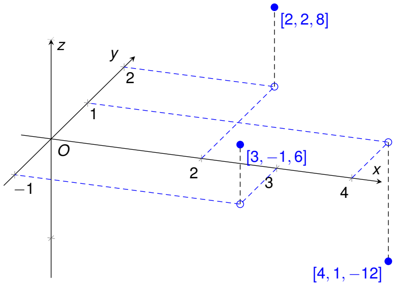


$$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$$
$$\{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$$



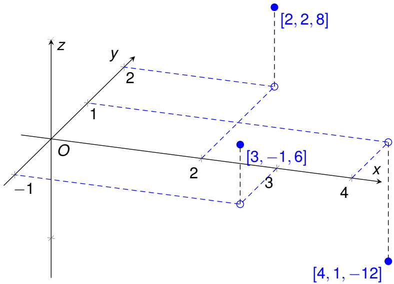
$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

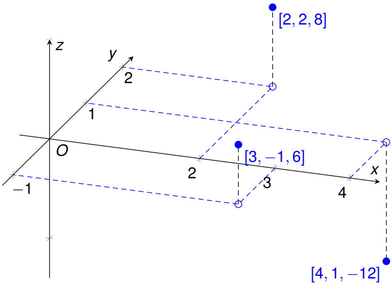
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$

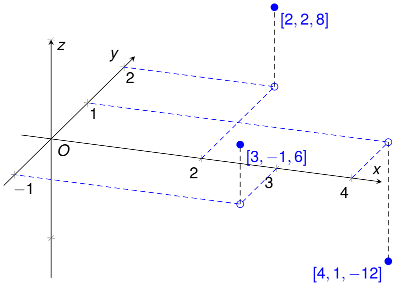
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2], [3,-1], [4,1]$ jsou argumenty funkce f

$\{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$



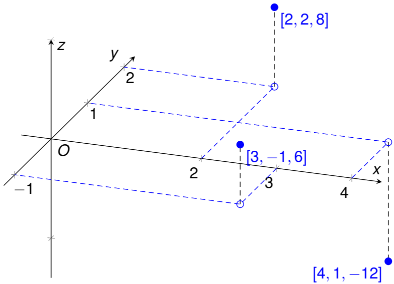
$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

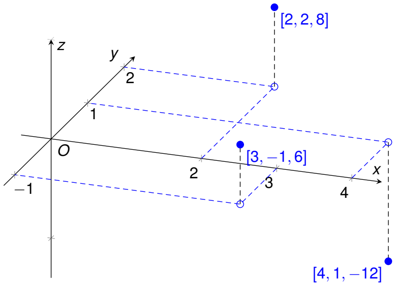
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12,6,8$ jsou funkční hodnoty funkce f



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$

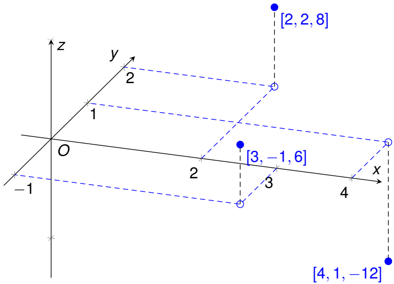
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou funkční hodnoty funkce f

  $\{-12, 6, 8\}$



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

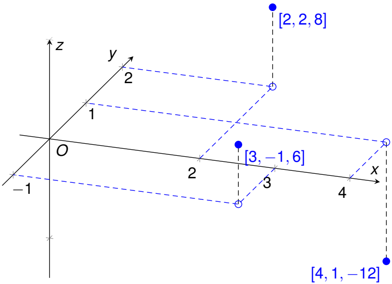
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{-12,6,8\}$ je obor hodnot funkce f



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$

- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $\mathrm{D}_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $\mathrm{H}_f = \{-12, 6, 8\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

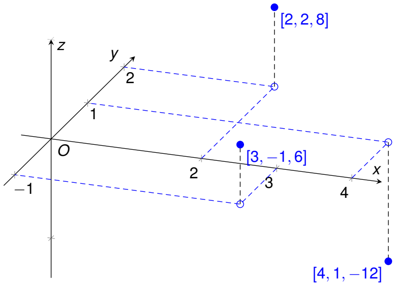


$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $\mathrm{D}_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $\mathrm{H}_f = \{-12,6,8\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(2,2) = 8, \; f(3,-1) = 6, \; f(4,1) = -12$



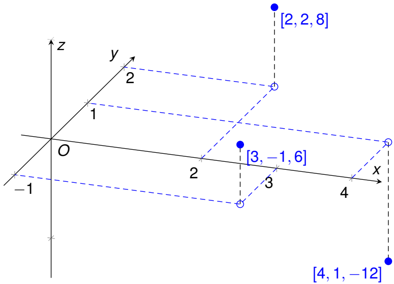
$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12,6,8,10\}$

- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $\mathrm{D}_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12,6,8$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $\mathrm{H}_f = \{-12,6,8\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(2,2) = 8,\ f(3,-1) = 6,\ f(4,1) = -12$
- tabulkou:

argument	$[2,2]$	$[3,-1]$	$[4,1]$
funkční h.	8	6	-12



$A = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}, \quad B = \{-12, 6, 8, 10\}$

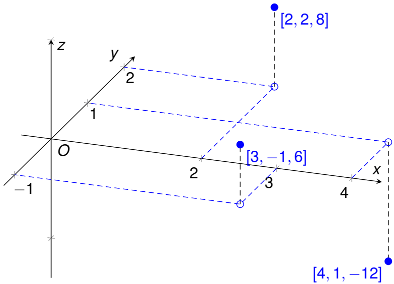
- $f = \{[2,2,8],[3,-1,6],[4,1,-12]\}$ je funkce z A do B
- $[2,2],[3,-1],[4,1]$ jsou argumenty funkce f
- $D_f = \{[2,2],[3,-1],[4,1]\}$ je definiční obor funkce f
- $-12, 6, 8$ jsou funkční hodnoty funkce f
- $H_f = \{-12, 6, 8\}$ je obor hodnot funkce f

Další vyjádření této funkce:

- výčtem: $f(2,2) = 8, \; f(3,-1) = 6, \; f(4,1) = -12$
- tabulkou:

argument	$[2,2]$	$[3,-1]$	$[4,1]$
funkční h.	8	6	-12

- graficky:



$$A = \langle 0, 4 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$$

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ?

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0, 4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

$A = \langle 0,4\rangle \times \langle -2,2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0,4\rangle\,,\ y \in \langle -2,2\rangle}$

potom např. $f(2,2) =$

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0, 4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

potom např. $f(2,2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2$

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0, 4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

potom např. $f(2,2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2 = 8,$

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0,4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

$$\text{potom např.} \quad f(2,2) = 2\cdot 2^3 - 2^2\cdot 2 = 8,$$

$$f(3,-1) =$$

$A = \langle 0, 4 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle \,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x, y) = xy^3 - x^2 y, \quad x \in \langle 0, 4 \rangle \,, \; y \in \langle -2, 2 \rangle}$

potom např. $f(2, 2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2 = 8,$

$f(3, -1) = 3 \cdot (-1)^3 - 3^2 \cdot (-1)$

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0, 4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

potom např. $f(2,2) = 2\cdot 2^3 - 2^2\cdot 2 = 8,$

$$f(3,-1) = 3\cdot(-1)^3 - 3^2\cdot(-1) = 6$$

$$\vdots$$

$A = \langle 0, 4 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle \,, \quad B = \mathbb{R}$

- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x, y) = xy^3 - x^2 y, \quad x \in \langle 0, 4 \rangle \,, \; y \in \langle -2, 2 \rangle}$

$$\text{potom např.} \quad f(2, 2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2 = 8,$$
$$f(3, -1) = 3 \cdot (-1)^3 - 3^2 \cdot (-1) = 6$$
$$\vdots$$

- Jak vypadá graf funkce f ?

$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

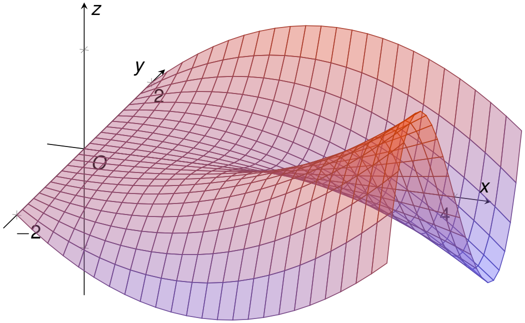
- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0,4\rangle\,,\ y \in \langle -2,2\rangle}$

potom např. $f(2,2) = 2\cdot 2^3 - 2^2\cdot 2 = 8,$

$f(3,-1) = 3\cdot(-1)^3 - 3^2\cdot(-1) = 6$

$\vdots$

- Jak vypadá graf funkce f ?



$A = \langle 0, 4\rangle \times \langle -2, 2\rangle\,, \quad B = \mathbb{R}$

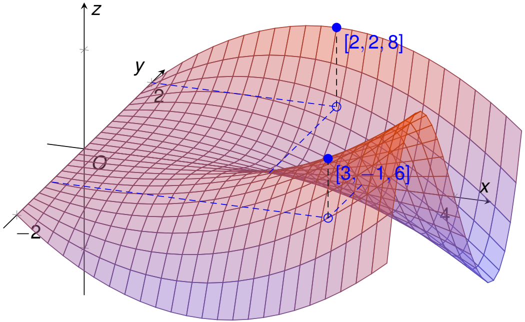
- Jak zadat funkci f ? $\boxed{f(x,y) = xy^3 - x^2y, \quad x \in \langle 0,4\rangle\,,\ y \in \langle -2, 2\rangle}$

potom např. $f(2,2) = 2\cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2 = 8,$

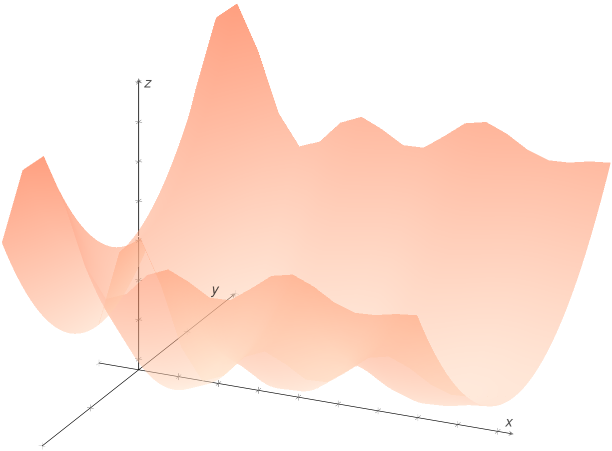
$$f(3,-1) = 3\cdot(-1)^3 - 3^2\cdot(-1) = 6$$

$$\vdots$$

- Jak vypadá graf funkce f ?

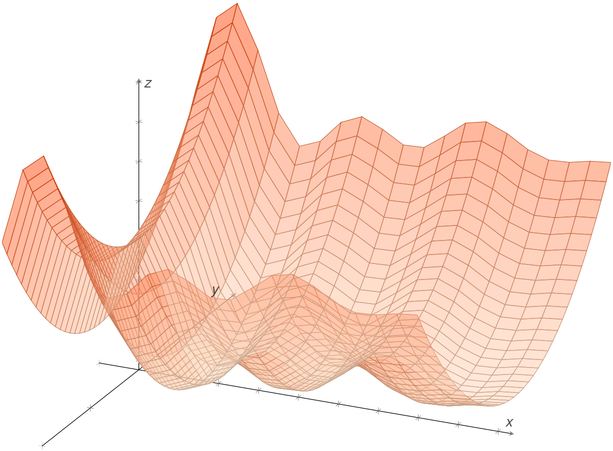


Řezy grafu



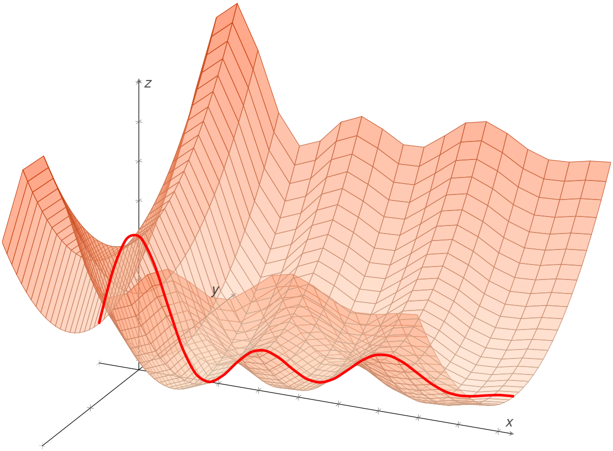
Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou



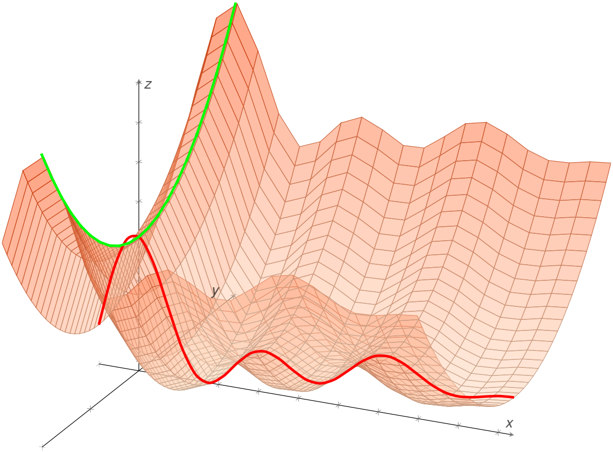
Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou $y = 0$,



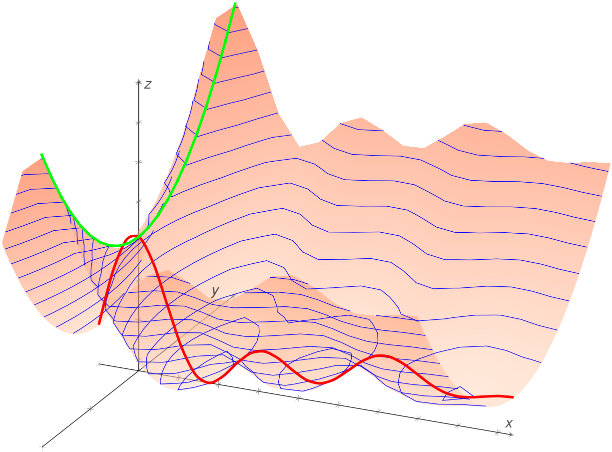
Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou $y = 0$, $x = 0$,



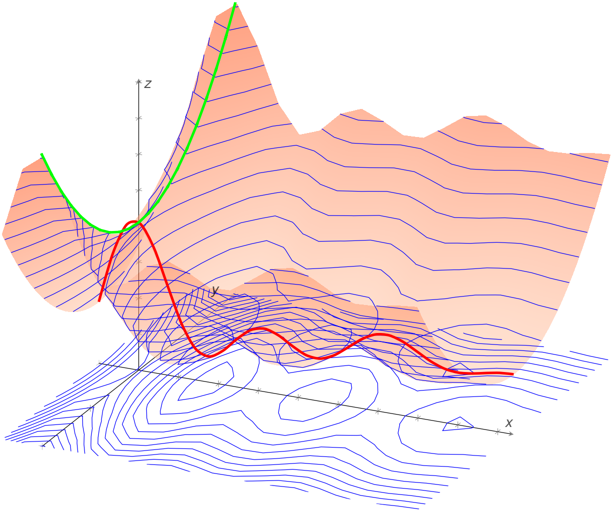
Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou $y = 0,\ x = 0,\ z = 0$ (vrstevnice)



Řezy grafu

Řezy rovnoběžné s rovinou $y = 0,\ x = 0,\ z = 0$ (vrstevnice)



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ II. $x + 1 > 0$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ II. $x + 1 > 0$ III. $\ln(x + 1) \neq 0$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ II. $x + 1 > 0$ III. $\ln(x+1) \neq 0$

$x^2 + y^2 \leq 4$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$

II. $x + 1 > 0$, $x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$, $x + 1 \neq 1$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x + 1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lrlrlr} \text{I.} & 4-x^2-y^2 \geq 0 & \text{II.} & x+1>0 & \text{III.} & \ln(x+1) \neq 0 \\ & x^2+y^2 \leq 4 & & x > -1 & & x+1 \neq 1 \\ & & & & & x \neq 0 \end{array}}_{x^2+y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0}$$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{rrrrrr} \text{I.} & 4-x^2-y^2 \geq 0 & \text{II.} & x+1>0 & \text{III.} & \ln(x+1) \neq 0 \\ & x^2+y^2 \leq 4 & & x>-1 & & x+1 \neq 1 \\ & & & & & x \neq 0 \end{array}}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\leq 4 \,\wedge\, x>-1 \,\wedge\, x\neq 0\}}$$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$

II. $x + 1 > 0$, $x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$, $x + 1 \neq 1$, $x \neq 0$

$$\underline{\underline{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}}}$$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4-x^2-y^2\geq 0$
$x^2+y^2\leq 4$

II. $x+1>0$
$x>-1$

III. $\ln(x+1)\neq 0$
$x+1\neq 1$
$x\neq 0$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{rrr} \text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 & \text{II.}\quad x+1>0 & \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0 \\ x^2+y^2\leq 4 & x>-1 & x+1\neq 1 \\ (\ldots x^2+y^2=4) & & x\neq 0 \end{array}}$$

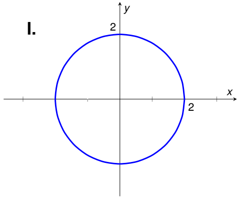
$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0\}$$

Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \text{II.}\quad x+1>0 & \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0 \\ \qquad x^2+y^2 \leq 4 & \qquad x > -1 & \qquad x+1 \neq 1 \\ (\dots x^2+y^2=4) & & \qquad x \neq 0 \end{array}}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$

I.



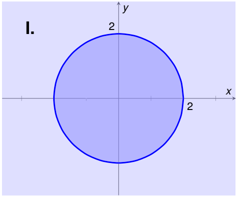
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4-x^2-y^2\geq 0$
$x^2+y^2\leq 4$
$(\ldots x^2+y^2=4)$

II. $x+1>0$
$x>-1$

III. $\ln(x+1)\neq 0$
$x+1\neq 1$
$x\neq 0$

$$\underline{\underline{D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}}}$$



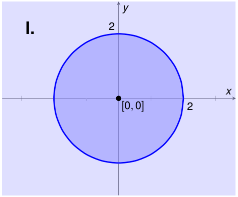
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\dots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

$$\underline{\underline{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}}}$$



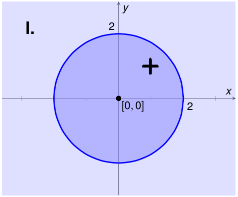
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\dots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

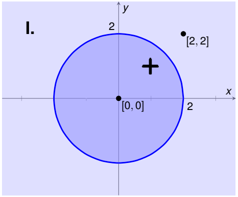
$$\underline{\underline{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}}}$$



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \text{II.}\quad x+1>0 & \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0 \\ \qquad x^2+y^2 \leq 4 & \qquad x > -1 & \qquad x+1 \neq 1 \\ (\dots x^2+y^2=4) & & \qquad x \neq 0 \end{array}}$$

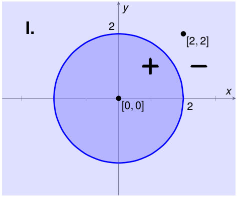
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \text{II.}\quad x+1>0 & \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0 \\ \qquad x^2+y^2 \leq 4 & \qquad x > -1 & \qquad x+1 \neq 1 \\ (\dots x^2+y^2=4) & & \qquad x \neq 0 \end{array}}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

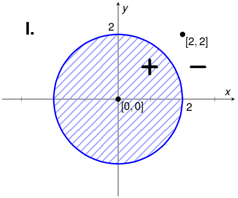
I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\dots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$

I.



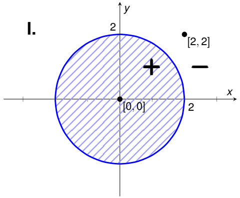
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\ldots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$



Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

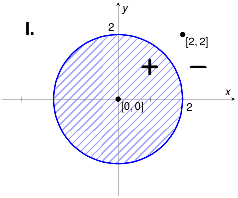
I. $4-x^2-y^2\geq 0$ II. $x+1>0$ III. $\ln(x+1)\neq 0$

$x^2+y^2\leq 4$ $x>-1$ $x+1\neq 1$

$(\ldots x^2+y^2=4)$ $(\ldots x=-1)$ $x\neq 0$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0\}$$

I.



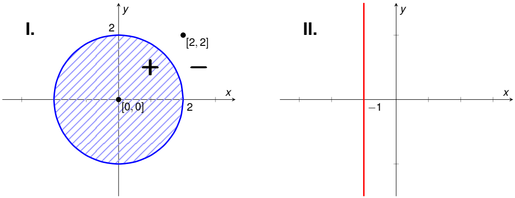
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4-x^2-y^2\geq 0$ II. $x+1>0$ III. $\ln(x+1)\neq 0$

$x^2+y^2\leq 4$ $x>-1$ $x+1\neq 1$

$(\dots x^2+y^2=4)$ $(\dots x=-1)$ $x\neq 0$

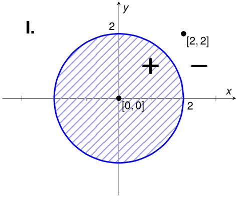
$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$

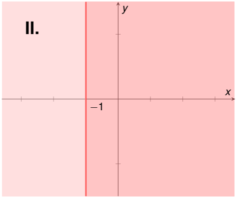


Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \text{II.}\quad x+1 > 0 & \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0 \\ \qquad x^2 + y^2 \leq 4 & \qquad x > -1 & \qquad x+1 \neq 1 \\ (\ldots x^2 + y^2 = 4) & (\ldots x = -1) & \qquad x \neq 0 \end{array}}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$





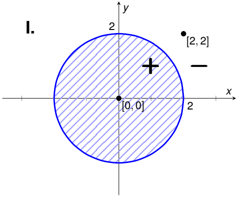
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

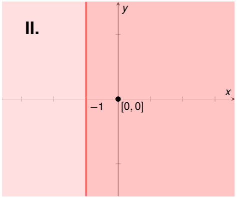
I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ II. $x + 1 > 0$ III. $\ln(x+1) \neq 0$

$x^2 + y^2 \leq 4$ $\quad x > -1$ $\quad x + 1 \neq 1$

$(\dots x^2 + y^2 = 4)$ $\quad (\dots x = -1)$ $\quad x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \land x > -1 \land x \neq 0\}$$





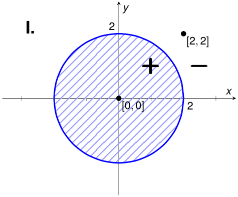
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

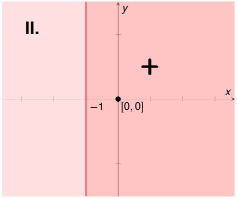
I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\ldots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$
$(\ldots x = -1)$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$





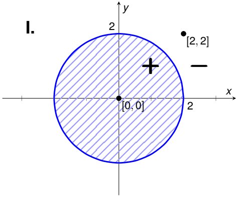
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

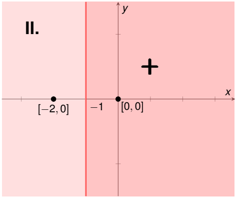
$$\text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \text{II.}\quad x + 1 > 0 \qquad \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4 \qquad x > -1 \qquad x + 1 \neq 1$$

$$(\ldots x^2 + y^2 = 4) \qquad (\ldots x = -1) \qquad x \neq 0$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$

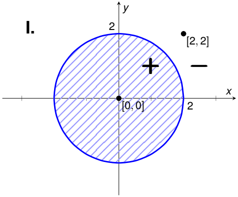


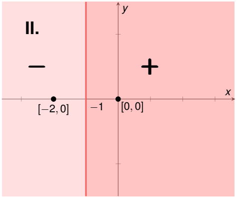


Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 & \text{II.}\quad x+1>0 & \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0 \\ x^2+y^2\leq 4 & x>-1 & x+1\neq 1 \\ (\dots x^2+y^2=4) & (\dots x=-1) & x\neq 0 \end{array}}$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$





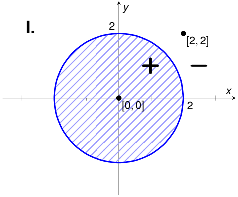
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

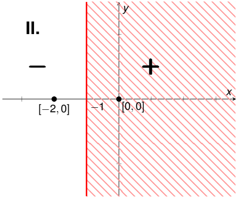
I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 4$
$(\dots x^2 + y^2 = 4)$

II. $x + 1 > 0$
$x > -1$
$(\dots x = -1)$

III. $\ln(x+1) \neq 0$
$x + 1 \neq 1$
$x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \land x > -1 \land x \neq 0\}$$





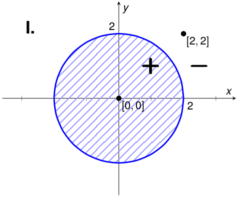
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

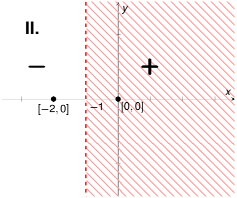
I. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ II. $x + 1 > 0$ III. $\ln(x+1) \neq 0$

$x^2 + y^2 \leq 4$ $x > -1$ $x + 1 \neq 1$

$(\ldots x^2 + y^2 = 4)$ $(\ldots x = -1)$ $x \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$





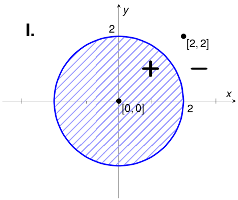
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

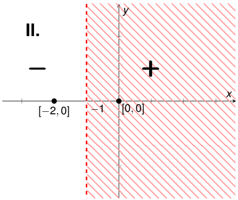
$$\text{I.}\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \text{II.}\quad x + 1 > 0 \qquad \text{III.}\quad \ln(x+1) \neq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4 \qquad x > -1 \qquad x + 1 \neq 1$$

$$(\dots x^2 + y^2 = 4) \qquad (\dots x = -1) \qquad x \neq 0$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0\}$$





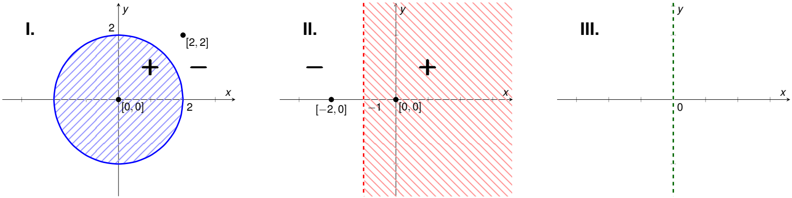
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

I. $4-x^2-y^2 \geq 0$ II. $x+1>0$ III. $\ln(x+1)\neq 0$

$x^2+y^2 \leq 4$ $x>-1$ $x+1\neq 1$

$(\ldots x^2+y^2=4)$ $(\ldots x=-1)$ $x\neq 0$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0\}$$



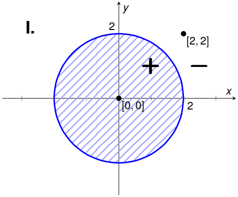
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

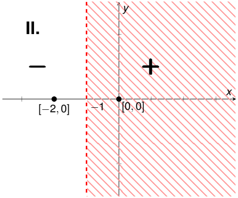
$$\text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 \qquad \text{II.}\quad x+1>0 \qquad \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0$$

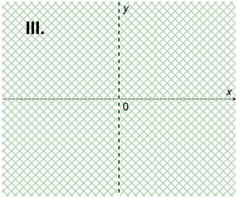
$$x^2+y^2\leq 4 \qquad x>-1 \qquad x+1\neq 1$$

$$(\dots x^2+y^2=4) \qquad (\dots x=-1) \qquad x\neq 0$$

$$\underline{\underline{D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0\}}}$$







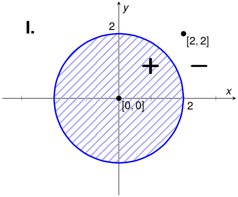
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

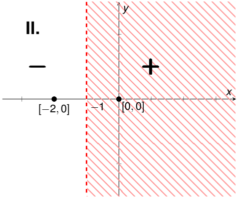
$$\text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 \qquad\qquad \text{II.}\quad x+1>0 \qquad\qquad \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0$$

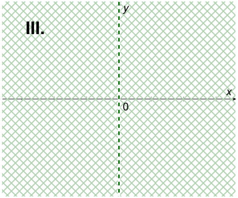
$$x^2+y^2\leq 4 \qquad\qquad x>-1 \qquad\qquad x+1\neq 1$$

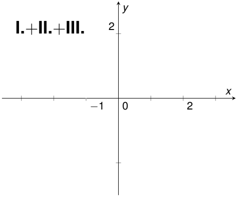
$$(\dots x^2+y^2=4) \qquad\qquad (\dots x=-1) \qquad\qquad x\neq 0$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$









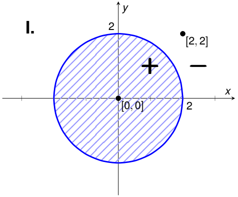
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

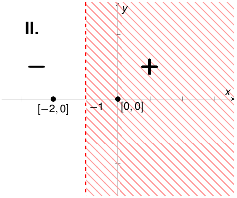
$$\text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 \qquad \text{II.}\quad x+1>0 \qquad \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0$$

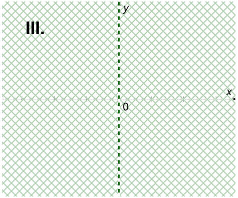
$$x^2+y^2\leq 4 \qquad x>-1 \qquad x+1\neq 1$$

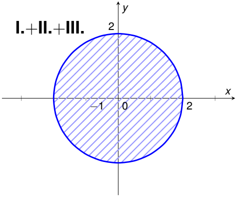
$$(\ldots x^2+y^2=4) \qquad (\ldots x=-1) \qquad x\neq 0$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$









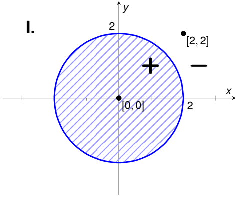
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

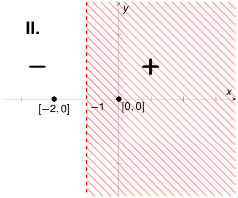
$$\text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 \qquad\qquad \text{II.}\quad x+1>0 \qquad\qquad \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0$$

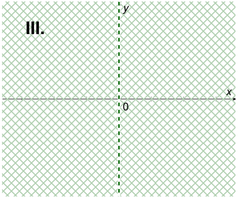
$$x^2+y^2\leq 4 \qquad\qquad x>-1 \qquad\qquad x+1\neq 1$$

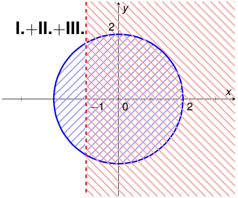
$$(\ldots x^2+y^2=4) \qquad\qquad (\ldots x=-1) \qquad\qquad x\neq 0$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$





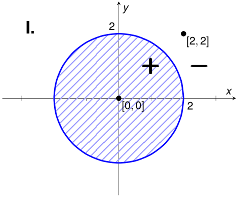


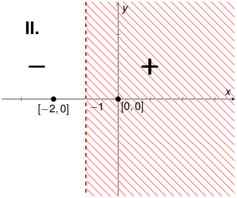


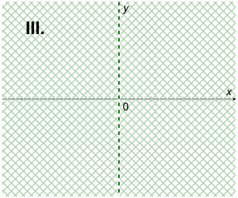
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

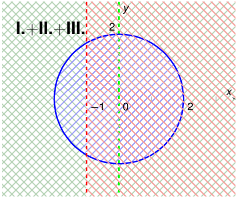
$$\begin{array}{rrrrrr}
\text{I.} & \color{blue}{4-x^2-y^2 \geq 0} & \text{II.} & \color{red}{x+1>0} & \text{III.} & \ln(x+1)\neq 0 \\
 & x^2+y^2 \leq 4 & & x>-1 & & x+1\neq 1 \\
 & (\ldots x^2+y^2=4) & & (\ldots x=-1) & & \color{green}{x\neq 0}
\end{array}$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0\}$$









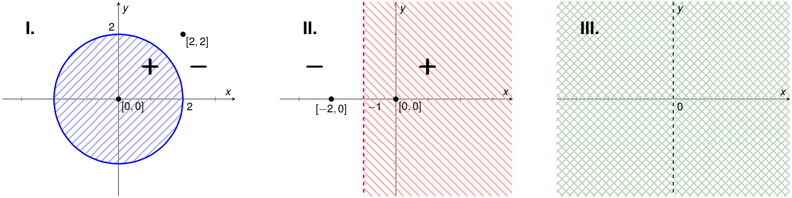
Příklad 1.1: Urči a graficky znázorni definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+1)}$.

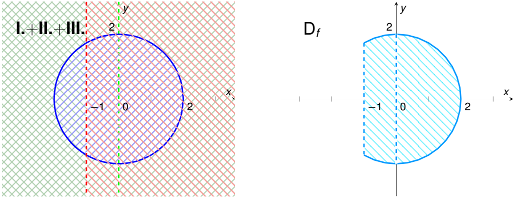
$$\text{I.}\quad 4-x^2-y^2\geq 0 \qquad \text{II.}\quad x+1>0 \qquad \text{III.}\quad \ln(x+1)\neq 0$$

$$x^2+y^2\leq 4 \qquad x>-1 \qquad x+1\neq 1$$

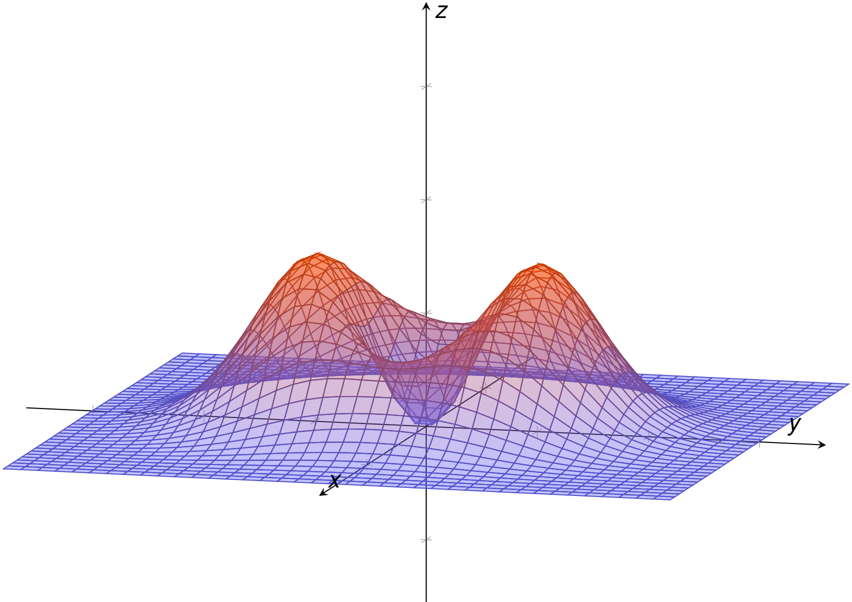
$$(\dots x^2+y^2=4) \qquad (\dots x=-1) \qquad x\neq 0$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\wedge x>-1\wedge x\neq 0\}$$

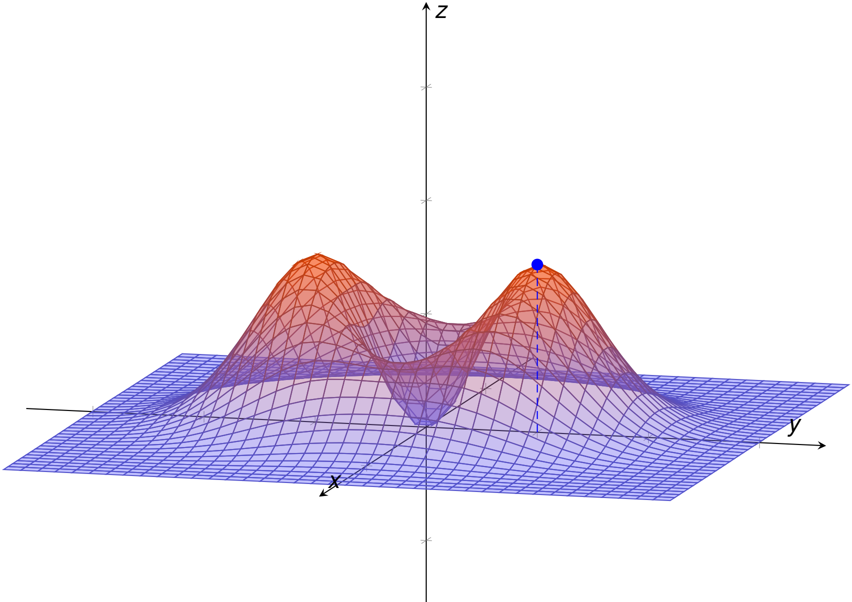




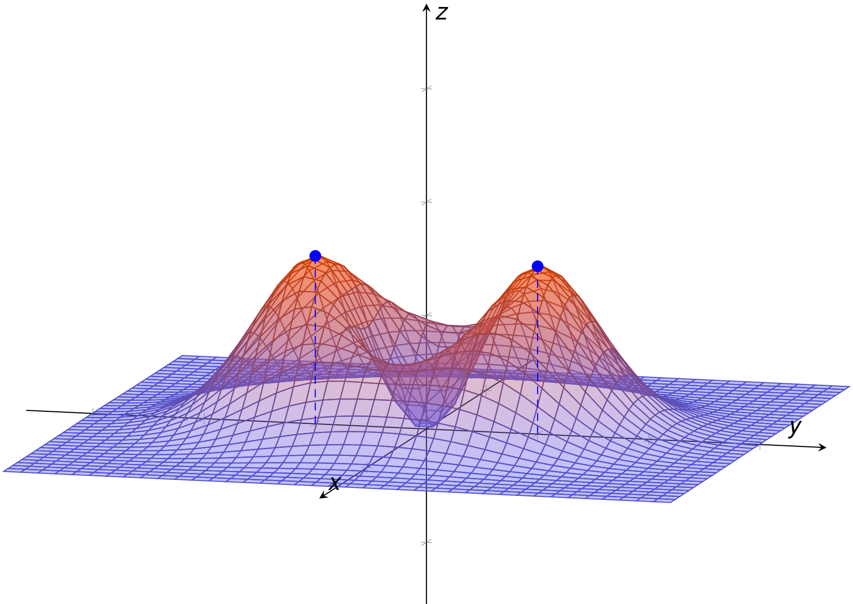
Lokální extrémy



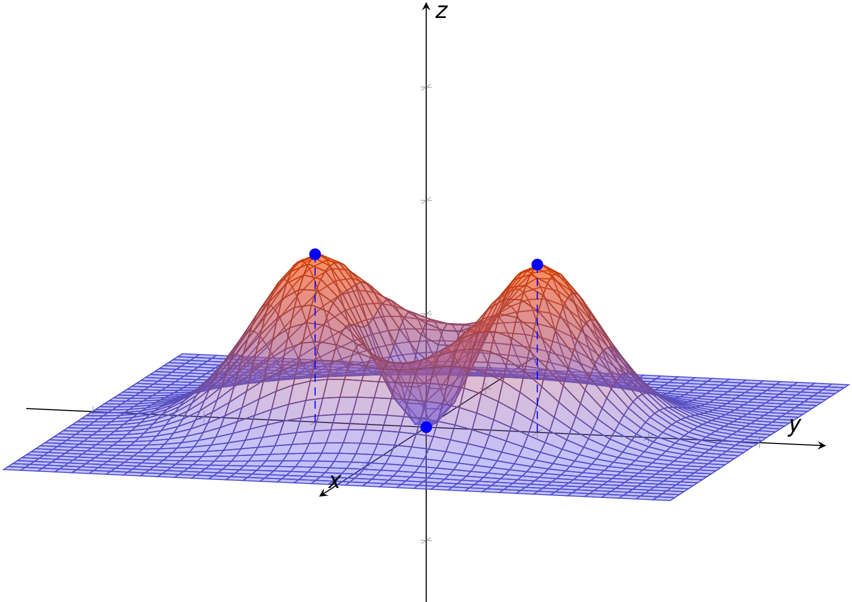
Lokální extrémy



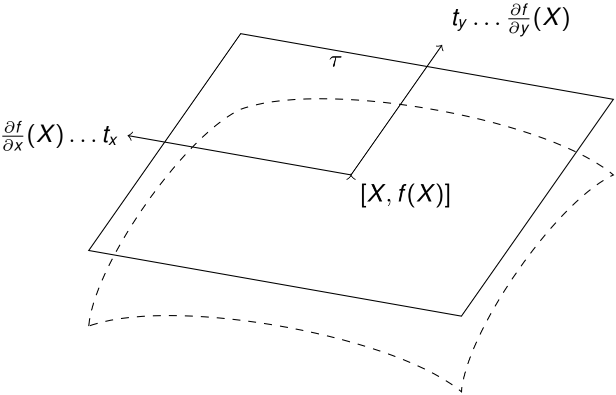
Lokální extrémy



Lokální extrémy



Parciální derivace



- parciální derivace 1.řádu $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}}$
- parciální derivace 2.řádu $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y$

;

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

;

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

;

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

;

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

;

teorie

f má lok. extrém v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

;

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$10x + 20 = 0$$

$$4y + 12 = 0$$

;

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{array}{r} 10x + 20 = 0 \\ 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \end{array}$$

;

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \;\wedge\; \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline \end{aligned}$$

;

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline X &= [-2, -3]; \end{aligned}$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline X &= [-2, -3]; \end{aligned}$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{array}{c} 10x + 20 = 0 \\ 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \\ y = -3 \\ \hline \end{array}$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline X &= [-2, -3]; \end{aligned}$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\begin{array}{r} 10x + 20 = 0 \\ 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \\ y = -3 \\ \hline \end{array}$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \tfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \tfrac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$

$$x = -2$$
$$y = -3$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$

$$x = -2$$
$$y = -3$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$$\boxed{J < 0 \implies f \text{ nemá lok. extrém v } X}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$

$$x = -2$$
$$y = -3$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$$J < 0 \implies f \text{ nemá lok. extrém v } X$$
$$J > 0 \implies f \text{ má lok. extrém v } X$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$

$$x = -2$$
$$y = -3$$

$$X = [-2, -3];$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$J < 0 \implies f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \implies f$ má lok. extrém v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\begin{array}{c} 10x + 20 = 0 \\ 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \\ y = -3 \\ \hline \end{array}$$

$$X = [-2, -3];$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} J < 0 \implies f \text{ nemá lok. extrém v } X \\ J > 0 \implies f \text{ má lok. extrém v } X \end{array}}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline \end{aligned}$$

$$X = [-2, -3];$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$\Longrightarrow$ f má lok. extrém v X

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} J < 0 &\implies f \text{ nemá lok. extrém v } X \\ J > 0 &\implies f \text{ má lok. extrém v } X \end{aligned}}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$
$$x = -2$$
$$y = -3$$
$$X = [-2, -3];$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$\Longrightarrow$ f má lok. extrém v X

teorie

f má lok. extrém v $X \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$

$J < 0 \Longrightarrow f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \Longrightarrow f$ má lok. extrém v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \Longrightarrow f$ má lok. maximum v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\begin{array}{c} 10x + 20 = 0 \\ 4y + 12 = 0 \\ \hline x = -2 \\ y = -3 \\ \hline X = [-2, -3]; \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Longrightarrow f \text{ má lok. extrém v } X$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$J < 0 \Longrightarrow f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \Longrightarrow f$ má lok. extrém v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \Longrightarrow f$ má lok. maximum v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \Longrightarrow f$ má lok. minimum v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \ldots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Longrightarrow f \text{ má lok. extrém v } X$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline \end{aligned}$$

$$X = [-2, -3];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 10 > 0$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$$\begin{aligned} J < 0 &\Longrightarrow f \text{ nemá lok. extrém v } X \\ J > 0 &\Longrightarrow f \text{ má lok. extrém v } X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 &\Longrightarrow f \text{ má lok. maximum v } X \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 &\Longrightarrow f \text{ má lok. minimum v } X \end{aligned}$$

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$
$$x = -2$$
$$y = -3$$
$$X = [-2, -3];$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$\Longrightarrow$ f má lok. extrém v X

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 10 > 0 \Longrightarrow f \text{ má lok. minimum v } X$$

teorie

f má lok. extrém v $X \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$

$J < 0 \Longrightarrow f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \Longrightarrow f$ má lok. extrém v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \Longrightarrow f$ má lok. maximum v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \Longrightarrow f$ má lok. minimum v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$10x + 20 = 0$$
$$4y + 12 = 0$$
$$x = -2$$
$$y = -3$$
$$X = [-2, -3];$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Longrightarrow \ f \text{ má lok. extrém v } X$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 10 > 0 \ \Longrightarrow \ f \text{ má lok. minimum v } X$$

$$f(X) = -38$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \ \Longrightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

$J < 0 \ \Longrightarrow \ f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \ \Longrightarrow \ f$ má lok. extrém v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \ \Longrightarrow \ f$ má lok. maximum v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \ \Longrightarrow \ f$ má lok. minimum v X

Příklad 2.1: $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 20x + 12y \quad \dots D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Longrightarrow f \text{ má lok. extrém v } X$$

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 0 \\ 4y + 12 &= 0 \\ \hline x &= -2 \\ y &= -3 \\ \hline \end{aligned}$$

$$X = [-2, -3];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 10 > 0 \Longrightarrow f \text{ má lok. minimum v } X$$

$$f(X) = -38 \Longrightarrow \underline{\underline{\text{lok. min. } f \text{ v } X \text{ je } -38}}$$

teorie

$$\boxed{f \text{ má lok. extrém v } X \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \land \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0}$$

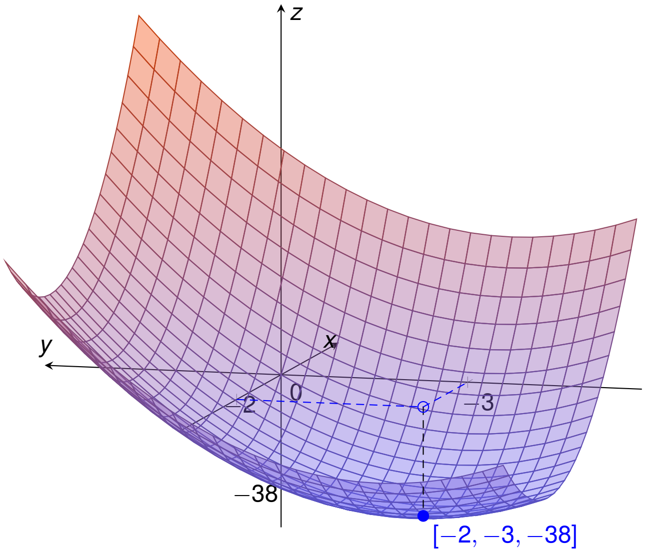
$J < 0 \Longrightarrow f$ nemá lok. extrém v X

$J > 0 \Longrightarrow f$ má lok. extrém v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) < 0 \Longrightarrow f$ má lok. maximum v X

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \Longrightarrow f$ má lok. minimum v X

obrázek k příkladu 2.1:



Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40 - 2y, y)$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\dots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$
$$= 6y^2 - 72y + 3200 \qquad \dots D_h = \mathbb{R}$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x+2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40-2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$
$$= 6y^2 - 72y + 3200 \qquad \ldots D_h = \mathbb{R}$$

$$\ldots h \text{ má v bodě } y = 6 \text{ (glob.) minimum o hodnotě } 2984$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$
$$= 6y^2 - 72y + 3200 \qquad \ldots D_h = \mathbb{R}$$

$\ldots h$ má v bodě $y = 6$ (glob.) minimum o hodnotě 2984

$\Longrightarrow$ f má v bodě $[x,y] = [28,6]$ vázané (glob.) minimum o hodnotě 2984

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$
$$= 6y^2 - 72y + 3200 \qquad \ldots D_h = \mathbb{R}$$

$$\ldots h \text{ má v bodě } y = 6 \text{ (glob.) minimum o hodnotě } 2984$$
$$\Longrightarrow \quad f \text{ má v bodě } [x,y] = [28,6] \text{ vázané (glob.) minimum o hodnotě } 2984$$
$$[28,6] \in \Omega$$

Příklad 2.2:

Podnik vyrábí produkt A v množství x kusů a produkt B v množství y kusů ročně. Závislost ročních nákladů na rozsahu výroby těchto výrobků je dána funkcí

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 40x + 168y.$$

Urči rozsah výroby obou typů výrobků tak, aby náklady byly minimální za podmínek stanovených plánem ve tvaru

$$30x + 60y = 1200, \quad x \geq 6, \quad y \geq 4.$$

$$\ldots D_f = \mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 40 \wedge x \geq 6 \wedge y \geq 4\}, \quad x = 40 - 2y$$

Vyšetříme (globální) extrémy funkce

$$h(y) := f(40-2y, y) = (40-2y)^2 + 2y^2 + 40(40-2y) + 168y$$
$$= 6y^2 - 72y + 3200 \qquad \ldots D_h = \mathbb{R}$$

$\ldots h$ má v bodě $y = 6$ (glob.) minimum o hodnotě 2984

$\Longrightarrow$ f má v bodě $[x,y] = [28,6]$ vázané (glob.) minimum o hodnotě 2984

$[28,6] \in \Omega \implies \underline{\underline{[x,y] = [28,6] \text{ je řešení úlohy}}}$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1, 2]$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1$$

vzorce

$$\boxed{\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)}$$

$$n : \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \; t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 2$$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$\boxed{n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Příklad 3.1: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1, 2]$

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 2$$
$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)}$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4$$

$$y_0 = 2$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

vzorce

$$\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 2$$
$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1, 2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

$$y_0 = 2$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2$$

vzorce

$$\boxed{\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)}$$

$$n : \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

$$y_0 = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

$$y_0 = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

$$z - 5 = -2(x-1) + 6(y-2)$$

vzorce

$$\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

$$y_0 = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

$$z - 5 = -2(x-1) + 6(y-2)$$

$$\underline{\underline{\tau : \quad 2x - 6y + z + 5 = 0}}$$

vzorce

$$\boxed{\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \cdot (y - y_0)}$$

$$\boxed{n : \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Urči rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]$ $(X_0 = [x_0, y_0], f(X_0) = z_0)$.

Příklad 3.1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad X_0 = [1,2]$

$$x_0 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$$

$$y_0 = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5$$

$$z - 5 = -2(x-1) + 6(y-2)$$

$$\underline{\underline{\tau: \quad 2x - 6y + z + 5 = 0}}$$

$$n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= 1 - 2t \\ y(t) &= 2 + 6t \\ z(t) &= 5 - t \end{aligned}\right\} \ t \in \mathbb{R}$$

vzorce

$$\boxed{\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$\boxed{n: \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ y(t) &= y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ z(t) &= z_0 - t \end{aligned}\right\} \ t \in \mathbb{R}}$$

Konec
(Referát)