

Kombinatorika

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

1. Faktoriál

GOA –
ORLOVA.CZ

Faktoriál přirozeného čísla je součin všech čísel menších nebo jemu rovných; faktoriál nuly je 1. Faktoriál čísla n označujeme $n!$. Symbolicky lze potom psát

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n,$$

ale též např.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Příklad 1.1

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{1 \cdot 2}_{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{2 \cdot 3}_{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{6 \cdot 4}_{24} \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{24 \cdot 5}_{120} \cdot 6 = \underline{\underline{120}} \cdot 6 = \underline{\underline{720}}$$

Příklad 1.2

$$\begin{aligned} \frac{8!}{5!3!} &= \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}^{8!}}{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}^{5!} \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}^{5!} \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}^{3!}} \\ &= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8 = \underline{\underline{56}} \end{aligned}$$

Vypočtěte:

a) $\frac{5!6!}{7!}$

b) $\frac{6! - 3!}{3!}$

c) $\frac{7!}{7! - 6!}$

Aby bylo jasnéji...

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n!} = (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! = \dots$$

Podobně

$$(n+2)! = (n+2) \cdot \overbrace{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{(n+1)!} = (n+2) \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n! = \dots$$

Příklad 1.3 $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1) \cdot n = \underline{\underline{n^2 + n}}$

Vypočtěte:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$

b) $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

c) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$

Příklad 1.4

$$(5!)^x = (4!)^{x-1}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$(5 \cdot 4!)^x = (4!)^x \cdot (4!)^{-1}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$5^x \cdot (4!)^x = (4!)^x \cdot (4!)^{-1}$$

$$5^x = (24)^{-1}$$

$$5^x = \frac{1}{24}$$

$$\underline{\underline{x = \log_5 \frac{1}{24}}}$$

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

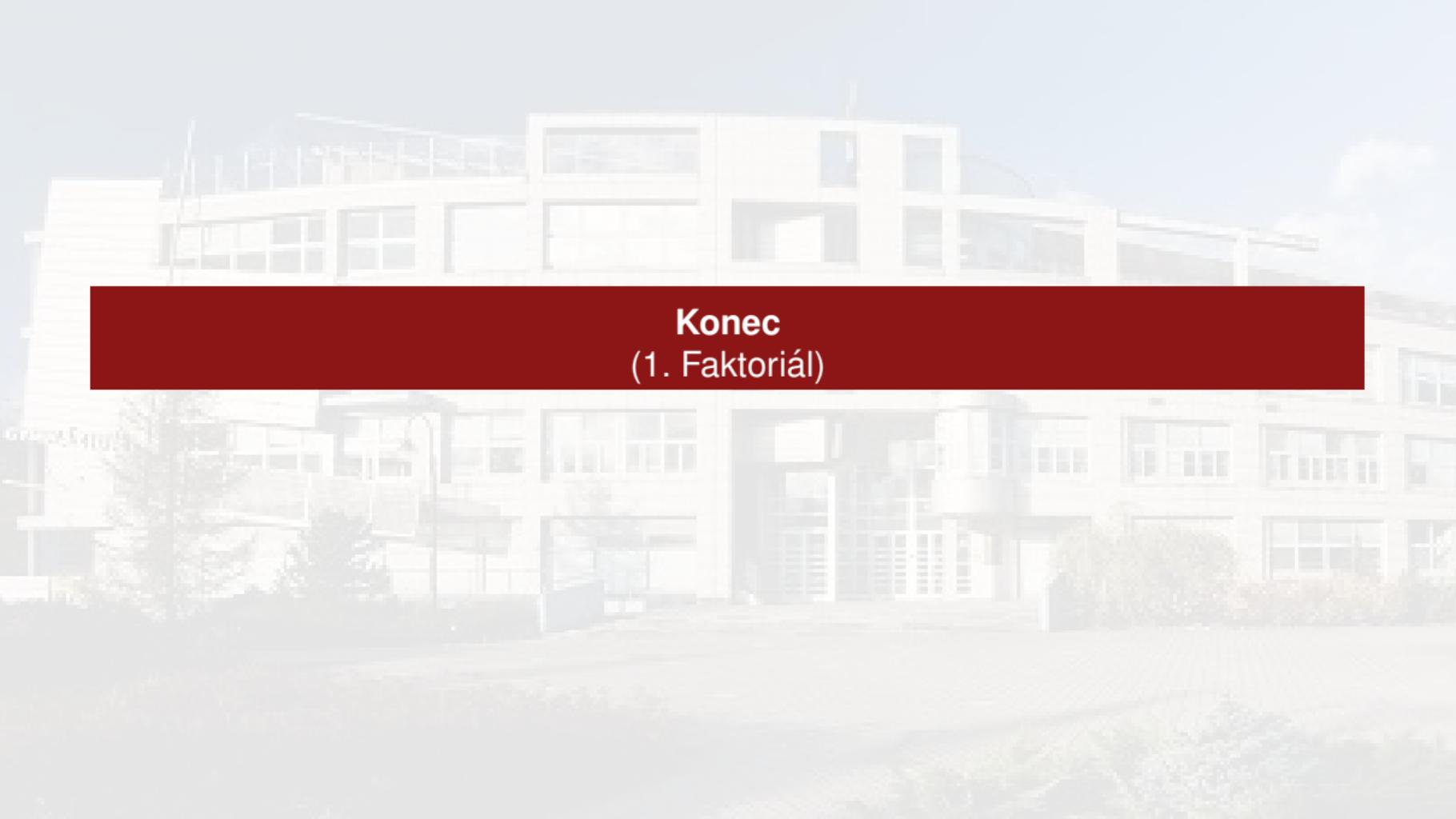
$$\left(a = 5, b = \frac{1}{24} \right)$$

Řešte rovnice:

a) $(5!)^{x+1} = (6!)^{x-1}$

b) $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$

c) $x \frac{(x+3)!}{(x+2)!} + x^2 = 14$



Konec
(1. Faktoriál)