Rovnice a nerovnice

Jaroslav Drobek

jaroslav.drobek@goa-orlova.cz

Gymnázium a Obchodní akademie Orlová

5. Kvadratická rovnice

GOA – ORLOVA.CZ

Speciální kvadratické rovnice (převod na součinový tvar)

Řešte rovnice:

a) $4x^2 - 8x = 0$ b) $x^2 = 25$ c) $x^2 + 4 = 0$ d) $4x^2 = 9$ e) $x^2 - 24 = 0$

Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice $\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)}$

Diskriminant $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

$D > 0 \implies \boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$

$D = 0 \implies \boxed{x = \dfrac{-b}{2a}}$

$D < 0 \implies \boxed{\nexists \text{ řešení}}$

Příklad 5.1

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$1 \cdot x^2 + (-7)x + 12 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -7, \quad c = 12$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

$$\implies x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = \underline{\underline{4}} \\ \frac{7-1}{2} = \underline{\underline{3}} \end{cases}$$

Koeficienty kvadratické rovnice

Příklad 5.2 $3x^2 - x + 4 = 0$

$$3 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + 4 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = 4$$

Příklad 5.3 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$

$$-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 10 \cdot x + 2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 3, \quad c = 2$$

Příklad 5.4 $0,15x^2 - 0,03x - 2 = 0$

$$0,15 \cdot x^2 + (-0,03) \cdot x + (-2) = 0$$

$$a = 0,15, \quad b = -0,03, \quad c = -2$$

Příklad 5.5 $104x^2 - 166x + 66 = 0$

$$104 \cdot x^2 + (-166) \cdot x + 66 = 0$$

$$a = 104, \quad b = -166, \quad c = 66$$

Příklad 5.6 $3x^2 - \pi x + 2 = 0$

$$3 \cdot x^2 + (-\pi) \cdot x + 2 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -\pi, \quad c = 2$$

Vzorce

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)}$$

Příklad 5.7

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$2 \cdot x^2 + (-5)x + 2 = 0$$

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 2$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

$$\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = \underline{\underline{2}} \\ \frac{5-3}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Příklad 5.8

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$3 \cdot x^2 + (-12)x + 12 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -12, \quad c = 12$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = \utilde{0}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = \underline{\underline{2}}$$

Vzorce

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $\quad D > 0 \Longrightarrow \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$ $\quad D = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ $\quad D < 0 \Longrightarrow \boxed{\nexists \text{ řešení}}$

Příklad 5.9

$$8x - x^2 = 14$$
$$-x^2 + 8x - 14 = 0$$
$$(-1) \cdot x^2 + 8x + (-14) = 0$$

$$a = -1, \quad b = 8, \quad c = -14$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = 64 - 56 = 8 > 0$$

$$\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = \begin{cases} \frac{-8+2\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2(4-\sqrt{2})}{-2} = \underline{\underline{4 - \sqrt{2}}} \\ \frac{-8-2\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2(4+\sqrt{2})}{-2} = \underline{\underline{4 + \sqrt{2}}} \end{cases}$$

Příklad 5.10

$$x^2 - 10x + 28 = 0$$
$$1 \cdot x^2 + (-10)x + 28 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 28$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = 100 - 112 = -12 < 0$$
$$\Longrightarrow \underline{\underline{\emptyset}}$$

Vzorce

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $\quad D > 0 \Longrightarrow \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$ $\quad D = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ $\quad D < 0 \Longrightarrow \boxed{\nexists \text{ řešení}}$

Příklad 5.11

$$3 + x = 1 + \frac{4}{2 - x} \quad \Big| \cdot (2 - x)$$

Podmínky řešitelnosti: $2 - x \neq 0$

$\underset{\sim\sim\sim}{x \neq 2}$

$$(3 + x)(2 - x) = 2 - x + 4$$

$$\cancel{6} - 3x + 2x - x^2 = \cancel{6} - x \quad \Big| + x$$

$$\cancel{-3x} + \cancel{3x} - x^2 = 0$$

$$-x^2 = 0$$

$$(-1) \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$$

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0$$

$$D = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = \underset{\sim}{0} \implies x = \frac{-0}{2 \cdot (-1)} = \underline{\underline{0}}$$

Vzorce

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $\quad D > 0 \implies \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$ $\quad D = 0 \implies \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ $\quad D < 0 \implies \boxed{\nexists \text{ řešení}}$

Příklad 5.12

$$4x^2 - 20x - 2 = 0$$

$$4 \cdot x^2 + (-20)x + (-2) = 0$$

$$a = 4, \quad b = -20, \quad c = -2$$

$$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 400 + 32 = 432 > 0$$

$$\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{432}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{3 \cdot 144}}{8}$$

$$= \frac{20 \pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{\cancel{4}(5 \pm 3\sqrt{3})}{2 \cdot \cancel{4}} = \begin{cases} \underline{\underline{\frac{5+3\sqrt{3}}{2}}} \\ \underline{\underline{\frac{5-3\sqrt{3}}{2}}} \end{cases}$$

Vzorce

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $\quad D > 0 \Longrightarrow \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$ $\quad D = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ $\quad D < 0 \Longrightarrow \boxed{\nexists \text{ řešení}}$

Příklad 5.13 Pan Junek zdědil po dědečkovi ohromnou obdélníkovou stodolu, která má plochu 300 metrů čtverečních a jedna její strana je o pět metrů delší než strana druhá. Kolik metrů měří delší strana stodoly?

$$S = x \cdot (x+5)$$
$$300 = x \cdot (x+5)$$
$$300 = x^2 + 5x$$
$$0 = x^2 + 5x - 300$$
$$0 = (x+20)(x-15)$$
$$\cancel{x_1 = -20} \quad x_2 = 15$$
$$x_2 + 5 = 15 + 5 = \underline{\underline{20}}$$

Delší strana stodoly má 20 m .

Příklad 5.14 Na amatérském tenisovém turnaji v Horních Míčkomlatech se hraje systémem každý s každým. Celkem se tak letos odehraje 91 zápasů. Kolik se turnaje účastní hráčů?

$x \dots$ počet hráčů

$$\frac{x(x-1)}{2} = 91$$
$$x(x-1) = 182$$
$$x^2 - x = 182$$
$$x^2 - x - 182 = 0$$
$$(x+13)(x-14) = 0$$

$\cancel{x_1 = -13}$ $\quad \underline{\underline{x_2 = 14}}$

Turnaje s účastní 14 hráčů.

Příklad 5.15 Členové tábornického kroužku se rozhodli, že dají svému vedoucímu Rikitanovi jako dárek nový spacák za 2400 korun. Každý měl přispět stejnou částkou, ale dva táborníci nakonec nesehnali peníze, a tak musel každý ze zbývajících členů kroužku dát o 40 korun více. Kolik táborníků chodilo do kroužku?

$x\ldots$ počet táborníků
$c\ldots$ příspěvek jednoho táborníka

$$x \cdot c = 2400 \implies c = \frac{2400}{x}$$

$$(x-2)\cdot(c+40) = 2400$$

$$(x-2)\cdot\left(\tfrac{2400}{x}+40\right) = 2400$$

$$\vdots$$

$$x^2 - 2x - 120 = 0$$

$$(x+10)(x-12) = 0$$

$\cancel{x_1 = -10}$ $\quad$ $\underline{\underline{x_2 = 12}}$

Do kroužku chodilo 12 táborníků.

Příklad 5.16 Kristoff koupil pro své stádo sobů celkem 143 mrkví. Každý sob dostal o dvě mrkve méně, než je počet sobů ve stádu. Kolik sobů má Kristoff ve svém stádu?

$x\ldots$ počet sobů

$$x(x-2)=143$$
$$x^2-2x=143$$
$$x^2-2x-143=0$$
$$(x-13)(x+11)=0$$

$\underline{\underline{x_2=13}}$ $\cancel{x_1=-11}$

Kristoff má ve stádu 13 sobů.

Příklad 5.17 Počet lidí na oslavě narozenin Homera Simpsona je stejný jako jejich průměrný věk. V osm hodin odešel děda Simpson, kterému je 59 let, spát. Věkový průměr všech lidí na večírku se tak snížil na 29 let. Kolik lidí bylo původně (před odchodem dědy) na Homerově večírku?

$x\ldots$ počet lidí
$v\ldots$ celkový věk
$x = \frac{v}{x}\ldots$ před dědovým odchodem
$29 = \frac{v-59}{x-1}\ldots$ po dědově odchodu

$$x = \frac{v}{x} \implies v = x^2$$

$$29 = \frac{v-59}{x-1}$$

$$29 = \frac{x^2-59}{x-1}$$

$$29(x-1) = x^2 - 59$$

$$29x - 29 = x^2 - 59$$

$$0 = x^2 - 29x - 59 + 29$$

$$\vdots$$

$$0 = x^2 - 29x - 30$$

$$0 = (x-30)(x+1)$$

$$\underline{\underline{x_1 = 30}} \quad \cancel{x_2 = -1}$$

Původně bylo na večírku 30 lidí.

Příklad 5.18 Už od renesance lidé zkoumají magický poměr zvaný „zlatý řez“, který můžeme často pozorovat i v přírodě (třeba na zatočených ulitách, květech a šiškách některých rostlin nebo uspořádání listů). Zlatý řez rozděluje nějaký objekt na dvě části, a to tak, že poměr menší části ku větší části je stejný jako poměr větší části ku celku. Pokud bychom ve zlatém řezu rozdělili úsečku dlouhou 28 centimetrů, kolik by měřila delší část? Zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

Příklad 5.19 Vrhneme-li předmět z místa odpovídajícího počátku kartézské soustavy souřadnic pod úhlem 45° šikmo vzhůru (počáteční) rychlostí v_0, bude se v ideálním prostředí (bez odporu vzduchu) pohybovat po části paraboly

$$-\frac{10}{v_0^2}x^2 + x$$

vymezené jejími dvěma průsečíky s osou x. Za předpokladu vodorovného terénu určete

a) vzdálenost dopadu předmětu, znáte-li počáteční rychlost v_0,

b) maximální výšku, kterou předmět během letu dosáhl, znáte-li počáteční rychlost v_0,

c) počáteční rychlost v_0, znáte-li vzdálenost dopadu předmětu.

Konec

(5. Kvadratická rovnice)