

Astrofísica Computacional

Ejercicios 06. Magnetohidrodinámica I. Advección

A. Ecuación de Advección lineal 1D

La ecuación de advección lineal en una dimensión es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

donde la velocidad de advección, v , es una constante. Solucione numéricamente esta ecuación utilizando un perfil inicial sinusoidal

$$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = \sin \frac{4\pi x}{L}, \quad (2)$$

donde $L = 100$ con una velocidad positiva $v = 0.1$ en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ y para un intervalo temporal con $t \in [0, 1000]$. Utilice condiciones de frontera periódicas y los métodos *FTCS* y *Lax-Wendroff*.

B. Ecuación de Burguer

La ecuación de Burguer es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

y es utilizada como un primer ejemplo de las consecuencias de la no-linealidad en la hidrodinámica. Es muy similar a la ecuación de advección, pero en este caso la velocidad NO es una constante sino que es el mismo campo ψ que se quiere encontrar. Esta característica puede llevar a efectos como los shocks o la rarefacción, que son típicos en las descripciones de la hidrodinámica.

1. Solucione la ecuación de Burger para evolucionar un perfil sinusoidal,

$$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = \frac{1}{8} \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \quad (4)$$

en el dominio $[0, L]$ con $L = 100$.

Utilice condiciones de frontera de "outflow" (recuerde que bajo esta condición los datos de los últimos puntos interiores en la malla son copiados en los puntos de frontera.) y muestre que la solución forma un shock después de $t \gtrsim 140$.

2. Solucione la ecuación de Burger para evolucionar un perfil de paso,

$$\Phi_0 = \Phi(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x < 0.5 \\ 2 & \text{cuando } x > 0.5 \end{cases} \quad (5)$$

en el dominio $[0, 1]$ para mostrar la aparición de la rarefacción.

C. Advección Multidimensional

La ecuación de advección lineal 2-dimensional es

$$\partial_t \psi + v^x \partial_x \psi + v^y \partial_y \psi = 0 \quad (6)$$

donde v^x y v^y son las componentes de la velocidad en las direcciones x y y , respectivamente. Resuelva numéricamente la ecuación de advección 2-dimensional mediante el método de volúmenes finitos considerando un perfil inicial Gaussiano,

$$\Psi_0 = \psi(t = 0, x, y) = e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

donde $x_0 = 20$, $y_0 = 30$, $\sigma = \sqrt{50}$ y considerando $v^x = 0.8$, $v^y = 1.0$ en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ y $y \in [0, 100]$. Además, implemente la posibilidad de seleccionar condiciones de frontera de gradiente nulo (outflow) y periódicas.