Astrofísica Computacional

Ejercicios 03. Métodos Numéricos Básicos II

A. Ley de Desplazamiento de Wien

La ley de radiación de Planck establece que la intensidad I de la radiación por unidad de área y por unidad de longitud de onda λ de un cuerpo negro con una temperatura T es

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1}$$

donde h es la constante de Planck, c es la rapidez de la luz en el vacio y k_B es la constante de Boltzmann.

1. Escriba una función que grafique la intensidad I en función de λ para una temperatura T dada.
2. Utilice la derivada de esta expresión para mostrar que la longitud de onda λ_m en la que se tiene el máximo de la intensidad satisface la ecuación
$$5e^{-\frac{hc}{\lambda_m k_B T}} + \frac{hc}{\lambda_m k_B T} - 5 = 0. \tag{2}$$
3. Realice la sustitución $x = \frac{hc}{\lambda_m k_B T}$ para mostrar que la longitud de onda correspondiente al máximo de intensidad satisface la *Ley de Desplazamiento de Wien*,
$$\lambda_m = \frac{b}{T} \tag{3}$$
donde $b = \frac{hc}{k_B x}$ y x es la solución de la ecuación no-lineal
$$5e^{-x} + x - 5 = 0. \tag{4}$$
4. Escriba un programa que resuelva la ecuación para x con una tolerancia de $\epsilon = 10^{-6}$ utilizando el método de busqueda binaria (bisección) y con ello encuentre el coeficiente b en la ley de desplazamiento.

B. El Punto de Lagrange L_1

El punto de Lagrange L_1 del sistema Tierra-Luna es aquel lugar en el que la atracción gravitacional de estos dos cuerpos actuando sobre una partícula de prueba se combina de tal manera que se logra un equilibrio con la fuerca centrípeta que mantiene la partícula en su orbita (ver Figura).

1. Asuma que las orbitas son circulares y que la masa de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna (y que la de la partícula de prueba) para mostrar que la distancia r desde el centro de la Tierra hasta el punto L_1 satisface la ecuación
$$\frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(R-r)^2} = \omega^2 r, \tag{5}$$
donde R es la distance entre la Tierra y la Luna, M y m son las masas de la Tierra y de la Luna, respectivamente, y ω es la velocidad angular de la Luna y la partícula alrededor de la Tierra.

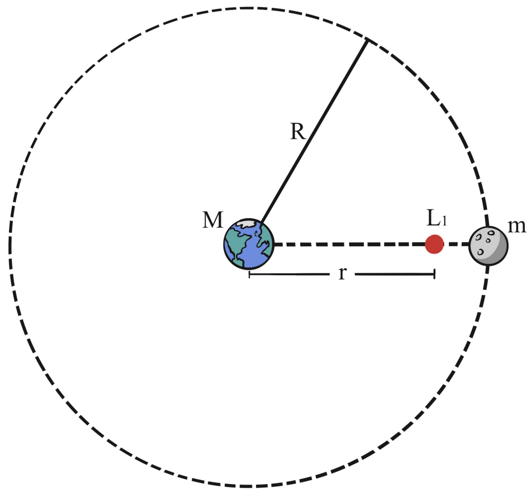

Figura 1: Punto de Lagrange L_1 en el sistema Tierra-Luna.

Claramente esta ecuación es un polinomio de orden 5 en r y por ello su solución debe encontrarse en forma numérica. Escriba un programa que utilice el método de la secante (o Newton-Raphson) para resolver esta ecuación y encontrar la ubicación del punto L_1. Para ello considere los siguientes parámetros:

- $G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
- $M = 5{,}974 \times 10^{24}$ kg
- $m = 7{,}348 \times 10^{22}$ kg
- $R = 3{,}844 \times 10^{8}$ m
- $\omega = 2{,}662 \times 10^{-6}$ s^{-1}

C. Periodicidad de las Manchas Solares

En el archivo adjunto llamado 'ManchasSolares.txt' contiene un conjunto de datos con dos columnas: la primera cuenta los meses iniciando en enero de 1749 y la segunda contiene el número de manchas solares mensuales observadas.

1. Escriba un programa que lea el conjunto de datos y grafique la información contenida. El número de manchas es un indicador de actividad solar. Con ayuda de este gráfico, intente estimar el periodo del ciclo de actividad solar en meses.
2. Escriba una función que calcule la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de los datos leidos y realice un gráfico de la magnitud de los coeficientes de Fourier $|c_k|^2$ contra el número k. Este gráfico se denomina *Espectro de Potencias* de la señal de manchas solares. Identifique el máximo en el gráfico, el cual corresponde a la frecuencia que presenta la mayor amplitud dentro de la serie de Fourier.

3. Encuente el valor de k correspondiente al máximo y determine el periodo correspondiente a esta frecuencia. El periodo hallado debe ser similar al que estimó a partir de la gráfica de los datos originales.

4. Repita el mismo procedimiento utilizando la Transformada Rápida de Fourier FFT (recomiedo que no cree la función sino que utilice una de las implementaciones de la FFT incorporadas en su lenguaje de programación de preferencia).