Herramientas Computacionales 2023-I

Mayo 19, 2023

Los patrones de Turing fueron introducidos por el matemático inglés Alan Turing en 1952 en su artículo titulado *"The chemical basis of morphogenesis"*. Este artículo describe la manera en que diferentes patrones que aparecen en la naturaleza como rayas y puntos pueden surgir naturalmente a partir de equilibrio entre la difusión y la no linealidad de un medio.

Por ejemplo, al tratar de simular la pigmentación de la piel de un animal, se puede pensar en la concentración de dos sustancias, la primera φ que favorece la pigmentación y otra ψ que la impide. Al considerar una región cuadrada $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, la concentración de las sustancias está descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\frac{\partial \varphi(t;x,y)}{\partial t} = a\nabla^2\varphi(t;x,y) + \varphi(t;x,y) - \varphi(t;x,y)^3 - \psi(t;x,y) + \kappa \tag{1}$$

$$\tau\frac{\partial \psi(t;x,y)}{\partial t} = b\nabla^2\psi(t;x,y) + \varphi(t;x,y) - \psi(t;x,y), \tag{2}$$

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y a, b, κ, τ son parámetros que definen el proceso.

También se deben considerar las condiciones de frontera de tipo Neumann $\frac{\partial Z}{\partial y}\,|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial Z}{\partial y}\,|_{x=1} = 0$ para $0 \leq y \leq 1,\ \frac{\partial Z}{\partial x}\,|_{y=0} = 0,\ \frac{\partial Z}{\partial x}\,|_{y=1} = 0$ para $0 \leq x \leq 1$, para las funciones $Z = \varphi(t;x,y), \psi(t;x,y)$ y $t > 0$.

Por otra parte, los términos que contienen al operador ∇^2 se pueden expresar en forma discreta en coordenadas cartesianas, dando como resultado:

$$\nabla^2\varphi(t;x,y) \approx \frac{\varphi(t;x+h,y) + \varphi(t;x-h,y) + \varphi(t;x,y+h) + \varphi(x,y-h) - 4\varphi(t;x,y)}{h^2}$$

$$\nabla^2\psi(t;x,y) \approx \frac{\psi(t;x+h,y) + \psi(t;x-h,y) + \psi(t;x,y+h) + \psi(t;x,y-h) - 4\psi(t;x,y)}{h^2},$$

expresiones en las que se ha considerado $\Delta x = \Delta y = h$. Para las derivadas temporales se tiene:

$$\frac{\partial \varphi(t;x,y)}{\partial t} \approx \frac{\varphi(t+\Delta t;x,y) - \varphi(t;x,y)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial \psi(t;x,y)}{\partial t} \approx \frac{\psi(t+\Delta t;x,y) - \psi(t;x,y)}{\Delta t}.$$

De esta manera, la forma discreta de las ecuaciones (1)-(2) está dada por:

$$\varphi(t+\Delta t;x,y) = \varphi(t;x,y) + \Delta t\left(a\nabla^2\varphi(t;x,y) + \varphi(t;x,y) - \varphi(t;x,y)^3 - \psi(t;x,y) + \kappa\right), \tag{3}$$

$$\psi(t+\Delta t;x,y) = \psi(t;x,y) + \frac{\Delta t}{\tau}\left(b\nabla^2\psi(t;x,y) + \varphi(t;x,y) - \psi(t;x,y)\right). \tag{4}$$

Las condiciones de frontera requieren para $t > 0$, $0 \leq y \leq 1$:

$$\varphi(t;0,y) = \varphi(t;h,y) \qquad \varphi(t;1,y) = \varphi(t;1-h,y),$$
$$\psi(t;0,y) = \psi(t;h,y) \qquad \psi(t;1,y) = \psi(t;1-h,y).$$

En forma similar para $t > 0$, $0 \leq x \leq 1$:

$$\varphi(t;x,0) = \varphi(t;x,h) \qquad \varphi(t;x,1) = \varphi(t;x,1-h),$$
$$\psi(t;x,0) = \psi(t;x,h) \qquad \psi(t;x,1) = \psi(t;x,1-h).$$

I. Obtenga la solución de las ecuaciones (3)-(4), considerando condiciones iniciales aleatorias (con valores entre 0 y 1) para $t = 0$ en $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ y los parámetros $a = 0.00028$, $b = 0.005$, $\tau = 0.1$ y $\kappa = -0.005$ utilizando $\Delta x = \Delta y = h = 0.02$ y $\Delta t = 0.001$.

II. Grafique la solución de $\varphi(t; x, y)$ en $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ a tiempos tiempos $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$. ¿Se llega a un patrón estacionario?

Ayuda: Su resultado debe producir patrones con regiones en los que se ha acumulado pigmento. Por ejemplo, a $t = 10s$ (en la imagen se utilizó imshow con interpolation='bilinear' para que se vea mejor el resultado):