Herramientas Computacionales

Abril 17, 2023

El método de Runge-Kutta de quinto orden (RK5) permite evaluar la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

mediante la implementación de un método iterativo en el que:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)\, h, \qquad x_{i+1} = x_i + h, \quad \text{con} \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

El valor h se define de acuerdo al nivel de precisión del módelo y la función $\phi(x_i, y_i, h)$ está dada por:

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

donde:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)
\end{aligned}$$

I. Mediante la aplicación del método anterior obtenga la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x \quad \text{con} \qquad y(0) = 1.$$

Grafique la solución obtenida en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ utilizando $h = 0.01$. Para verificar que su código es correcto muestre su resultado junto con la solución exacta: $y(x) = \frac{1}{4}\left(2x + 5e^{-2x} - 1\right)$.

II. Para la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2y^{\alpha} = x^2 \quad \text{con} \qquad y(0) = 1.$$

Grafique la solución obtenida mediante el método RK5 para $y(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ utilizando los valores $h = 0.01$ para $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.6$, $\alpha = 0.8$.

Presente su resultado utilizando curvas de diferentes estilos y leyendas que permitan identificar cada una de las soluciones.