Предельные теоремы теории вероятностей

1) Неравенства Чебышева

Th 1 (1-е неравенство Чебышева)

Пусть 1) X – случ. вел.
2) $X \geq 0$ (т.е. $P\{X < 0\} = 0$)
3) $\exists M[X]$

Тогда $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M[X]}{\varepsilon}}$ – 1-е неравенство Чебышева

Доказательство:

Для непрерыв. случ. вел.: $M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \left\{ X \geq 0 \right\} = \int\limits_{0}^{+\infty} x f_X(x) dx = \left\{ \begin{matrix} \text{св-во} \\ \text{аддитивности} \\ \text{интеграла} \end{matrix} \right\} =$

$$= \underbrace{\int\limits_0^{\varepsilon} \underset{\geq 0}{x} \underset{\geq 0}{f_X(x)} dx}_{\geq 0} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \underset{\geq \varepsilon}{x} f_X(x) dx = \left\{ \begin{matrix} x \geq \varepsilon \Rightarrow \\ x f_X(x) \geq \varepsilon f_X(x) \end{matrix} \right\} \ominus$$

$$\ominus \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f_X(x) dx = \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f_X(x) dx = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow M[X] \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M[X]}{\varepsilon}$$

Th 2 (2-е неравенство Чебышева)

Пусть 1) X – случ. вел.
2) $\exists M[X]$, $\exists D[X]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$

Доказательство:

1) $D[X] = \underbrace{M[(X-M[X])^2]}_{\text{определение дисперсии}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Рассмотрим случ. вел.} \\ Y=(X-M[X])^2 \geq 0 \\ P\{Y \geq \varepsilon_1\} \leq \dfrac{M[Y]}{\varepsilon_1} \quad \text{Т. 1} \\ \text{для } \varepsilon_1 = \varepsilon^2 \\ M[Y] \geq \varepsilon_1 \cdot P\{Y \geq \varepsilon_1\} \end{array} \right\} \geq$

$$\geq P\{Y \geq \varepsilon^2\} \cdot \varepsilon^2 = P\{(X - M[X]) \geq \varepsilon^2\} \cdot \varepsilon^2 = P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \cdot \varepsilon^2$$

Т.о. $D[X] \geq \varepsilon^2 P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X-M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{D[X]}{\varepsilon^2}$

② Сходимость последовательности случ. вел.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случ. вел.

Опр. Говорят, что посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ сходится по вероятности к случ. вел. Z, если $\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\}}_{\text{число}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Обозн.: $a_n = P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\}$ – число

В опр. написано: числовая посл-ть a_n сходится ~~стремится~~ к 0 ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Обозн.: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$

Опр. Говорят, что посл-ть случ. вел. $X_1, X_2, \ldots$ слабо сходится к случ. вел. Z, если $\forall x \in R$ такого, что F_Z непрерывн. в x, выполняется

$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x)$

F_Z – функция распределения случ. вел. Z,

F_{X_n}, $n \in N$ – функция распределения случ. вел. X_n)

В каждой точке x, в которой F_Z непрерывна, числовая посл-ть

$\underbrace{F_{X_n}(x)}_{\text{число}} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x)$

Обозн.: $F_{X_n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F_Z$

③ Закон больших чисел

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – посл-ть случ. вел.
$\exists M[X_i] = m_i$, $i \in N$

Опр. Говорят, что посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовл. закону больших чисел, если

$\forall \varepsilon > 0$ $P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

~~Замечание~~ 1) Обозн. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in N$ т.е. $\overline{X}_1 = X_1$

$\overline{X}_2 = \frac{1}{2}[X_1 + X_2]$

$\overline{X}_3 = \frac{1}{3}[X_1 + X_2 + X_3]$

$\overline{X}_n$, $n \in N$ – случ. вел.

2) В опр. ЗБЧ написано, что посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовл. ЗБЧ, если $\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

Это означает, что если посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовл. ЗБЧ, то при достаточно больших n $\overline{X}_n \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$ – детерменированная вел., т.е. при достаточно больших n случ. вел. $\overline{X}_n$ практически теряет случ. хар-р.

<u>Th</u> Чебышева (достаточное условие для посл-ти ЗБЧ или ЗБЧ в форме Чебышева)

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ – посл-ть независ. случ. вел.

2) $\exists M[X_i] = m_i$, $\exists D[X_i] = \sigma_i^2$, $i \in N$

3) Дисперсии случ. вел. $X_1, X_2, \ldots$ ограничены в совокупности, т.е. $(\exists C > 0)(\sigma_i^2 \le C,\ i \in N)$

Тогда посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовл. ЗБЧ

<u>Доказательство:</u>

1) Рассмотрим случ. вел. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in N$

Применим к случ. вел. $\overline{X}_n$ 2-е неравенство Чебышева

$$P\{|\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]| \ge \varepsilon\} \le \frac{D[\overline{X}_n]}{\varepsilon^2}$$

$$M[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \{D[aX] = a^2 D[X]\} = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$$

$$\{X_i,\ i \in N \text{ – по усл. независ.}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \le \{\sigma_i^2 \le C\} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{n \cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}$$

(*)

Т.о. $\forall \varepsilon > 0$ $0 \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{D[\overline{X}_n]}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}$, где $D[\overline{X}_n] \le \frac{C}{n}$

Устремим $n \to \infty$, тогда по th о 2-х полицейских $P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание 1) Если посл. $X_1, X_2, \ldots$ удовл. условию тh Чебышева (и, следовательно она удовл. ЗБЧ), то про нее говорят, что она удовл. ЗБЧ в форме Чебышева.

2) Условие 3) в тh Чебышева м. ослабить, потребовав вместо ограниченности дисперсий:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0 \qquad (3')$$

Очевидно, что если выполнено условие (3), то выполнено и (3'). Обратное неверно.

Покажем, что если в тh Чебышева условие 3) заменить на (3'), то посл. $X_1, X_2, \ldots$

будет удовл. ЗБЧ

Доказательство:

$(**) \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad 0 \le P\{|\overline{X}_n - \cancel{M[\overline{X}_n]}| \ge \varepsilon\} \le \frac{D[\overline{X}_n]}{\varepsilon^2}$, где $M[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$

$(*) \Rightarrow D[\overline{X}_n] \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \quad \forall \varepsilon>0 \quad 0 \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0$ (усл. (3'))

По th о 2-х милиционерах $P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ посл. удовл. ЗБЧ.

Следствие 1 th Чебышева

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ – посл. нез. случ. вел.

2) все X_i, $i \in N$, одинаково распред.

3) $\exists M[X_i] = m$, $\exists D[X_i] = \sigma^2$, $i \in N$

Тогда $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$

Доказательство: 1) Условия 1) и 2) th Чебышева выполнены

Условие 3) также выполнено, т.к. $\sigma_i^2 \equiv \sigma^2 \le \sigma^2 = C$

Поэтому посл. $X_1, X_2, \ldots$ удовл. ЗБЧ:

$\forall \varepsilon>0 \quad P\{|\overline{X}_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m}_{=m}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$

Следствие 2 th Бернулли (ЗБЧ в форме Бернулли)

Пусть 1) проводится n испыт. по сх. Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испыт.

2) $r_n = \frac{\{\text{число успехов в серии из } n \text{ испыт.}\}}{n}$

– наблюденная частота успеха в серии из n испыт.

Тогда $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

Доказательство:

1) Рассмотрим случ. вел. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. имел место успех;} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$X_i \sim B(1,p)$, $i \in N$, (одинаково распред.) $\Rightarrow M[X_i] = p$, $D[X_i] = pq$, где $q = 1-p$

X_i независ. (т.к. испыт. в схеме Бернулли независ.)

Т.о. $X_1, X_2, \dots$ удовл. следствию 1 из Th Чебышева $\Rightarrow$

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} M[X_i] = p$$

2) $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = r_n$

число успехов в серии из n испыт.

Т.о. $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

ЗБЧ.

__Замечание__ ЗБЧ в форме Бернулли означает, что при достаточно большом объеме n испыт. $r_n \approx p$.

④ Центральная предельная теорема

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ — посл. незав. случ. вел.;

2) все X_i, $i \in N$, одинаково распред.;

3) $\exists M[X_i] = m$, $\exists D[X_i] = \sigma^2$, $i \in N$

Рассмотрим случ. вел. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$M[\overline{X}_n] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m$$

$$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \{X_1, X_2, \dots \text{ — независ.}\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Рассмотрим случ. вел.

$$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]}{\sqrt{D[\overline{X}_n]}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad n \in N$$

Тогда $M[Y_n] = M\left[\frac{\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]}{\sqrt{D[\overline{X}_n]}}\right] = \frac{1}{\sqrt{D[\overline{X}_n]}}\left[M[\overline{X}_n] - M[\overline{X}_n]\right] = 0$

$$D[Y_n] = D\left[\frac{\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]}{\sqrt{D[\overline{X}_n]}}\right] = \frac{1}{D[\overline{X}_n]} D[\overline{X}_n - \cancel{M[\overline{X}_n]}^{\,0}] = 1$$

__Th ЦПТ__

Пусть 1) выполнены условия (1)–(3)

2) $Y_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, $n \in N$

Тогда посл. $Y_1, Y_2, \dots$ слабо сходится к случ. вел $Z \sim N(0,1)$

т.е. $\forall x \in R$ $\quad F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\text{функция распред. станд. норм. случ. вел.}}$

ТК интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть 1) проводится серия из $n \gg 1$ испыт. по схеме Бернулли с вероятностью успеха p

2) S – общее число успехов в этой серии.

Тогда $P\{k_1 \le S \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, где $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = \overline{1,2}$

$q = 1 - p$

Доказательство:

1) Пусть $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Тогда 1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незав. случ. вел.

2) $X_i \sim B(1,p)$, $i \in N$, – одинаково распред.

3) $M[X_i] = p$, $D[X_i] = pq$, $i \in N$

Т.о. посл. $X_1, X_2, \dots$ удовл. ЦПТ

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Кроме того, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Т.о. $P\{k_1 \le S \le k_2\} = P\{k_1 \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le k_2\} = P\{\frac{k_1}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \le \frac{k_2}{n}\} =$

$$= P\{\frac{k_1}{n} - \overset{M[X_i]}{p} \le \overline{X}_n - p \le \frac{k_2}{n} - \overset{M[X_i]}{p}\} = P\{\frac{\frac{k_1}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le \underbrace{\frac{\overline{X}_n - p}{\frac{\sqrt{D[X_i]}}{\sqrt{n}}}}_{= Y_n} \le \frac{\frac{k_2}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}\} =$$

$$= P\{\underbrace{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}_{x_1} \le Y_n \le \underbrace{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}}_{x_2}\} \approx \left\{ n >> 1 \Rightarrow \underset{\text{приближенно}}{Y_n \sim N(0,1)} \right\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

Типичная задача МС: после n подбрасываний монеты герб выпал m раз. Чему равна вер-ть p появления герба при одном подбрасывании монеты?..

Основная задача МС: разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых процессах или явлениях по данным наблюдений или экспер. Эти выводы относятся не к отдельным экспер., а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках изучаемых процессов или явлений.

Рассмотрим "общую" задачу МС:

дана случ. вел. X, закон распред. которой неизвестен (или известен не полностью); требуется по результатам наблюдений (т.е. по имеющимся реализациям случ. вел. X) сделать выводы о её законе распред.

<u>Первая задача МС:</u> дана случ. вел. X, закон распред. которой неизвестен; требуется „найти" закон распред. случ. вел. X.

<u>Вторая задача МС:</u> дана случ. вел. X, закон распред. которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ неизвестных параметров. Требуется „найти" (оценить) значения этих параметров.

<u>Замечание</u> Фраза "закон распред. известен с точностью до вектора $\vec{\theta}$ неизвестных параметров" означает, что известен общий вид закона распред. случ. вел. X, но этот закон зависит от неизвестных числовых параметров $\theta_1, \dots, \theta_r$, из которых сформирован вектор $\vec{\theta}$

<u>Пример</u> 1) Известно, что $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$, т.е. известен общий вид закона распред. случ. вел. X (это норм. случ. вел.), но неизвестны параметры θ_1, θ_2 этого закона распред.

2) Известно, что $X \sim N(\theta_1, 1)$, θ_1 — неизвестный параметр.

<u>Опр.</u> Мн-во возмож. знач. случ. вел. X с учетом ее закона распред. (возможно, неизвестного) б. наз. генеральной совокупностью.

<u>Опр.</u> Случ. выборкой объема n из генеральной совокупности X наз. случ. вектор $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, где $X_i \sim X$, $i = \overline{1,n}$

$X_1, \dots, X_n$ — незав. в совокупности

Опр. Выборкой объема n из генеральной совокупности X наз. (любая) реализация случ. выборки объема n из генеральной совокупности X:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Замечание 1) после проведения экспер. исследователь имеет в своем ра[споряжении] конкретную выборку из $\vec{X}$.

Случ. выборка исп. в теор. рассуждениях.

2) Пусть F — функция распред. случ. вел. X. Тогда функция распред. случ. выборки объема n из генеральной совокупности X:

$$F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = P\{X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n\} = \left\{\begin{array}{c}\text{все } X_i \\ \text{независ.} \\ \text{в совокупности}\end{array}\right\} =$$

$$= P\{X_1 < t_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n < t_n\} = F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n) =$$

$$= \{X_i \sim X \Rightarrow F_{X_i} = F\} = F(t_1) \cdot \ldots \cdot F(t_n)$$

Опр. Мн-во всех возможных знач. случ. выборки $\vec{X}$ объема n из генеральной совокупности X б. наз. выборочным пространством и обознач. $\mathcal{X}_n$

Опр. Любую скалярную функцию $g(\vec{X})$ случ. выборки $\vec{X}$ б. наз. статистикой, при этом знач. $g(\vec{x})$ этой функции на выборке $\vec{x} \in \mathcal{X}_n$ б. наз. выборочным ~~пространством~~ знач. статистики g.

Замечание Пусть $\vec{x}$ — выборка объема n из генеральной совокупности X. Это позволяет считать, что закон распред. случ. вел. X моделируется распред. дискретной случ. вел. $\tilde{X}$:

$\tilde{X}$	x_1	...	x_n
P	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Мат. ож. случ. вел. $\tilde{X}$: $M[\tilde{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$;

Дисперсия: $D[\tilde{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[\tilde{X}])^2$.

Эти соображения приводят к след. опр.

Опр. Выборочным средним наз. статистика

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Опр. Выборочной дисперсией наз. статистика

$$\underbrace{\hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X})}_{\text{обозн.}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Опр. Начальным выборочным моментом порядка k наз. статистика

$$\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Опр. Центральным выборочным моментом порядка k наз. статистика

$$\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

Замечание. С учетом предыдущего замечания о том, что закон распред. случ. вел. $\overline{X}$ моделирует закон распред. генеральной совокупности X, м. утверждать, что выборочные моменты явл. оценками своих теоретических (т.е. „истинных", таких, которые „на самом деле", и которые нам неизвестны) аналогов.

① Основные опр.

Пусть X - случ. вел., закон распред. которой неизвестен.

Опр. Случ. выборкой объема n из генеральной совокупности X наз. случ вектор.

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n), \text{ где } X_1, \dots, X_n \text{ - незав. в совок. случ. вел.,}$$

$$X_i \sim X, \ i = \overline{1;n}$$

Опр. Выборкой объема n из генер. совок. X наз. (любая) реализация $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ объема n из генер. совок. X

Замечание. В результате экспер. исследователь имеет дело с выборкой. Случ. выборка исп. в теор. рассуждениях.

② Предварительная обработка результатов эксперимента.

I. Вариационный ряд

Рассмотрим выборку $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из генер. совок. X.

Опр. Вариационным рядом, отвечающим выборке $\vec{x}$, наз. вектор

$$(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}),$$

полученный из вектора $\vec{x}$ путем расположения его компонент в порядке неубывания, т.е. числа $x_1, \dots, x_n$ располаг. в порядке неубывания.

т.е. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

Опр. Вариационным рядом, отвечающим случ. выборке $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, наз. случ. вектор $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, где $X_{(i)}$ – случ. вел., которая для каждой реализации $\vec{x}$ случ. вектора $\vec{X}$ принимает значение, равное i-му члену вариационного ряда, построенного по выборке $\vec{x}$

Замечание 1) $P\{X_{(i)} \le X_{(i+1)}\} = 1 \quad i = \overline{1, n-1}$

2) Пусть $F(t)$ – функция распред. генер. совокупности X

Тогда а) $F_{X_{(n)}}(t) = P\{X_{(n)} < t\} = P\{X_1 < t, X_2 < t, \dots, X_n < t\} = \{X_i \text{ – незав. в совокупности}\} =$

$= P\{X_1 < t\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n < t\} = F_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t) = \{X_i \sim X \Rightarrow F_{X_i} = F\} = [F(t)]^n$

б) $F_{X_{(1)}}(t) = P\{X_{(1)} < t\} = 1 - P\{X_{(1)} \ge t\} = 1 - P\{X_1 \ge t, \dots, X_n \ge t\} =$

$= \{X_i \text{ – незав. в совокупности}\} = 1 - P\{X_1 \ge t\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n \ge t\} = 1 - [1 - P\{X_1 < t\}] \cdot \ldots \cdot [1 - P\{X_n < t\}] =$

$= \{X_i \sim X \Rightarrow F_{X_i} = F_X\} = 1 - [1 - F(t)]^n$

II Статистический ряд.

Рассмотрим выборку $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из генер. совок. X.

Среди чисел x_i, $i = \overline{1, n}$ м. встречаться одинаковые. Это м.б. в том случае, когда X – дискрет. случ. вел., или если при проведении наблюдений результаты округлялись с некот. точностью.

Среди знач. $x_1, \dots, x_n$ компонент выборки $\vec{x}$ выберем все попарно различ. знач.:

$$z_{(1)} < \ldots < z_{(m)}.$$

Составим табл.

$z_{(1)}$	...	$z_{(i)}$	...	$z_{(m)}$
n_1	...	$n_{(i)}$	...	$n_{(m)}$

(*)

Таблица (*) наз. статистическим рядом, отвечающим выборке $\vec{x}$

Здесь n_i – число компонент вектора $\vec{x}$, которые имеют знач. $z_{(i)}$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} n_i = n\right)$$

При этом n_i наз. частотой знач. $z_{(i)}$,

$\frac{n_i}{n}$ —— " —— относительной частотой знач. $z_{(i)}$

III Эмпирическая и выборочная функции распред.

Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ выборка из генер. совок. X.

Обозначим $n(t, \vec{x})$ – число компонент вектора $\vec{x}$ которые меньше чем t.

Опр. Эмпирической функцией распред., построенной по выборке $\vec{x}$, наз. функцию $F_n: R \to R$, опред. правилом

$$F_n(t) = \frac{n(t, \vec{x})}{n}.$$

Замечания 1) Функция F_n м. принимать знач. из мн-ва

$$\left\{0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$$

2) F_n явл. кусочно постоянной функцией, которая имеет скачки (разрывы 1-го рода) в точках

$$t = z_{(i)}$$

($z_{(i)}$, $i = \overline{1,m}$, все попарно различ. знач. компонент выборки $\vec{x}$)

3) Если все компоненты выборки $\vec{x}$ попарно различны, то

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t \le x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & x_{(1)} < t \le x_{(2)} \\ \dots \\ \frac{n-1}{n}, & x_{(n-1)} < t \le x_{(n)} \\ 1, & x_{(n)} < t \end{cases}$$

4) Эмпирическая функция распред. обладает всеми св-вами функции распред.

Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – случ. выборка из генер. совок. X.

Обознач. $n(t, \vec{X})$ – случ. вел., которая для каждой реализации $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ принимает знач., равное $n(t, \vec{x})$

Опр. Выборочной функцией распред., отвечающей случ. выборке $\vec{X}$, наз. отображение $\hat{F}: R \to R$, определенное правилом

$$\hat{F}(t) = \frac{n(t, \vec{X})}{n}$$

Замечание 1) при каждом фиксированном $t \in R$ $\hat{F}(t)$ явл. случ. вел., которая м. принимать знач. $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$

2) Зафиксируем t_0. Обознач. $p = P\{X < t_0\} = const$

Тогда $P\{n(t_0, \vec{X}) = k\} = P\{$ среди $X_1, \dots, X_n$ ровно k штук приняли знач., которое $< t_0\} =$

$= C_n^k p^k q^{n-k}$

{Все X_i независ. в совокупности и имеют одинаковое X распред. $\Rightarrow$

$P\{$ среди $X_1, \dots, X_n$ ровно k штук оказались $< t_0\} =$

$= P\{$ в серии из n незав. исп. случ. вел. X ровно k раз приняла знач., которое $< t_0\}$

Если считать успехом событие $\{X$ приняла знач., которое $< t_0\}$, то

$P\{$ в серии из n исп. X приняло знач $< t_0\} = P_n(k)$ - вероятность реализации ровно k успехов в серии из n исп. по схеме Бернулли}

Т.о. $n(t_0, \vec{X}) \sim B(n, p)$, где $p = P\{X < t_0\}$.

Из этого также следует, что

$P\{\hat{F}(t_0) = \frac{k}{n}\} = P\{n(t_0, \vec{X}) = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

<u>Th</u> Для любого фикс. $t_0 \in R$ послед. случ. вел.

$\hat{F}(t_0, \vec{X_1}), F(t_0, \vec{X_2}), \dots, F(t_0, \vec{X_n}), \dots$

сходится по вероятности к знач. в т. t_0 теоретической (т.е. "истинной") функции распред. случ. вел. X, т.е.

$\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) \xrightarrow[n \to \infty]{P} F(t_0)$

{Выше мы обознач. случ. выборку $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ не включая объем выборки в обознач. вектора

$\vec{X_1} = (X_1), \vec{X_2} = (X_1, X_2), \dots, \vec{X_n} = (X_1, \dots, X_n)$

<u>Доказательство:</u>

При фикс $t_0 \in R$ случ. вел.: $\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) = \frac{n(t_0, \vec{X_n})}{n}$

равна относ. частоте успеха (т.е. события $\{X < t_0\}$) в серии из n испыт. по схеме Бернулли

В соответствии с ЗБЧ в форме Бернулли $\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) \xrightarrow[n \to \infty]{P} p$ ← теор. частота

но $p = P\{X < t_0\} = F(t_0)$

IV Интервальный статистический ряд

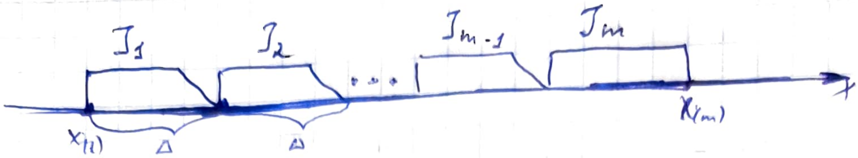
Выше было понятие статист. ряда. Однако если объем выборки достаточно велик ($n > 50$), то элементы выборки группируют в так наз. стат. ряд.

Для этого отрезок $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ разбивают на m равновеликих промежутков

Ширина каждого из них $\Delta = \frac{|J|}{m} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m}$

Далее полагают: $J_i = [x_{(1)} + (i-1)\Delta; x_{(1)} + i\Delta)$, $i = \overline{1, m-1}$

$J_m = [x_{(1)} + (m-1)\Delta; x_{(m)}]$.



Опр. Интервальным статист. рядом, отвечающим выборке $\vec{x}$, наз. табл. вида

J_1	J_2	...	J_m
n_1	n_2	...	n_m

Здесь n_i – число элементов выборки $\vec{x}$, попавших в промежуток J_i, $i = \overline{1, m}$

Замеч. 1) $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$

2) Для выбора m исп. формулу

$$m = [\log_2 n] + 2 \quad \text{или} \quad m = [\log_2 n] + 1$$

V Эмпирическая плотность

Пусть для данной выборки $\vec{x}$ построен интерв. стат. ряд (J_i, n_i), $i = \overline{1, m}$

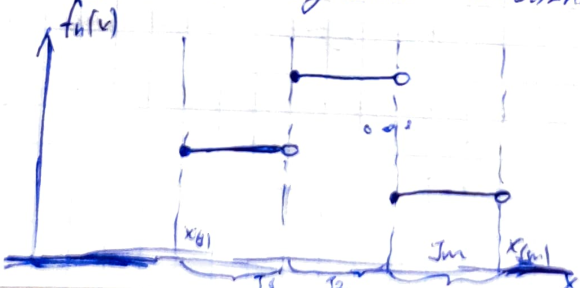
Опр. Эмпирической плотностью распред. (соответ. выборке $\vec{x}$) наз. функция

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & \text{если } x \in J_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замеч. 1) Очевидно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{x_{(1)}}^{x_{(m)}} f_n(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{J_i} f_n(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n\Delta} \cdot \Delta =$
$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{n}{n} = 1$

Т.о. эмпирич. плотность удовл. усл. нормировки. Легко показать, что она обладает всеми св-вами функции плотности

2) $f_n(x)$ явл. кусочно-постоянной функцией



3) Функция $f_n(x)$ явл. стат. аналогом функции плотности распред. вероятностей.

Аналогично доказанному выше результату для функции распред.

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(x)$$

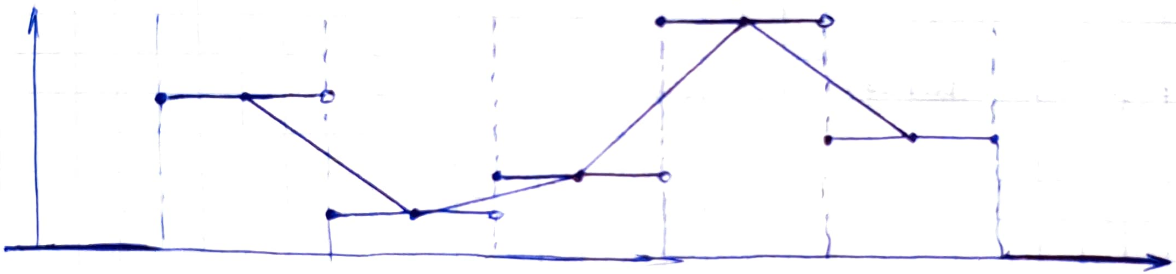
м. показать, что $f_n(x) \approx f(x)$ при $n >> 1$

Опр.- График эмпирич. функции плотности наз. гистограммой.

VI Полигон частот

Пусть для некоторой выборки $\vec{x}$ построена гистограмма

Опр.- Полигоном частот наз. ломаная, звенья которой соединяют середины верхних сторон соседних прямоугольников гистограмм.



Опр. Точечной оценкой параметра θ наз. статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение которой исп. в качестве значения параметра θ, т.е. принимается равенство

$$\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$$

выборка, т.е. числовой вектор

число-значение статистики θ на выборке

Пример. Пусть X — случ. вел. $\theta = M[X]$

В качестве точечных оценок для θ м. исп. статистики:

$$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ — выборочное среднее

$$\hat{\theta}_2(\vec{X}) = \frac{1}{2}\left[X_{(1)} + X_{(n)}\right]$$ — середина выборочного интервала

$$\hat{\theta}_3(\vec{X}) = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{если } n \text{ — нечетное} \\ \frac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & \text{если } n \text{ — четное} \end{cases}$$ — центральный элемент вариационного ряда

$$X_{(1)} \le \dots \quad X_{(5)} \quad X_{(n)}$$

$$\hat{\theta}_4(\vec{X}) = X_1$$

$$\hat{\theta}_5(\vec{X}) = e^{\sin\left[\Gamma(|X_1|+1)\cdot\Gamma(|X_2|+2)\cdot\ldots\cdot\Gamma(|X_n|+n)\right]+5}$$

Замеч. В опр. точечной оценки не сказано, что она д. принимать знач. хоть сколько-нибудь близкие к теорет. ("истинному") значению оцениваемого параметра.

В то же время очевидно, что разные оценки м. давать более или менее адекватные результаты.

Для исследования качества точечной оценки исп. след. характеристики:

1) несмещенность;
2) состоятельность;
3) эффективность.

② Несмещенность точечной оценки

Пусть θ - неизвестный параметр закона распред. случ. вел. X, $\hat{\theta}(\vec{X})$ - точечная оценка для θ

Опр. Точечная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ наз. несмещенной, если

$$\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$$

случ. вел.; случ. выборка; теор. знач. параметра.

Пример. Пусть X - ген. совокупность
$\theta = M[X]$

1) Покажем, что $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \bar{X}$ явл. несмещенной оценкой для θ

$$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \left\{\begin{array}{l} \text{из опр. случ. выборки} \Rightarrow \\ X_i \sim X,\ i=\overline{1,n} \\ \exists M[X_i] = M[X] = \theta \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{\theta \cdot n}{n} = \theta,$$ т.е. $\hat{\theta}_1$ - несмещенная оценка для θ

2) Оценка $\hat{\theta}_2(\vec{X}) = X_1$, также явл. несмещенной оценкой для θ

Пример. X - ген. совокупность

$\exists D[X] = \sigma^2$. $\quad \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \hat{m}_2(\vec{X}) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}_{\text{выборочная дисперсия}}$ - исп. в качестве точечной оценки для парам. σ^2

На сем. д. было доказано, что $M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n+1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$,

т.е. выборочная дисперсия явл. смещенной оценкой дисперсии.

Замеч. Рассмотрим статистику $S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Тогда $M[S^2(\vec{X})] = M\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X})\right] = \frac{n}{n-1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}\sigma^2}_{M[\hat{\sigma}^2]} = \sigma^2$, т.е. $S^2(\vec{X})$ явл. несмещенной оценкой дисперсии.

Опр. Статистика $S^2(\vec{X})$ наз. исправленной выборочной дисперсией

③ Состоятельность точечной оценки

Пусть X - ген. совокупность
θ - параметр закона распред. случ. вел. X;

$\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ – точечная оценка параметра θ

{ В настоящем пункте удобно вынести n – объем выборки – в обозначение выборки
$\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$

Опр. Точечная оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра θ наз. состоятельной, если
$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta.$$

Замеч. 1) усл. из опр. состоятельной оценки эквивалентно условию
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\hat{\theta}(\vec{X}_n) - \theta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) Если точечная оценка не явл. состоятельной, то она никому не нужна.

Пример. Пусть 1) X – генеральная совокупность
2) $\theta = M[X]$
3) $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \overline{X}$ – точечная оценка для θ

Показать, что $\hat{\theta}_1$ явл. состоятельной оценкой для θ в предположении, что $\exists D[X] = \sigma < \infty$

1) Рассмотрим случ. выборку $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$

При $n \to \infty$ получаем последовательность $X_1, X_2, \dots$ независ. случ. вел. (т.к. это компоненты случ. выборки)

2) $X_i \sim X \Rightarrow \exists M[X_i] = \theta, \ \exists D[X_i] = \sigma^2, \ i \in \mathbb{N}$

3) Тогда согласно следствию ЗБЧ в форме Чебышева
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta, \text{ т.е. } \hat{\theta}_1(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \Rightarrow \hat{\theta} \text{ – состоятельная оценка}$$

Замеч. Состоятельность этой оценки м. доказать, не предполагая существования конечной дисперсии

Пример. $X \sim$ ~~[illegible]~~ $N(\theta, \sigma^2)$ – ген. совокупность
$(\theta = M[X])$

Показать, что оценка $\hat{\theta}_4(\vec{X}_n) = X_1$ не явл. состоятельной оценкой для θ

$$P\{|\hat{\theta}_4(\vec{X}_n) - \theta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \ ?$$

$$P\{|X_1 - \theta| \geq \varepsilon\} = \{X_1 \sim X \sim N(\theta, \sigma^2)\} \overset{1-}{=} P\{-\varepsilon \leq X - \theta \leq \varepsilon\} \overset{1-}{=} P\{\theta - \varepsilon \leq X \leq \theta + \varepsilon\} =$$
$$\overset{1-}{=} \left[\Phi_0\left(\frac{\theta+\varepsilon-\theta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\theta-\varepsilon-\theta}{\sigma}\right)\right] \overset{1-}{=} \left(\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right) = 1 - 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma} = +\infty$$

Т.о. $\neg\left(\hat{\theta}_4(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta\right) \Rightarrow \hat{\theta}_4$ не явл. состоятельной для θ

Замеч. 1) М. показать, что исправл. выбор. дисперсия $S^2(\vec{X})$ явл. состоятельной оценкой дисперсии. Также м. доказать, что

$\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ – тоже состоятельная оценка дисперсии.

$$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)] = \underset{\to 1}{\frac{n-1}{n}}\,\sigma^2$$

2) М. доказать более общий результат: выборочные моменты

$$\hat{m}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

и

$$\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$$

также явл. состоятельными оценками своих теор. аналогов при условии, что последние $\exists$.

3) М. показать, что при $k \geq 2$ выборочные моменты явл. смещенными оценками своих теор. аналогов.

④ Эффективность точечной оценки.

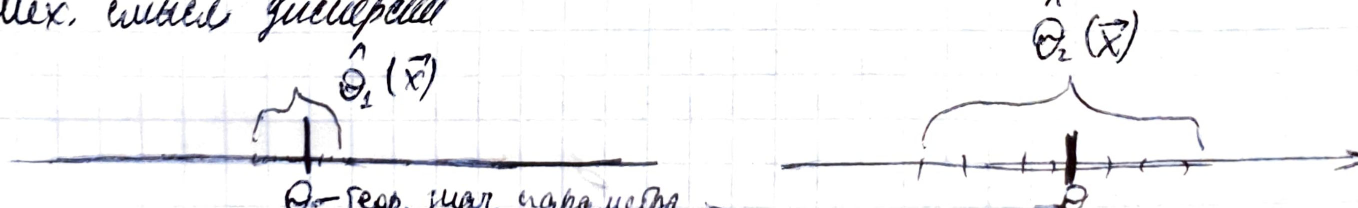
Пусть 1) X – случ. вел., закон распред. которой зависит от знач. параметра θ.

2) $\hat{\theta}_1(\vec{X}), \hat{\theta}_2(\vec{X})$ – несмещенные точечные оценки для θ

3) $\exists D[\hat{\theta}_1], \exists D[\hat{\theta}_2]$

4) $D[\hat{\theta}_1] < D[\hat{\theta}_2]$

Мех. смысл дисперсии



Опр. Пусть $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ – две несмещенные оценки параметра θ; $\exists D[\hat{\theta}_i], i=\overline{1,2}$

Статистика $\hat{\theta}_1$ наз. более эффективной, чем $\hat{\theta}_2$, если $D[\hat{\theta}_1] < D[\hat{\theta}_2]$

Опр. Оценка $\hat{\theta}$ наз. эффективной оценкой параметра θ, если
1) $\hat{\theta}_n$ явл. несмещенной оценкой для θ;
2) $\hat{\theta}$ обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных точечных оценок параметра θ.

Замечание. Иногда говорят не об эффективной "вообще" точечной оценке, а об оценке, эффективной в некотором классе.

Пусть $Ⓗ$ - некоторый класс несмещенных оценок для параметра θ.

Опр. Оценка $\hat{\theta} \in Ⓗ$ наз. эффективной в классе $Ⓗ$, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех оценок этого класса, т.е.

$$(\forall \tilde{\theta} \in Ⓗ)(D[\hat{\theta}] \leq D[\tilde{\theta}])$$

Th о единственности эффективной оценки

Пусть 1) $\hat{\theta}_1(\vec{X})$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ - две эффективные ($\Rightarrow$ несмещённые) оценки парам. θ

Тогда $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \hat{\theta}_2(\vec{X})$

без доказательства

⑤ Неравенство Рао-Крамера

Пусть 1) X - случ. вел., закон распред. которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ параметров.

2) $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ - случ. выборка из ген. сов. X.

Опр. Функцией правдоподобия, отвечающей случ. выборке $\vec{X}$, наз. функция

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta}), \text{ где}$$

$$p(X_i, \vec{\theta}) = \begin{cases} f(X_i, \vec{\theta}), & \text{если } X\text{-НСВ} \\ P\{X = X_i\}, & \text{если } X\text{-ДСВ} \end{cases}$$

(здесь f - функция плотности распред. вероятностей случ. вел. X)

Пусть $r=1$, т.е. $\vec{\theta}=(\theta_1)=(\theta)$
1 обозн.

Опр. Количеством информации по Фишеру, содержащейся в случ. выб. $\vec{X}$, наз. число
$$I(\theta)=M\left[\left(\frac{d\ln L}{d\theta}\right)^2\right]$$

Th неравенство Рао-Крамера

Пусть 1) рассматриваемая модель явл. регулярной

2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ - несмещенная оценка параметра θ

Тогда $\boxed{D[\hat{\theta}]\geq\frac{1}{I(\theta)}}$ - нерав. Рао-крамера

без доказательства

Замеч. 1) при доказательстве th Рао исп. дифференцирование по параметру под знаком интеграла:
$$\frac{d}{d\theta}\int_G \varphi(\vec{X},\theta)d\vec{x}=\int_G\frac{d\varphi(\vec{X},\theta)}{d\theta}d\vec{x}$$

Т.о. параметрические модели, для которых справедливо это равенство, б. наз. регулярными.

2) Неравенство Рао дает нижнюю границу для дисперсии всевозможных несмещенных точечных оценок параметра θ.

Величина $e(\hat{\theta})=\frac{1}{I(\theta)D(\hat{\theta})}$ наз. показателем эффективности по Рао точечной оценки $\hat{\theta}$.
$$0<e(\hat{\theta})\leq 1$$

Если $e(\hat{\theta})=1$, то точечная оценка $\hat{\theta}$ наз. эффективной по Рао.

3) Очевидно, оценка, эффективная по Рао, б. "просто" эффективной.

Вопрос о том, для каких параметрических моделей $\exists$ эффективные по Рао оценки (т.е. $\exists$ оценки, дисперсия которых равна $\frac{1}{I(\theta)}$), без рассм.

4) В некоторых случаях вводят в рассмотрение вел.
$$I_0(\theta)=M\left[\left(\frac{dp(X,\theta)}{d\theta}\right)^2\right],$$
(где $p(X,\theta)$ имеет тот же смысл, что в опр. функции правдоподобия),

которую м. назвать кол-вом информации по Фишеру в одном наблюдении. Для некоторых параметрических моделей справедливо
$$I(\theta)=nI_0(\theta),$$
где n - объем случ. выборки.

Лекция

⑥ Методы построения точечных оценок

2 метода: 1) метод моментов;
2) метод макс. правдоподобия.

I Метод моментов

Пусть 1) X - случ. вел., закон распред. которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ неизв. параметров

2) $\exists$ r первых моментов случ. вел. X, т.е. $\exists M[X^k]$, $k = 1, \ldots, r$

Тогда в методе моментов:

1) Вычисляются теор. моменты 1-го, 2-го, ..., r-го порядка, которые, вообще говоря, зависят от неизв. параметров.

$$m_k(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \underbrace{M[X^k]}_{\text{теор. момент порядка } k}, \ k = \overline{1, r}$$

2) Теор. моменты приравниваются к их выборочным аналогам:

$$(*) \begin{cases} m_1(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ \ldots \\ m_r(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}, \text{ где } \hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

система уравнений (возможно, нелинейных) отн. неизв. параметров $\theta_1, \ldots, \theta_r$

3) Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \ldots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Полученные зависимости и исп. в качестве точечных оценок для неизвестных параметров.

Замеч. Иногда некоторые уравнения системы удобнее записывать относительно центральных, а не начальных моментов.

В этом случае k-ое уравнение б. иметь вид:

$$\mathring{m}_k(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}), \text{ где } \mathring{m}_k(\theta_1, \ldots, \theta_r) = M[(X - M[X])^k]$$

$$\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

Замечание: 1) Поскольку выборочные моменты $\hat{m}_k(\vec{X})$ и $\overset{\circ}{m}_k(\vec{X})$ явл. состоятельными оценками соответствующих теор. моментов, то м. показать, что в случае непрер. зависимости решения системы (*) от $\hat{m}_k$ (или от $\overset{\circ}{m}_k$) оценки параметров, полученные с пом. этого метода, также б. состоятельными.

2) Т.к. выборочные моменты параметра k при $k \geq 2$ явл. смещенными оценками своих теор. аналогов, то и оценки параметров, полученные с исп. метода моментов, также м. б. смещенными.

II Метод макс. правдоподобия

Пусть 1) X - случ. вел., закон распред. которой зависит от вектора параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$

Ранее было введено понятие функции правдоподобия случ. выборки $\vec{X}$:

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta}), \text{ где } p(X_i, \vec{\theta}) = \begin{cases} f(X_i, \vec{\theta}), & \text{если } X\text{-НСВ} \\ P\{X = X_i\}, & \text{если } X\text{-ДСВ} \end{cases}$$

функция плотност. распр. случ. вел. X

М. показать, чем ближе знач. вектора $\vec{\theta}$ к теор. знач. вектора θ, тем большее знач. принимает функция $L(\vec{X}, \vec{\theta})$, при достаточно больших n

В методе макс. правдоподобия в качестве точечных оценок неизв. параметров исп. знач., доставляющие max знач. функции правдоподобия. Для реализации метода необходимо решить задачу.

$$L = (\vec{X}, \vec{\theta}) \to \max_{\vec{\theta}}, \text{ тогда } \hat{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \arg\max_{\vec{\theta}} L(\vec{X}, \vec{\theta})$$

$f(x) = 1 - x^2 \to \max_x$ $\quad f_{max} = 1$, при $x = 0$
$x = \arg\max_t f(t)$

Замечание:

1) Для решения задачи (*) м. исп. необходимое усл. extr дифференцируемой функции нескольких переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{dL(\vec{X}, \vec{\theta})}{d\theta_1} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{dL(\vec{X}, \vec{\theta})}{d\theta_r} = 0 \end{cases}$$

наз. уравнениями правдоподобия

2) Функция L явл. произведением и сомножителей и работать с ней не всегда удобно. Поэтому часто вместо (*) решают эквивал. задачу (**)

$$\ln L(\vec{X}, \vec{\theta}) \to \max_{\theta}, \text{ т.е. } \hat{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \arg\max_{\vec{\theta}} \ln L(\vec{X}, \vec{\theta}).$$

Задачи (*) и (**) эквивалентны, т.к. $\ln$ - монотонно возраст. функция.

В этом случае уравнения правдоподобия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{d\theta_1} = 0, \\ \dfrac{d\ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{d\theta_r} = 0. \end{cases}$$

смещенной,
от

Интервальные оценки

① Основные понятия

Вторая задача МС: Пусть 1) X - случ. вел., закон распред. которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ неизвестных параметров.

Требуется оценить знач. этих параметров.

Ранее для решения этой задачи исп. точечные оценки. ~~В качестве~~ Тогда принимались равенства

$$\theta_j = \hat{\theta}_j(\vec{X}), \quad j = \overline{1, r}$$

для некоторых статистик $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r$. Недостатком этого подхода явл. то, что он не дает информацию о вероятностных характеристик точности оценивания неизв. параметров.

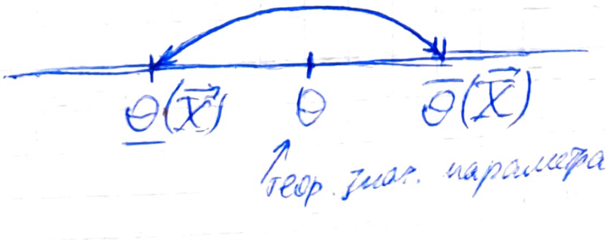
Кроме точечных оценок для решения 2-й задачи МС исп. другой подход.

Б. считать, что $r = 1$, т.е. $\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta)$.

Опр. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ - интервальной оценкой) наз. пара статистик

$\underline{\theta}_\gamma(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$

Замечание 1) Интервальная оценка явл. интервалом со случ. границами $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$, который накрывает неизвестное теор. знач. параметра с вероятностью γ.



Замеч. Для наиболее распространенных случаев центр. стат. построены

Общий вид закона распред. случ. вел. X	Параметры	Центр. статистика и ее закон распред.
$N(m, \sigma^2)$	m - неизв, σ^2 - изв. оценить m	$T = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$
	m - неизв., σ^2 - неизв. оценить m	$T = \frac{m - \bar{X}}{s(\bar{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$
	m - неизв, σ^2 - неизв. оценить σ	$T = \frac{s^2(\bar{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$
$Exp(\lambda)$	λ - неизв. оценить λ	$T = 2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$

Б. считать, что $r=1$, т.е. $\vec{\theta}=(\theta_1)=(\theta)$

Опр. Интервальной оценкой уровня γ параметра θ наз. пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что
$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$$

Зам. 1) Т.о. интервальная оценка уровня γ – интервал со случ. границами, который накрывает теор. знач. параметра с вероятностью γ

2) Вероятность совершить ошибку при построении интервальной оценки уровня γ:
$$1-\gamma = P\{\theta \notin (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\}$$

3) Вероятностной характеристикой интервальной оценки уровня γ явл. случайная величина $l(\vec{X}) = \overline{\theta}(\vec{X}) - \underline{\theta}(\vec{X})$, которая наз. размахом интервальной оценки.

4) Иногда удобно строить так наз. односторонние интервальные оценки

Опр. Односторонней нижней (верхней) γ-доверительной границей для параметра θ наз. статистику $\underline{\theta}(\vec{X})$ (соответственно $\overline{\theta}(\vec{X})$) такую, что $P\{\theta > \underline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$

(соответственно $P\{\theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$)

Опр. γ-доверительным интервалом (довер. интерв. уровня γ) для параметра θ наз. реализацию (выборочное знач.) интерв. оценки уровня γ для этого параметра, т.е. интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

Замеч. Иногда там, где это не б. приводить к путанице, мы б. допускать вольность речи, не разделяя строго понятия интерв. оценки и довер. интервала.

② Построение интервальных оценок

Пусть 1) X – случ. вел., закон распред. которой известен с точностью до знач. параметра $\theta \in R^1$.

Требуется построить интерв. оценку уровня γ для параметра θ

Опр. Статистика $g(\vec{X}, \theta)$ наз. центральной, если закон ее распред. не зависит от неизвест. параметра θ