

设树有  $N$  个节点。

令  $S(u)$  表示以节点  $u$  为根时，树中所有节点的深度之和。

考虑树中任意两个相邻的节点  $u$  和  $v$ 。我们想比较  $S(u)$  和  $S(v)$ 。

当我们把根从  $u$  移动到  $v$  时：

1. 原来以  $v$  为根的子树（当  $u$  是  $v$  的父节点时）中的所有节点，它们的深度都减少了1。设这个子树的大小（节点数）为  $size(v)$ 。这些节点对深度和的贡献总共减少了  $size(v)$ 。
2. 树中其余的  $N - size(v)$  个节点（即如果断开  $u - v$  边，与  $u$  在同一个连通分量的所有节点），它们的深度都增加了1。这些节点对深度和的贡献总共增加了  $N - size(v)$ 。

因此， $S(v) = S(u) - size(v) + (N - size(v))$

$$S(v) = S(u) + N - 2 \cdot size(v)$$

现在，假设存在一个最优的根  $r_{opt}$ ，它使得  $S(r_{opt})$  最大，并且  $r_{opt}$  不是叶子节点。

这意味着  $r_{opt}$  的度数  $degree(r_{opt}) \geq 2$ （假设  $N > 2$ 。如果  $N = 1$  或  $N = 2$ ，则所有节点都是叶子节点，猜想显然成立）。

因为  $r_{opt}$  是最优根，所以对于  $r_{opt}$  的任何一个邻居节点  $x$ ，都必须满足  $S(x) \leq S(r_{opt})$ 。

根据上面的公式， $S(x) = S(r_{opt}) + N - 2 \cdot size(x \text{ wrt } r_{opt})$ ，其中  $size(x \text{ wrt } r_{opt})$  是当  $r_{opt}$  为根时，以  $x$  为根的子树的大小。

所以， $S(r_{opt}) + N - 2 \cdot size(x \text{ wrt } r_{opt}) \leq S(r_{opt})$

$$N - 2 \cdot size(x \text{ wrt } r_{opt}) \leq 0$$

$$N \leq 2 \cdot size(x \text{ wrt } r_{opt})$$

$$size(x \text{ wrt } r_{opt}) \geq N/2$$

这个结论必须对  $r_{opt}$  的所有邻居都成立。

设  $r_{opt}$  的邻居为  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ，其中  $k = degree(r_{opt}) \geq 2$ 。

那么对于所有的  $i \in \{1, \dots, k\}$ ，都有  $size(x_i \text{ wrt } r_{opt}) \geq N/2$ 。

这些以  $x_i$  为根的子树（当  $r_{opt}$  为父节点时）是互不相交的。它们所包含的节点总数是  $N - 1$ （即除了  $r_{opt}$  自身以外的所有节点）。

$$\text{所以，} \sum_{i=1}^k size(x_i \text{ wrt } r_{opt}) = N - 1.$$

**矛盾。假设不成立。**

这个矛盾的根源在于假设了最优根  $r_{opt}$  不是一个叶子节点（并且  $N > 2$ ）。

因此，对于  $N > 2$  的情况，最优根必须是一个叶子节点。

综上所述，猜想“满足题目要求的点只在度为1的节点上”成立。