**Matemática Elementar**

Prof. **Hélio de Menezes Silva**  
  
1ª. edição (mar.2013)  
  
  
  
  
  
  
  
Livro do aluno desta disciplina no   
Curso de **Licenciatura em Computação**  
Unidade de Educação a Distância   
**Universidade Federal da Paraíba**   
UFPB Virtual  
  
  
<http://portal.virtual.ufpb.br/wordpress/cursos/licenciatura-em-computacao/>

**Dedico** este livro a  
 **Raquel,  
 Sandra,  
 Mauro,  
 Airton e  
 Sérgio,**

os cinco maravilhosos filhos que Deus deu de presente a mim e a Nira. Vocês são o maior tesouro e a maior causa de júbilo e alegria que recebemos sobre esta terra! Bem, sinto muita falta e saudades de Mauro, mas sei que qualquer dia desses vamos nos encontrar de novo, no céu, e, enquanto isso, eu e Nira queremos aproveitar mais e melhor nossos dias com nossos outros filhos, e netos.

**Agradeço** à minha esposa, *Valdenira Nunes de Menezes Silva*, por ter assumido muitas das minhas tarefas, a fim de me dar tempo para escrever este livro em curto prazo de tempo.   
Agradeço aos professores *Rivanildo Garcia da Silva* e *José Miguel Aroztegui* por suas contribuições e revisões do cap. 1; *Joseluce de Farias Cunha*, cap. 2; *Lucídio dos Anjos Formiga Cabral*, cap. 6.   
Agradeço ao alunos *Túlio Albuquerque Pascoal*, cap. 3. Os exemplos das falácias citadas no cap. 2 são adaptações de respostas por meus *alunos de Linguagens Formais*, em trabalho para casa, no período 2012.2.  
  
  
  
  
  
Hélio de Menezes Silva, março 2013.  
  
  
  
  
  
  
Salmo 8:3 ¶ Quando vejo os teus céus, obra dos teus dedos, a lua e as estrelas que preparaste;  
4 Que *é* o homem mortal para que te lembres dele? e o filho do homem, para que o visites?  
5 Contudo, pouco menor o fizeste do que os anjos, e de glória e de honra o coroaste.  
6 Fazes com que ele tenha domínio sobre as obras das tuas mãos; tudo puseste debaixo de seus pés:  
7 Todas as ovelhas e bois, assim como os animais do campo.  
8 As aves dos céus, e os peixes do mar, *e tudo o que* passa pelas veredas dos mares.  
9 Ó SENHOR, Senhor nosso, quão admirável *é* o teu nome sobre toda a terra! (LTT)

**Apresentação da Disciplina**

Parabéns, meu aluno e amigo, pela sua decisão de estudar e fazer um curso superior, particularmente Licenciatura em Computação na UFPB, enquanto muitos se abandonam ao não fazer nada da vida. Parabéns. Sei que alguns de vocês trabalham, muitos moram onde não há muitos meios e oportunidades, por isso lhe dou pessoalmente parabéns pela garra e determinação em fazer este curso através do EAD.   
  
Tenho a firme convicção que, com sua disciplina e determinação amigo (isto será a chave!), a EAD pode formar profissionais de grande competência, EAD pode ser o futuro da educação, inclusive revertendo paradigmas seculares, <http://usatoday30.usatoday.com/life/people/story/2012-05-30/sal-khan-profile-khan-academy/55270348/1>. Sou um entusiasta da EAD, mas deixe-me avisá-lo, ela precisa de duas coisas básicas: autodisciplina e esforço. Se você não tiver essas qualidades e de modo nenhum as quiser desenvolver, deixe-me ser franco, dificilmente conseguirá muito na vida, em quase nada. Na EAD, você precisa ter a autodisciplina de diariamente dedicar várias horas ao estudo. Sozinho ou em grupo, você precisa fazer por si mesmo todos os exemplos e pelo menos 1/3 dos exercícios, saltando de três em três. Vou bater nessa mesma tecla em todas as unidades.  
  
Quanto ao curso, minha aspiração é que ele lhe faça ainda mais um vencedor, em DUAS vertentes: a) tendo capacidade técnica para, se imposto pela vida, disputar corrida com os bacharéis em Ciência da Computação e cursos similares (por que não?); e b) sendo o profissional por excelência na nobre profissão de professor na educação básica e na técnico- profissionalizante, talvez fazendo pós-graduação e ensinando em universidades. Almejo e antevejo duas vertentes à sua disposição, para seu futuro.  
  
Quanto à disciplina em si (Matemática Elementar) de que tomo como privilégio poder escrever este livro e lhe ensinar, é uma das primeiras e mais básicas para tudo o mais. Não é uma disciplina fácil, pois é muito densa, tem muito conteúdo em pouco tempo e espaço, mas tem que ser assim. Se, ao final dela, você não dominar seu assunto muito bem, provavelmente terá muita dificuldade para acompanhar as 3 outras disciplinas de Matemática, mais as 3 disciplinas Estrutura de Dados (que avançará em grafos), Teoria da Computação (que avançará em lógica e outros formalismos) e Agentes Inteligentes (idem).  
  
O objetivo específico da disciplina é lhe capacitar plenamente nos assuntos da sua ementa: 1) Teoria dos Conjuntos: axiomas, operações elementares, relações, funções, ordenação, números naturais, conjuntos contáveis e incontáveis. 2) Introdução à Lógica Matemática. 3) Recorrência e Indução. 4) Noções básicas: proposições, provas/demonstrações. 5) Métodos de Enumeração: permutação, combinação e o teorema de Ramsey. 6) Grafos: terminologia básica, classes de grafos, grafos ponderados e orientados, ciclos e circuitos, árvores. Adicionei como um 7º tópico Teoria dos Números, ao invés de abordá-lo distribuído nos tópicos anteriores. Fica melhor assim.  
  
Os livros-texto da disciplina, se você tiver acesso a eles em papel ou computador, são

- GERSTRING, J. L. Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação. Rio de Janeiro: LTC, 3 ed., 1995.  
- ROSEN, K. H. Discrete Mathematics and its Applications. 4. ed. McGraw-Hill, 1999.  
- IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos e funções. 6 ed. São Paulo: Atual, Vol. 1, 1993..  
- DAGHLIAN, J. Lógica e Álgebra de Boole. São Paulo: Editora Ática, 1990.

mas creio que este presente livro deverá ser suficiente para a maior parte da disciplina, você só precisando consultar os livros-texto se se interessar por maior aprofundamento em certos tópicos que despertem seu interesse. Também, espalhados por este livro, colocarei links para vários outros livros, notas de aula e artigos disponibilizados na internet, particularmente quando eu tiver extraído exemplos e problemas deles, ou quando eu quiser sugerir que você faça tais exercícios.  
  
O fórum de alunos, os tutores, e eu (o professor) queremos e vamos ajudá-lo (nessa ordem). Mas, repito, o início de tudo, a chave, é você mesmo ser determinado e disciplinado, cada semana dedicando 4 a 8 horas para estudar este livro com todo afinco.  
  
Sucesso, meu amigo. Comecemos nossa jornada na Matemática Elementar. Que, ao final do seu esforço, mesmo duro, você a avalie como lhe tendo dado a satisfação de ter dominado o assunto, e eu a satisfação de lhe ter ajudado nisso.  
  
Prof. *Hélio de Menezes Silva*, mar.2013.  
DCC/ CI/ UFPB – Universidade Federal da Paraíba, Campus de João Pessoa.

**Conteúdo**   
(da disciplina *Matemática Elementar [e Discreta]*)

Conteúdo

[**1. CONJUNTOS, RELAÇÕES, FUNÇÕES** 5](#_Toc350800882)

[1.1. Axiomas e Definições sobre Conjuntos. Relações entre Conjuntos 6](#_Toc350800883)

[1.2. Operações com Conjuntos 7](#_Toc350800884)

[1.3. Relações 8](#_Toc350800885)

[1.4. Funções 9](#_Toc350800886)

[1.5. Ordenação 11](#_Toc350800887)

[1.6. Números Naturais, Inteiros, Racionais, Reais 13](#_Toc350800888)

[1.7. Conjuntos Contáveis e Não-Contáveis 13](#_Toc350800889)

[Problemas sobre toda a Unidade: 15](#_Toc350800890)

[Recapitulando a unidade 16](#_Toc350800891)

[**2. Introdução à LÓGICA MATEMÁTICA** 17](#_Toc350800892)

[2.1. Motivação. Lógica. Porque só Veremos a Lógica Proposicional 17](#_Toc350800893)

[2.2. A Linguagem £ da Lógica Proposicional 18](#_Toc350800894)

[2.2.1. A Sintaxe de £ 18](#_Toc350800895)

[2.2.2. A Semântica de £ 20](#_Toc350800896)

[2.3. Regras de Inferência sobre £. Sistemas Formais. Sistema Natural de Inferência 22](#_Toc350800897)

[2.4. Sanidade, Completude, Consistência. Os Problemas da Satisfatibilidade e da Tautologia (são Decidíveis, mas NP-Completos). Modelo e Teoria 26](#_Toc350800898)

[Problemas sobre toda a Unidade: 27](#_Toc350800899)

[Recapitulando a Unidade 27](#_Toc350800900)

[Apêndice à Unidade II: Falácias Lógicas 27](#_Toc350800901)

**UNIDADE I**

# CONJUNTOS, RELAÇÕES, FUNÇÕES

(Como você, com suficiente carga horária e profundidade, já estudou este assunto no ensino médio e para o recente vestibular, e como estaremos apenas fazendo uma revisão dele, então vamos andar algo sumaria e rapidamente, sem provas de fórmulas e teoremas, para que sobre tempo de estudo e espaço no livro para explicarmos melhor os assuntos realmente novos para você.)  
 **Nosso objetivo, nesta unidade,** é, ao final dela, você (voltar a) dominar as mais básicas noções e propriedades dos conjuntos, das relações e operações entre eles; da ordenação entre os seus elementos; dos conjuntos de números naturais, de inteiros, de racionais e de reais; dos conjuntos contáveis e não contáveis.   
  
Lembre: *Estamos torcendo por você. O fórum de alunos, os tutores, e eu (o professor) queremos e vamos ajudá-lo (nessa ordem), mas você tem que ser determinado e disciplinado,* ***cada semana dedicando 4 a 8 horas para estudar este livro****, entender e reter os exemplos, resolver sozinho pelo menos 1/3 dos exercícios propostos, sumariar em sua mente os principais pontos desta unidade. Sem determinação de firme propósito, sem disciplina e esforço honesto, então talento e boa vontade não bastam para nenhuma vitória na nossa vida, não é?*  
  
**Conteúdo desta unidade:**

*1.1. Axiomas e Definições sobre Conjuntos. Relações entre Conjuntos  
1.2. Operações com Conjuntos  
1.3. Relações entre Conjuntos  
1.4. Funções  
1.5. Ordenação  
1.6. Conjuntos dos Números Naturais, e dos Inteiros, e dos Racionais, e dos Reais  
1.7. Conjuntos Contáveis e Não Contáveis*

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\saiba mais.png | Se você quiser ver o assunto mais explicada e profundamente, não precisará de mais que os livros textos da ementa da disciplina.  Mas, para escrever esta unidade, além deles também usamos (mais como esqueleto mestre e plano geral e ordem de apresentação) partes do livro *Matemática Elementar* que se encontra disponível em <http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar>. Não o copiamos de cabo a rabo, somente “pegamos mais o jeitão" dele. Assim fizemos por causa de sua concisão e objetividade, mas acrescentamos "carne" baseada nos livros-texto e em outros, omitimos algumas partes, modificamos muitas outras, acrescentamos exemplos, etc. Os exemplos e problemas propostos foram-nos gentilmente sugeridos pelo Prof. *Rivanildo Garcia da Silva*, e o Prof. *José Miguel Aroztegui* revisou todo o texto |

**Símbolos** para esta unidade:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ∈: pertence | ∉: não pertence |  | ⇒: implica que | ⇔: se, e somente se |
| ⊆: está contido (podendo ser igual) |  |  | ∃: existe | ∄: não existe |
| ⊂: está contido propriamente (não podendo ser igual) | ⊄: não está contido propriamente (nem é igual) |  | ∀: para todo (ou qualquer que seja) |  |
| ⊇: contém (podendo ser igual) |  |  | **N**: conjunto dos números naturais | **Z**: conjunto dos números inteiros |
| ⊃: contém propriamente (não podendo ser igual) | ⊅: não contém propriamente |  | **Q**: conjunto dos números racionais | **R**: conjunto dos números reais |
| ∅: conjunto vazio | |: tal que |  |  |  |

## 1.1. Axiomas e Definições sobre Conjuntos. Relações entre Conjuntos

Em Matemática, conjunto, elemento e relação de pertinência são conceitos primitivos, isto é, que não podem ser formalmente definidos em função de conceitos mais simples, portanto são aceitos sem definição formal. Mas, informalmente, podemos dizer que um **conjunto** é uma coleção de objetos (chamados de **elementos**). Os elementos podem representar qualquer coisa (até mesmo outros conjuntos). Um conjunto possui como única propriedade os elementos que contém, portanto dois conjuntos que têm os mesmos elementos são **conjuntos iguais**. A relação básica entre um elemento e um conjunto é a relação de pertinência: quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que **x ∈ A** (leia “x **pertence** a A”), senão dizemos que **x** ∉ **A** (leia “x **não pertence** a A”).  
  
Nos conjuntos, a ordem e a quantidade de vezes que os elementos estão listados na coleção não é relevante. Em contraste, uma coleção de elementos na qual a multiplicidade, mas não a ordem, é relevante, é chamada **multiconjunto** [Knuth, Donald E. (1998). *The Art of Computer Programming – Vol. 2: Seminumerical Algorithms* Addison Wesley. p. 694]. Exemplos: conjunto {1,5,2,4,3}; multiconjunto {1,1,1,5,2,4,3,3}.  
  
É possível descrever o mesmo conjunto de três maneiras diferentes, por meio de uma:  
 - lista dos seus elementos (ideal para conjuntos pequenos e finitos);  
 - definição de uma propriedade de seus elementos;  
 - representação gráfica (recorde-se dos diagramas de Venn, nos livros do ensino médio).  
  
A notação padrão em Matemática lista os elementos separados por vírgulas e delimitados por chaves. Um conjunto A, por exemplo, poderia ser representado como: A = {1,2,3}  
Como a ordem não importa em conjuntos, isso é equivalente a escrever, por exemplo, A = {1,2,2,1,3,2}  
  
Um conjunto A também fica definido (ou determinado, ou caracterizado) quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário pertence ou não a A. Por exemplo, a frase "B é o conjunto dos triângulos retângulos" define perfeitamente o conjunto B, já que permite decidir se um objeto qualquer é ou não é um elemento de B. O mesmo conjunto A do parágrafo anterior poderia ser representado por uma regra:  
 A = {x | x é um número inteiro maior que 0 e menor que 4}  
ou ainda:  
 A = {x : x é um número natural tal que 1 ≤ x ≤ 3}

|  |  |
| --- | --- |
| Ficheiro:Venn A subset B.svg | Se A e B são conjuntos e todo o elemento x pertencente a A também pertence a B, então o conjunto A é dito um **subconjunto** do conjunto B, o que é denotado por A ⊆ B. Note que esta definição inclui o caso em que A e B possuem os mesmos elementos, ou seja, A = B. Se A ⊆ B e ao menos um elemento pertencente a B não pertence a A, então A é chamado de **subconjunto próprio** de B, o que é denotado por A ⊂ B. |

Todo conjunto é subconjunto dele mesmo (A ⊆ A), entretanto não se enquadra na definição de subconjunto próprio, portanto (A ⊄ A) e é chamado de **subconjunto impróprio**.   
  
Todo conjunto também possui como subconjunto o **conjunto vazio** [o conjunto que não tem nenhum elemento] representado por {} ou ∅ (a letra “phi”, leia “fi”). Como todos os conjuntos vazios são iguais uns aos outros, é permissível falar de um único conjunto sem elementos.  
  
Ao conjunto da totalidade de elementos que consideramos possíveis [para o assunto de que estivermos tratando] chamamos de **conjunto universo**, usualmente representado pelo símbolo U. Por exemplo, se estivermos tratando das siglas dos estados do Brasil, U = {AC, AL, AP, ..., TO}  
  
EXERCÍCIO: Você mesmo reveja seus livros, dê o nome exato, e defina formalmente as relações entre elemento e conjunto ∈ , ∉. E as relações entre dois conjuntos: ⊆, ⊄, ⊇, ⊃, ⊅, =, ≠ . Dê um exemplo para cada relação usando diagramas de Venn, outro usando a notação {}, outro definindo os conjuntos por suas propriedades.   
  
Se um conjunto A tem n elementos, onde n é um número natural (possivelmente 0), então diz-se que o conjunto é um conjunto finito com uma **cardinalidade** de n, [e denotamos isto como |A| = n, que você deve ler como “a cardinalidade de A é n”)] Mesmo se o conjunto não possui um número finito de elementos, pode-se definir a cardinalidade graças ao trabalho desenvolvido pelo matemático Georg Cantor. Mais sobre isso na seção 1.7 (Conjuntos Contáveis e Não Contáveis)  
  
O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado A é chamado de **conjunto potência** (ou **conjunto das partes**) de A, denotado por **P(A)**. O conjunto potência é uma álgebra booleana (ver Unidade II) sobre as operações de união e interseção. Sendo o conjunto dado A finito, com n elementos, prova-se que o número de subconjuntos (ou seja, o número de elementos do conjunto potência, ou seja, o conjunto das partes de A) é 2n, ou seja, a cardinalidade do conjunto das partes de A é igual a 2n. Exemplo: o conjunto A = {1,2} tem 4 subconjuntos, são eles: o próprio A , {1}, {2} e ∅. Veja que n = |A| = 2 e há 22 = 4 subconjuntos. Exercício: Entenda e explique porque P(∅) é {∅ } e não é ∅.  
  
O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B é o conjunto de **pares ordenados** (relembre isso, por você mesmo):  
 A x B = {(a,b): a ∈ A e b ∈ B }  
O produto cartesiano é não-comutativo: A x B ≠ B x A  
  
EXEMPLO 1: Sejam A = {0,2,5} e B = {2,3}. Temos: A x B = {(0,2),(0,3),(2,2),(2,3), (5,2),(5,3)} e B x A = (2,0),(3,0),(2,2),(3,2),(2,5),(3,5)}. Note que A x B ≠ B x A, pois (x,y) ≠ (y,x), para todo x e para todo y.  
  
EXEMPLO 2: Dados conjuntos A = { x | x é número par primo } e B = { x | x é divisor positivo de 6}, temos A x B = {(2,1),(2,2),(2,3),(2,6)} e B x A = {(1,2),(2,2),(3,2),(6,2)}. Note que A x B ≠ B x A  
  
EXEMPLO 3: Considere os conjuntos C = {1}, D ={1,2,3}, E = { 1, 3, 5, 7, ...} e F = {x | x é número primo }. Classifique as sentenças a seguir em verdadeira ou falsa.  
 a) C d) D E g) E = F   
 b) C e) F E h) C F   
 c) D f) C i) E C   
Resposta: f v f v f v f v v (respectivamente)

## 1.2. Operações com Conjuntos

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Operação** | **Operador** | **Definição** | **Exemplo** |  |
| União | \cup | A união (ou reunião) de dois conjuntos A e B é o conjunto A ∪ B composto dos elementos que pertencem ao menos a um dos conjuntos A ou B. A união de N conjuntos S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cdots \cup S_N = \cup_{i=1}^N S_i é o conjunto formado pelos os elementos que pertencem ao menos a um dos conjuntos S_i. A união entre dois conjuntos pode ser definida formalmente por A U B = {∀x|x∈A ou x∈B} | [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\220px-Venn0111.svg.png](http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Ficheiro:Venn0111.svg&page=1)  [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\magnify-clip.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Venn0111.svg)  A \cup B |  |
| Interseção | \cap | A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto A \cap B composto dos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos A e B. | [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\220px-Venn0001.svg.png](http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Ficheiro:Venn0001.svg&page=1)  [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\magnify-clip.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Venn0001.svg)  A \cap B |  |
| Diferença | \setminus ou - | A diferença A \setminus B (ou A-B) entre dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A e que não pertencem a B. | [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\220px-Venn0100.svg.png](http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Ficheiro:Venn0100.svg&page=1)  [D:\DadosMain\DadosNossos\HELIO\MatematicaElementar.EAD-Helio\1-CONJUNTOS.RELACOES.FUNCOES.N-NATURAIS\Conjunto – Wikipédia, a enciclopédia livre_files\magnify-clip.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Venn0100.svg)  A \setminus B |  |
| Dado um universo U, diz-se **complementar de** um conjunto **A, em relação a**o universo **U**, o conjunto (denotado por Ac) que contém todos os elementos presentes no universo e que não pertençam a A. Também define-se complementar para dois conjuntos, contanto que um deles seja subconjunto do outro. Nesse caso, diz-se, por exemplo, **complementar de B em relação a A** (sendo B um subconjunto de A) — é o complementar relativo — e usa-se o símbolo \complement. Leia \complementBA como “o conjunto complementar de B em relação a A, que é seu superconjunto”. Matematicamente:  \complementBA = A - B = {x ∈ A | x ∉ B} | | | | |

EXEMPLO 4: Seja A = {1,2,3,4}, B = {x | x é número natural primo menor que 6} e C = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Determine:  
 a) A B b) A   
 c) A – C d) B – A  
 e) C – A  
Respostas:   
 a) {1,2,3,4,5} b) {1,2,3,4}  
 c) ∅ d) {5}  
 e) {5,6,7,8,9}  
  
EXEMPLO 5: Dados os conjuntos A = {0,2,4}, B = {0,1,2,3,4,5} e C = {0,1,2,4,8}., determine:  
 a) \complementAB a’) B \ A  
 b) \complementCB b’) B \ C  
Respostas:   
 a) \complementAB = B – A = {1,3,5}; a’) B \ A = B – A = {1,3,5};  
 b) \complementCB = não definido, pois C [⊈](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=%E2%8A%88&action=edit&redlink=1) B; b’) B \ C = B – C = {3,5}

## 1.3. Relações

Uma **relação R do conjunto A para o conjunto B** (representada por R: A → B) é um qualquer subconjunto do produto cartesiano A × B. Ou seja, é o conjunto de pares ordenados cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. O conjunto A é chamado de **domínio** da relação, o conjunto B é chamado de **contradomínio** da relação.  
  
Relações podem ser **especificadas**/ **representadas:** por figuras dos dois conjuntos A, B, com setas indicando os pares ordenados; por listagem de todos os pares; ou por equação, inequação, ou qualquer forma matemática que possa representar a condição que os pares devem satisfazer. Por exemplo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://upload.wikimedia.org/wikibooks/pt/thumb/1/10/Relacoes_ABdobro.png/180px-Relacoes_ABdobro.png | R = {(1,2), (2,4), (3,6)} | A = {1,2,3} B = {1,2,3,4,5,6} R = {(x,y) ∈ A x B | y = 2x = dobro de x} |

Existe um tipo especial de relação que é chamado **função**: é a relação na qual, para todo elemento do domínio, há correspondência de um (e somente um) elemento no contradomínio. A função normalmente é simbolizada por f(x) (sendo x uma variável, ou seja, um valor que pode representar qualquer elemento do conjunto domínio). Como consequência natural da correspondência de todo e cada elemento do domínio para exatamente um elemento do contradomínio, a função é sempre uma relação definida por uma equação (pois uma inequação associa um elemento do domínio a vários elementos do contradomínio). Funções serão estudadas com maiores detalhes na próxima seção (1.4).  
  
**Relações de equivalência**: Seja R uma relação entre os conjuntos A e B, ou seja, R ⊆ A×B. Denotaremos que um elemento a de A se relaciona com o elemento b de B, segundo a relação R, por aRb. Se uma relação R definida com domínio A e contradomínio A cumpre as seguintes propriedades:   
 ∀a ∈ A: aRa (propriedade reflexiva),   
 ∀a,b ∈ A: aRb ⇔ bRa (propriedade simétrica), e   
 ∀a,b,c ∈ A: aRb e bRc ⇒ aRc (propriedade transitiva),   
ela é dita relação de equivalência.  
  
**Classes de equivalência**: Seja ā = {x ∈ A | xRa}. ā é denominada **classe de equivalência** de a. Alguns resultados importantes desta definição são (demonstrações nos livros-texto da disciplina):  
 Teorema: Se a ē ⇒ ā=ē.   
 Teorema: Se a∉ē, então ā∩ē=∅   
 Teorema: Se ā≠ē, então ā∩ē=∅   
  
Uma **partição** de um conjunto X é um conjunto P tal que   
 x ∈ P ⇒ x⊆X  
 x,y ∈ P ⇒ x∩y=∅   
 x ∈ X ⇒ ∃a ∈ P tal que x ∈ a.   
Alguns resultados importantes desta definição são (demonstrações nos livros-texto da disciplina):  
 Teorema: Seja R uma relação de equivalência em A, P={ā⊆A|a ∈ A} é uma partição de A.   
 Teorema: Seja P uma partição de A, a relação R dada por aRe ⇔ a ∈ ē é de equivalência.   
Disto sabemos que toda partição induz uma relação de equivalência e toda relação de equivalência induz uma partição.   
  
EXEMPLO 6: Seja E = {a,b,c}. A relação R = {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)} é uma relação de equivalência?   
Resposta: Sim, pois satisfaz as três propriedades definidas acima.  
  
EXEMPLO 7: A relação S = {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c)} é uma relação de equivalência?   
Resposta: Não, pois aRc mas ¬(cRa) (c não está relacionado com a )  
   
EXEMPLO 8: Seja a relação de equivalência R = {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)}. Determine as classes de equivalência ā, , .  
Resposta: ā = {a,b}; = {a,b}; = {c}  
  
EXEMPLO 9: Seja A = {1,2,3,4}. Determine uma partição desse conjunto.   
Resposta: P ={{1},{2,3},{4}} ou P ={{1,2},{3,4}}, entre outras.

## 1.4. Funções

Uma **função** é uma relação especial, assim definida: sejam dois conjuntos *A* e *B* (não vazios), tais que para *todo* elemento *x* pertencente a *A* (chamado de **domínio**), haja uma **correspondência** de *um e somente um* elemento *y* (chamado imagem) pertencente a *B* (chamado de **contradomínio** ). Essa correspondência é a função: a associação, definida de algum modo, entre todos os elementos de um conjunto e os elementos de outro conjunto. O subconjunto B’ de B compreendendo todos os elementos que são realmente imagens de elementos de A também é chamado de **imagem**.  
A função que associa um elemento *x* a outro valor pode ser indicada por *f(x)*. *x* é chamada de **variável independente** e *f(x)* (ou *y*) é chamada de **variável dependente**. Matematicamente a função é assim definida:  
 f: A → B: x → f(x),   
Um exemplo de função: dado o conjunto dos números naturais, uma função pode associar cada número ao seu quadrado. Assim, essa função assumiria os valores: {1,4,9,16,... }.  
  
Note duas características de função, na definição:   
- há **correspondência unívoca** entre um elemento e o valor associado a ele pela função: para cada valor assumido pela variável independente (*x*) há um único valor da variável dependente (*y*) associado pela função: Se *t = f(x)* e *w = f(x)*, então *t* = *w*.  
- a correspondência é total, ou seja, um valor assumido pela variável dependente estará associado para todo valor possível de ser assumido pela variável independente.  
  
A tabela a seguir mostra dois exemplos de relações que **não** são funções:

|  |  |
| --- | --- |
| Naofuncao1.png | Ficheiro:Naofuncao2.png |
| Nesse caso, um mesmo elemento (3) do domínio *X* aparece associado a dois elementos do contradomínio *Y* (c,d). | Aqui a correspondência não é total: falta um valor associado a 1. |

Duas funções f(x) e g(x) são ditas **iguais** (f = g) se e somente se para cada valor de x no domínio D, f(x) e g(x) assumam o mesmo valor:  
 ∀ x ∈ D: (f(x) = g(x)) ⇒ (g = f).  
  
• **Função Injetora** (f: A → B) é aquela na qual a diferentes elementos do domínio correspondem diferentes elementos no contradomínio . x1 ≠ x2 ⇒ f(x1) ≠ f(x2)  
• **Função Sobrejetora** (f: A → B) é aquela na qual o contradomínio é igual à imagem, ou seja, cada elemento do contradomínio é correspondido por ao menos um do domínio. Imagem(f) = B.  
• **Função Bijetora** (ou **um- a- um**) (f: A → B) é aquela que é tanto injetora como sobrejetora: (x1 ≠ x2 ⇒ f(x1) ≠ f(x2)) e (Imagem(f) = B)  
  
Uma função f(x) é chamada de **contínua** em um *ponto* quando, intuitivamente, a pequenas variações no valor de x correspondem pequenas variações no valor de f(x). Nos pontos onde a função não é contínua, diz-se que a função é **descontínua**, ou que aquele é um **ponto de descontinuidade**. Formalmente, em termos de limites [rever nos seus livros do ensino médio], uma função f(x) é chamada de contínua em um ponto a de seu domínio se, quando x tende para a quer pela esquerda quer pela direita, lim f(x) = f(a). Uma função f(x) é chamada de contínua em um *intervalo* contínuo se for contínua em todos seus pontos.  
   
Uma função é dita **crescente**, sobre um intervalo [A,B], se para cada valor de x + ε (ε sendo qualquer valor positivo), f(x) < f(x+ ε).  
  
**Composição de funções**: Sejam f: X → Y e g: Z → W duas funções. Se a imagem de f está contida no domínio de g podemos definir a **função composta**   
 g ° f: X → W  
como sendo  
 g ° f(x) = g(f(x)) ∀x ∈ X

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.matematicadidatica.com.br/images/funcaoSIB2.gif | EXEMPLO 10 (função sobrejetora e não injetora):  Analise o **diagrama de flechas** que está à esquerda. Relembre que o conjunto A é o domínio da função e o conjunto B é o seu contradomínio; o conjunto imagem é o conjunto formado por todos os elementos do contradomínio que estão associados a pelo menos um elemento do domínio. Classificamos como sobrejetora as funções que possuem o contradomínio igual ao conjunto imagem. Note que em uma função sobrejetora não existem elementos no contradomínio que não estão flechados por algum elemento do domínio. |

Resposta:  
Nesta função do exemplo temos:  
Domínio: D(f) = { -2, -1, 1, 3 }  
Contradomínio: CD(f) = { 12, 3, 27 }  
Conjunto Imagem: Im(f) = { 12, 3, 27 }  
Portanto, nesta função, contradomínio é igual ao conjunto imagem.  
Esta função é definida por:  
 http://www.matematicadidatica.com.br/MEx.ashx?ZjpBXHJpZ2h0YXJyb3cgQixccXVhZCBmKHgpXHF1YWQ9XHF1YWQzeF4y  
Substituindo a variável independente x, de 3x2, por qualquer elemento de A, iremos obter o elemento de B ao qual ele está associado, isto é, obteremos f(x).  
Do que será explicado a seguir, poderemos concluir que embora esta função seja sobrejetora, ela não é uma função injetora, pois ambos -1 e 1 têm 3 como imagem (eles têm a mesma imagem).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.matematicadidatica.com.br/images/funcaoSIB1.gif | EXEMPLO 11 (função injetora e não sobrejetora): Analise o diagrama de flechas que está à esquerda. |

Resposta:  
Podemos notar que nem todos os elementos de B estão associados a algum elemento de A, isto é, nesta função o conjunto imagem difere do contradomínio, portanto esta não é uma função sobrejetora.  
Além disso, podemos notar que esta função tem uma outra característica distinta da função anterior. Veja que não há nenhum elemento em B que está associado a mais de um elemento de A, ou seja, não há em B qualquer elemento com mais de uma flechada. Em outras palavras, não há mais de um elemento distinto de A com a mesma imagem em B.  
Nesta função temos:  
Domínio: D(f) = { 0, 1, 2 }  
Contradomínio: CD(f) = { 1, 2, 3, 5 }  
Conjunto Imagem: Im(f) = { 1, 3, 5 }  
Definimos esta função por:  
 http://www.matematicadidatica.com.br/MEx.ashx?ZjpBXHJpZ2h0YXJyb3cgQixccXVhZCBmKHgpXHF1YWQ9XHF1YWQyeFxxdWFkK1xxdWFkMQ==  
Veja que não há no D(f) qualquer elemento que substituindo x em 2x + 1, nos permita obter o elemento 2 do CD(f), isto é, o elemento 2 do CD(f) não é elemento da Im(f).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.matematicadidatica.com.br/images/funcaoSIB3.gif | EXEMPLO 12 (função bijetora): Analise o diagrama de flechas que está à esquerda. |

Resposta:  
Podemos ver que este é o diagrama de uma função sobrejetora, pois não há elementos em B que não foram flechados. Vemos, também, que esta é uma função injetora, já que todos os elementos de B recebem uma única flechada. Portanto, concluímos que a função é bijetora.  
Esta função tem:  
Domínio: D(f) = { -1, 0, 1, 2 }  
Contradomínio: CD(f) = { 4, 0, -4, -8 }  
Conjunto Imagem: Im(f) = { 4, 0, -4, -8 }  
Esta função é definida por:  
 http://www.matematicadidatica.com.br/MEx.ashx?ZjpBXHJpZ2h0YXJyb3cgQixccXVhZCBmKHgpXHF1YWQ9XHF1YWQtNHg=  
Ao substituirmos x em -4x, por cada um dos elementos de A, iremos encontrar os respectivos elementos de B, sem que sobrem elementos em CD(f) e sem que haja mais de um elemento do D(f) com a mesma Im(f).  
  
EXEMPLO 12: Dadas as funções f(x) = 2x + 3 e g(x) = 5x, determine g°f(x) e f°g(x).  
Resposta:  
g°f(x) = g[f(x)] = g(2x + 3) = 5(2x + 3) = 10x + 15  
f°g(x) = f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 3 = 10x + 3. Observe que f°g ***≠*** g°f .  
  
EXEMPLO 13: Dados três conjuntos A = {-2, -1, 0, 3}, B = {-3,-2,-1,2} e C = {9,4,1,4}. Entre eles existem as seguintes funções: f: AB definida por f(x) = x– 1 e g: BC definida por g(x) = x2. Para cada elemento de A existe um elemento em B tal que f(x) = x – 1 e para cada elemento de B existe um elemento de C tal que g(x) = x2. Assim, pode-se concluir que existe uma função h: AC definida por h(x) = g(f(x)), isto é, h(x) = x2 – 1.

## 1.5. Ordenação

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\saiba mais.png | Pela sua concisão, vamos usar, como esqueleto mestre e ordem de apresentação, partes de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Rela%C3%A7%C3%A3o_de_ordem>, que resume capítulo de Davey, B.A.; Priestley, H.A. *Introduction to Lattices and Order* 2nd. ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2002. Mas omitiremos algumas partes, inseriremos muitas outras, acrescentaremos exemplos, muitas vezes refrasearemos em nossas próprias palavras. As referências principais sempre são os livros-texto da disciplina, sempre busque melhor entendimento neles. |

Dado um conjunto A e uma relação binária R sobre A: R ⊆ A x A, dizemos que R é uma **relação de ordem parcial- ampla (ou não estrita)** sobre A se satisfaz as seguintes condições:  
• **Reflexividade**: ∀a ∈ A: aRa (ou seja, todo elemento está relacionado consigo mesmo);  
• **Anti-simetria**: ∀a,b ∈ A: (R(a,b) ∧ R(b,a) ⇒ a = b); e  
• **Transitividade**: ∀a,b,c ∈ A: aRb e bRc ⇒ aRc  
Quando uma relação R satisfaz as condições acima, R(x,y) é escrita como x ≤ y.   
  
EXERCÍCIOS: Para 2 dos conjuntos numéricos **N, Z, Q, R**, verifique que a operação usual ≤ satisfaz as condições acima. Idem para a operação ⊆ sobre conjuntos. Idem para a operação “|” (divide) definida na unidade VII (Teoria dos Números).  
  
Dado um conjunto A e uma relação binária R sobre A: R ⊆ A X A, dizemos que R é uma relação de **ordem parcial- estrita** sobre A se satisfaz transitividade e:  
• **Irreflexividade**: ∀a ∈ A: ¬R(a,a) (ou seja, nenhum elemento está relacionado consigo mesmo). Se uma relação satisfaz transitividade e irreflexividade, pode ser demonstrado que também satisfaz:  
• **Assimetria**: ∀a,b ∈ A: (R(a,b) ⇒ ¬R(b,a))  
(Se uma relação R satisfaz transitividade e assimetria, então também satisfaz irreflexividade).   
Quando uma relação R é uma relação de ordem parcial- estrita, R(x,y) é escrito como x < y.   
Um conjunto que possui uma relação de ordem é chamado de **conjunto parcialmente ordenado**. Exemplo: a relação “é antepassado de”  
  
Sendo R uma relação sobre A, a **totalidade** (ou **linearidade**) está dada por:  
• para ordens amplas: ∀ x,y ∈ A, (x ≤ y ∨ y ≤ x)   
• para ordens estritas: ∀ x,y ∈ A, (x ≠ y ⇒ x < y ∨ y < x)   
  
• Dada um relação R, dizemos que x,y ∈ A (onde x ≠ y) **são incomparáveis**, se e somente se ¬R(x,y) ∧ ¬R(y,x). Uma relação de ordem linear ou total não têm elementos incomparáveis.  
• As ordens dos conjuntos numéricos, **N, Z, Q, R** são **lineares**.   
• Dado um conjunto A com dois ou mais elementos, **P(A)**, o conjunto das partes de A não está linearmente ordenado por inclusão (⊆).  
• Uma relação de ordem estrita, quer seja parcial ou total, é denominada **densa** se entre dois elementos sempre existe um outro: ∀ x,y ∈ A (x < y ⇒ ∃ z ∃ S (x < z < y))  
• **Inversa (“>”) de uma relação de ordem estrita (“<”)**: Se uma relação R é uma ordem estrita, então a relação inversa de R:   
 R-1 = {(y,x): (x,y) ∈ R}  
também é uma relação de ordem estrita.   
• **Inversa (“≥”) de uma relação de ordem ampla (“≤”)** pode ser definida similarmente.  
• Dada uma relação de ordem ampla ≤ sobre um conjunto A, um elemento a ∈ A é denominado **elemento mínimo** ou **primeiro elemento** se e somente se:  
 ∀b∈A (a ≤ b).  
• De maneira simétrica, é denominado **elemento máximo ou último elemento** se e somente se:  
 ∀b∈A (a ≥ b).  
• O conjunto **N** tem mínimo, mas não tem máximo. Os conjuntos **Z, Q, R** não têm nem máximo, nem mínimo. O intervalo [0,1] = {x ∈ **R**: 0 ≤ x ≤ 1} tem mínimo 0 e máximo 1. Dado um conjunto A e considerando a ordem inclusão, ⊆, o conjunto **P(A)**, das partes de A, tem mínimo ∅ e máximo A. Se um conjunto tem mínimo, então tem um único mínimo. O mesmo vale para o máximo.  
•Dada uma relação de ordem estrita < sobre um conjunto A, um elemento a ∈ A é denominado **minimal** (ou **ínfimo**) quando não existe outro elemento que seja menor que ele:  
 ¬∃x ∈ A, x < a  
e é denominado **maximal** (ou **supremo**) quando não existe outro elemento que seja maior que ele. No reticulado abaixo, 2 , 3 e 5 são minimals, e 10 , 15 e 24 são maximals.  
  
\begin{figure}
\centering
\mbox{\epsfig{file=HasseDiagram-02.eps, height=5.5cm}}
\end{figure}  
  
• Um elemento a ∈ A é uma **cota inferior ou minorante** de um subconjunto B ⊆ A se e somente se:  
 ∀b ∈ B (a ≤ b)  
• Um elemento a ∈ A é uma **cota superior ou majorante** de um subconjunto B ⊆ A se e somente se:  
 ∀b ∈ B (a ≥ b)  
• Seja (A, ≤) um conjunto parcialmente ordenado. A é dito **completo** se para todo conjunto B⊆A, B≠∅, se B tem majorante, então tem supremo.  
• Uma relação de ordem estrita R sobre um conjunto A é denominada uma **boa ordem** se e somente se todo subconjunto não vazio de A tem primeiro elemento segundo R.   
• Um conjunto com uma relação de boa ordem é denominado **bem ordenado**. Por exemplo, **N** é bem ordenado pela relação natural “<” desse conjunto, mas **Z**, **Q** e **R** não são, segundo as suas ordens naturais. *Uma boa ordem é sempre uma ordem linear*.   
  
EXEMPLO 14: O intervalo fechado [0,1] = {x ∈ R | 0 [≤](http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_(mathematics)) x [≤](http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_(mathematics)) 1} possui um elemento mínimo 0 e um elemento máximo 1.  
  
EXEMPLO 15: O intervalo semi fechado [0,1) = [0,1[ = {x ∈ R | 0 [≤](http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_(mathematics)) x [<](http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_(mathematics)) 1} possui um elemento mínimo 0, todo x [≥](http://en.wikipedia.org/wiki/%E2%89%A5) 1 é majorante do conjunto e seu supremo nos reais é o 1 que não pertence ao conjunto e, portanto, esse conjunto não tem elemento máximo.  
  
EXEMPLO 16: {x ∈ Q | x2 <=2}. Esse conjunto possui um supremo real √2, e infinitas cotas superiores racionais. No entanto, não possui supremo nos números racionais. Portanto, o conjunto dos números racionais não é completo. Por outro lado, o conjunto dos números reais é completo.  
  
EXEMPLO 17: **P(A)**, para um conjunto qualquer A (onde |A| ≥ 2) considerando a ordem parcial ampla inclusão, ⊆: Esse conjunto tem elemento mínimo ∅ e elemento máximo A, segundo a ordem ⊆. Todo B ⊆ **P(A)** tem supremo e ínfimo em **P(A)**, segundo a ordem ⊆.

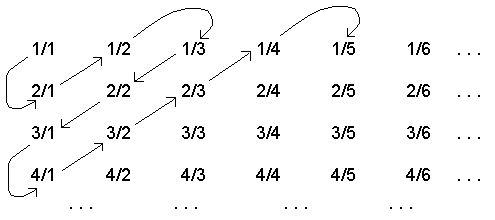
## 1.6. Números Naturais, Inteiros, Racionais, Reais

• **Naturais** **N** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...} (cardinalidade ℵ0) (leia ℵ como “aleph”, a primeira letra do alfabeto hebraico, cuja pronúncia é “álef”)  
• Naturais positivos **N+** = **N** – {0} (cardinalidade ℵ0)  
• **Inteiros** **Z** = {...–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ....} = {0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, ...} (cardinalidade ℵ0)  
• **Racionais** positivos **Q+** = {p/q tais que p,q ∈ **N+**} = {1/1, ½, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3, ¼, 2/4, 3/2, 4/1, ...} (cardinalidade ℵ0) (pela diagonalização de Georg Cantor}  
• Racionais negativos **Q-** = {-x: x ∈ **Q+**} (cardinalidade ℵ0)  
• Racionais: **Q = Z ∪ Q+ ∪ Q-** (cardinalidade ℵ0)  
• **Irracionais** **I** = {√8; –√6; 2,36521452 ...} (cardinalidade ℵ1)  
• **Reais**: **R** = Q ∪ I (cardinalidade: c (c. do contínuo) = 2ℵ0 = ℵ1)  
  
**Relações entre os conjuntos de números:**  
**N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R** ( **N** está contido em **Z**, que está contido em **Q** e que está contido em **R**)   
**I ⊂ R**  **I** está contido em **R**   
**Q** U **I = R** **Q** união com **I** corresponde a **R**   
**Q ∩ I** = Ø **Q** intersecção com **I** corresponde a vazio   
**I = R – Q** **I** corresponde a **R** subtraído de **Q**  
**N ∩ Z = Z+** inteiros positivos (inclui o 0)  
**Z – N = Z-** inteiros negativos (inclui o 0)  
**(N ∩ Q)** U **Z = Z**   
**(Q** U **I) ∩ N = N**   
**R ∩ N = N**   
**N** U **Z = Z**

## 1.7. Conjuntos Contáveis e Não-Contáveis

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\saiba mais.png | As referências principais sempre são os livros-texto da disciplina, sempre busque melhor entendimento neles. Se não puder, veja em outros bons livros na Internet ou, pelo menos, em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_cont%C3%A1vel>. |

Um **conjunto contável** é um conjunto de mesma cardinalidade (número de elementos) de um subconjunto qualquer de **N** (inclusive o próprio **N**). Um conjunto é dito **não-contável** quando ele não é contável. Se o conjunto for infinito (em números de termos), então, se for contável, também é chamado de **enumerável** (ou **infinito contável**), senão, de **não enumerável**.  
  
Formalmente, um conjunto S é **contável** se existe uma *função injetora*  
 f: S → **N**

Dois conjuntos R,S são **de mesmo tamanho** se existe uma *função bijetora*  
 f: S ↔ R   
  
**Teorema** (Georg Cantor): O conjunto **Q+** dos racionais positivos tem o mesmo tamanho (cardinalidade) do conjunto dos inteiros positivos [isto surpreendeu muitos].  
**Demonstração:** façamos uma tabela onde as colunas representam p (o numerador do racional), e as linhas representam q (o denominador). Note como todas as células em uma diagonal têm mesma soma p+q em cada célula. Agora, percorramos a tabela pelas suas diagonais em um padrão zig-zag, onde zig é a direção ↙ e zag a ↗  
  
Começamos caminhando assim ↙ , pela diagonal de soma p+q =2,   
 façamos 1/1 mapear no inteiro 1   
depois caminhemos assim ↗ , pela diagonal de soma p+q =3,  
 façamos 2/1 mapear no inteiro 2  
 façamos 1/2 mapear no inteiro 3  
depois caminhemos assim ↙ pela diagonal de soma p+q =4,  
 façamos 1/3 mapear no inteiro 4  
 façamos 2/2 mapear no inteiro 5  
 façamos 3/1 mapear no inteiro 6   
depois caminhemos assim ↗ pela diagonal de soma p+q =5  
...  
e assim por diante

**Teorema**: O produto cartesiano de uma quantidade ﬁnita de conjuntos contáveis é contável.  
  
**Teorema**: Todo subconjunto de um conjunto contável é contável. Em particular, todo subconjunto infinito de um conjunto infinito contável é infinito contável.  
EXEMPLO: O conjunto dos números primos é contável, mapeando o n-ésimo primo para n.  
  
**Teorema**: A união de um sistema finito de conjuntos contáveis é contável.  
  
**Teorema**: O conjunto de todas as sequências de tamanho finito dos números naturais é contável.  
  
**Teorema**: O conjunto de todos os subconjuntos finitos dos números naturais é contável.  
  
**Teorema [Básico]:** Seja S um conjunto. As seguintes declarações são equivalentes:

1) S é contável, ou seja, existe uma função injetora f: S → **N** 2) Ou S é vazio, ou existe uma função sobrejetora g: **N** → S  
 3) Ou S é finito ou existe uma bijeção h: **N** → S  
  
Muitas propriedades padrões são concluídas facilmente a partir deste teorema. Observe que **N** no teorema pode ser substituído por qualquer conjunto infinito contável. Em particular temos o seguinte corolário.  
  
**Corolário**: Sejam S e T conjuntos.  
 1) Se a função f: S → T é injetora e T é contável então S é contável.  
 2) Se a função g: S → T é sobrejetora e S é contável então T é contável.  
  
EXEMPLO 17: E = {2,4,6,...}, o conjunto dos números pares maiores que 0, tem cardinalidade menor que a dos naturais (ℵ0)? Prove.  
Resposta: |E| = ℵ0 , porque podemos mapear E para N pela função f(n) = 2n.  
  
EXEMPLO 18: Entre dois quaisquer naturais vizinhos existem infinitos racionais (por exemplo, se os dois naturais vizinhos forem 0 e 1, temos os infinitos racionais 1/2, 1/3, 1/4, ... ,2/3, 2/4, 2/5, ... 3/4, 3/5, 3/6, ..., 4/5, 4/6,4/7, ... (basta que o numerador seja menor que o denominador). Portanto, pode-se dizer que a cardinalidade dos racionais é maior que ℵ0, que é a dos naturais. Certo?  
Resposta: Não. Veja o teorema da diagonalização de Georg Cantor, acima.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\saiba mais.png | Uma das provas mais elegantes da Matemática é a que há infinitos reais entre 0 e 1. Também deve-se a Georg Cantor. Na Internet, onde a encontrei mais fácil de ser entendida foi em <http://www.seara.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos3.htm>. Não deixe de ver. |

## Problemas sobre toda a Unidade:

(sugeridos pelo Prof. *Rivanildo Garcia da Silva,* fico-lhe muito grato por isso)  
  
PROBLEMA 1) Represente os conjuntos a seguir na forma de extensão.  
 a) {x | x é mês do ano formado por 9 letras}  
 b) {x | x é múltiplo de 3 e de 6 maior ou igual a 12 e menor que 24 }  
 c) {x | x é planeta do sistema solar que começa com a letra P}  
  
PROBLEMA 2) Dados os conjuntos A= {0,1,2,3}, B = {1,2,3} e C= {2,3,4,5}, determine:  
 a) A – B  
 b) (A – C) (B – C)  
 c) C – Ø  
 d) Ø – A  
 e) C A (B C)  
  
PROBLEMA 3) Usando os símbolos , indique a relação entre os conjuntos numéricos a seguir:

a) **N N \*** b) **Q R** c) **Z– R** d) **N Z –**PROBLEMA 4) Observe os números: –4;0;0,888...; ; 4,86; Dentre esses números determine quais são:   
 a) Números naturais  
 b) Números inteiros  
 c) Números racionais  
 d) Números irracionais  
 e) Números reais  
  
PROBLEMA 5) Identifique os números abaixo como racionais ou irracionais:

a) √4

b) – 1

c) 2√3

d) 1/2

e) √4+√2

f) √(9 . 4)

g) (√2)/2  
  
PROBLEMA 6) Determine se a relação R sobre o conjunto A dado é de equivalência. a) A = {a; b; c; d} e R = {(a; a);(b; a);(b; b);(c; c);(d; d);(d; c)}  
 b) A = {1; 2; 3; 4} e R = {(1; 1);(1; 2);(2; 1);(2; 2);(3; 1);(3; 3);(1; 3);(4; 1);(4; 4)}  
PROBLEMA 7) Temos que R é uma relação de equivalência, e como todo inteiro podemos expressar na forma x = 5q + r onde 0 ≤ r < 5 existem cinco classes , , , , e . Determine quais são estas classes:  
  
PROBLEMA 8) Verifique se as funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:  
 c) f: **R** **R+** definida por f(x) = x²  
 d) f: **R** **R** definida por f(x) = x + 2   
 e) f:{0;1;2;3;4} **N** definida por f(x) = 2x  
  
PROBLEMA 9) Analise as afirmações abaixo classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas:  
 a) ( ) Se uma função é bijetora, então ela também é sobrejetora.  
 b) ( ) Toda função injetora é bijetora.  
 c) ( ) Uma função afim do tipo f(x) = ax + b, com a≠0, com domínio e contradomínio nos reais é bijetora.  
 d) ( ) Qualquer função quadrática é bijetora.  
 e) ( ) Se qualquer reta paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de uma função em um único ponto, então a função é injetora.  
 f) ( ) Se o contradomínio de uma função é igual ao conjunto imagem, então a função é sobrejetora.  
 g) ( ) Se uma função é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo, então a função é bijetora.  
 h) ( ) Se uma função é bijetora, então ela é injetora.  
  
PROBLEMA 10) Sabendo que f(g(x)) = 3x - 7 e f( x ) = x/3 - 2, então qual opção abaixo é verdadeira?  
a) g(x) = 9x - 15 b) g(x) = 9x + 15 c) g(x) = 15x - 9 d) g(x) = 15x + 9 e) g(x) = 9x – 5  
  
PROBLEMA 11) O domínio da função real f(g(x)), sabendo-se que f(x) = x1/2 e g(x) = (x2 + x)(x + 2)-1, é:  
a) D = {x ∊ R / x1/2 ≠ -2} b) D = {x ∊ R/ x ≥ 0 e x ≠ -2} c) D = {x ∊ R / -2 < x ≤ -1 ou x ≥ 0}  
d) D = {x ∊ R / -2 ≤ x ≤ -1 ou x ≥ 0 } e) D = {x ∊ R / -2 < x < -1 ou x ≥ 0}  
  
PROBLEMA 12) Considere as funções f(x) = 2x + 1 e g(x) = x2 - 1. Então as raízes da equação f(g(x)) = 0 são:  
a) inteiras b) negativas c) racionais d) inversas e) opostas  
   
PROBLEMA 13) Sejam f(x) = x2 + 1 e g(x) = x - 1 duas funções reais.  
Definimos a função composta de f e g como sendo g°f(x) = g(f(x)). Então g°f(y - 1) é igual a:  
a) y2 - 2y + 1 b) (y - 1)2 + 1 c) y2 + 2y - 2 d) y2 - 2y + 3 e) y2 – 1  
  
PROBLEMA 14) Identifique se as funções abaixo são contínuas nos intervalos mencionados e justifique sua resposta.  
 a) f(x) = 9x - 15 em (0,1)  
 b) g(x) = em [0,1]  
 c) em (–3,3)

## Recapitulando a unidade

Parabéns! Você concluiu a unidade I e, se foi disciplinado e realmente "suou" estudando 4 a 6 h cada semana, deve ter relembrado (ou aprendido) muitas coisas da parte básica da "Teoria dos Conjuntos" que lhe serão indispensáveis ou muito úteis em todo o resto do curso e sua vida profissional: axiomas e definições sobre conjuntos e relações entre conjuntos; operações com conjuntos; relações; funções; ordenação; conjuntos dos números naturais, e dos inteiros, e dos racionais, e dos reais; conjuntos contáveis e incontáveis. Para você treinar ainda melhor, recomendamos a Lista de Exercícios sobre Teoria dos Conjuntos, Prof. Loureiro, <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE5.pdf>, com soluções em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE5_Solucao.pdf>. E sobre Funções, <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE6.pdf>, com soluções em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE6_Solucao.pdf>. E sobre Relações, <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE8.pdf>, com soluções em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE8_Solucao.pdf>.  
  
Na próxima unidade, a II, você será introduzido à Lógica Matemática, a investigação formal da validade de argumentações dedutivas, que são conjuntos de enunciados dos quais um é a conclusão e os demais premissas. É um assunto fascinante e profundo, muito importante para sua profissão. Você vai gostar, mesmo que só dispomos de tempo de estudo e espaço no livro para uma introdução.

**UNIDADE II**

# 2. Introdução à LÓGICA MATEMÁTICA

**Lógica** é o estudo dos mecanismos de raciocínio (os que são válidos, e os que são falaciosos). **Lógica Matemática** é o estudo das inferências válidas dentro de uma linguagem *formal* (em oposição a linguagem informal). Uma *linguagem formal* é um conjunto de *símbolos* e um conjunto de *regras* para combiná-los.  
 **Nosso objetivo, nesta unidade,** é que, ao final dela, você domine as mais básicas noções e propriedades da parte mais fácil e básica da Lógica Matemática, que é a *Lógica Proposicional*, podendo verificar se suas fórmulas são sintaticamente bem formadas, sabendo corretamente derivar se fórmulas a partir de outras, decidir se fórmulas são semanticamente verdadeiras ou falsas, se são satisfatíveis ou não, se são tautologias ou não, se inferências são válidas ou não, etc. Só assim você será capaz de, ainda nesta atual disciplina, vencer duas futuras unidades (III e IV), sobre métodos de prova de teoremas; e, no futuro, será capaz de acompanhar a disciplina *Agentes Inteligentes* e, talvez, outras disciplinas complementares optativas.   
  
*Lembre: Estamos torcendo por você. O fórum de alunos, os tutores, e eu (o professor) queremos e vamos ajudá-lo (nessa ordem), mas você tem que ser determinado e disciplinado,* ***cada semana dedicando 4 a 8 horas para estudar este livro****, entender e reter os exemplos, resolver sozinho pelo menos 1/3 dos exercícios propostos, sumariar em sua mente os principais pontos desta unidade.*  
  
**Conteúdo desta unidade:**

*2.1. Motivação. Lógica. Porque só Veremos a Lógica Proposicional  
2.2. A Linguagem £ da Lógica Proposicional  
2.3. Regras de Inferência. Sistemas Formais. Sistema Natural de Inferência  
2.4. Sanidade, Completude, Consistência. Os Problemas da Satisfatibilidade e da Tautologia. Modelo e Teoria*

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\saiba mais.png | Se você quiser ver o assunto mais explicada e profundamente, não precisará de mais que os livros textos da ementa da disciplina. Outro bom livro é *Introdução à Lógica para a Ciência da Computação* (Abe, Scalzitti, Silva Filho).  Mas, para escrever esta unidade, além deles também usamos (mais como esqueleto mestre e plano geral e ordem de apresentação) partes do artigo *A First Look at Propositional Logic*, por Andreas Klappenecker, <http://faculty.cs.tamu.edu/klappi/cpsc289-f08/propositional_logic.pdf>. Alguns exemplos e problemas devem-se aos livros-texto, outros à Professora. Virgínia Maria Rodrigues, em <http://www.pucrs.br/famat/demat/facin/estrualg.htm>; outros, à Professora. Maria Helena Santos Marques <http://www.estig.ipbeja.pt/~mhsm/mat_dis_informacoes.htm>; outros, ao aluno <http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html>; e outras fontes que serão indicadas. |

## 2.1. Motivação. Lógica. Porque só Veremos a Lógica Proposicional

• **Lógica** é o estudo dos mecanismos de raciocínio (os que são válidos, e os que são falaciosos).   
• **Lógica Matemática** é o estudo das inferências válidas dentro de uma linguagem *formal* (em oposição a linguagem informal), onde uma *linguagem formal* é um conjunto de *símbolos* e um conjunto de *regras* para combiná-los. A Lógica Matemática pode ser dividida em lógicas clássicas e não clássicas.   
• **Lógicas Matemáticas Clássicas** são aquelas que compartilham das seguintes características básicas:

- *Lei do terceiro excluído* (cada proposição é verdadeira ou é falsa, não havendo nenhuma outra possibilidade entre ou além dessas duas) e *eliminação da dupla negação* (uma negação de uma negação equivale a uma afirmação);  
- *Lei da não contradição* (declarações contraditórias não podem ambas ser verdadeiras no mesmo sentido e ao mesmo tempo), e o *princípio da explosão* (se aceitássemos uma contradição como uma verdade, tudo poderia ser deduzido);  
- *Monotonicidade de vinculação* (uma proposição que teve um valor Verdade ou Falso a ela atribuído sempre o continuará a ter, e podemos livremente adicionar outras proposições como suposições suas companheiras, desde que não a contrariem) e *idempotência de vinculação* (de muitas maneiras deduzir um mesmo valor Verdade ou Falso para uma declaração não tem nenhum valor a mais que deduzi-lo uma só vez);  
- *Comutatividade da conjunção* (a proposição “A e B” é o mesmo que a proposição “B e A”);  
- *Dualidade de De Morgan*: cada conectivo lógico é dual de outro (detalhes mais adiante).

Há muitas razões para você estudar Lógica Matemática (clássica), pois ela é a indispensável base para todas as provas de teoremas da Matemática, para você provar que um programa é correto, para você conceber e projetar circuitos lógicos, e muitas e importantes outras coisas. O estudo da Lógica Matemática é tão importante e fascinante que poderia ser uma disciplina em si. Seja como for, no curso de Licenciatura em Computação ela já é cerca de um quarto de uma das disciplinas complementares optativas do curso, a disciplina *Agentes Inteligentes*. Pela nossa exiguidade de tempo de estudo e de espaço nesta disciplina e livro, só poderemos estudar a primeira e mais fácil parte da Lógica Matemática, isto é, a Lógica Proposicional, que não tem variáveis. Em Agentes Inteligentes você procederá para a Lógica de 1ª Ordem. Dominar a Lógica Proposicional agora será muito necessário para você fazer o resto desta disciplina, e do curso, e depois, para certos aspectos de sua vida profissional.  
  
• Uma **proposição** (ou **sentença**) é uma declaração que é verdadeira ou é falsa. Dois exemplos: João é honesto; o sol é quadrado.   
• **Lógica Proposicional** (ou **sentencial**) estuda como proposições verdadeiras podem ser combinadas por meio de conectivos para produzir outras afirmações verdadeiras. Um exemplo: Se supusermos que ambas as proposições ‘o cão é branco’ e ‘o cão é manso’ são verdadeiras, então podemos combiná-las na afirmação ‘o cão é branco *e* o cão é manso’ e podemos inferir que ela é verdadeira. No entanto, se constatarmos que a segunda afirmativa é falsa, então podemos concluir que a afirmativa combinada também é falsa. Lógica Proposicional nos permite *formalizar* tais declarações e raciocínios, com a vantagem colateral de que ficarão mais concisos [e frequentemente removerão a ambiguidade da linguagem natural e as fraquezas do raciocínio natural]: Podemos chamar de A a primeira proposição (‘o cão é branco’) e de B a segunda (‘o cão é manso’), então a declaração combinada “A e B” se expressa na Lógica Proposicional na forma A∧B, onde ∧ é um conectivo que formaliza a palavra 'e'.

## 2.2. A Linguagem £ da Lógica Proposicional

A Lógica Proposicional tem uma linguagem artificial que chamaremos de **£** (“£” é uma letra do alfabeto do latim antigo, usada como símbolo da unidade monetária romana, a libra. Os exigentes pronunciam “£” como “libra”, os não exigentes como nossa letra l “éle”). Como toda linguagem, £ tem um *sintaxe* e uma semântica. A *sintaxe* de uma linguagem preocupa-se com sua *forma*: o vocabulário inicial e as regras de formação de “expressões" bem- formadas a partir dele. A semântica está preocupada com o *significado* destas expressões bem- formadas.

### 2.2.1. A Sintaxe de £

• O **vocabulário** (inicial) de £ é constituído dos seguintes símbolos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **letras proposicionais** (ou **símbolos de proposições**) (em número infinito mas contável): | | a, a0, a1, ..., b, b0, b1, ... , z, z0, z1 ... |
| **conectivos lógicos**: | **¬** // ler “**não**”), **∧** // ler “**e**”) ,  **⊕** // ler “**ou- excludente**”),  **∨** // ler “**ou**”),  **→** // ler “**implica**”, ou “se”, ou “se- então”, ou “implicação material”, ou “condicional”), **↔** // ler “**se- e- somente- se**”, ou “equivale- a,” ou “implica- nos- dois- sentidos”, ou “equivalência material”, ou “bicondicional”)  Há quem acrescente outros conectivos: **nor** (**⊽**) é a negação do **∨**; **nand** (**⊼**) é a negação do **∧**;e outros; mas podemos viver sem eles, por isso vamos deixá-los de fora. Também poderíamos viver sem o ⊕, o → e o ↔, mas os conservamos pela sua conveniência. | |
| **sinais de pontuação**: | ( // ler “**abre- parênteses**” ) // ler “**fecha-parênteses**” | |

• Uma **fórmula** de £ é toda sequência finita contendo símbolos somente do seu vocabulário.

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 1: São fórmulas:   )p1  ∧p20↔))p10000000  (p1∧p2∨¬p67) | EXEMPLO 2: não são fórmulas:  #1 // porque não previmos #1 no vocabulário ∼p2 // porque ∼ não pertence ao vocabulário de £ q1&q2 // porque & não pertence ao vocabulário de £ |

• Uma **fórmula bem formada** (**fbf**) de £ é toda fórmula que satisfaz as seguintes condições:

*V,F são fbf’s  
Toda letra proposicional é uma fórmula que também é uma fbf, isto é, p1, p2, p3, p4,... são fbf’s.   
Se α for uma fbf, então ¬α será uma fbf.*

// α é uma metavariável, isto é, não pertence à linguagem £, é apenas um nome genérico, a ser instanciado para ser qualquer nome realmente pertencente a £.

*Se α e β forem fbf’s, então α∧β será uma fbf.  
Se α e β forem fbf’s, então α⊕β será uma fbf.  
Se α e β forem fbf’s, então α∨β será uma fbf.  
Se α e β forem fbf’s, então (α→β) será uma fbf.  
Se α e β forem fbf’s, então α↔β será uma fbf.  
Se α for uma fbf, então (α) será uma fbf.  
Nada mais é fbf.*   
  
Ambiguidades (quando as regras acima lhe deixarem em dúvida sobre que operação fazer primeiro, porque mais de uma delas pode ser aplicada) são resolvidas através da **ordem de precedência para os operadores** (que, de maior para menor, é ¬ ∧ ⊕ ∨ *→* *↔*) ou através de parênteses. Por exemplo,   
 ¬P∨Q∧R⇒S   
é equivalente a (¬P)∨(Q∧R))⇒S // primeiro fizemos todos os ¬ de 1º nível da fbf, depois todos os ∧, depois todos os ∨, finalmente todos os ⇒

EXEMPLO 3: São fbf’s:  
 p123 , (¬p1) (p1∨p2), (p2∨p1), (p5→p6), ((p1∨p2)↔(p3→p4))  
  
EXEMPLO 4: São fórmulas não bem- formadas:   
 p1(8 // falta um fecha parênteses, e 8 não é uma letra proposicional  
 ¬ p1 // o problema é o espaço em branco entre ¬ e p1  
 p1 ∧ p3 // o problema são os espaços em branco ao redor de ∧  
 (((¬p1)∨p1)→p3 // os abre-parênteses e fecha-parênteses não casam  
 (((¬p1)∨))→p3 // falta o 2º argumento do ∨  
  
Somente quando você chegar à disciplina Teoria da Computação estudará o formalismo chamado de Forma de Backus- Naur (em inglês, BNF, abreviação de Backus Naur Form), usado para especificar a parte livre- de- contexto das linguagens de programação. Mas como ele é muito intuitivo, veja em BNF a mesma definição de fbf que foi escrita pouco acima:

<fbf> ::= ¬<fbf>  
 | <fbf>∧<fbf>  
 | <fbf>⊕<fbf>  
 | <fbf>∨<fbf>  
 | <fbf>→<fbf>  
 | <fbf>↔<fbf>  
 | (<fbf>)  
 | <SímboloDeProposição> | V | F   
 <SímboloDeProposição> é qualquer outro símbolo terminal: qualquer letra minúscula, possivelmente com subscrito que seja um inteiro sem sinal. Isto é, um elemento do conjunto S = {a, a0, a1, ..., b, b0, b1, ..., z, z0, z1,...}.   
// A precedência de operadores ¬ ∧ ⊕ ∨ *→* *↔* será usada na escolha das regras BNF que puderem ser aplicadas a um mesmo estágio da avaliação da árvore sintática (ou de derivação ou de parsing). A associatividade, para cada conectivo binário, é escolhida ser da esquerda para a direita. Na disciplina Teoria da Computação (e na complementar optativa Introdução aos Compiladores) você verá os conceitos de árvore de derivação e entenderá melhor isto, bem como a detecção automatizada se uma fórmula é bem formada ou não.

É preferível uma BNF que seja inambígua sem recorrer a definições extra gramática da precedência e associatividade (esquerda para direita) de operadores:

<FBF> ::= <ExprSe> | <FBF>↔<ExprImplica>  
<ExprImplica> ::= <ExprOu> | <ExprImplica>→<ExprOu>  
<ExprOu> ::= <ExprXor> | <ExprOu>∨<ExprXor>  
<ExprXor> ::= <ExprE> | <ExprXor>⊕<ExprE>  
<ExprE> ::= <FormAtomica> | <ExprE>∧<FormAtomica>  
<FormAtomica> ::= V | F | < SímboloDeProposição > | ¬<FormAtomica> | (<FBF>)   
< SímboloDeProposição > ::= qualquer outro símbolo terminal: qualquer letra minúscula, possivelmente com subscrito que seja um inteiro sem sinal. Isto é, um elemento do conjunto S = {a, a0, a1, ..., b, b0, b1, ..., z, z0, z1,...}

EXEMPLO 5 (PUCRS, Virgínia Maria Rodrigues, em <http://www.pucrs.br/famat/demat/facin/estrualg.htm> ): Sejam as proposições: p: Gosto de viajar e q: Visitei o Chile. Escreva as sentenças verbais que estão representadas pelas proposições abaixo:  
(a) p↔q (b) ¬q→¬p (c) (p∧¬q)→¬p (d) q∧¬p  
(e) ¬ (p∧q) (f) q→p (g) ¬p∨¬q (h) (p∨¬q)∧(¬p→q)  
RESPOSTA:  
(a) Gosto de viajar se e somente visitei o Chile.  
(b) Se não visitei o Chile, então não gosto de viajar.  
(c) Se gosto de viajar e não visitei o Chile, então não gosto de viajar.  
(d) Visitei o Chile e não gosto de viajar.  
(e) Não é verdade que: gosto de viajar e visitei o Chile.  
(f) Se visitei o Chile, então gosto de viajar.  
(g) Não gosto de viajar ou não visitei o Chile.  
(h) Se gosto e viajar ou não visitei o Chile, e, se não gosto de viajar, então visitei o Chile.  
  
EXEMPLO 6 (PUCRS, Prof. Virgínia Maria Rodrigues): Descreva as sentenças abaixo em termos de proposições simples e operadores lógicos. Por exemplo, se a sentença for *“Se 1>2 então qualquer coisa é possível*”, faça o símbolo p valer por “*1>2*” e o símbolo q valer por “*qualquer coisa é possível*”, então a *frase* (a resposta) será: *p→q*.  
(a) *Se elefantes podem subir em árvores, então 3 é um número irracional.*(b) *É proibido fumar cigarro ou charuto.*(c) *Não é verdade que Π>0 se e somente se Π>1.* // Pela ordem de prioridades dos conectivos, isso deve ser pensado como *“(Não é verdade que Π>0) se e somente se Π>1”*, não como *“Não é verdade que (Π>0 se e somente se Π>1)”*.(d) *Se as laranjas são amarelas, então os morangos são vermelhos.*(e) *É falso que se Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil.*(f) *Se é falso que Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa (2010) será realizada no Brasil.*RESPOSTA:  
(a) *p: elefantes podem subir em árvores  
 q: 3 é um número irracional* frase: *p→q*(b) *p: fumar cigarro  
 q: fumar charuto* frase: *¬(p∨q)*(c) *p: Π>0  
 q: Π>1* frase: *¬p↔q*(d) *p: as laranjas são amarelas  
 q: os morangos são vermelhos* frase: *p→q*(e) *p: Montreal é a capital do Canadá  
 q: a próxima copa será realizada no Brasil* frase: *¬(p→q)*(f) *p: Montreal é a capital do Canadá  
 q: a próxima copa será realizada no Brasil* frase: *¬p→q*

### 2.2.2. A Semântica de £

• A semântica da Lógica Proposicional depende de uma **interpretação** (ou **valoração**) **I**, que é uma função que atribui a cada letra proposicional um dos dois valores de verdade: o Verdadeiro (V) ou o Falso (F).   
• Os **conectivos** (seus nomes e símbolos) básicos da Lógica Proposicional são dados na 1ª linha da seguinte tabela: **não** (**¬**), **e** (**∧**), **xor** (**⊕**), **ou** (**∨**), **implica** (**→**), **ssse** (**↔**). Depois explicaremos seus significados. Por enquanto, procure memorizar seus símbolos e nomes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Conectivo:** | | | | | |
|  |  | **não ¬** | **e ∧** | **xor ⊕** | **ou ∨** | **implica →** | **ssse ↔** |
| **a** | **b** | **¬b** | **a ∧ b** | **a ⊕ b** | **a ∨ b** | **a → b** | **↔** |
| F | F | V | F | F | F | V | V |
| F | V | F | F | V | V | V | F |
| V | F | V | F | V | V | F | F |
| V | V | F | V | F | V | V | V |

• Letras proposicionais são chamadas de **fórmulas atômicas** (atômicas no sentido de indecomponíveis em partes menores). As fbf’s constituídas pela combinação de fórmulas atômicas com elementos de {¬, ∧, ⊕, ∨, , →, ↔, (, )} são chamadas de **fórmulas moleculares** (molecular no sentido de decomponível em partes menores). Por exemplo, (¬p1∨(p2∧(p3→p4)))↔p5 é uma fbf e fórmula molecular.   
  
O valor semântico (isto é, o valor de verdade) de uma fórmula molecular depende do valor semântico (valor de verdade) das fórmulas atômicas e do significado semântico dos conectivos lógicos que as combinam, que está bem definido na tabela acima, mas você tem que tomar alguns 5 minutos para entender e memorizar como *cada* conectivo funciona. Faça isto AGORA. Pronto? Não tente enganar e roubar a si mesmo, pulando esta etapa, senão você se prejudicará muitíssimo, vai ter dificuldades em toda esta unidade e durante toda sua vida. Novamente, tome 5 minutos para entender e memorizar como *cada* conectivo funciona, isto é, o valor V ou F que ele atribui a duas proposições x,y que interconecte, quando os de x e y são F F, F V, V F, e V V. Agora, tome mais 5 minutos e rascunhe em papel uma curto resumo de como você entendeu que cada conectivo funciona. Por exemplo, comece com algo assim “x⊕y é V ssse x e y tiverem valores verdade opostos”. Vamos, rascunhe seu entendimento de todos os conectivos. 5 minutos. Pronto? Agora, novamente confira suas definições contra a tabela acima. Tem certeza de que entendeu e descreveu tudo corretamente? Finalmente, confira suas definições contra as nossas definições, abaixo, do significado semântico de cada conectivo lógico.   
  
Nossa definição (em prosa, mas equivalente à tabela) do significado semântico de cada conectivo lógico:

• “**Não**”: Se α for uma fbf, então (¬α) será V somente quando α for falso, e (¬α) será F somente quando α for V. Ou seja, a negação “troca” o valor de verdade.  
• “**E**”: Se α e β forem fbf’s, então (α∧β) será V somente quando ambos α e β forem V, e (α∧β) será F somente quando ou α ou β (ou ambos) for(em) F.  
• “**Ou- excludente**”: Se α e β forem fbf’s, então (α⊕β) será V quando α e β tiverem valores verdade diferentes, e será F quando tiverem um mesmo valor verdade.  
• “**Ou**”: Se α e β forem fbf’s, então (α∨β) será V somente quando α ou β (ou ambos) for(em) V, e (α∨β) será F somente quando ambos α e β forem F.  
• “**Implica**”: Se α e β forem fbf’s, então (α→β) será V somente quando α for F ou quando β for V, e (α→β) será F somente quando α for V e β for F.  
• “**Se e somente se**”: Se α e β forem fbf’s, então (α↔β) será V somente quando α e β tiverem o mesmo valor de verdade, e (α↔β) será F, em caso contrário.

EXEMPLO 7 (PUCRS, Prof. Virgínia Maria Rodrigues): Determine o valor lógico das proposições enunciadas no exercício anterior (número 6). Justifique (por exemplo: *Se 1>2 então qualquer coisa é possível*. Verdadeira, pois é falso que 1>2):  
RESPOSTA:  
(a) Verdadeira, pois *p* é falsa uma vez que elefantes não podem subir em árvores.  
(b) Assumindo-se que esta proibição esteja sendo feita em algum lugar, teremos uma proposição verdadeira, pois será proibido fumar cigarro (*p* será verdadeira) e será proibido fumar charuto (*q* será verdadeira).  
(c) Falsa, pois *¬p* é falsa e *q* é verdadeira.  
(d) Verdadeira, pois *p* é falsa.  
(e) Falsa, pois a proposição *p*→*q* é verdadeira visto que *p* é falsa.  
(f) Falsa, pois Montreal não é a capital do Canadá e a próxima copa (2010) não será realizada no Brasil, ou seja, *¬p* é verdadeira e *q* é falsa.  
  
EXEMPLO 8 (PUCRS, Prof. Virgínia Maria Rodrigues): Considerando p e q proposições verdadeiras, e r e s proposições falsas, determine o valor lógico das proposições abaixo:  
(a) ((¬r∧¬s)∨(p→q))↔(r∨¬q)  
(b) ((p∧q)∨(p∧¬q)∨(¬p∧q)∨(¬(p∧¬q)))→(r∨s)  
RESPOSTA (Achamos que já dá para você entender, mas, se quiser, veja a definição de ⇔ um pouco abaixo. Se preferir, faça a tabela verdade, mas dará mais trabalho):  
(a) ((¬F∧¬F)∨(V→V))↔(F∨¬V) ⇔ ((V∧V)∨(V→V))↔(F∨F) ⇔ (V∨V)↔(F) F  
(b) ((V∧V)∨(V∧¬V)∨(¬V∧V)∨(¬(V∧¬V)))→(F∨F) ⇔ ((V)∨(V∧F)∨(F∧V)∨(¬(V∧F)))→(F) (V∨(F)∨(F)∨(¬(F)))→F ⇔ (V∨F∨F∨(¬F))→F ⇔ (V∨F∨F∨(V))→F ⇔ (V∨F∨F∨V)→F ⇔ ... ⇔ V→F ⇔ F  
**Propriedades:** Todas as propriedades seguintes facilmente se demonstram, em **£,** recorrendo à tabela de verdade, acima.

• **Propriedades da conjunção (∧) e da disjunção (∨):**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Propriedades** | **Conjunção (∧)** | **Disjunção (∨)** |
| Comutativa | p∧q = q∧p | p∨q = q∨p |
| Associativa | (p∧q)∧r = p∧(q∧r) | (p∨q)∨r = p∨(q∨r) |
| Existência de elemento neutro | V∧p = p∧V = p | F∨p = p∨F = p |
| Existência de elemento absorvente | F∧p = p∧F = F | V∨p = p∨V = V |
| Idempotência | p∧p = p | p∨p = p |

• **Propriedades de combinação da conjunção e da disjunção**

A conjunção é distributiva em relação à disjunção:  
 p∧(q∨r) = (p∧q)∨(p∧r)  
 (q∨r)∧p = (q∧p)∨(r∧p)  
 A disjunção (∨) é distributiva em relação à conjunção (∧):  
 p∨(q∧r) = (p∨q)∧(p∨r)  
 (q∧r)∨p = (q∨p)∧(r∨p)  
• **Propriedades da negação**  
 Dupla negação  
 ¬¬p = p  
 Leis de De Morgan  
 ¬(p∧q) = ¬p∨¬q  
 ¬(p∨q) = ¬p∧¬q  
• **Propriedades da implicação** (ou se, ou implicação material, ou condicional)  
 Relação da implicação com a disjunção  
 p→q = ¬p∨q  
 Esta mesma propriedade permite exprimir uma disjunção numa implicação  
 p∨q = ¬p→q  
 Negação da implicação  
 ¬(p→q) = p∧¬q  
 Lei da conversão  
 p→q = ¬q→¬p  
 Transitividade  
 (p→q∧q→r)→(p→r)   
• **Propriedades do se- e- somente- se** (ou equivalência material, ou bicondicional)  
 A equivalência como conjunção de implicações  
 p↔q = (p→q)∧(q→p)  
 Negação da equivalência  
 ¬(p↔q) = (p∧¬q)∨(q∧¬p) = p∨q

## 2.3. Regras de Inferência sobre £. Sistemas Formais. Sistema Natural de Inferência

• Seja f1 uma fbf. Se existe pelo menos uma atribuição de valores V,F a seus símbolos de proposição de tal forma que f1 resulte no valor V {\*}, então f1 é dita ser **satisfatível**. Se todas as valorações resultam em f1 valer F {\*}, f1 é dita ser **insatisfatível** (ou **não satisfatível, ou contraditória**). Se todas {\*} as valorações resultam em f1 valer V, f1 é dita ser uma **tautologia**. Se existe pelo menos alguma valoração que resulte em f1 valer V {\*}, e existe pelo menos outra valoração que resulte em f1 valer F {\*} então f1 é dita ser **contingente**. A fbf f1 é tautologia ssse f1 não é contraditória. {\* isto pode ser visto em uma tabela verdade, embora seja pesado construí-la.}  
  
EXEMPLO 9: Faça duas tabela verdade e verifique que p∨¬p é uma tautologia e p∧¬p é uma contradição:  
RESPOSTA: Basta notar que a coluna p∨¬p só tem V e a coluna p∧¬p só tem F:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p | ¬p | p∨¬p | p∧¬p |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| EXEMPLO 10: Verifique que ((a→b)↔(¬a∨b)) é uma tautologia.  RESPOSTA: Há 2 símbolos proposicionais, portanto 22 = 4 casos. Na tabela verdade, a coluna da fbf só tem V. | a | b | (a→b) | (¬a∨b) | ((a→b)↔(¬a∨b)) |
| F | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| V | V | V | V | V |

EXEMPLO 11: ((a⊕b)→¬(a∨b)) é satisfatível?   
RESPOSTA: Sim. Se escolhermos uma valoração (ou interpretação) v tal que a = F e b = F, então a⊕b = F, daí, como F implica qualquer coisa, ((a⊕b)→¬(a∨b)) = V.  
  
EXEMPLO 12: A proposição (a∧¬a) é insatisfatível?   
RESPOSTA: Sim. Se escolhermos uma valoração v tal que a = V, então ¬a = F, então (a∧¬a) = F. A única outra interpretação possível é a = F, o que também implica (a∧¬a) = F, Portanto, a proposição (a∧¬a) é insatisfatível.  
  
• Dadas duas fbf’s (em oposição a proposições) f1, f2, então f1⇒f2 (ler “a fbf f1 **logicamente** **implica** a fbf f2“) se e somente se f1→f2 é uma tautologia;  
• Dadas duas fbf’s (em oposição a proposições) f1, f2, então f1⇔f2 (ler “a fbf f1 **logicamente** **equivale** a fbf f2“) se e somente se f1↔f2 é uma tautologia.  
  
EXEMPLO 13: p∧(p→q) logicamente implica p∧q? Isto é, podemos escrever p∧(p→q) ⇒ p∧q ?  
RESPOSTA: Sim, pois p∧(p→q)→(p∧q) é uma tautologia:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p→q | p∧(p→q) | (p∧q) | p∧(p→q)→(p∧q) |
| F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | F | V |
| V | V | V | V | V | V |

EXEMPLO 14: p∧(p→q) logicamente equivale a p∧q? Isto é, podemos escrever p∧(p→q) ⇔ p∧q ?  
RESPOSTA: Sim, pois p∧(p→q)↔(p∧q) é uma tautologia:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p→q | p∧(p→q) | (p∧q) | p∧(p→q)↔(p∧q) |
| F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | F | V |
| V | V | V | V | V | V |

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\SONY\Dropbox\computacao-producao\Material livro LCC\iconografia\Clipart-para-o-office\importante.png | Note: Sejam f1 e f2 fbf's. Então f1⇒f2, bem como f1⇔f2, não são fbf's (pois os símbolos ⇒ e ⇔ sequer pertencem ao conjunto dos conectivos de £). De fato, f1⇒f2, bem como f1⇔f2, podem ser consideradas como proposições (tais como "João é alto"), mas isso não é muito útil. Mais útil é, bastante é pensar de ⇒ como "a fbf ... implica logicamente à fbf ..." e de ⇔ como "a fbf ... é logicamente equivalente à fbf ...". |

Sejam f1, f2, ..., fn fbf’s envolvendo m símbolos proposicionais. Para mostrar que uma certa combinação dessas fbf’s (através de conectivos lógicos) logicamente implica uma outra fbf, g, era preciso fazermos uma tabela verdade, o que somente era manejável se o número de símbolos proposicionais, m, fosse na ordem de 2 ou 3, talvez 4. Isto motivou a busca pelo desenvolvimento de aparatos que permitissem o raciocínio ser feito a nível puramente sintático, sem necessidade de nenhuma interpretação (atribuição de V,F aos símbolos proposicionais) ter que ser considerada. Estes aparatos foram chamados de *sistema de dedução (formal)*, de *teoria de prova*, de *sistema de inferência*, ou de *cálculo lógico*. Tais sistemas podem ser classificados em sistemas de dedução e sistemas de refutação. Aqui somente falaremos (e muito pouco) sobre os primeiros.  
  
Um **sistema de dedução** (ou **sistema de regras de inferência**, ou **sistema de inferências**) nos permite, através apenas de operações *sintáticas*, tirar conclusões a partir de um conjunto de fbf’s. Através de manipulações meramente sintáticas, a partir das fbf’s originais vamos gerando outras que lhe são consequências lógicas, até que cheguemos à fbf desejada, todo o processo sendo mecânico e podendo ser automatizado. Um sistema de dedução compreende um conjunto finito de **regras de inferência** (que são tautologias) e um conjunto de fbf’s chamado de **axiomas lógicos**. (Acima da Lógica Proposicional, como você verá em disciplinas taid como Teoria da Computação e como Lógica, este último conjunto é frequentemente infinito, mas isto é contornado através do uso de *templates* (que são *esquemas axiomáticos* que fornecem uma fbf que serve de modelo ou padrão para infinitas fbf’s.)).  
  
• Há vários sistemas de dedução possíveis para a Lógica Proposicional, mas o mais usado é este que se segue, conhecido como **Sistema Natural de Regras de Inferência** (deve nome e popularidade ao fato de refletir o raciocínio naturalmente usado nas demonstrações informais em Matemática ou em qualquer outro argumento lógico informal)**:**  
*Axiomas*: p∨¬p, p→p  
*conjunção*: p, q ⇒ p∧q Intro∧  
 p∧q ⇒ p, q Elim∧  
*disjunção*: p ⇒ p∨q ou q ⇒ p∨q Intro∨  
 p∨q, ¬p ⇒ q ou p∨q,¬q ⇒ p Elim∨ com 2 argumentos  
 p∨q,p→r,q→r ⇒ r Elim∨ com 3 argumentos *implicação*: q ⇒ p→q Intro→  
 p→q, p ⇒ q Elim→ *(modus ponens)*   
*equivalência*: p→q, q→p ⇒ p↔q Intro↔  
 p↔q ⇒ p→q, q→p Elim↔  
Outras regras e teoremas, úteis, derivadas do sistema acima (tente prová-los, será um bom exercício):   
*introdução de negação*: p ⇒ ¬¬p Intro¬ com 1 argumento  
 p→q, ¬q ⇒ ¬p Intro¬ com 3 argumentos  
*eliminação de negação*: ¬¬p ⇒ p Elim¬  
*negação de disjunção*: ¬(p∨q) ⇒ ¬p∧¬q Neg∨  
*negação de conjunção*: ¬(p∧q) ⇒ ¬p∨¬q Neg∧  
*negação de implicação*: ¬(p→q) ⇒ p∧¬q Neg→  
*transitividade de implicação*: p→q, q→r ⇒ p→r Trnstv→  
*transposição*: p→q ⇒ ¬q→¬p Trnspsç  
*modus tollens*/*contrapositivo* p→q, ¬q ⇒ ¬p ContraP  
  
• Um outro [o segundo] sistema de regras de inferência pode ser:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Regras de Inferência | Tautologia | Nome |
| *p.*  ∴*p*∨*q* | *p*→(*p*∨*q*) | Adição ou Introdução (como disjunção) |
| *p*∧*q*  ∴*p* | (*p*∧*q*)→*p* | Simplificação ou Eliminação (em disjunção) |
| *p*  *q.*  ∴*p*∧*q* | ((*p*)∧(*q*))→(*p*∧*q*) | Conjunção |
| *p*  *p*→*q*  ∴*q* | [*p*∧(*p*→*q*)]→*q* | Modus ponens |
| ¬*q*  *p*→*q*  ∴¬*p* | [¬*q*∧(*p*→*q*)]→¬*p* | Modus tollens |
| *p*→*q*  *q*→*r*  ∴*p*→*r* | [(*p*→*q*)∧(*q*→*r*)]→(*p*→*r*) | Silogismo hipotético |
| *p*∨*q*  ¬*p.*  ∴*q* | [(*p*∨*q*)∧¬*p*]→*q* | Silogismo disjuntivo |
| *p*∨*q*  ¬*p*∨*r*  ∴*q*∨*r* | [(*p*∨*q*)∧(¬*p*∨*r*)]→(*q*∨*r*) | Resolução |

• **Teorema da substituição**

Sejam *f*, *g* e *h* fórmulas proposicionais tais que . Então

1. 
2. 
3. 
4. 
5. Sendo ainda , então 

• Um **Sistema Formal,** em Matemática, consiste de:

- Um conjunto finito de **símbolos** (ou seja, o **alfabeto**), que é usado para a construção de **fórmulas** (i.e. strings finitas de símbolos);  
- Uma **gramática**, que especifica como **fórmulas bem formadas** (fbf’s) são construídas a partir dos símbolos do alfabeto. Um procedimento de decisão determina se uma fórmula é bem formada ou não;  
- Um conjunto de **axiomas** (fbf’s iniciais assumidas válidas e usadas para todos os problemas),   
- Um conjunto de **regras de inferência** (como as 9 regras acima).

(os próximos 6 exemplos foram tirados de <http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html> )

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 15: deduza, pelo sistema de dedução natural, que de p e de p→q podemos logicamente concluir p∧q. Isto é:   p,p→q ⇒ p∧q | (vamos numerar as linhas da dedução):  1 p // premissa 2 p→q // premissa 3 q // Elim→ 2,1 4 p∧q // Intr∧ 1,3 |

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 16: deduza  p∧q→r,q→p,q ⇒ r | Dedução: 1 p∧q→r // premissa 2 q→p // premissa 3 q // premissa 4 p // Elim→ 2,3 5 p∧q // Intro∧ 4,3 6 r // Elim→ 1,5 |

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 17 (começando a fazer suposições): deduza  p→q,q→r ⇒ p→q∧r | 1 p→q // premissa 2 q→r // premissa 3 p // hipótese, para provar a implicação na conclusão final 4 q // Elim→ 1,3 5 r // Elim→ 2,4 6 q∧r // Intro∧ 4,5 7 p→q∧r // Intro→ 3,6 (hipótese absorvida) Note que a hipótese foi absorvida, pois não estamos afirmando que p é V, mas somente que, se o for, então q∧r o são. |

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 18 (usando reiteração, dizer novamente, copiar): deduza  p ⇒ q→r | 1 p // premissa 2 q // hipótese, para provar a implicação na conclusão final 3 p // reiteração, repetição 1 4 q→r // Intro→ 2,3 (hipótese absorvida) |

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 19 (redução ao absurdo): deduza  p→q,¬q ⇒ ¬p | 1 p→q // premissa 2 ¬q // premissa 3 p // hipótese, a disprovar por redução ao absurdo 4 q // Elim→ 1,3 5 ¬q // Reiter 2 6 ¬p //Intro¬ 3,4,5 |

|  |  |
| --- | --- |
| EXEMPLO 20 (com sub-sub-demonstração): deduza  p→(q→r) ⇒ q→(p→r) | 1 p→(q→r) // premissa 2 q // hipótese 1 3 p // hipótese 2 4 q→r // Elim→ 1,3 5 r // Elim→ 4,2 6 p→r // Intro→ 3,5 (hipótese 2 absorvida) 7 q→(p→r) // intro→ 2,6 (hipótese 1 absorvida) |

• Um sistema formal é chamado de **recursivo** (no sentido de que é eficaz, funciona), se o conjunto de axiomas e o de regras de inferência são conjuntos decidíveis (ou, em outros contextos, semidecidíveis). Um conjunto é **decidível** se existe um algoritmo que termina após uma quantidade finita de tempo e decide corretamente se um elemento pertence ou não ao conjunto.  
  
• Um **sistema lógico** (ou, simplesmente, uma lógica) é um sistema formal juntamente com uma semântica (geralmente sob a forma de interpretação modelo-teoria) que atribui valores de verdade (V,F) às sentenças da linguagem formal que não contenham variáveis livres. A lógica é **sadia** (sound), se todas as fbf’s que podem ser derivadas são verdadeiras na interpretação. É **completa** se todas as sentenças verdadeiras podem ser derivadas. É **consistente** se, sempre que uma fbf α é um teorema, ~α não é um teorema.

## 2.4. Sanidade, Completude, Consistência. Os Problemas da Satisfatibilidade e da Tautologia (são Decidíveis, mas NP-Completos). Modelo e Teoria

(pela exiguidade de tempo e de espaço, nesta seção não apresentaremos demonstrações, nem exemplos. Nos exercícios de avaliação, se colocarmos questões sobre a seção, no máximo eles cobrarão o entendimento simples e direto das definições e conceitos.)  
  
• Com os sistemas de inferência acima vistos, ou com outros igualmente adequados, a Lógica Proposicional é **sadia** (só deriva verdades), **completa** (pode derivar todas as fbf’s verdadeiras) e **consistente** (não deriva contradições).  
  
• O problema da **satisfatibilidade** é **decidível** para fbf da Lógica Proposicional. Isto é, podemos achar um algoritmo (um procedimento que sempre, para todas as entradas possíveis, conclui sua execução em tempo finito, e sempre dá a resposta correta) que pode levar trilhões de anos, mas decide se uma fbf é satisfatível, isto é, se há uma interpretação (atribuição de V,F a seus símbolos) tal que a faça, à inteira fbf, ter o valor V.   
Mas satisfabilidade, em Lógica Proposicional, é um problema **NP-completo**. Você só entenderá isto completamente na disciplina Teoria da Computação, mas, em termos práticos, quando se descobre que um problema é NP-completo nosso sangue gela, perdemos toda a esperança de que jamais se possa vir a ter um algoritmo (exato) aceitavelmente eficiente para ele (ainda mais se não for possível truques e técnicas de armazenar dados intermediários em estruturas de dados auxiliares.) Um exemplo: suponha que uma fbf tenha 10000 símbolos (note que problemas com arrays de milhares de elementos são muito usuais e são até considerados modestos, e a expressão deles em Lógica Proposicional precisaria de milhares de símbolos proposicionais). Como cada símbolo pode ser V ou pode ser F, então, para se achar uma interpretação que faça a fbf ter valor V, ou para se dizer que nenhuma tal interpretação existe, temos que explorar 210000 possíveis combinações de valores verdade dos símbolos!!! Impraticável mesmo se cada átomo do universo virasse um supercomputador super-rápido, todos eles trabalhando em paralelo durante muitos trilhões de anos.  
  
• Usando argumentos semelhantes, podemos dizer que, em Lógica Proposicional, o problema da **tautologia** é **decidível**. Isto é, podemos achar um algoritmo que pode levar trilhões de anos, mas decide se uma fbf é uma tautologia, isto é, se toda interpretação (atribuição de V,F a seus símbolos) resulta em ela ter o valor V. Mas é um problema **NP-completo**, nosso coração gela, etc. ...  
  
• Um **modelo** de uma fbf f é uma interpretação (atribuição de V,F a seus símbolos proposicionais) que a faça resultar ter valor V. Por exemplo, a interpretação a = F, b = F é um modelo para ((a⊕b)→¬(a∨b)).  
• Uma **teoria** é um **sistema formal** (com seus **alfabeto** e **gramática** definindo suas fbf’s, seus genéricos axiomas e genéricas regras de inferência), juntamente com axiomas específicos do domínio desejado de problemas a que se aplicará, e com todas as fbf's, que serão chamadas de **teoremas** da teoria e que podem, usando regras de inferência, ser mostradas ser consequências lógicas dos axiomas genéricos e específicos, ou de outros teoremas anteriormente derivados). Por exemplo, a Teoria das Álgebras Booleanas.

## Problemas sobre toda a Unidade:

Além dos livros-texto, há muitos outros bons livros e notas de aula sobre Lógica Matemática, muitos deles disponíveis gratuitamente na internet, inclusive nos links que colocamos ao longo desta unidade. Muitos deles têm centenas de exemplos *resolvidos* sobre Lógica Proposicional, portanto sugerimos que escolha os livros e notas de aula mais introdutórios e de formalismo menos pesado, os mais fáceis de ler, e neles escolha os exemplos resolvidos para você fazer sem olhar a solução, só depois comparar a sua com a dele. Escolha somente os assuntos que aqui cobrimos, há muita coisa que consideramos difícil demais e não tão necessária, salte tais assuntos. Recomendamos particularmente as listas de exercícios acompanhadas de gabaritos, da Professora Joseluce Farias Cunha, em <http://www.dsc.ufcg.edu.br/~logica/> . Também recomendamos a Lista de Exercícios do Prof. Loureiro sobre Lógica Proposicional, <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE1.pdf>, com soluções em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE1_Solucao.pdf>, e, futuramente, sobre Cálculo Proposicional <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE2.pdf>, com soluções em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE2_Solucao.pdf>.

## Recapitulando a Unidade

Que bom, você já concluiu a unidade II! Se foi disciplinado e realmente "suou" estudando 4 a 6 h cada semana, deve ter aprendido muitas coisas da parte básica da Lógica Proposicional (a primeira e mais fácil parte da Lógica Matemática, a qual você continuará a ver em Teoria da Computação e em Agentes Inteligentes). Coisas que lhe serão indispensáveis ou muito úteis em todo o resto do curso e sua vida profissional: Você aprendeu mecanismos de raciocínio válidos, esperamos que isso o ajude a diferenciá-los dos falaciosos; aprendeu a sintaxe da linguagem £ (libra) da Lógica Proposicional, seus conectivos, as regras para construir fórmulas bem formadas (fbf's); aprendeu a representar as sentenças menores e mais simples da linguagem natural (com apenas um verbo, explícito ou implícito) como símbolos proposicionais, depois a expressar como fbf's as frases que as ajuntam, depois aprendeu a usar as regras da semântica de £ para verificar se argumentos da linguagem natural são válidos ou falaciosos; aprendeu o sistema natural de regras de inferências (particularmente o modus ponens), a base para todo raciocínio exato das provas de teoremas, concepção de programas, análise e prova da corretude dos mesmos, argumentação jurídica e em geral, etc.. E aprendeu importantes conceitos que lhe serão úteis a vida inteira: satisfatível e não satisfatível (ou contraditório); tautologia; implicação lógica (além da material) e equivalência lógica (idem); a sanidade, completude e consistência da Lógica Proposicional com o sistema de inferência natural; a decidibilidade mas NP-Completude do problema da satisfatibilidade e do problema da tautologia de uma fbf.  
  
Na próxima unidade, a III, você estudará recorrência (definir funções e programar computadores através de recursão, achar as equações de recorrência da complexidade de um programa, etc.) e como fazer provas por indução, que certamente é o tipo de provas mais frequentemente usado na Ciência da Computação, a ponto de poder se dizer que programar e provar por indução são gêmeos, quem aprende bem um aprende bem o outro, e quem não aprende bem um não aprende bem o outro. Será um ótimo e importante assunto e você já tem certa familiaridade com ele mesmo se não se deu conta, pois muitas provas (e.g., soma dos termos de uma progressão aritmética) e programas (e.g., Fibonacci, Hanói, etc.) do ensino médio e da disciplina Introdução à Programação já usaram o que vamos estudar mais profundamente. Até lá.

## Apêndice à Unidade II: Falácias Lógicas

Uma **falácia** é um argumento que *não* segue as regras de inferência de nenhum *são* sistema formal de Lógica, podendo levar a conclusões falsas (tal argumento, mesmo que leve a uma conclusão verdadeira, é **falacioso** e precisa ser trocado por um logicamente correto).   
  
Com maus propósitos, alguns aprendem em livros e cursos como usar falácias (ver <http://www.csun.edu/~dgw61315/fallacies.html>) em discursos e debates; outros aprendem estudando os discursos e vídeos de passados mestres do enganar; outros apenas desenvolvem um mau "talento inato". Muitos argumentos usados na retórica dos maus líderes políticos, religiosos, maus advogados, etc. são poderosos para persuasão de multidões de ouvintes, parecendo-lhes muito corretos e convincentes, apesar de conterem falácias. Por isso, todos (ainda mais nós, cuja profissão nos leva a diariamente lidar com provas, com Lógica, com Matemática, com algoritmos) deveriam estudar para reconhecer e evitar falácias. O livro <http://www.logicallyfallacious.com/> expõe e dá exemplos de 300 diferentes tipos de falácias e elas são de variadas classes (incluindo as informais, as que apelam às emoções, apelam a pressões dos nossos pares e da galeria, etc.). Mas, agora, só teremos tempo de ver uma pequena amostra das falácias, com mais ênfase nas que resultam de mau uso da Lógica Formal do que nos malévolos truques da retórica. Agradeço os exemplos aos meus alunos de Linguagem Formais, 2013. Sugiro que, quando você puder, leia mais sobre o assunto, será uma leitura muito interessante (e não será difícil).

|  |  |
| --- | --- |
| FALÁCIA | DEFINIÇÃO E EXEMPLO |
| Falsa Premissa | mesmo usando corretamente sãs regras de inferência, parte de uma premissa falsa (mesmo que chegue a uma conclusão verdadeira). EXEMPLO:  1) Todos cães são vegetarianos. // premissa falsa  2) Dálmatas são cães. // premissa verdadeira  3) Logo, dálmatas são vegetarianos. // conclusão falsa EXEMPLO:  1) Todos os peixes vivem na água. // premissa verdadeira  2) A baleia é um peixe. // premissa falsa  3) Logo, a baleia vive na água. // conclusão verdadeira, dedução falaciosa |
| Bola de Neve | é um raciocínio em cadeia, que parte de uma verdade e vai deduzindo verdades em cadeia, mas insere uma falsidade na cadeia, depois a usa para deduzir uma conclusão que pode ser falsa (ou não).  EXEMPLO:  1) Estamos quase a permitir que todos portem cortadores de unha,   2) disso, certamente permitiremos que portem tesourinhas, // discutível, mas continuemos  3) disso, é certo que permitiremos que todos portem espadas em todos os locais // esta proposição é falsa!  4) Todos que andam com espada, pra lá e pra cá, terminam matando outra pessoa // esta proposição também é falsa, mas não precisaremos dela  5) Se cada pessoa matar uma outra, então metade da população matará a outra metade   6) metade da população matar a outra metade tem que ser evitado  7) Portanto, temos que proibir todos de portarem cortadores de unha // conclusão falsa |
| Afirmação do Consequente | consiste em se tomar uma condição suficiente e concluir que ela é necessária. EXEMPLO:  1) Se estudarmos mais que qualquer pessoa, passaremos em qualquer concurso // note que esta condição é suficiente, não necessária  2) Ora, passamos neste concurso  3) Logo, estudamos mais que qualquer pessoa // note o erro de estar raciocinando como se (1) fosse necessária, o que não é.  Em Lógica, esta falácia corresponde a, do fato A → B, e do fato de B ser verdade, inferirmos (erroneamente) que A é verdade. |
| Erro de Categorização- Composição | consiste em tomar para o todo uma propriedade de suas partes. Primeiro, o fato de alguns elementos de um conjunto terem (ou não terem) uma propriedade não implica que todos a tenham (ou não a têm). Segundo, mesmo que todos a tenham (ou não a tenham), o todo pode ter uma estrutura que faz com que não a tenha (ou a tenha). Terceiro, o todo pode estar numa dimensão diferente da propriedade que alguns (ou mesmo todos) os seus membros têm (ou não têm) EXEMPLO:  1) O Clube de Matemática deste colégio é constituída de membros  2) Todos esses membros são torcedores do Vasco  3) Logo, o Clube de Matemática é torcedor do Vasco. EXEMPLO:  1) Cérebros são constituídos de células  2) Nenhuma célula é pensante   3) Logo, cérebros não pensam // isto ignora que a estrutura pode dar ao todo características que nenhuma das partes tem no menor dos graus. |
| Causa Complexa | consiste em supervalorizar apenas uma (talvez nem mesmo a mais importante) das várias causas possíveis. EXEMPLO:  1) A pista não estava perfeitamente varrida e lavada  2) Estas coisas podem contribuir para atropelamentos  3) O atropelamento não teria ocorrido se não fosse a imperfeita limpeza da pista // isto pode estar ignorando que o motorista estava bêbado e em alta velocidade, e que o pedestre estava descuidado e sem seus óculos e aparelho de surdez, o carro só freava uma das rodas, etc. |
| Falsa Causa   (“*Post Hoc, Ergo Propter Hoc*” = "Depois Disso, Portanto Por Causa Disso”) | consiste em atribuir a causa de um fenômeno a outra fenômeno, pela simples razão de o preceder temporalmente. EXEMPLO:  1) Eu comecei a ler sua carta,   2) depois disso, o cão latiu no quintal.  3) Logo, a fato de eu ler sua carta causa o cão latir no quintal. EXEMPLO:  1) Eu lhe aluguei minha casa,   2) depois disso, as paredes dela começaram a rachar.  3) Logo, sua presença foi a causa das rachaduras na parede. EXEMPLO:  1) Mais jovens começaram a poder entrar na universidade  2) Depois disso, o uso de drogas aumentou  3) Logo, de alguma forma, a universidade está causando o aumento no consumo de drogas (as vezes a conclusão vem na ordem reversa: logo, evitar que os jovens entrem na universidade fará com que o consumo de drogas não aumente) EXEMPLO (conhecido como a Síndrome do Galo):.  1) Todas as vezes que o galo cantou pela a 6ª vez na noite, pouco depois o sol raiou.  2) Logo, é o 6º canto do galo que faz o sol raiar. |
| “*Cum Hoc Ergo Propter Hoc*” = “Com Isso, Não Por Causa Disso” | consiste em tomar duas coisas que ocorrem juntamente e considerar uma como causa da outra. EXEMPLO:  Na década de 80, toda a Medicina caiu na falácia abaixo  1) Com as mulheres de uma cara rede de assistência médica, fazer reposição hormonal depois da menopausa apareceu juntamente com a diminuição de número de problemas coronarianos   2) Logo, fazer reposição hormonal depois da menopausa faz com que as mulheres tenham menos problemas coronarianos. Depois, melhores estudos estatísticos descobriram que as mulheres que faziam reposição hormonal eram mais ricas, cuidavam melhor da saúde, tinham tempo para correr e caminhar e faziam academia todos os dias, controlavam o peso, comiam mais saudavelmente, e isso, sim, era que diminuía a prevalência das doenças coronarianas. |
| Apelo ao Preconceito | consiste em desnudar maus valores morais do seu adversário ou da classe dele, fazendo despertar preconceito sobre ele, somente com isso tentando provar que o que ele disse é sempre falso. É um típico argumento *ad hominem*. EXEMPLO:  1) Juca afirma que o sol é redondo  2) A família de Juca é toda ela de desprezíveis mentirosões, por exemplo Juca Pai e Juca Avô  3) Logo, o sol não é redondo mas, sim, quadrado. |
| Apelo à Vaidade | apela à vaidade de quem está ouvindo a fim de ludibriá-lo e conseguir apoio em uma discussão.  1) Todas as pessoas cultas e inteligentes acreditam que X é verdade  2) Você é a pessoa mais culta e inteligente em todo mundo  3) Logo, você acredita que X é verdade, não é? |
| Acidente (ou "*Dicto Simpliciter Ad Dictum Secundum Quid*"; "Simplificadção de um dito", ou "Generalização Apressada") | assume que uma regra sempre vale, quando, na realidade ela somente vale quase sempre. Depois, toma um caso que é uma exceção da regra, e aplica-a. EXEMPLO:  1. Aves usualmente voam  2. Chiquita, a galinha, é uma ave  3. Logo, Chiquita voa |
| Ad Hominem  (“*Contra o [caráter do] Homem [opositor]*” | consiste em procurar negar uma proposição com uma crítica ao seu autor e não ao seu conteúdo. É uma forte e muito usada arma retórica, mas sem base lógica. EXEMPLO:  1) Hitler defendia que a sociedade perde se estimular a preguiça e o vadiar  2) Hitler foi um dos mais infames homens de todos os tempos  3) Logo, (1) é falsa: a sociedade não perde se estimular a preguiça e o vadiar EXEMPLO (chamado de "você também") (tem muita força retórica, nenhuma da lógica):   1) Você disse que não se deve gastar mais do que se ganha  2) No entanto, mais de uma vez você ficou tremendamente endividado  3) Logo, o que você disse não merece nenhum crédito EXEMPLO (chamado de “culpa por associação”) (idem):  1) Você disse que a terra é redonda  2) Isso é exatamente o que Hitler defendia  3) Logo, você está em má companhia e o que você disse não merece nenhum crédito. A terra é quadrada.  EXEMPLO (chamado de "você ganha ao dizer isso") (idem):  1) Você diz que atravessar o rio nadando é perigoso   2) Você tem um grande barco e cobra para fazer a travessia  3) Logo, a afirmativa 1 é movida por sua ganância, e é falsa. EXEMPLO: Quando Osvaldo apresentou de maneira clara e sucinta as possíveis mudanças no condomínio, Leonardo questionou os presentes se eles deveriam mesmo acreditar no que diz um homem que bebe, profere palavras de baixo calão, e que torce obsessivamente pelo Vasco. |
| Argumentum Ad Antiquitatem | consiste em justificar uma conclusão apenas apelando à tradição, ou seja, “se é antigo está completamente correto.” EXEMPLO: Nesta Instituição nunca foi permitido que mulheres ascendessem à posição de chefia; sempre foi assim, e não é por termos mulheres competentes e dispostas a trabalhar que isso precisa mudar. |
| Degolar o Espantalho | Seu adversário defende a afirmação X, você a torce para X', depois a destrói a golpes de espada, por fim canta vitória com se tivesse destruído X. EXEMPLO: Depois de Fátima alertar para Lourdes comer menos para manter a saúde, Lourdes respondeu dizendo estar indignada com o fato de Fátima querer que comida seja jogada no lixo. |
| Falsa Premissa | consiste em usar uma falsa premissa para chegar a uma falsa conclusão EXEMPLO:   1) Nenhum mamífero é um animal aquático // isto é falso  2) O golfinho é um animal aquático  3) Logo, o golfinho não é um mamífero |
| Falsa Dicotomia | consiste em colocar apenas duas alternativas como as duas únicas soluções (quando, de fato, há outras). EXEMPLO:   1) Antônio ou opta pela cor azul ou opta pela cor verde // isto é um ou-excludente, uma premissa errada que só lhe dá 2 opções, e ele pode gostar de muitas outras cores  2) Ele hoje está de verde  3) Logo, ele não gosta da cor azul. |
| Negação do Antecedente | Toma uma implicação se-então que é verdadeira mas não é uma equivalência se-e-somente-se (portanto, seu antecedente não é necessário para sua conclusão), e toma a negação do seu antecedente, para inferir a negação de sua conclusão. EXEMPLO:  1) Se é de ouro, então é caro. //A condição é verdadeira, mas não é necessária.  2) Não é de ouro.   3) Então não é caro. //Não se pode afirmar isso somente levando em consideração a premissa (1). |
| Anfibologia ou Ambiguidade | consiste em uma (ou mais) das premissas ser ambígua, e a tomarmos no sentido inadequado.   1) O rádio disse “goleou o time local a seleção nacional, em jogo treino” // Isto pode significar que o time local goleou a seleção (improvável), ou que a seleção goleou o time local (mais provável)  2) O rádio não mente  3) Portanto, vou espalhar que o time local deu uma surra na seleção |
| Falácia Genética | consiste em tomar algo como verdadeiro ou falso, bom ou mau, certo ou errado, baseando-se unicamente em sua origem.  EXEMPLO:  1) Dizem que, no princípio, aliança de casamento simbolizava o grilhão colocado no tornozelo da mulher para prendê-la e fazê-la escrava // isso é duvidoso e, se é que teve este significado num local nos primeiros séculos de uso, não é necessário que o teve em todos os outros locais e sempre  2) Você pediu à sua noiva para usar aliança depois do casamento   3) Logo, você é um machista que quer fazer sua esposa de escrava. // mesmo se a aliança tivesse tido tal significado em todos os locais, 4.000 anos atrás (e eu duvido disso), não quer dizer que você lhe dê o mesmo significado, hoje. |
| Argumentum Ad Populum (“Apelo Ao Povo” ou “À Maioria”) | consiste em tomar uma proposição como verdadeira ou falsa simplesmente porque a grande maioria (ou as mais importantes pessoas) acredita que seja assim. EXEMPLO:   1) A maioria dos cientistas mais sérios acredita na Teoria da Evolução, a matéria tendo a inteligência e poder de, em bilhões de anos, evoluir a si mesma desde o Big Bang, átomos de hidrogênio, até o ser humano   2) Logo, a Teoria da Evolução tem que ser verdadeira. |
| Argumentum Ad Verecundiam (“Apelo À Autoridade”, “O Mestre Disse”) | adota a decisão final de alguma autoridade tomada como infalível, sem sequer analisar as razões que porventura tenha apresentado  EXEMPLO:   1) Linus Pauling, o único homem ganhar dois prêmios Nobel (Química; e Paz) disse que tomar 20.000 mg de vitamina C/dia retardaria por 20 anos a eclosão de qualquer câncer que já estivesse incubado dentro duma pessoa  2) Logo, vitamina C é a solução para praticamente erradicar o câncer da humanidade // ele não fez nenhuma experiência sobre isso, não tinha nenhuma autoridade em Medicina, diagnóstico e tratamento de neoplasias malignas, e nenhuma experiência posterior lhe confirmou. Mas convenceu milhões de ingênuos, até dizem que ganhou milhões de dólares de laboratórios. |