Universidad
Rey Juan Carlos

Modelos de la Investigación Operativa

Hoja de problemas 2 :
"Teoría de colas"

David Rozas Domingo (47456048-X)
4º curso de Ingeniería Informática

Notas:

- La resolución de los ejercicios se ofrece en forma de imagen. Las imágenes originales eran “muy pesadas”, por lo que si la resolución no fuera suficiente, pueden descargarse las imágenes originales de: http://pantuflo.escet.urjc.es/~drozas/mio_scan_h2.zip

- El ejercicio 4 ofrece resultados incorrectos (contradice algunas leyes), pero se ofrece el intento de aproximación a la solución.

1) $\mu = 3 \text{ ovejas} / 2 \text{ min} \xrightarrow{\text{Fijamos unidad = horas}}$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ ov} \text{ — } 2 \text{ min} \\ x \text{ ov} \text{ — } 60 \text{ min} \end{array}\right\} \mu = \frac{3 \cdot 60}{2} = 90 \text{ ovejas/hora}$$

$P \geq 0'5$

$\lambda ?$

"Como mucho una oveja esperando" → en el sistema hay 0 ó 1 ó 2

$$\Downarrow$$

$$P_0 + P_1 + P_2 \geq 0'5$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\rho)\cdot\cancel{\rho^0} + (1-\rho)\cdot\rho^1 + (1-\rho)\cdot\rho^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$1 - \cancel{\rho} + \cancel{\rho} - \cancel{\rho^2} + \cancel{\rho^2} - \rho^3 \geq \frac{1}{2}$$

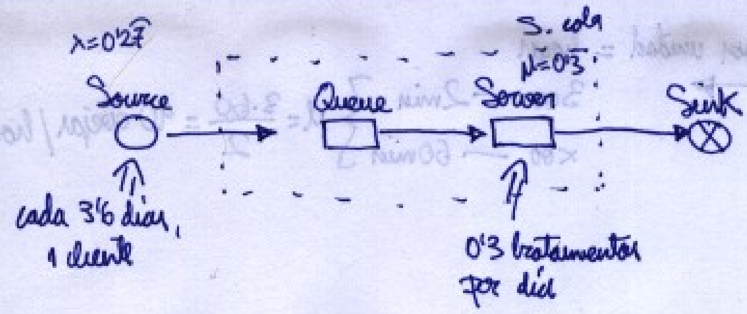
$$-\rho^3 \geq -\frac{1}{2}$$

$$\rho \leq \sqrt[3]{1/2}$$

Por tanto, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \to \lambda = \rho \cdot \mu \Rightarrow \lambda \leq \sqrt[3]{1/2} \cdot 90 = 71'433$

Es decir, para q la probabilidad de ganar la apuesta sea $\geq 0'5$, las ovejas tienen que llegar con $\lambda \leq 71'433$ cada hora ($71'433/60 = 1'19$ ovejas cada minuto)

2)



M|M|1

→ Fijamos la un. de t° como "1 día":

$\bar{X} = 3'6$ días / 1 cliente $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3'6} = 0'2\hat{7}$ clientes / día

y $\mu = 0'3$

a) El nº medio de clientes en el sistema es $\bar{J}$,

$\bar{J} = \frac{\rho}{1-\rho} \overset{*}{=} \frac{0'9259}{1-0'9259} = \underline{\underline{12'49}}$ es el nº medio de pacientes en el sistema.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0'2\hat{7}}{0'3} = 0'9259$ $(<1, \text{OK!})$

b) El porcentaje de tiempo q. el médico está desocupado es P_0,

$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0'9259 = 0'0741$

Es decir el médico estará desocupado el $\underline{7'41\%}$ del tiempo

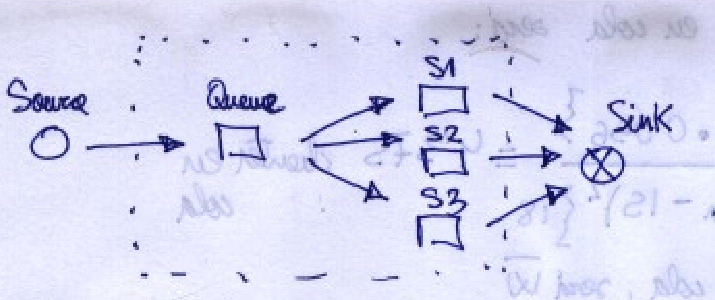
c) El t° medio de espera de un cliente → "T° en cola = $\bar{W}$"

Por las fórmulas de Little: $\bar{R} = \bar{X} + \bar{W} \rightarrow \underbrace{\bar{W}}_{t^o\ cola} = \underbrace{\bar{R}}_{t^o\ total} - \underbrace{\bar{X}}_{t^o\ servicio}$

$$\bar{W} = \bar{R} - \bar{X} = \overbrace{\frac{1}{\mu(1-\rho)}}^{\bar{R}\ en\ M|M|1} - \overbrace{\frac{1}{\mu}}^{\bar{X}\ en\ gral} = \frac{1}{0'3(1-0'9259)} - \frac{1}{0'3} = 41'6 \text{ días de espera}$$

3)

a) M/M/3



▶ Fijamos la unidad hora, por tanto:

- $\lambda = 15$ clientes/hora
- μ? $\left.\begin{array}{l} 1\text{cl} - 10\text{ min} \\ x\text{cl} - 60\text{ min} \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 6$ clientes/hora (cada server)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \cdot N} = \frac{15}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \quad (<1, \text{OK!})$$

¿Prob. de q. un cliente tenga que esperar?

$1 -$ Prob. NO_ESPERAR $\rightarrow 1 - [P_0 + P_1 + P_2 + P_3]$

$$P_0 = \frac{1}{\underbrace{\frac{(1 \cdot \frac{5}{6})^1}{1}}_{5/6} + \underbrace{\frac{(2 \cdot \frac{5}{6})^2}{2}}_{1'38} + \underbrace{\frac{(3 \cdot \frac{5}{6})^3}{2 \cdot 3 \cdot (1 - \frac{5}{6})}}_{15'625}} = 0'056$$

$$P_1 = \frac{(3 \cdot \frac{5}{6})^1 \cdot 0'056}{1!} = 0'14$$

$$P_2 = \frac{(3 \cdot \frac{5}{6})^2 \cdot 0'056}{2!} = 0'07$$

$$P_3 = \frac{(3 \cdot \frac{5}{6})^3 \cdot 0'056}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 0'1459$$

$(+) \Rightarrow 0'4119$

Por tanto, $P_{ESPERAR} = 1 - [0'056 + 0'14 + 0'07 + 0'1459] = 0'5881$

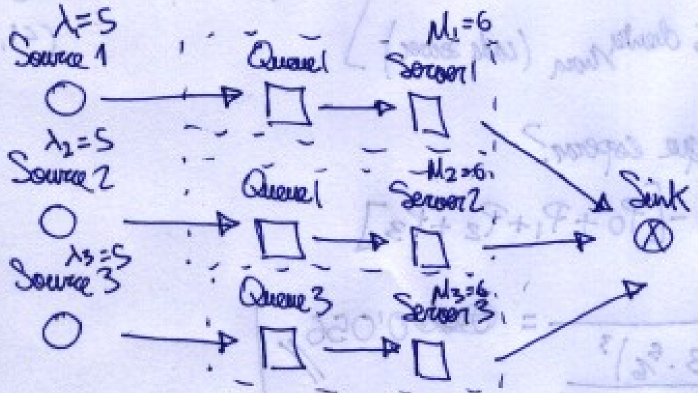
#El nº medio de clientes en cola será:

$$\bar{Q} = \frac{\left(3\cdot\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 15\cdot 6\cdot 0'056}{(3-1)!\,(\underbrace{3\cdot 6}_{18} - 15)^2} = 4'375 \text{ clientes en cola}$$

#El tº medio de espera en cola, será $\bar{W}$

F. Little: $\bar{Q} = \lambda \cdot \bar{W} \Rightarrow \bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \frac{4'375}{15} = 0'291$ horas (17'5 minutos)

b) Ahora tenemos 3 colas M/M/1



$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{5}{6}$

#Así que, la probabilidad de que un cliente tenga q esperar ahora será $1 - P_0$

$$P_0 = 1-\rho \rightarrow P_{ESPERAR} = 1-(1-\rho) = \frac{5}{6}$$

#El nº medio de clientes en cola será:

$$\bar{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} = 4'16 \text{ clientes en cola}$$

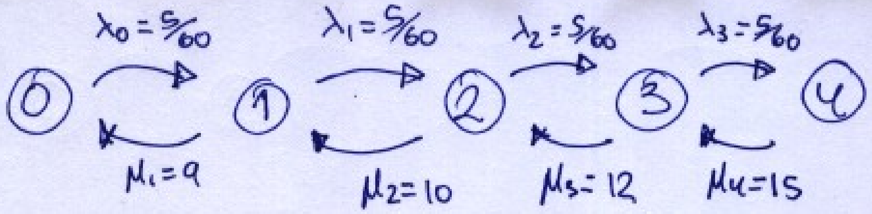
#El tº medio de espera será

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \frac{4'16}{5} = 0'832 \text{ horas } (\simeq 49 \text{ minutos})$$

c) Aunque en b), el nº medio de clientes en cola es ligeramente menor; el tº medio de espera crece mucho, y la probabilidad de esperar es también mayor.

Por tanto, parece mejor el sistema M/M/3

4)



$\lambda = \frac{5}{60}$ cl/min

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{\frac{\frac{5}{60}}{9} + \frac{5/60}{10} + \frac{\frac{5}{60}}{12} + \frac{\frac{5}{60}}{15}}$$

$$= \frac{1}{1/108 + \frac{1}{120} + \frac{1}{144} + \frac{1}{180}} = \frac{432}{13}$$

[✗ $p > 1$! No puede ser!]

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{5/60}{9} \cdot \frac{432}{13} = 4/13$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p_1 = \frac{5/60}{10} \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{390}$$

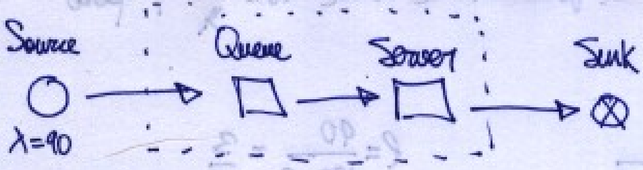
$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p_2 = \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{390} = \frac{1}{56160}$$

$$p_4 = \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{56160} = \frac{1}{10108800}$$

[Mal! Ni $p_0 > 1$ (es una probabilidad), ni la suma de todos da 1]

5)

a)



$\lambda = 90$ coches/hora

$M? \Rightarrow$ 1 coche cada 30 sg $\rightarrow \mu = 120$ /hora

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} \quad [<1 \text{ ,OK!}]$$

Nº medio de automóviles en el sistema $\rightarrow \bar{J}$

$$\bar{J} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/4}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3/4}{1/4} = 3 \text{ coches de media en el sistema}$$

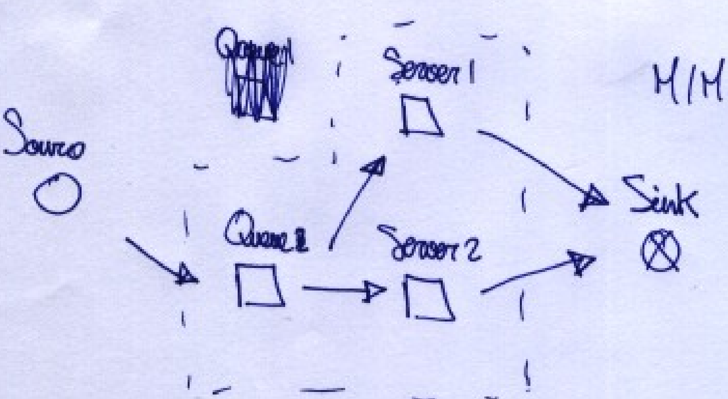
Tº medio de espera $\rightarrow$ Tº medio en cola ($\bar{W}$)

$$\bar{J}_q = \bar{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(3/4)^2}{1-3/4} = 2'25 \text{ coches en cola.}$$

Aplicando la Ley de Little $\bar{Q} = \lambda \cdot \bar{W}$

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \frac{2'25}{90} = 0'025 \text{ horas} = 1'5 \text{ min. de espera}$$

b)



M/M/2

En este caso aplicaremos de nuevo la fórmula de Little $\overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\lambda}$; pero ahora $\overline{Q}$ es:

$$\overline{Q} = \frac{(m \cdot \rho)^m \cdot \lambda \cdot \mu \cdot P_0}{(m-1) \cdot (m \cdot \mu - \lambda)^2} \qquad \rho = \frac{90}{120 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$P_0 = \frac{1}{\underbrace{\frac{(2 \cdot \frac{3}{8})^1}{1!}}_{13/8} + \underbrace{\frac{(2 \cdot \frac{3}{8})^2}{2! \cdot (1 - \frac{3}{8})}}_{0'45}} = 0'4819$$

Así que: $$Q = \frac{(2 \cdot \frac{3}{8})^2 \cdot 90 \cdot 120 \cdot 0'4819}{\underbrace{(2-\cancel{1}) \cdot (2 \cdot 120 - 90)^2}_{22.500}} = 0'13 \text{ coches en cola}$$

Por tanto: $W = \dfrac{0'13}{90} = 1'4 \cdot 10^{-3}$ horas de espera (0'08 minutos)

Así que, con la apertura de la otra cabina obtenemos un tiempo de espera muchísimo menor.

6)

a) Source → Queue → Server → Sink

• 1'25 obreros cada 5 min $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{1'25}{5} = 0'25$ obreros/min

• 3'33 min en at. a un obrero $\Rightarrow$ $\mu = \frac{1}{3'33} = 0'3$ obr/min

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0'25}{0'3} = 0'8325 \quad (<1, \text{ OK!})$$

• Nos piden $\bar{W}$, necesitamos saber $\bar{Q}$

$$\bar{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0'8325^2}{1-0'8325} = 4'137 \text{ obreros en cola}$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \frac{4'137}{0'25} = 16'5 \text{ minutos de espera}$$

b) Comparación de Gastos con sistema a) y b)

Vamos a calcular y comparar :

$$\underbrace{\bar{Q}_a \cdot \cancel{\lambda} \cdot \frac{400}{60}}_{\text{gastos obreros}} + \underbrace{p_{0a} \cdot \frac{250}{60}}_{\text{gastos oficinista inactivo}}$$

con

$$\overbrace{Q_b \cdot \cancel{\lambda} \cdot \frac{400}{60}} + \overbrace{p_{0b} \cdot \frac{250}{60}}.$$

En a)

$$\text{Gastos}_a = 4'137 \cdot 0'25 \cdot \frac{400}{60} + (1-0'3825) \cdot \frac{250}{60} = 9'46$$

En b) M|M|2 $\quad \rho_B = \frac{0'25}{0'3 \cdot 2} = 0'41$

$$P_{0_B} = \frac{1}{\frac{(2\cdot 0'41)^1}{1!} + \frac{(2\cdot 0'41)^2}{2!\,(1-0'41)}} = \frac{1}{0'82 + 0'56} = 0'72 \quad (1^{o}\ \text{dije. ocioso})$$

$$\bar{Q}_B = \frac{(2\cdot 0'41)^2 \cdot 0'25 \cdot 0'3 \cdot 0'72}{(2-1)!\ (2\cdot 0'3 - 0'25)^2} = \frac{0'054}{0'1225} = 0'44 \text{ clientes en cola}$$

Así que $\text{Gastos}_B = 0'44 \cdot 0'25 \cdot \frac{400}{600} + 0'72 \cdot \frac{250}{60} = 3'0733$

Por tanto, el segundo sistema (M|M|2) produce menor ~~gasto~~ gastos.