TRẦN SĨ TÙNG

BÀI TẬP

HÌNH HỌC 10

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT & ĐẠI HỌC

Năm 2014

CHƯƠNG I
VECTƠ

I. VECTƠ

1. Các định nghĩa

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B là $\overrightarrow{AB}$.
- **Giá** của vectơ là đường thẳng chứa vectơ đó.
- **Độ dài** của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ, kí hiệu $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- **Vectơ – không** là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu $\vec{0}$.
- Hai vectơ đgl **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- Hai vectơ đgl **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Chú ý: *+ Ta còn sử dụng kí hiệu $\vec{a}, \vec{b},...$ để biểu diễn vectơ.*

+ Qui ước: Vectơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau.

2. Các phép toán trên vectơ

a) Tổng của hai vectơ

- Qui tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Qui tắc hình bình hành: Với ABCD là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- Tính chất: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$; $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

b) Hiệu của hai vectơ

- **Vectơ đối** của $\vec{a}$ là vectơ $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Kí hiệu vectơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.
- Qui tắc ba điểm: Với ba điểm O, A, B tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

c) Tích của một vectơ với một số

- Cho vectơ $\vec{a}$ và số $k \in R$. $k\vec{a}$ là một vectơ được xác định như sau:
  + $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \ge 0$, $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
  + $\left|k\vec{a}\right| = |k|.\left|\vec{a}\right|$.
- Tính chất: $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$; $k\left(l\vec{a}\right) = (kl)\vec{a}$

  $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- **Điều kiện để hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ $\left(\vec{a} \ne \vec{0}\right)$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{b} = k\vec{a}$
- **Điều kiện ba điểm thẳng hàng:** A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \ne 0$: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- **Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:** Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{x}$ tuỳ ý. Khi đó $\exists!$ $m, n \in R$: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Chú ý:

- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng**:

  M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ (O tuỳ ý).
- **Hệ thức trọng tâm tam giác**:

  G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (O tuỳ ý).

VẤN ĐỀ 1: Khái niệm vectơ

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D ?

Bài 2. Cho ΔABC có A′, B′, C′ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

b) Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}$.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$; $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$; $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC$.

b) Nếu $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right|$ thì ABCD là hình chữ nhật.

Bài 5. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

Bài 6. Cho ΔABC đều cạnh *a*. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh *a*. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Bài 8. Cho ΔABC đều cạnh *a*, trực tâm H. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD cạnh *a*, tâm O. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh đẳng thức vectơ – Phân tích vectơ

Để chứng minh một đẳng thức vectơ hoặc phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương, ta thường sử dụng:

– Qui tắc ba điểm để phân tích các vectơ.

– Các hệ thức thường dùng như: hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm tam giác.

– Tính chất của các hình.

Bài 1. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài 2. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

c) Gọi G là trung điểm của IJ. Chứng minh: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh các đoạn thẳng IJ, PQ, MN có chung trung điểm.

Bài 3. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh: $2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{DA}) = 3\overrightarrow{DB}$.

Bài 4. Cho ΔABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh: $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC, có AM là trung tuyến. I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kỳ, chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 6. Cho ΔABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Bài 7. Cho hai tam giác ABC và A′B′C′ lần lượt có các trọng tâm là G và G′.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

b) Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, D là trung điểm của BC, N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10. Cho hình thang OABC. M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$.

Bài 11. Cho ΔABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$ b) $\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Bài 12. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD, đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm của tam giác BCI. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Bài 14. Cho lục giác đều ABCDEF. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AF}$.

Bài 15. Cho hình thang OABC, AM là trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Bài 16. Cho ΔABC. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ b) Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Bài 17. Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

b) Đặt $\overrightarrow{BB_1} = \vec{u}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{v}$. Tính $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ theo $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$.

Bài 18. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI. Gọi F là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho 5FB = 2FC.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AF}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$ *và* $\overrightarrow{AF}$.

Bài 19. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của G qua B.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}, \overrightarrow{AH} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

VẤN ĐỀ 3: Xác định một điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, trong đó O và $\vec{a}$ đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:

– Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k.
– Hình bình hành.
– Trung điểm của đoạn thẳng.
– Trọng tâm tam giác, …

Bài 1. Cho ΔABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. M là điểm tuỳ ý không nằm trên đường thẳng AB. Trên MI kéo dài, lấy 1 điểm N sao cho IN = MI.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MB}$.

b) Tìm các điểm D, C sao cho: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{ND}$; $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b) Xác định điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Bài 5. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD, O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng với điểm S bất kì, ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Bài 6. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ b) $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{BC}$ d) $3\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

Bài 7. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

HD: a) $I \in AC$: $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$ b) J là trung điểm MC (M là trung điểm AB)

c) $\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{BC}$ d) $L \equiv B$

Bài 8. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, F, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c) $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ d) $3\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

HD: a) $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{BC}$ b) $F \equiv A$

c) $K \in GA$: $\overrightarrow{GK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GA}$ (G là trọng tâm của ΔABC) d) $\overrightarrow{LA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}$.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Hãy xác định các điểm I, F, K thoả các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{ID}$ b) $2\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD}$

c) $4\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

HD: a) $\overrightarrow{DI} = 4\overrightarrow{DO}$

b) Gọi M là trung điểm AB, $N \in DC$: $\overrightarrow{ND} = 3\overrightarrow{NC}$. F đối xứng với N qua M.

c) Gọi P: $4\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$, Q: $3\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. K là trung điểm của PQ.

Bài 10. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$. Chứng minh D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh 2 véc tơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ *và* $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Bài 11. Cho tứ giác ABCD.

a) Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (*G đgl trọng tâm của tứ giác ABCD*).

b) Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Bài 12. Cho G là trọng tâm của tứ giác ABCD. A′, B′, C′, D′ lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh:

a) G là điểm chung của các đoạn thẳng AA′, BB′, CC′, DD′.

b) G cũng là trọng tâm của của tứ giác A′B′C′D′.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD. Trong mỗi trường hợp sau đây hãy xác định điểm I và số k sao cho các vectơ $\vec{v}$ đều bằng $k.\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M:

a) $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ b) $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

c) $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ d) $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}$.

VẤN ĐỀ 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng – Hai điểm trùng nhau

• *Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chứng minh ba điểm đó thoả mãn đẳng thức* $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, *với* $k \neq 0$.

• *Để chứng minh hai điểm M, N trùng nhau ta chứng minh chúng thoả mãn đẳng thức* $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$, *với O là một điểm nào đó hoặc* $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Bài 1. Cho bốn điểm O, A, B, C sao cho : $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Trên BC lấy điểm H, trên BD lấy điểm K sao cho: $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh: A, K, H thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}$. *Chứng minh* $\overrightarrow{AH}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AK}$.

Bài 3. Cho ΔABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi: $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. (*HD*: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$)

b) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng (*HD*: $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$).

Bài 4. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD. Trên các tia AD, AB lần lượt lấy các điểm F, E sao cho AD = $\frac{1}{2}$ AF, AB = $\frac{1}{2}$ AE. Chứng minh:

a) Ba điểm F, C, E thẳng hàng. b) Các tứ giác BDCF, DBEC là hình bình hành.

Bài 6. Cho ΔABC. Hai điểm I, J được xác định bởi: $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh 3 điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 7. Cho ΔABC. Hai điểm M, N được xác định bởi: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh 3 điểm M, G, N thẳng hàng, với G là trọng tâm của ΔABC.

Bài 8. Cho ΔABC. Lấy các điểm M N, P: $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Tính $\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. b) Chứng minh 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 9. Cho ΔABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh các tam giác RIP và JQS có cùng trọng tâm.

Bài 10. Cho tam giác ABC, A′ là điểm đối xứng của A qua B, B′ là điểm đối xứng của B qua C, C′ là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có chung trọng tâm.

Bài 11. Cho ΔABC. Gọi A′, B′, C′ là các điểm định bởi: $2\overrightarrow{A'B}+3\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{B'C}+3\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{C'A}+3\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm.

Bài 12. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là điểm đối xứng của M qua các trung điểm K, I, J của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ đồng qui tại một điểm N.

b) Chứng minh rằng khi M di động, đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thoả mãn: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, D và E là hai điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) Tính $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

a) Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

b) Xác định x để đường thẳng MN đi trung điểm I của BC. Tính $\frac{IM}{IN}$.

Bài 16. Cho ba điểm cố định A, B, C và ba số thực *a, b, c* sao cho $a+b+c\neq 0$.

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm G thoả mãn $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Gọi M, P là hai điểm di động sao cho $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi P là trung điểm của BN. Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Để tìm tập hợp điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ ta biến đổi đẳng thức vectơ đó để đưa về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:
– Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
– Tập hợp các điểm cách một điểm cố định một khoảng không đổi là đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.
–

Bài 1. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ b) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

HD: a) Đường tròn đường kính AB b) Trung trực của AB.

Bài 2. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

c) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ d) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

HD: a) Trung trực của IG (I là trung điểm của BC, G là trọng tâm ΔABC).
b) Dựng hình bình hành ABCD. Tập hợp là đường tròn tâm D, bán kính BA.

Bài 3. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng nối 2 điểm M, N xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm tập hợp các điểm H sao cho: $\left|3\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right|$.

d) Tìm tập hợp các điểm K sao cho: $2\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right| = 3\left|\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|$

HD: b) M, N, I thẳng hàng c) Đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AB}{2}$.

Bài 4. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

c) Chứng minh 3 điểm A, I, D thẳng hàng.

d) Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

II. TOẠ ĐỘ

1. Trục toạ độ

- Trục toạ độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu $(O;\vec{e})$.
- Toạ độ của vectơ trên trục: $\vec{u}=(a) \Leftrightarrow \vec{u}=a.\vec{e}$.
- Toạ độ của điểm trên trục: $M(k) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=k.\vec{e}$.
- Độ dài đại số của vectơ trên trục: $\overline{AB}=a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=a.\vec{e}$.

Chú ý: *+ Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=AB$.*

Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=-AB$.

+ Nếu A(a), B(b) thì $\overline{AB}=b-a$.

+ Hệ thức Sa–lơ: Với A, B, C tuỳ ý trên trục, ta có: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

2. Hệ trục toạ độ

- Hệ gồm hai trục toạ độ *Ox, Oy* vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị trên *Ox, Oy* lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$. O là gốc toạ độ, *Ox* là trục hoành, *Oy* là trục tung.
- Toạ độ của vectơ đối với hệ trục toạ độ: $\vec{u}=(x;y) \Leftrightarrow \vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$.
- Toạ độ của điểm đối với hệ trục toạ độ: $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$.
- Tính chất: Cho $\vec{a}=(x;y), \vec{b}=(x';y'), k \in R$, $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B), C(x_C;y_C)$:

+ $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$ + $\vec{a}\pm\vec{b}=(x\pm x';y\pm y')$ + $k\vec{a}=(kx;ky)$

+ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}\neq\vec{0}$ $\Leftrightarrow \exists k \in$ R: $x'=kx$ *và* $y'=ky$.

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{x}=\frac{y'}{y} \text{ (nếu } x\neq 0,\ y\neq 0\text{)}.$$

+ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

+ Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

+ Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$.

+ Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k\neq 1$: $x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};\ y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k}$.

(M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$).

VẤN ĐỀ 1: Toạ độ trên trục

Bài 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là −2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$. *ĐS:* $\overrightarrow{AB} = (7)$

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB. *ĐS:* $I\left(\frac{7}{2}\right)$

c) Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. *ĐS:* $M(3)$

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overline{NA} + 3\overline{NB} = -1$. *ĐS:* $N\left(\frac{12}{5}\right)$

Bài 2. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là −3 và 1.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1$. *ĐS:*

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB}$. *ĐS:*

Bài 3. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A(−2), B(4), C(2), D(10).

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh: $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$.

c) Gọi J là trung điểm của CD. Chứng minh: $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$.

Bài 4. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là *a, b, c*.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB. *ĐS:*

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. *ĐS:*

c) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$. *ĐS:*

Bài 5. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A, B, C, D tuỳ ý.

a) Chứng minh: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$.

b) Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, AB, CD. Chứng minh rằng các đoạn IJ và KL có chung trung điểm.

VẤN ĐỀ 2: Toạ độ trên hệ trục

Bài 1. Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i}$; $\vec{d} = -2\vec{j}$.

b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$; $\vec{d} = -4\vec{j}$; $\vec{e} = 3\vec{i}$.

Bài 2. Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u} = (2;-3)$; $\vec{u} = (-1;4)$; $\vec{u} = (2;0)$; $\vec{u} = (0;-1)$.

b) $\vec{u} = (1;3)$; $\vec{u} = (4;-1)$; $\vec{u} = (1;0)$; $\vec{u} = (0;0)$.

Bài 3. Cho $\vec{a} = (1;-2)$, $\vec{b} = (0;3)$. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. b) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

ĐS:

Bài 4. Cho $\vec{a}=(2;0),\ \vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\ \vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$. *ĐS:* $\vec{d}=\left(27;-\frac{63}{2}\right)$

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho: $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}$. *ĐS:* $m=\frac{1}{3};n=-\frac{1}{12}$

c) Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}$. *ĐS:* $\vec{c}=-4\vec{a}-12\vec{b}$

Bài 5. Cho hai điểm $A(3;-5),\ B(1;0)$.

a) Tìm toạ độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$. *ĐS:*
b) Tìm điểm D đối xứng của A qua C. *ĐS:*
c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$. *ĐS:*

Bài 6. Cho ba điểm A(–1; 1), B(1; 3), C(–2; 0).
a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB.
ĐS:

Bài 7. Cho ba điểm A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2).

a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BC}$. *ĐS:*

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB. *ĐS:*

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$. *ĐS:*

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$. *ĐS:*

Bài 8. Cho ba điểm A(1; –2), B(2; 3), C(–1; –2).
a) Tìm toạ độ điểm D đối xứng của A qua C.
b) Tìm toạ độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.
c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.
ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tam giác ABC với trực tâm H, B′ là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy xét quan hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{AH}$ *và* $\overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{AB'}$ *và* $\overrightarrow{HC}$.

HD: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Bài 2. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b) Gọi G là trung điểm của IJ. Chứng minh: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. (*G được gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD*).

c) Gọi P, Q là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M, N là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có chung trung điểm.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng qui tại trọng tâm của tứ giác ABCD.

HD: Gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD. Ta suy ra được $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GX} = \vec{0} \Rightarrow$ *AX đi qua G. Tương tự, cũng chứng minh được BY, CZ, DT đi qua G.*

Bài 4. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N thay đổi sao cho: $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

HD: Gọi E và I là các điểm sao cho: $4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$, $5\overrightarrow{IE} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Suy ra được: $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MI} \Rightarrow$ *M, N, I thẳng hàng* $\Rightarrow$ *MN đi qua điểm I cố định.*

Bài 5. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$. Chứng minh các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh hai tổng vectơ: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

HD: a) ABDC, ABCE, ACBF là các hình bình hành b) Hai vectơ tổng bằng nhau.

Bài 6. Cho ΔABC với trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM.

a) Chứng minh: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì, chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$. b) $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I và J là trung điểm của BC, CD.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\right)$ b) Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

c) Tìm điểm M thoả mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

HD: c) CABM là hình bình hành.

Bài 9. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi D và E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm D, E, G thẳng hàng.

HD: a)

Bài 10. Cho ΔABC. Gọi D là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ và M là trung điểm đoạn BD.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. b) AM cắt BC tại I. Tính $\frac{\text{IB}}{\text{IC}}$ và $\frac{\text{AM}}{\text{AI}}$.

HD: a)

Bài 11. Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD, BC sao cho:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{m}{n}$$

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN}=\frac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC với BC = *a*, CA = *b*, AB = *c*. I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Chứng minh: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

HD: Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác.

Bài 13. Cho tam giác ABC. M là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

HD: Vẽ MN // AC. Sử dụng định lí Ta–let, ta có:

$\overrightarrow{AN}=\frac{AN}{AB}\overrightarrow{AB}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NM}=\frac{NM}{AC}\overrightarrow{AC}=\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 14. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM}+b\overrightarrow{IN}+c\overrightarrow{IP}=\vec{0}$.

HD: Gọi p là nửa chu vi ΔABC, ta có:

AP = AN = p – a; BM = BP = p – b; CN = CM = p – c.

Áp dụng bài 11, ta có: $\overrightarrow{IM}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{IB}+\frac{MB}{BC}\overrightarrow{IC}$ $\Rightarrow a\overrightarrow{IM}=(p-c)\overrightarrow{IB}+(p-b)\overrightarrow{IC}$ *(1)*

Tương tự, $b\overrightarrow{IN}=(p-a)\overrightarrow{IC}+(p-c)\overrightarrow{IA}$ *(2),* $c\overrightarrow{IP}=(p-b)\overrightarrow{IA}+(p-a)\overrightarrow{IB}$ *(3)*

Từ (1), (2), (3), suy ra đpcm.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

HD: a) Lấy E trên AB: $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB}$. *M là trung điểm của BC.*

b) Lấy E như trên. Không tồn tại điểm M thoả đề bài.

Bài 16. Cho ΔABC có trọng tâm G. Tìm tập hợp các điểm M thỏa điều kiện:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ d) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$

e) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

HD: a) $\varnothing$ *b)* $M\equiv G$ *c) Đường tròn tâm trung điểm I của AB, bán kính* $\frac{AB}{2}$

d) Hai phần của đường thẳng AB trừ đi những điểm nằm trong đoạn AB.

e) Đường trung trực đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC).

Bài 17. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa điều kiện:

$$2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$$

HD: Gọi G là trọng tâm ΔABC, J là điểm sao cho: $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. *Tập hợp các điểm M là đường trung trực của GJ.*

Bài 18. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| \quad (*)$$

HD: Gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD, E là trung điểm của AB. Ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CE}$

Do đó, (*) $\Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}CE \Rightarrow$ *Tập hợp các điểm M là đường tròn* $\left(G; \frac{1}{2}CE\right)$.

Bài 19. Cho tam giác ABC và đường thẳng *d*. Tìm trên *d*, điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

HD: Gọi I là điểm sao cho: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. *YCBT* $\Leftrightarrow$ *MI nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ *M là hình chiếu của I trên d.*

Bài 20. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tìm trên (O), điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ lớn nhất, nhỏ nhất.

HD: Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI. Ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI}, \forall M$.

- $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow M \equiv M_1$
- $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow M \equiv M_2$

Trong đó M_1, M_2 *là giao điểm của đường thẳng IO với (O),* M_1 *khác phía với I,* M_2 *cùng phía với I đối với O.*

Bài 21. Cho ΔABC có A(4; 3) , B(−1; 2) , C(3; −2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC. *ĐS:* $G(2;1)$

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. *ĐS:* $D(8;-1)$

Bài 22. Cho A(2; 3), B(−1; −1), C(6; 0).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC. *ĐS:*

c) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành. *ĐS:*

Bài 23. Cho A(0; 2) , B(6; 4) , C(1; −1). Tìm toạ độ các điểm M, N, P sao cho:

a) Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P lần lượt làm trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

b) Tam giác MNP nhận các điểm A, B, C lần lượt làm trung điểm của các cạnh MN, NP, PM.

ĐS: a)

CHƯƠNG II
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

1. Định nghĩa

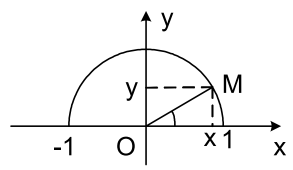
Lấy M trên nửa đường tròn đơn vị tâm O. Xét góc $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử M(x; y).

sin$\alpha = y$ *(tung độ)*

cos$\alpha = x$ *(hoành độ)*

$tan\alpha = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\text{tung độ}}{\text{hoành độ}}\right) \qquad (x \neq 0)$

$cot\alpha = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{\text{hoành độ}}{\text{tung độ}}\right) \qquad (y \neq 0)$



Chú ý: – *Nếu α tù thì cos*$\alpha < 0$, *tan*$\alpha < 0$, *cot*$\alpha < 0$.

– *tan*α *chỉ xác định khi* $\alpha \neq 90^0$, *cot*α *chỉ xác định khi* $\alpha \neq 0^0$ *và* $\alpha \neq 180^0$.

2. Tính chất

• Góc phụ nhau

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$

$\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

• Góc bù nhau

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	0
cotα	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	‖

4. Các hệ thức cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \ (\sin\alpha.\cos\alpha \neq 0)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$

Chú ý: $0 \le \sin\alpha \le 1;\ -1 \le \cos\alpha \le 1.$

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $a\sin 0^0 + b\cos 0^0 + c\sin 90^0$
b) $a\cos 90^0 + b\sin 90^0 + c\sin 180^0$

c) $a^2\sin 90^0 + b^2\cos 90^0 + c^2\cos 180^0$
d) $3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

e) $4a^2\sin^2 45^0 - 3(a\tan 45^0)^2 + (2a\cos 45^0)^2$

ĐS: a) $b + c$ *b)* b *c)* $a^2 - c^2$ *d)* $-\frac{1}{2}$ *e)* a^2

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau khi x bằng 0^0; 30^0; 45^0; 60^0:

a) $\sin x + \cos x$
b) $2\sin x + \cos 2x$.

	0^0	30^0	45^0	60^0
$\sin x + \cos x$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
$2\sin x + \cos 2x$	1	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

Bài 3. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a) $\sin\beta = \frac{1}{4}$, β nhọn. *ĐS:*

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ *ĐS:*

c) $\tan x = 2\sqrt{2}$ *ĐS:*

Bài 4. Biết $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^0$, $\tan 15^0$, $\cot 15^0$.

ĐS: $\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Bài 5. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^0 < x < 180^0$. Tính $A = \frac{\tan x + 3\cot x + 1}{\tan x + \cot x}$. *ĐS:*

b) $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$ *ĐS:*

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$
b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$
d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$

e) $\sin x.\cos x(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2\sin x.\cos x$

Bài 7. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\cos y + \sin y.\tan y$
b) $\sqrt{1+\cos b}.\sqrt{1-\cos b}$
c) $\sin a\sqrt{1+\tan^2 a}$

d) $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} + \tan x.\cot x$
e) $\frac{1 - 4\sin^2 x.\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

f) $\sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

ĐS: a)

Bài 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

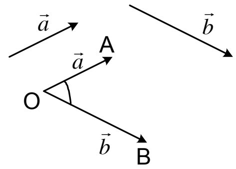
a) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$
b) $\sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Khi đó $\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}}$ với $0^0 \leq \widehat{AOB} \leq 180^0$.



Chú ý:

+ $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
+ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *cùng hướng*
+ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *ngược hướng*
+ $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

• Định nghĩa: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})}$.

Đặc biệt: $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

• Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và $\forall k \in R$, ta có:

+ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;

$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$; $\quad \vec{a}^2 \geq 0;\ \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

+ $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$; $\quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

+ $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ nhọn $\quad \vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ tù

$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ vuông.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

• Cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Khi đó: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$.

• $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $\quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$; $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

• Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Khi đó: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

VẤN ĐỀ 1: Tính tích vô hướng của hai vectơ

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = $2a$. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

ĐS: a) 0 *b)* $-3a^2$ *c)* $-a^2$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

ĐS: a)

Bài 3. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

ĐS: a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20; \widehat{A} = 60^0$ *b)* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 44$ *c)* $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = \frac{33}{2}$

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ c) $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ e) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

HD: a) a^2 *b)* a^2 *c)* $2a^2$ *d)* $-a^2$ *e) 0*

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 2, BC = 4, CA = 3.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra cosA.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.

c) Tính giá trị biểu thức S = $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$.

d) Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (D ∈ BC). Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, suy ra AD.

HD: a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$ *b)* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}$

c) Chú ý: $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB})$. $S = -\frac{29}{6}$

d) Sử dụng tính chất đường phân giác của góc trong tam giác:

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC},\ AD = \frac{\sqrt{54}}{5}$$

Bài 6. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, $\widehat{A} = 120^0$. M là trung điểm của BC.

a) Tính BC, AM.

b) Tính IJ, trong đó I, J được xác định bởi: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}, \overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

HD: a) $BC = \sqrt{19}$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$ *b)* $IJ = \frac{2}{3}\sqrt{133}$

Bài 7. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao AB, cạnh đáy AD = a, BC = $2a$. Tính AB trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -a^2$ c) $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = a^2$ (I là trung điểm của AB).

HD: a) AB = a *b)* $AB = a\sqrt{3}$ *c) AB = 2a.*

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = $a\sqrt{3}$. M là trung điểm của BC. Biết $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính AB, AC.

HD: Phân tích các vectơ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. *AB = a, AC =* $a\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC. AD là đường phân giác trong góc A. H là hình chiếu của D trên AB. Biết $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 2a^2$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 3a^2$, AH = a.

a) Tính AB, AC. b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, suy ra BC, AD.

HD: a) AB = 2a, AC = 3a *b) Sử dụng tính chất đường phân giác:* $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

Tính $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -a^2$. $BC = a\sqrt{15}$, $AD = \frac{2\sqrt{15}}{5}a$.

Bài 10. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Tính AC^2, BD^2, AC^2+BD^2, biết AB = a, AD = b, $\widehat{BAD} = \varphi$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AE^2 - BE^2 = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)$.

HD:

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6, AC = 8. Gọi M, N là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Tính AN. b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$. Suy ra độ dài đoạn MN

HD: a)

Bài 12. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

a) Tính $\vec{a}.\vec{b}$. Biết là các vectơ đơn vị và $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$.

b) Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 1$.

c) Tính $|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$. Biết $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$.

d) Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$. Biết $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$.

HD: a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}$ *b)* $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ *c)* *d)*

Bài 13. Cho $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc của 2 vectơ $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$.

HD:

Bài 14. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thoả $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ và $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$. Tính $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$.

HD:

Bài 15.

a)

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài

Bài 1. Cho tứ giác ABCD.

a) Chứng minh: $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2.$$

HD: a) Phân tích $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$, $CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2$.

b) $AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2.$$

HD: Chú ý: $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$, $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH}$.

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD, M là một điểm bất kì. Chứng minh:

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

HD: Phân tích các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$ *theo* $\overrightarrow{MO}$.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

HD: a) Phân tích $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

HD: Sử dụng hệ thức trung điểm.

Bài 6. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

HD: a) Chú ý $AI \perp BM, BI \perp AN$. *Phân tích* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$.

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = 4R^2$.

Bài 7. Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AM, BN, CP. Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BE}$ b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

HD:

Bài 8.

a)

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh hai vectơ vuông góc. Thiết lập điều kiện vuông góc

Bài 1. Cho $\vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng các vectơ $2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Bài 2. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là *a, b, c,* nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H là điểm đước xác định bởi $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$. Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Tìm hệ thức giữa *a, b, c* sao cho OH ⊥ AM (M là trung điểm của BC).

HD: a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ *b)* $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Bài 3. Cho đường tròn (O; R). Chứng minh điều kiện cần và đủ để AM là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M là $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = R^2$.

HD: Sử dụng $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{OM}$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt ở trên các cạnh BC, CA, AB sao cho BM = a, CN = $2a$, AP = x ($0 < x < 3a$).

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB}\right)$.

c) Tính x để AM ⊥ PN.

HD: a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ *c)* $x = \frac{4}{5}a$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = c, AC = b. M là trung điểm của BC. Tìm điểm D trên AC sao cho BD ⊥ AM.

HD: D ∈ AC sao cho $AD = \frac{c^2}{b}$.

Bài 6. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = h, cạnh đáy AD = a, BC = b. I là trung điểm của AB. Tìm hệ thức giữa a, b, h sao cho:

a) CI ⊥ DI b) BD ⊥ CI c) AC ⊥ DI

d) Trung tuyến BM của ΔABC vuông góc với trung tuyến CN của ΔBCD.

HD: a) $ab-\frac{h^2}{4}=0$ *b)* $ab-\frac{h^2}{2}=0$ *c)* $ab-\frac{h^2}{2}=0$ *d)* $h^2-2b^2+ab=0$

Bài 7. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = a, AD = b, góc nhọn ở đáy bằng 60^0. Tìm hệ thức giữa a, b để AC ⊥ BD.

HD:

Bài 8. Cho tam giác ABC có đường cao CH và thoả hệ thức $CA^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại C.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HC và HB. Chứng minh AI ⊥ CJ.

Bài 9. Cho tam giác ABC có AB = $3a$, AC = $4a$, BC = $5a$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

b) Gọi E, F là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, I là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh AI ⊥ BC.

HD:

Bài 10. Cho ΔABC có AB = 8, AC = 3, $\widehat{BAC}=60^0$. Gọi E, F là hai điểm sao cho $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})$. b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, suy ra độ dài cạnh BC.

b) Gọi I là một điểm trên BC sao cho BI = x. Xác định x để AI ⊥ EF.

HD:

Bài 11. Cho tam giác đều ABC. M, N, P là các điểm sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b) Xác định k để AM ⊥ PN.

HD:

Bài 12. Cho tam giác đều ABC. M, N, P là các điểm sao cho $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b) Xác định k để PN⊥ PN.

HD:

Bài 13.

a)

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm thoả đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài

Bài 1. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $MA^2 = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ b) $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ d) $2MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

HD: a) Sử dụng $\overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2$. *Tập hợp là đường tròn (B; BA).*

b) Trên BC lấy điểm I: $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. *Tập hợp là đường thẳng qua I và vuông góc với BA.*

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tập hợp là đường tròn đường kính IJ.

d) Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. *Tập hợp là đường tròn đường kính IA.*

Bài 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$ b) $(\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0$

HD:

Bài 3. Cho hình vuông ABCD cạnh *a*, tâm O. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = a^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$

c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$ d) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$

HD: a) Phân tích các vectơ theo $\overrightarrow{MO}$. *Tập hợp là đường tròn (O; a).*

b) Phân tích các vectơ theo $\overrightarrow{MO}$. *Tập hợp là đường tròn* $\left(O; \dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right)$.

c) Phân tích các vectơ theo $\overrightarrow{MO} \Rightarrow OM \perp OD$. *Tập hợp là đường thẳng AC.*

d) Gọi G là trọng tâm ΔABC, Q là điểm thoả $\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{BC}$. *Tập hợp là đường thẳng qua Q và vuông góc với BC.*

Bài 4. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \dfrac{1}{2}IJ^2$.

HD: Phân tích các vectơ theo $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}$. *Tập hợp là đường tròn* $\left(O; \sqrt{\dfrac{AB^2 + CD^2}{8}}\right)$, *với O là trung điểm của IJ.*

VẤN ĐỀ 5: Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Bài 1. Cho tam giác ABC có A(1; –1), B(5; –3), C(2; 0).
a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.
b) Tìm toạ độ điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–2; 6), C(9; 8).
a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.
b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
c) Tìm toạ độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.
d) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.
ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–2; 6), C(9; 8).
a) Tìm toạ độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.
b) Tìm toạ độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N.
c) Tìm toạ độ điểm D để ABDC là hình chữ nhật.
d) Tìm toạ độ điểm K trên O*x* để AOKB là hình thang, đáy AO.
ĐS:

Bài 4. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–2; 6), C(9; 8).
a) Tìm toạ độ điểm T thoả $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$
b) Tìm toạ độ điểm E đối xứng với A qua B.
c) Tìm toạ độ điểm I chân đường phân giác trong tại đỉnh C của ΔABC.
d) Tính các góc trong tam giác ABC.
ĐS:

Bài 5. Chứng minh các điểm $A(1;-1), B(5;1), C(3;5), D(-1;3)$ là các đỉnh của một hình vuông

Bài 6. Cho hai đỉnh kề nhau của hình vuông ABCD là: $A(-1;-3), B(3;5)$. Tìm hai đỉnh còn lại.
ĐS:

Bài 7. Cho hai đỉnh đối diện của hình vuông ABCD là: $A(3;4), C(1;-2)$. Tìm hai đỉnh còn lại.
ĐS:

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, biết $\widehat{A} = 120^0$, $B(-1;2), C(4;1)$. Tìm toạ độ đỉnh A.
ĐS:

Bài 9. Cho hình thoi ABCD với $A(1;3), B(-1;-1)$. Tìm toạ độ các đỉnh C, D nếu đường thẳng CD đi qua điểm $M(6;7)$.
ĐS:

Bài 10. Cho hình thoi ABCD với $B(1;-3), D(0;4), \widehat{A} = 60^0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, C.
ĐS:

Bài 11.
a)
ĐS:

III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC có:
– độ dài các cạnh: $BC = a, CA = b, AB = c$
– độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c
– độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c
– bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
– nửa chu vi tam giác: p
– diện tích tam giác: S

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

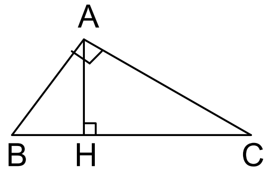
4. Diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R}$$
$$= pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(công thức Hê–rông)}$$

Giải tam giác *là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.*

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông *(nhắc lại)*

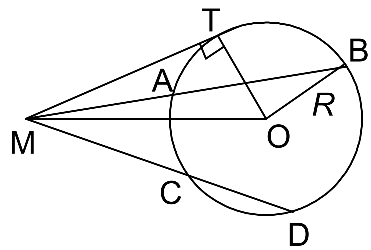
Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao.



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pi–ta–go)
- $AB^2 = BC.BH$, $\quad AC^2 = BC.CH$
- $AH^2 = BH.CH$, $\quad \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AH.BC = AB.AC$
- $b = a.\sin B = a.\cos C = c\tan B = c\cot C$; $\quad c = a.\sin C = a.\cos B = b\tan C = b\cot C$

6. Hệ thức lượng trong đường tròn *(bổ sung)*

Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định.



- Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD.

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$$

- Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT.

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$$

VẤN ĐỀ 1: Định lí côsin

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết $AC = 13, AB + BC = 22, \widehat{B} = 60^0$. Tính AB, BC.
ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC, biết $\widehat{B} = 120^0, AB = 6, AC = 10$. Tính BC.
ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết $AB = 3, AC = 5, \widehat{A} = 120^0$. Tính độ dài đường phân giác trong BD và các đoạn AD, CD.
ĐS:

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết $AB = 12,\ AB = 15,\ BC = 18$. Tính độ dài đường phân giác trong của góc A.
ĐS:

Bài 5. Tính góc A của tam giác ABC, biết $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$.
ĐS: $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài 6. Giả sử *a*, *b* là độ dài cạnh của một hình bình hành, d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo. Chứng minh: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Bài 7. Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu $a = 2b\cos C$ thì tam giác ABC cân.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC, cạnh *a*. Trên các đoạn BC, AB lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $BD = \dfrac{1}{3}a, AE = DE$. Tính CE.
ĐS:

Bài 9. Cho tứ giác lồi ABCD với E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và O là giao điểm của EH và FG. Tính độ dài các đường chéo AC, BD nếu $EH = a$, $FG = b$, $\widehat{FOH} = 60^0$.
ĐS:

Bài 10. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, D, N. Tính độ dài đoạn MD nếu $NA = 2, NC = 3, \widehat{C} = 60^0$.
ĐS:

Bài 11. Đường tròn nội tiếp trong tam giác KLM tiếp xúc với KM tại A. Tính độ dài đoạn AL nếu $AK = 10,\ AM = 4,\ \widehat{L} = 60^0$.
ĐS:

Bài 12. Cho tam giác ABC với $\widehat{B} = 60^0, AB + BC = 11 (AB > BC)$. Bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác là $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Tính độ dài đường cao AH.
ĐS:

Bài 13. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp trong tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại M. Tính độ dài hai cạnh AB, AC nếu $BM = 6, MC = 8$ và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 4.
ĐS:

Bài 14.
ĐS:

VẤN ĐỀ 2: Định lí sin

Bài 1. Chứng minh nếu tam giác ABC có $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ thì tam giác ABC cân.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin \mathrm{A}) + c(\sin \mathrm{A} - \sin B) = 0$$

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{A} = 30^0, AB = AC = 5$. Đường thẳng qua B và tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AC tại D. Tính BD.

ĐS:

Bài 4. Cho tam giác ABC. Đường tròn bán kính R qua A, B cắt BC tại D. Tìm bán kính đường tròn qua 3 điểm A, D, C nếu $AB = c, AC = b$.

ĐS:

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh *a*. Tìm bán kính đường tròn đi qua trung điểm cạnh AB, tâm hình vuông và đỉnh C.

ĐS:

Bài 6. Trong đường tròn bán kính R, kẻ hai dây cung MN, PQ vuông góc với nhau. Tính khoảng cách MP nếu $NQ = a$.

ĐS:

Bài 7. Cho tam giác ABC với $BC = a, \widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta$. Tìm bán kính đường tròn tiếp xúc với AC tại A và tiếp xúc với BC.

ĐS:

Bài 8. Cho tam giác ABC với . Đường phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. Tính AK.

ĐS:

Bài 9.

ĐS:

VẤN ĐỀ 3: Độ dài trung tuyến

Bài 1. Cho tam giác với M là trung điểm cạnh AB. Tính CM nếu $AC = 6, BC = 4, \widehat{C} = 120^0$.

ĐS:

Bài 2. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2\mathrm{R}$. Trên AB lấy 2 điểm M, N sao cho AM = MN = NB. Chứng minh với mọi điệp P trên đường tròn ta có $PM^2 + PN^2$ không đổi.

Bài 3. Cho hai đường tròn đồn tâm. Chứng minh tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm của đường tròn này đến hai điểm mút của đường kính của đường tròn kia không phụ thuộc vào vị trí của điểm và đường kính.

Bài 4. Xác định tập hợp các điểm M thoả $\overrightarrow{MA}.MB = k$, trong đó A, B là hai điểm cố định và $k \neq 0$ là một hằng số.

ĐS:

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại C. Xác định tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$MA^2 + MB^2 = 2MC^2$$

ĐS:

Bài 6.

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Diện tích tam giác

Bài 1. Cho tam giác đều ABC, N là một điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$. Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN và ABC.
ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = \alpha, BC = a, AC = b$. Trên các cạnh AC và AB lấy hai điểm M, N với M là trung điểm cạnh AC và $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$. Tính độ dài đoạn MN.
ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC với $AB = 2$, trung tuyến $BD = 1$, $\widehat{BDA} = 30^0$. Tính AD, BC và diện tích tam giác ABC.
ĐS:

Bài 4. Đường tròn bán kính R đi qua hai đỉnh A, B của tam giác ABC và tiếp xúc với AC tại A. Tính diện tích tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta$.
ĐS:

Bài 5. Cho tam giác ABC có $S_{\Delta ABC} = 15\sqrt{3}, \widehat{A} = 120^0, \widehat{B} > \widehat{C}$. Khoảng cách từ A đến tâm đường tròn nội tiếp tam giác bằng 2. Tính độ dài trung tuyến BM của tam giác ABC.
ĐS:

Bài 6. Tính diện tích hình thoi ABCD nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD là R và r.
ĐS:

Bài 7.
ĐS:

VẤN ĐỀ 5: Giải tam giác

Bài 1. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c = 14;\ \widehat{A} = 60^0;\ \widehat{B} = 40^0$
b) $b = 4,5;\ \widehat{A} = 30^0;\ \widehat{C} = 75^0$
c) $c = 35;\ \widehat{A} = 40^0;\ \widehat{C} = 120^0$
d) $a = 137,5;\ \widehat{B} = 83^0;\ \widehat{C} = 57^0$

Bài 2. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 6,3;\ b = 6,3;\ \widehat{C} = 54^0$
b) $b = 32;\ c = 45;\ \widehat{A} = 87^0$
c) $a = 7;\ b = 23;\ \widehat{C} = 130^0$
d) $b = 14;\ c = 10;\ \widehat{A} = 145^0$

Bài 3. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 14;\ b = 18;\ c = 20$
b) $a = 6;\ b = 7,3;\ c = 4,8$
c) $a = 4;\ b = 5;\ c = 7$
d) $a = 2\sqrt{3};\ b = 2\sqrt{2};\ c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}$ b) $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=1-\sin x.\cos x$

c) $\left(\dfrac{\tan^2 x-1}{2\tan x}\right)^2-\dfrac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=-1$ d) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x}=1+\tan^2 x$

e) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1+\tan x)}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x(1+\cot x)}=\sin x-\cos x$

f) $\left(\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right).\left(\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

g) $\cos^2 x(\cos^2 x+2\sin^2 x+\sin^2 x\tan^2 x)=1$

Bài 2. Biết $\sin 18^0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Tính $\cos 18^0$, $\sin 72^0$, $\sin 162^0$, $\cos 162^0$, $\sin 108^0$, $\cos 108^0$, $\tan 72^0$.

ĐS:

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) A = $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x$ b) B = $\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$

ĐS:

Bài 4. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

a) Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$, biết $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

b) Tính $|\vec{a}-\vec{b}|$, $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, biết $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=120^0$.

c) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, biết $|\vec{a}+\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=4$, $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$.

d) Tính góc $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, biết $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$ và hai vectơ $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=5\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc.

e) Tính góc $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, biết $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$, $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$. (*Chứng tỏ* $|\vec{a}|=|\vec{b}|$)

ĐS:

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, BC = 6.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và cosA.

b) M, N là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Tính MN.

ĐS:

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có AB = $\sqrt{3}$, AD = 1, $\widehat{BAD}=60^0$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài hai đường chéo AC và BD. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)$.

ĐS:

Bài 7. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về phía ngoài tam giác, vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh AI $\perp$ DE.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh HK $\perp$ IJ.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Trên đường chéo AC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

a) Chứng minh DN vuông góc với MN.

b) Tính tổng $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB}$.

ĐS:

Bài 10. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0$

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$ d) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

HD:

Bài 11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

a) $b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$ b) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$

c) $\sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B = \sin(B + C)$ d) $a = b.\cos C + c.\cos B$

e) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ f) $h_a = 2R \sin B \sin C$

g) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ h) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Bài 12. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A$, $h_b h_c = h_a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ d) Nếu $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ thì $\widehat{A} = 60^0$.

e) Nếu $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$ thì $\widehat{A} = 60^0$ f) Nếu $\cos(A + C) + 3\cos B = 1$ thì $\widehat{B} = 60^0$.

g) Nếu $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ thì $\widehat{A} = 60^0$.

Bài 13. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\frac{b^2 - a^2}{2c} = b\cos A - a\cos B$ thì ΔABC cân đỉnh C.

b) Nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$ thì ΔABC cân đỉnh B.

c) Nếu $a = 2b.\cos C$ thì ΔABC cân đỉnh A.

d) Nếu $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B.\sin C}$ thì ΔABC vuông tại A.

e) Nếu $S = 2R^2 \sin B.\sin C$ thì ΔABC vuông tại A.

Bài 14. Cho ΔABC. Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau là: $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Bài 15. Cho một tam giác có độ dài các cạnh là: $x^2 + x + 1;\ 2x + 1;\ x^2 - 1$.

a) Tìm *x* để tồn tại một tam giác như trên.

b) Khi đó chứng minh tam giác ấy có một góc bằng 120^0.

Bài 16. Cho ΔABC có $\widehat{B} < 90^0$, AQ và CP là các đường cao, $S_{\Delta ABC} = 9S_{\Delta BPQ}$.

a) Tính cosB.

b) Cho PQ = $2\sqrt{2}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

HD: a) $\cos B = \frac{1}{3}$ *b)* $R = \frac{9}{2}$

Bài 17. Cho hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, r) cắt nhau tại hai điểm A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại C và D. Gọi N là giao điểm của AB và CD (B nằm giữa A và N). Đặt $\widehat{AO_1C} = \alpha$, $\widehat{AO_2D} = \beta$.

a) Tính AC theo R và α; AD theo r và β.

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

HD: a) $AC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $AD = 2r\sin\frac{\beta}{2}$ *b)* $\sqrt{Rr}$.

Bài 18. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC, BD = a, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CAD} = \beta$.

a) Tính AC. b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo a, α, β.

HD: a) $AC = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$ *b)* $S = \frac{a^2\cos(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Bài 19. Cho ΔABC cân đỉnh A, $\widehat{A} = \alpha$, AB = m, D là một điểm trên cạnh BC sao cho BC = 3BD.

a) Tính BC, AD.

b) Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD là bằng nhau. Tính cosα để bán kính của chúng bằng $\frac{1}{2}$ bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

HD: a) $BC = 2m\sin\frac{\alpha}{2}$, $AD = \frac{m}{3}\sqrt{5+4\cos\alpha}$ *b)* $\cos\alpha = -\frac{11}{16}$.

Bài 20. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chép AC và BD.

a) Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Bài 21. Cho ΔABC vuông ở A, BC = a, đường cao AH.

a) Chứng minh $AH = a.\sin B.\cos B$, $BH = a.\cos^2 B$, $CH = a.\sin^2 B$.

b) Từ đó suy ra $AB^2 = BC.BH$, $AH^2 = BH.HC$.

Bài 22. Cho ΔAOB cân đỉnh O, OH và OK là các đường cao. Đặt OA = a, $\widehat{AOH} = \alpha$.

a) Tính các cạnh của ΔOAK theo a và α.

b) Tính các cạnh của các tam giác OHA và AKB theo a và α.

c) Từ đó tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ theo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

ĐS:

Bài 23. Cho ΔABC.

a) Có a = 5, b = 6, c = 3. Trên các đoạn AB, BC lần lượt lấy các điểm M, K sao cho BM = 2, BK = 2. Tính MK.

b) Có $\cos A = \frac{5}{9}$, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$, DA = 6, $BD = \frac{16}{3}$. Tính chu vi tam giác ABC.

HD: a) $MK = \frac{8\sqrt{30}}{15}$ *b) AC = 5,* $BC = \frac{25}{3}$*, AB = 10*

Bài 24. Cho ΔABC.

a) Có $\widehat{B} = 60^0$, R = 2, I là tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACI.

b) Có $\widehat{A} = 90^0$, AB = 3, AC = 4, M là trung điểm của AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCM.

c) Có a = 4, b = 3, c = 2, M là trung điểm của AB. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBCM.

HD: a) $R = 2$ *b)* $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$ *c)* $R = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{23}{30}}$

Bài 25. Cho ΔABC.

a) Có AC = 13, AB = 7, BC = 15. Tính $\widehat{B}$, R, h_a.

b) Có $\widehat{A} = 120^0$, BC = 7, AC = 5. Tính AB, R, *r*.

c) Có $\widehat{A} = 60^0$, BC = 7, diện tích $S = 10\sqrt{3}$. Tính AB, AC.

d) Có AC = 2, AB = 3, BC = 4. Tính các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

ĐS:

Bài 26. Cho ΔABC.

a) Có $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}, BC = 2\sqrt{3}, CA = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{A}$, R và h_a.

b) Có $\widehat{A} = 120^0$, AB = 6, AC = 10. Tính BC, R, S.

c) Có $\widehat{A} = 60^0$, AB = 5, BC = 7. Tính AC, R, r, h_a.

d) Có $\widehat{A} = 120^0$, BC = 7, AC = 5. Tính AB, R, r m_a, l_a.

e) Có AB = 3, BC = 5, CA = 6. Tính S, R, h_a.

ĐS:

Bài 27. Cho ΔABC.

a) Có AB = 8, $\widehat{A} = 60^0$, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Tính BC, AC, $S_{\Delta ABC}$.

b) Có $\widehat{A} = 60^0, \widehat{B} > \widehat{C}$, $R = \frac{13\sqrt{3}}{3}, r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Tính AB, BC, CA, $S_{\Delta ABC}$.

c) Có $\widehat{B} = 60^0$, $h_c = \frac{7\sqrt{3}}{2}$, nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$. Tính AB, BC, CA, $S_{\Delta ABC}$.

d) Có $BC = 2\sqrt{3}, CA = 2\sqrt{2}, AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, h_a, l_a$.

ĐS:

Bài 28. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 45^0, AC = 2\sqrt{2}$.

a) Tính AB, BC, R, r, $S_{\Delta ABC}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBIC.

ĐS:

Bài 29. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$, AB = 5, AC = 8.

a) Tính BC, $S_{\Delta ABC}$ và R.

b) Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Tính MN.

ĐS:

Bài 30. Cho ΔABC vuông tại A có AB = 5, AC = 12.

a) Tính R, r. b) Vẽ đường phân giác trong AD. Tính DB, DC, AD.

ĐS:

Bài 31. Cho ΔABC.

a) Có $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$. Tính các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$. *ĐS:* $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 45^0, \widehat{C} = 15^0$

b) Có $\dfrac{\sin A}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sin B}{2} = \dfrac{\sin C}{1+\sqrt{3}}$. Tính các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$. *ĐS:* $\widehat{A} = 60^0, \widehat{B} = 45^0, \widehat{C} = 75^0$

Bài 32. Cho ΔABC.

a) Có

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ đgl **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét: *– Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ (k ≠ 0) cũng là một VTCP của Δ.*

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.

2. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ đgl **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

Nhận xét: *– Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ (k ≠ 0) cũng là một VTPT của Δ.*

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.

– Nếu $\vec{u}$ là một VTCP và $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.

3. Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

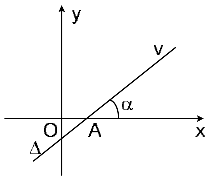
Phương trình tham số của Δ: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}}$ (1) *(t là tham số).*

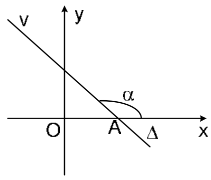
Nhận xét: *– M(x; y) ∈ Δ ⇔ ∃ t ∈ R:* $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$.

– Gọi k là hệ số góc của Δ thì:

+ k = tanα, *với α = $\widehat{xAv}$, α ≠ 90^0.*

+ k = $\dfrac{u_2}{u_1}$, *với* $u_1 \neq 0$.





4. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Phương trình chính tắc của Δ: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}}$ (2) ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$).

Chú ý: *Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.*

5. Phương trình tổng quát của đường thẳng

PT $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đgl **phương trình tổng quát** của đường thẳng.

Nhận xét: *– Nếu Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ thì Δ có:*

VTPT là $\vec{n} = (a; b)$ và VTCP $\vec{u} = (-b; a)$ hoặc $\vec{u} = (b; -a)$.

– Nếu Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ thì phương trình của Δ là:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

Các trường hợp đặc biệt:

Các hệ số	Phương trình đường thẳng Δ	Tính chất đường thẳng Δ
$c = 0$	$ax + by = 0$	*Δ đi qua gốc toạ độ O*
$a = 0$	$by + c = 0$	*Δ // Ox hoặc Δ ≡ Ox*
$b = 0$	$ax + c = 0$	*Δ // Oy hoặc Δ ≡ Oy*

- *Δ đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) (a, b ≠ 0): Phương trình của Δ:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

  (phương trình đường thẳng theo đoạn chắn) .

- *Δ đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0)$ *và có hệ số góc k: Phương trình của Δ:* $y - y_0 = k(x - x_0)$

  (phương trình đường thẳng theo hệ số góc)

6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Δ_1 cắt Δ_2 ⇔ hệ (1) có một nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$ (*nếu* $a_2, b_2 \ne 0$)
- $\Delta_1 // \Delta_2$ ⇔ hệ (1) vô nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ne \frac{c_1}{c_2}$ (*nếu* $a_2, b_2, c_2 \ne 0$)
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ ⇔ hệ (1) có vô số nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (*nếu* $a_2, b_2, c_2 \ne 0$)

7. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$)

và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$).

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \le 90^0 \\ 180^0 - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^0 \end{cases}$$

$$\cos\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{\left|\vec{n}_1 . \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| . \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} . \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Chú ý: • $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• *Cho* Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ *thì:*

+ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2;\ m_1 \ne m_2$ + $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 . k_2 = -1$.

8. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

• Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$.

$$\boxed{d(M_0, \Delta) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

• Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

– *M, N* nằm cùng phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

– *M, N* nằm khác phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

• ***Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng***

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

• *Để lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định **một điểm** $M_0(x_0;y_0) \in \Delta$ và **một VTCP** $\vec{u} = (u_1;u_2)$ của Δ.*

PTTS của Δ: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$; *PTCT của Δ:* $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$ ($u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$).

• *Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định **một điểm** $M_0(x_0;y_0) \in \Delta$ và **một VTPT** $\vec{n} = (a;b)$ của Δ.*

PTTQ của Δ: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

• *Một số bài toán thường gặp:*

+ Δ đi qua hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ *(với* $x_A \neq x_B$, $y_A \neq y_B$*):*

PT của Δ: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

+ Δ đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) (a, b ≠ 0): PT của Δ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

+ Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ *và có hệ số góc k: PT của Δ:* $y - y_0 = k(x - x_0)$

Chú ý: *Ta có thể chuyển đổi giữa các phương trình tham số, chính tắc, tổng quát của một đường thẳng.*

• *Để tìm điểm M′ đối xứng với điểm M qua đường thẳng d, ta có thể thực hiện như sau:*

Cách 1: – Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và vuông góc với d.

– Xác định I = d ∩ Δ (I là hình chiếu của M trên d).

– Xác định M′ sao cho I là trung điểm của MM′.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của MM′. Khi đó:

M′ đối xứng của M qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}_d \\ I \in d \end{cases}$ *(sử dụng toạ độ)*

• *Để viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ, ta có thể thực hiện như sau:*

– Nếu d // Δ:

+ Lấy A ∈ d. Xác định A′ đối xứng với A qua Δ.

+ Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và song song với d.

– Nếu d ∩ Δ = I:

+ Lấy A ∈ d (A ≠ I). Xác định A′ đối xứng với A qua Δ.

+ Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và I.

• *Để viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với đường thẳng d qua điểm I, ta có thể thực hiện như sau:*

– Lấy A ∈ d. Xác định A′ đối xứng với A qua I.

– Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và song song với d.

Bài 1. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTCP $\vec{u}$:

a) M(–2; 3) , $\vec{u}=(5;-1)$ b) M(–1; 2), $\vec{u}=(-2;3)$ c) M(3; –1), $\vec{u}=(-2;-5)$

d) M(1; 2), $\vec{u}=(5;0)$ e) M(7; –3), $\vec{u}=(0;3)$ f) M ≡ O(0; 0), $\vec{u}=(2;5)$

ĐS:

Bài 2. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTPT $\vec{n}$:

a) M(–2; 3) , $\vec{n}=(5;-1)$ b) M(–1; 2), $\vec{n}=(-2;3)$ c) M(3; –1), $\vec{n}=(-2;-5)$

d) M(1; 2), $\vec{n}=(5;0)$ e) M(7; –3), $\vec{n}=(0;3)$ f) M ≡ O(0; 0), $\vec{n}=(2;5)$

ĐS:

Bài 3. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc k:

a) M(–3; 1), $k = -2$ b) M(–3; 4), $k = 3$ c) M(5; 2), $k = 1$

d) M(–3; –5), $k = -1$ e) M(2; –4), $k = 0$ f) M ≡ O(0; 0), $k = 4$

ĐS:

Bài 4. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua hai điểm A, B:

a) A(–2; 4), B(1; 0) b) A(5; 3), B(–2; –7) c) A(3; 5), B(3; 8)

d) A(–2; 3), B(1; 3) e) A(4; 0), B(3; 0) f) A(0; 3), B(0; –2)

g) A(3; 0), B(0; 5) h) A(0; 4), B(–3; 0) i) A(–2; 0), B(0; –6)

ĐS:

Bài 5. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d:

a) M(2; 3), d: $4x-10y+1=0$ b) M(–1; 2), $d \equiv Ox$ c) M(4; 3), $d \equiv Oy$

d) M(2; –3), d: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \end{cases}$ e) M(0; 3), d: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$

ĐS:

Bài 6. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d:

a) M(2; 3), d: $4x-10y+1=0$ b) M(–1; 2), $d \equiv Ox$ c) M(4; 3), $d \equiv Oy$

d) M(2; –3), d: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \end{cases}$ e) M(0; 3), d: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$

ĐS:

Bài 7. Cho tam giác ABC. Viết phương trình các cạnh, các đường trung tuyến, các đường cao của tam giác với:

a) A(2; 0), B(2; –3), C(0; –1) b) A(1; 4), B(3; –1), C(6; 2)

c) A(–1; –1), B(1; 9), C(9; 1) d) A(4; –1), B(–3; 2), C(1; 6)

ĐS:

Bài 8. Cho tam giác ABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao của tam giác, với:

a) $AB: 2x-3y-1=0,\ BC: x+3y+7=0,\ CA: 5x-2y+1=0$

b) $AB: 2x+y+2=0,\ BC: 4x+5y-8=0,\ CA: 4x-y-8=0$

ĐS:

Bài 9. Viết phương trình các cạnh và các trung trực của tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt là các điểm M, N, P, với:

a) M(–1; –1), N(1; 9), P(9; 1) b) $M\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right), N\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right), P(2;-4)$

c) $M\left(2;-\frac{3}{2}\right), N\left(1;-\frac{1}{2}\right), P(1;-2)$ d) $M\left(\frac{3}{2};2\right), N\left(\frac{7}{2};3\right), P(1;4)$

ĐS:

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục toạ độ 2 đoạn bằng nhau, với:

a) M(–4; 10) b) M(2; 1) c) M(–3; –2) d) M(2; –1)

ĐS:

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cùng với hai trục toạ độ tạo thành một tam giác có diện tích S, với:

a) M(–4; 10), S = 2 b) M(2; 1), S = 4 c) M(–3; –2), S = 3 d) M(2; –1), S = 4

ĐS:

Bài 12. Tìm hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d và điểm M′ đối xứng với M qua đường thẳng d với:

a) M(2; 1), $d: 2x+y-3=0$ b) M(3; – 1), $d: 2x+5y-30=0$

c) M(4; 1), $d: x-2y+4=0$ d) M(– 5; 13), $d: 2x-3y-3=0$

ĐS:

Bài 13. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ, với:

a) $d: 2x-y+1=0,\ \Delta: 3x-4y+2=0$ b) $d: x-2y+4=0,\ \Delta: 2x+y-2=0$

c) $d: x+y-1=0,\ \Delta: x-3y+3=0$ d) $d: 2x-3y+1=0,\ \Delta: 2x-3y-1=0$

ĐS:

Bài 14. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua điểm I, với:

a) $d: 2x-y+1=0,\ I(2;1)$ b) $d: x-2y+4=0,\ I(-3;0)$

c) $d: x+y-1=0,\ I(0;3)$ d) $d: 2x-3y+1=0,\ I\equiv O(0;0)$

ĐS:

VẤN ĐỀ 2: Các bài toán dựng tam giác

Đó là các bài toán xác định toạ độ các đỉnh hoặc phương trình các cạnh của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó.
Để giải loại bài toán này ta thường sử dụng đến các cách dựng tam giác.
Sau đây là một số dạng:

Dạng 1: *Dựng tam giác ABC, khi biết các đường thẳng chứa cạnh BC và hai đường cao BB′, CC′.*

Cách dựng: – *Xác định $B = BC \cap BB'$, $C = BC \cap CC'$.*
– *Dựng AB qua B và vuông góc với CC′.*
– *Dựng AC qua C và vuông góc với BB′.*
– *Xác định $A = AB \cap AC$.*

Dạng 2: *Dựng tam giác ABC, khi biết đỉnh A và hai đường thẳng chứa hai đường cao BB′, CC′.*

Cách dựng: – *Dựng AB qua A và vuông góc với CC′.*
– *Dựng AC qua A và vuông góc với BB′.*
– *Xác định $B = AB \cap BB'$, $C = AC \cap CC'$.*

Dạng 3: *Dựng tam giác ABC, khi biết đỉnh A và hai đường thẳng chứa hai đường trung tuyến BM, CN.*

Cách dựng: – *Xác định trọng tâm $G = BM \cap CN$.*
– *Xác định A′ đối xứng với A qua G (suy ra BA′ // CN, CA′ // BM).*
– *Dựng d_B qua A′ và song song với CN.*
– *Dựng d_C qua A′ và song song với BM.*
– *Xác định $B = BM \cap d_B$, $C = CN \cap d_C$.*

Dạng 4: *Dựng tam giác ABC, khi biết hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC và trung điểm M của cạnh BC.*

Cách dựng: – *Xác định $A = AB \cap AC$.*
– *Dựng d_1 qua M và song song với AB.*
– *Dựng d_2 qua M và song song với AC.*
– *Xác định trung điểm I của AC: $I = AC \cap d_1$.*
– *Xác định trung điểm J của AB: $J = AB \cap d_2$.*
– *Xác định B, C sao cho $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.*

Cách khác: *Trên AB lấy điểm B, trên AC lấy điểm C sao cho $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.*

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường cao. Viết phương trình hai cạnh và đường cao còn lại, với: *(dạng 1)*

a) $BC: 4x + y - 12 = 0,\ BB': 5x - 4y - 15 = 0,\ CC': 2x + 2y - 9 = 0$

b) $BC: 5x - 3y + 2 = 0,\ BB': 4x - 3y + 1 = 0,\ CC': 7x + 2y - 22 = 0$

c) $BC: x - y + 2 = 0,\ BB': 2x - 7y - 6 = 0,\ CC': 7x - 2y - 1 = 0$

d) $BC: 5x - 3y + 2 = 0,\ BB': 2x - y - 1 = 0,\ CC': x + 3y - 1 = 0$

ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh và phương trình hai đường cao. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với: *(dạng 2)*

a) $A(3;0),\ BB': 2x + 2y - 9 = 0,\ CC': 3x - 12y - 1 = 0$

b) $A(1;0),\ BB': x - 2y + 1 = 0,\ CC': 3x + y - 1 = 0$

ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh và phương trình hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với: *(dạng 3)*

a) $A(1;3)$, $BM: x-2y+1=0$, $CN: y-1=0$

b) $A(3;9)$, $BM: 3x-4y+9=0$, $CN: y-6=0$

ĐS:

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh còn lại của tam giác đó, với:

a) $AB: x-2y+7=0$, $AM: x+y-5=0$, $BN: 2x+y-11=0$

HD: a) $AC: 16x+13y-68=0$, $BC: 17x+11y-106=0$

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết phương trình hai cạnh và toạ độ trung điểm của cạnh thứ ba. Viết phương trình của cạnh thứ ba, với: *(dạng 4)*

a) $AB: 2x+y-2=0$, $AC: x+3y-3=0$, $M(-1;1)$

b) $AB: 2x-y-2=0$, $AC: x+y+3=0$, $M(3;0)$

c) $AB: x-y+1=0$, $AC: 2x+y-1=0$, $M(2;1)$

d) $AB: x+y-2=0$, $AC: 2x+6y+3=0$, $M(-1;1)$

ĐS:

Bài 6. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh, phương trình một đường cao và một trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

a) $A(4;-1)$, $BH: 2x-3y+12=0$, $BM: 2x+3y=0$

b) $A(2;-7)$, $BH: 3x+y+11=0$, $CN: x+2y+7=0$

c) $A(0;-2)$, $BH: x-2y+1=0$, $CN: 2x-y+2=0$

d) $A(-1;2)$, $BH: 5x-2y-4=0$, $CN: 5x+7y-20=0$

ĐS:

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Δ_1 *cắt* Δ_2 $\Leftrightarrow$ *hệ (1) có một nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ *(nếu* $a_2, b_2 \neq 0$*)*
- $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ *hệ (1) vô nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ *(nếu* $a_2, b_2, c_2 \neq 0$*)*
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ *hệ (1) có vô số nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ *(nếu* $a_2, b_2, c_2 \neq 0$*)*

Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui, ta có thể thực hiện như sau:

– Tìm giao điểm của hai trong ba đường thẳng.

– Chứng tỏ đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm toạ độ giao điểm của chúng:

a) $2x + 3y + 1 = 0, \quad 4x + 5y - 6 = 0$ b) $4x - y + 2 = 0, \quad -8x + 2y + 1 = 0$

c) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 6t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases}, \quad x + y - 5 = 0$ f) $x = 2, \quad x + 2y - 4 = 0$

ĐS:

Bài 2. Cho hai đường thẳng d và Δ. Tìm m để hai đường thẳng:

i) cắt nhau ii) song song iii) trùng nhau

a) $d: mx - 5y + 1 = 0, \quad \Delta: 2x + y - 3 = 0$

b) $d: 2mx + (m-1)y - 2 = 0, \ \Delta: (m+2)x + (2m+1)y - (m+2) = 0$

c) $d: (m-2)x + (m-6)y + m - 1 = 0, \ \Delta: (m-4)x + (2m-3)y + m - 5 = 0$

d) $d: (m+3)x + 2y + 6 = 0, \quad \Delta: mx + y + 2 - m = 0$

ĐS:

Bài 3. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng qui:

a) $y = 2x - 1, \quad 3x + 5y = 8, \quad (m+8)x - 2my = 3m$

b) $y = 2x - m, \quad y = -x + 2m, \quad mx - (m-1)y = 2m - 1$

c) $5x + 11y = 8, \quad 10x - 7y = 74, \quad 4mx + (2m-1)y + m + 2 = 0$

d) $3x - 4y + 15 = 0, \ 5x + 2y - 1 = 0, \ mx - (2m-1)y + 9m - 13 = 0$

ĐS:

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 và:

a) $d_1: 3x - 2y + 10 = 0, \ d_2: 4x + 3y - 7 = 0, \ d$ *qua* $A(2;1)$

b) $d_1: 3x - 5y + 2 = 0, \ d_2: 5x - 2y + 4 = 0, \ d$ *song song* $d_3: 2x - y + 4 = 0$

c) $d_1: 3x - 2y + 5 = 0, \ d_2: 2x + 4y - 7 = 0, \ d$ *vuông góc* $d_3: 4x - 3y + 5 = 0$

ĐS:

Bài 5. Tìm điểm mà các đường thẳng sau luôn đi qua với mọi *m*:

a) $(m-2)x-y+3=0$ b) $mx-y+(2m+1)=0$

c) $mx-y-2m-1=0$ d) $(m+2)x-y+1=0$

ĐS:

Bài 6. Cho tam giác ABC với A(0; –1), B(2; –3), C(2; 0).

a) Viết phương trình các đường trung tuyến, phương trình các đường cao, phương trình các đường trung trực của tam giác.

b) Chứng minh các đường trung tuyến đồng qui, các đường cao đồng qui, các đường trung trực đồng qui.

ĐS:

Bài 7. Hai cạnh của hình bình hành ABCD có phương trình $x-3y=0,\ 2x+5y+6=0$, đỉnh C(4; –1). Viết phương trình hai cạnh còn lại.

ĐS:

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q với:

a) M(2; 5), P(–1; 2), Q(5; 4) b) M(1; 5), P(–2; 9), Q(3; –2)

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ *và điểm* $M_0(x_0;y_0)$.

$$\boxed{d(M_0,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

2. Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ *và hai điểm* $M(x_M;y_M),\ N(x_N;y_N)\notin\Delta$.

– M, N nằm cùng phía đối với Δ $\Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.

– M, N nằm khác phía đối với Δ $\Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

3. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ *cắt nhau.*

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 *và* Δ_2 *là:*

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

Chú ý: *Để lập phương trình đường phân giác trong hoặc ngoài của góc A trong tam giác ABC ta có thể thực hiện như sau:*

Cách 1:

– Tìm toạ độ chân đường phân giác trong hoặc ngoài (dựa vào tính chất đường phân giác của góc trong tam giác).

Cho ΔABC với đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE (D, E ∈ BC) ta có: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Cách 2:

– Viết phương trình các đường phân giác d_1, d_2 *của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB, AC.*

– Kiểm tra vị trí của hai điểm B, C đối với d_1 *(hoặc* d_2*).*

+ Nếu B, C nằm khác phía đối với d_1 *thì* d_1 *là đường phân giác trong.*

+ Nếu B, C nằm cùng phía đối với d_1 *thì* d_1 *là đường phân giác ngoài.*

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng *d*, với:

a) $M(4;-5),\ d: 3x-4y+8=0$ b) $M(3;5),\ d: x+y+1=0$

c) $M(4;-5),\ d: \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$ d) $M(3;5),\ d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}$

ĐS:

Bài 2.

a) Cho đường thẳng Δ: $2x-y+3=0$. Tính bán kính đường tròn tâm I(–5; 3) và tiếp xúc với Δ.

b) Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình 2 cạnh là: $2x-3y+5=0,\ 3x+2y-7=0$ và đỉnh A(2; –3). Tính diện tích hình chữ nhật đó.

c) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x-4y+6=0$ và $d_2: 6x-8y-13=0$.

ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với:

a) A(–1; –1), B(2; –4), C(4; 3)   b) A(–2; 14), B(4; –2), C(5; –4)

ĐS:

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng *d* song song và cách đường thẳng Δ một khoảng *k*, với:

a) $\Delta: 2x-y+3=0,\ k=\sqrt{5}$ b) $\Delta: \begin{cases} x=3t \\ y=2+4t \end{cases},\ k=3$

c) $\Delta: y-3=0,\ k=5$ d) $\Delta: x-2=0,\ k=4$

ĐS: a) $2x-y+8=0; 2x-y-2=0$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng *d* song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng *k*, với:

a) $\Delta: 3x-4y+12=0,\ A(2;3),\ k=2$ b) $\Delta: x+4y-2=0,\ A(-2;3),\ k=3$

c) $\Delta: y-3=0,\ A(3;-5),\ k=5$ d) $\Delta: x-2=0,\ A(3;1),\ k=4$

ĐS: a) $3x-4y+16=0; 3x-4y-4=0$

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng *d*, với:

a) A(–1; 2), B(3; 5), *d* = 3   b) A(–1; 3), B(4; 2), *d* = 5

c) A(5; 1), B(2; –3), *d* = 5   d) A(3; 0), B(0; 4), *d* = 4.

ĐS:

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q, với:

a) M(2; 5), P(–1; 2), Q(5; 4) b) M(1; 2), P(2; 3), Q(4; –5)

c) M(10; 2), P(3; 0), Q(–5; 4) d) M(2; 3), P(3; –1), Q(3; 5)

ĐS:

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng *d* cách điểm A một khoảng bằng *h* và cách điểm B một khoảng bằng *k*, với:

a) A(1; 1), B(2; 3), $h = 2$, $k = 4$ b) A(2; 5), B(–1; 2), $h = 1$, $k = 3$

ĐS:

Bài 9. Cho đường thẳng Δ: $x - y + 2 = 0$ và các điểm O(0; 0), A(2; 0), B(–2; 2).

a) Chứng minh đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh rằng hai điểm O, A nằm cùng về một phía đối với đường thẳng Δ.

c) Tìm điểm O′ đối xứng với O qua Δ.

d) Trên Δ, tìm điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

ĐS:

Bài 10. Cho hai điểm A(2; 2), B(5; 1). Tìm điểm C trên đường thẳng Δ: $x - 2y + 8 = 0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17 (đvdt).

HD: $C(12;10),\ C\left(-\frac{76}{5};-\frac{18}{5}\right)$.

Bài 11. Tìm tập hợp điểm.

a) Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng Δ: $-2x + 5y - 1 = 0$ một khoảng bằng 3.

b) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 5x + 3y - 3 = 0,\ \Delta: 5x + 3y + 7 = 0$.

c) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 4x - 3y + 2 = 0,\ \Delta: y - 3 = 0$.

d) Tìm tập hợp các điểm có tỉ số các khoảng cách đến hai đường thẳng sau bằng $\frac{5}{13}$:

$$d: 5x - 12y + 4 = 0 \text{ và } \Delta: 4x - 3y - 10 = 0 .$$

ĐS:

Bài 12. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng:

a) $3x - 4y + 12 = 0,\ 12x + 5y - 20 = 0$ b) $3x - 4y - 9 = 0,\ 8x - 6y + 1 = 0$

c) $x + 3y - 6 = 0,\ 3x + y + 2 = 0$ d) $x + 2y - 11 = 0,\ 3x - 6y - 5 = 0$

ĐS:

Bài 13. Cho tam giác ABC. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với:

a) A(–3; –5), B(4; –6), C(3; 1)

b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; –3)

c) $AB: 2x - 3y + 21 = 0,\ BC: 2x + 3y + 9 = 0,\ CA: 3x - 2y - 6 = 0$

d) $AB: 4x + 3y + 12 = 0,\ BC: 3x - 4y - 24 = 0,\ CA: 3x + 4y - 6 = 0$

ĐS:

VẤN ĐỀ 5: Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *(có VTPT* $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$*)*

và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *(có VTPT* $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$*).*

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \le 90^0 \\ 180^0 - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^0 \end{cases}$$

$$\boxed{\cos\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \left|\cos\widehat{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}\right| = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Chú ý: • $0^0 \le \left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right) \le 90^0$.

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• *Cho* Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ *thì:*

\+ $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2;\ m_1 \ne m_2$ \+ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.\ k_2 = -1$.

• *Cho* ΔABC*. Để tính góc A trong* ΔABC*, ta có thể sử dụng công thức:*

$$\boxed{\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}}$$

Bài 1. Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $x - 2y - 1 = 0,\ x + 3y - 11 = 0$ b) $2x - y + 5 = 0,\ 3x + y - 6 = 0$

c) $3x - 7y + 26 = 0,\ 2x + 5y - 13 = 0$ d) $3x + 4y - 5 = 0,\ 4x - 3y + 11 = 0$

ĐS:

Bài 2. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với:

a) A(–3; –5), B(4; –6), C(3; 1)

b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; –3)

c) $AB: 2x - 3y + 21 = 0,\ BC: 2x + 3y + 9 = 0,\ CA: 3x - 2y - 6 = 0$

d) $AB: 4x + 3y + 12 = 0,\ BC: 3x - 4y - 24 = 0,\ CA: 3x + 4y - 6 = 0$

ĐS:

Bài 3. Cho hai đường thẳng *d* và Δ. Tìm *m* để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α, với:

a) $d: 2mx + (m-3)y + 4m - 1 = 0,\ \Delta: (m-1)x + (m+2)y + m - 2 = 0,\ \alpha = 45^0$.

b) $d: (m+3)x - (m-1)y + m - 3 = 0,\ \Delta: (m-2)x + (m+1)y - m - 1 = 0,\ \alpha = 90^0$.

ĐS:

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α, với:

a) $A(6;2),\ \Delta: 3x + 2y - 6 = 0,\ \alpha = 45^0$ b) $A(-2;0),\ \Delta: x + 3y - 3 = 0,\ \alpha = 45^0$

c) $A(2;5),\ \Delta: x + 3y + 6 = 0,\ \alpha = 60^0$ d) $A(1;3),\ \Delta: x - y = 0,\ \alpha = 30^0$

ĐS:

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm I(4; –1) và phương trình một cạnh là $3x - y + 5 = 0$.

a) Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông.

b) Tìm toạ độ 4 đỉnh của hình vuông.

ĐS:

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn có tâm *I(a; b)* và bán kính *R*: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$.

Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$, là phương trình đường tròn tâm *I(–a; –b)*, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

$$\boxed{\Delta \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R}$$

VẤN ĐỀ 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn

- *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ *thì (C) có tâm I(a; b) và bán kính R.*
- *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

thì – *Biến đổi đưa về dạng* $(x-a')^2+(y-b')^2=R^2$

hoặc – *Tâm I(–a; –b), bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ *(với điều kiện* $a^2+b^2-c>0$*).*

Chú ý: *Phương trình* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ *là phương trình đường tròn nếu thoả mãn điều kiện:* $a^2+b^2-c>0$.

Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó:

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ b) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$

c) $x^2+y^2+2x-8y+1=0$ d) $x^2+y^2-6x+5=0$

e) $16x^2+16y^2+16x-8y=11$ f) $7x^2+7y^2-4x+6y-1=0$

g) $2x^2+2y^2-4x+12y+11=0$ h) $4x^2+4y^2+4x-5y+10=0$

ĐS:

Bài 2. Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$ *ĐS:* $m<-\dfrac{3}{5}\vee m>1$

b) $x^2+y^2-2(m+1)x+2my+3m^2-2=0$ *ĐS:* $-1<m<3$

c) $x^2+y^2-2(m-3)x+4my-m^2+5m+4=0$ *ĐS:* $m<\dfrac{5}{6}\vee m>1$

d) $x^2+y^2-2mx-2(m^2-1)y+m^4-2m^3-2m^2-4m+1=0$ *ĐS:* $m>0$

Bài 3. * Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2-6x+2y\ln m+3\ln m+7=0$ b) $x^2+y^2-2x+4y+\ln(m-2)+4=0$

c) $x^2+y^2-2e^{2m}x+2e^{m}y+6e^{2m}-4=0$ d) $x^2+y^2-4x\cos m+2y\sin m-4=0$

e) $x^2+y^2-2x\cos m+4y+\cos^2 m-2\sin m+5=0$

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình đường tròn

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định **tâm I (a; b)** *và* **bán kính R** *của (C). Khi đó phương trình đường tròn (C) là:* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Dạng 1: *(C) có tâm I và đi qua điểm A. Khi đó bán kính R = IA.*

Dạng 2: *(C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Khi đó bán kính R =* $d(I,\Delta)$.

Dạng 3: *(C) có đường kính AB.*

– *Tâm I là trung điểm của AB.* – *Bán kính R =* $\frac{AB}{2}$.

Dạng 4: *(C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ.* – *Bán kính R = IA.*

Dạng 5: *(C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} I\in d \\ d(I,\Delta)=IA \end{cases}$. – *Bán kính R = IA.*

Dạng 6: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B.*

– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*

– *Viết phương trình đường thẳng Δ′ đi qua B và vuông góc với Δ.*

– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ′.*

– *Bán kính R = IA.*

Dạng 7: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2.

– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2) \\ d(I,\Delta_1)=IA \end{cases}$. – *Bán kính R = IA.*

Chú ý: – *Muốn bỏ dấu GTTĐ trong (1), ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi* Δ_1 *và* Δ_2 *hay xét dấu khoảng cách đại số từ A đến* Δ_1 *và* Δ_2.

– *Nếu* $\Delta_1 // \Delta_2$, *ta tính R =* $\frac{1}{2}d(\Delta_1,\Delta_2)$, *và (2) được thay thế bởi IA = R.*

Dạng 8: *(C) tiếp xúc với hai đường thẳng* Δ_1, Δ_2 *và có tâm nằm trên đường thẳng d.*

– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2) \\ I\in d \end{cases}$. – *Bán kính R =* $d(I,\Delta_1)$.

Dạng 9: *(C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).*

Cách 1: – *Phương trình của (C) có dạng:* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ *(*).*

– *Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào (*) ta được hệ phương trình.*

– *Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c ⇒ phương trình của (C).*

Cách 2: *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases}$. *Bán kính R = IA = IB = IC.*

Dạng 10: *(C) nội tiếp tam giác ABC.*

Cách 1: – *Viết PT của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác*

– *Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.*

– *Bán kính R =* $d(I,AB)$.

Cách 2: – *Xác định chân D của đường phân giác trong góc A của ΔABC:*

$$\overrightarrow{DB}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}.$$

– *Khi đó tâm I của (C) là chân đường phân giác trong góc B của ΔABD:*

$$\overrightarrow{IA}=-\frac{BA}{BD}\overrightarrow{ID}$$

Bài 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với: *(dạng 1)*

a) I(2; 4), A(–1; 3) b) I(–3; 2), A(1; –1) c) I(–1; 0), A(3; –11) d) I(1; 2), A(5; 2)

ĐS:

Bài 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 2)*

a) $I(3;4),\ \Delta: 4x-3y+15=0$ b) $I(2;3),\ \Delta: 5x-12y-7=0$

c) $I(-3;2),\ \Delta \equiv Ox$ d) $I(-3;-5),\ \Delta \equiv Oy$

ĐS:

Bài 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với: *(dạng 3)*

a) A(–2; 3), B(6; 5) b) A(0; 1), C(5; 1) c) A(–3; 4), B(7; 2) d) A(5; 2), B(3; 6)

ĐS:

Bài 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ, với: *(dạng 4)*

a) $A(2;3),\ B(-1;1),\ \Delta: x-3y-11=0$ b) $A(0;4),\ B(2;6),\ \Delta: x-2y+5=0$

c) $A(2;2),\ B(8;6),\ \Delta: 5x-3y+6=0$

ĐS:

Bài 5. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 5)*

a) $A(1;2),\ B(3;4),\ \Delta: 3x+y-3=0$ b) $A(6;3),\ B(3;2),\ \Delta: x+2y-2=0$

c) $A(-1;-2),\ B(2;1),\ \Delta: 2x-y+2=0$ d) $A(2;0),\ B(4;2),\ \Delta \equiv Oy$

ĐS:

Bài 6. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với: *(dạng 6)*

a) $A(-2;6),\ \Delta: 3x-4y-15=0,\ B(1;-3)$ b) $A(-2;1),\ \Delta: 3x-2y-6=0,\ B(4;3)$

c) $A(6;-2),\ \Delta \equiv Ox,\ B(6;0)$ d) $A(4;-3),\ \Delta: x+2y-3=0,\ B(3;0)$

ĐS:

Bài 7. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, với: *(dạng 7)*

a) $A(2;3),\ \Delta_1: 3x-4y+1=0,\ \Delta_2: 4x+3y-7=0$

b) $A(1;3),\ \Delta_1: x+2y+2=0,\ \Delta_2: 2x-y+9=0$

c) $A \equiv O(0;0),\ \Delta_1: x+y-4=0,\ \Delta_2: x+y+4=0$

d) $A(3;-6),\ \Delta_1 \equiv Ox,\ \Delta_2 \equiv Oy$

ĐS:

Bài 8. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d, với: *(dạng 8)*

a) $\Delta_1: 3x+2y+3=0,\ \Delta_2: 2x-3y+15=0,\ d: x-y=0$

b) $\Delta_1: x+y+4=0,\ \Delta_2: 7x-y+4=0,\ d: 4x+3y-2=0$

c) $\Delta_1: 4x-3y-16=0,\ \Delta_2: 3x+4y+3=0,\ d: 2x-y+3=0$

d) $\Delta_1: 4x+y-2=0,\ \Delta_2: x+4y+17=0,\ d: x-y+5=0$

ĐS:

Bài 9. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 9)*

a) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3) b) A(5; 3), B(6; 2), C(3; –1)

c) A(1; 2), B(3; 1), C(–3; –1) d) A(–1; –7), B(–4; –3), C ≡ O(0; 0)

e) $AB: x-y+2=0,\ BC: 2x+3y-1=0,\ CA: 4x+y-17=0$

f) $AB: x+2y-5=0,\ BC: 2x+y-7=0,\ CA: x-y+1=0$

ĐS:

Bài 10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 10)*

a) A(2; 6), B(–3; –4), C(5; 0) b) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3)

c) $AB: 2x-3y+21=0,\ BC: 3x-2y-6=0,\ CA: 2x+3y+9=0$

d) $AB: 7x-y+11=0,\ BC: x+y-15,\ CA: 7x+17y+65=0$

ĐS:

VẤN ĐỀ 3: Tập hợp điểm

1. Tập hợp các tâm đường tròn

Để tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), ta có thể thực hiện như sau:

a) Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.

b) Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: $I\begin{cases} x=f(m) \\ y=g(m) \end{cases}$.

c) Khử m giữa x và y ta được phương trình F(x; y) = 0.

d) Giới hạn: Dựa vào điều kiện của m ở a) để giới hạn miền của x hoặc y.

e) Kết luận: Phương trình tập hợp điểm là F(x; y) = 0 cùng với phần giới hạn ở d).

2. Tập hợp điểm là đường tròn

Thực hiện tương tự như trên.

Bài 1. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*m* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$ *ĐS:*

b) $x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0$ *ĐS:*

c) $x^2+y^2-2mx-2m^2y+2=0$ *ĐS:*

d) $x^2+y^2+mx-m(m+2)y-2m^2-4=0$ *ĐS:*

Bài 2. * Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*t* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(\cos 2t+4)x-2y\sin 2t+6\cos 2t-3=0$

b) $x^2+y^2-4x\sin t+4(\cos 2t-\sin t)y-2\cos^2 t=0$

c) $x^2+y^2-2(2-e^t)x+4(e^{2t}-1)y-e^t-3=0$

d) $(t^2+1)(x^2+y^2)+8(t^2-1)x-4(t^2+4t+1)y-3t^2-3=0$

ĐS:

Bài 3. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), biết:

a) (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x-8y+15=0$ và có bán kính R = 3

b) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : x+2y-3=0,\ d_2 : x+2y+6=0$

c) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 2x+3y-6=0,\ d_2 : 3x-2y+9=0$

d) (C) tiếp xúc với đường tròn $(C') : x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính R = 2.

e) (C) đi qua điểm A(2; 3) và tiếp xúc với đường thẳng $d : y-5=0$

ĐS:

Bài 4. Cho hai điểm A(2; –4), B(–6; 2). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $AM^2+BM^2=100$ b) $\dfrac{MA}{MB}=3$ c) $AM^2+BM^2=k^2$ (*k > 0*)

ĐS:

Bài 5. Cho hai điểm A(2; 3), B(–2; 1). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$

ĐS:

Bài 6. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng *d* và d' bằng *k*, với:

a) $d : x-y+3=0,\ d' : x+y=1=0,\ k=9$ b)

ĐS:

Bài 7. Cho bốn điểm A(4; 4), B(–6; 4), C(–6; –2), D(4; –2).

a) Chứng tỏ rằng ABCD là hình chữ nhật.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình chữ nhật bằng 100.

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối của đường thẳng *d* và đường tròn (C)

Để biện luận số giao điểm của đường thẳng d: $Ax+By+C=0$ *và đường tròn (C):* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$*, ta có thể thực hiện như sau:.*

- ***Cách 1:*** *So sánh khoảng cách từ tâm I đến d với bán kính R.*
  - *Xác định tâm I và bán kính R của (C).*
  - *Tính khoảng cách từ I đến d.*
    + $d(I,d)<R \Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*
    + $d(I,d)=R \Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*
    + $d(I,d)>R \Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*
- ***Cách 2:*** *Toạ độ giao điểm (nếu có) của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \end{cases} \quad (*)$$

+ *Hệ (*) có 2 nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*
+ *Hệ (*) có 1 nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*
+ *Hệ (*) vô nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*

Bài 1. Biện luận theo *m* số giao điểm của đường thẳng *d* và đường tròn (C), với:

a) $d: mx - y - 3m - 2 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

b) $d: 2x - y + m = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

c) $d: x + y - 1 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 2(2m+1)x - 4y + 4 - m = 0$

d) $d: mx + y - 4m = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

ĐS:

	2 giao điểm pb	*1 giao điểm*	*0 giao điểm*
a)			
b)			
c)			
d)			

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng *d* đi qua điểm A(–1; 0) và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng *d*.
b) Biện luận theo *k* vị trí tương đối của *d* và (C).
c) Suy ra phương trình các tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A.

ĐS:

Bài 3. Cho đường thẳng *d* và đường tròn (C):

i) Chứng tỏ *d* cắt (C). ii) Tìm toạ độ các giao điểm của *d* và (C).

a) *d* đi qua M(–1; 5) và có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$, $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$

b) $d: 3x - y - 10 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

ĐS:

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2)

Để biện luận số giao điểm của hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, *($C_2$):* $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$.

ta có thể thực hiện như sau:

• ***Cách 1:*** *So sánh độ dài đoạn nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1, R_2.*

+ $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*

+ $I_1I_2 = R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).*

+ $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ ⇔ *(C_1) tiếp xúc trong với (C_2).*

+ $I_1I_2 > R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.*

+ $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ ⇔ *(C_1) và (C_2) ở trong nhau.*

• ***Cách 2:*** *Toạ độ các giao điểm (nếu có) của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0 \\ x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Hệ (*) có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*
+ Hệ (*) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) tiếp xúc với (C_2).*
+ Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ *(C_1) và (C_2) không có điểm chung.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2), tìm toạ độ giao điểm, nếu có, với:

a) $(C_1): x^2+y^2+6x-10y+24=0,\ (C_2): x^2+y^2-6x-4y-12=0$

b) $(C_1): x^2+y^2-4x-6y+4=0,\ (C_2): x^2+y^2-10x-14y+70=0$

c) $(C_1): x^2+y^2-6\text{x}-3y=0,\ (C_2)$ *có tâm* $I_2\left(5;\frac{5}{2}\right)$ *và bán kính* $R_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ĐS:

Bài 2. Biện luận số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2), với:

a) $(C_1): x^2+y^2-6x-2my+m^2+4=0,\ (C_2): x^2+y^2-2mx-2(m+1)y+m^2+4=0$

b) $(C_1): x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0,\ (C_2): x^2+y^2+4(m+1)x-2my+6m-1=0$

ĐS:

Bài 3. Cho hai điểm A(8; 0), B(0; 6).

a) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, AB, OB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

c) Chứng minh rằng hai đường tròn trên tiếp xúc nhau. Tìm toạ độ tiếp điểm.

ĐS:

VẤN ĐỀ 6: Tiếp tuyến của đường tròn (C)

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

$$\Delta \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$$

• ***Dạng 1:*** *Tiếp tuyến tại một điểm* $M_0(x_0;y_0)\in$ *(C).*

– *Δ đi qua* $M_0(x_0;y_0)$ *và có VTPT* $\overrightarrow{IM_0}$.

• ***Dạng 2:*** *Tiếp tuyến có phương cho trước.*

– *Viết phương trình của Δ có phương cho trước (phương trình chứa tham số t).*

– *Dựa vào điều kiện:* $d(I,\Delta)=R$, *ta tìm được t. Từ đó suy ra phương trình của Δ.*

• ***Dạng 3:*** *Tiếp tuyến vẽ từ một điểm* $A(x_A;y_A)$ *ở ngoài đường tròn (C).*

– *Viết phương trình của Δ đi qua A (chứa 2 tham số).*

– *Dựa vào điều kiện:* $d(I,\Delta)=R$, *ta tìm được các tham số. Từ đó suy ra phương trình của Δ.*

Bài 1. Cho đường tròn (C) và đường thẳng *d*.

i) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục toạ độ.

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0,\ d: 2x - y + 3 = 0$

b) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0,\ d: 2x - 3y + 1 = 0$

ĐS:

	i)	*ii)*	*iii)*
a)			
b)			

Bài 2. Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng *d*.

i) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iv) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0,\ A(-7;7),\ d: 3x + 4y - 6 = 0$

b) $(C): x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0,\ A(2;2),\ d: x + 2y - 6 = 0$

ĐS:

	ii)	*iii)*	*iv)*
a)			
b)			

Bài 3. Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4) và đường thẳng $d: y = -3 - 3x$.

a) Viết phương trình các đường tròn (C_1) và (C_2) qua A, B và tiếp xúc với *d*.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung (khác *d*) của hai đường tròn đó.

ĐS:

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0$.

a) Tìm *m* để từ A(2; 3) có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến đó khi *m* = 6.

ĐS:

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

$$\boxed{M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a} \quad (a > c)$$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.*

2. Phương trình chính tắc của elip

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (a > b > 0,\ b^2 = a^2 - c^2)$$

- Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- Với M(*x; y*) ∈ (E), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$$\boxed{MF_1 = a + \frac{c}{a}x,\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x}$$

3. Hình dạng của elip

- (E) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$
- Độ dài các trục: trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$
- **Tâm sai** của (E): $e = \dfrac{c}{a}$ (0 < e < 1)
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$ (ngoại tiếp elip).

4. Đường chuẩn của elip *(chương trình nâng cao)*

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \dfrac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (E) ta có: $\boxed{\dfrac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \dfrac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e}$ $(e < 1)$

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (E)

Đưa phương trình của (E) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Xác định a, b, c.*

Các yếu tố:
- *Độ dài trục lớn 2a, trục nhỏ 2b.*
- *Tiêu cự 2c.*
- *Toạ độ các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- *Toạ độ các đỉnh* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$.
- *Tâm sai* $e=\frac{c}{a}$.
- *Phương trình các đường chuẩn* $x\pm\frac{a}{e}=0$

Bài 1. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

e) $16x^2+25y^2=400$ f) $x^2+4y^2=1$ g) $4x^2+9y^2=5$ h) $9x^2+25y^2=1$

ĐS:

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*
a								
b								

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (E)

Để lập phương trình chính tắc của (E) ta cần xác định độ dài các nửa trục a, b của (E).
Chú ý: *Công thức xác định các yếu tố của (E):*

+ $b^2=a^2-c^2$ + $e=\frac{c}{a}$ + *Các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$

+ *Các đỉnh:* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4. *ĐS:* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6. *ĐS:*

c) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự. *ĐS:*

d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$. *ĐS:*

e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$. *ĐS:*

f) Một tiêu điểm là $F_1(-2;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10. *ĐS:*

g) Một tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *ĐS:*

h) Đi qua hai điểm $M(1;0)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$. *ĐS:*

i) Đi qua hai điểm $M\left(4;-\sqrt{3}\right)$, $N\left(2\sqrt{2};3\right)$. *ĐS:*

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$. *ĐS:*

b) Một tiêu điểm là $F_1(-8;0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$. *ĐS:*

c) Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7} \pm 16 = 0$.
ĐS:

d) Một đỉnh là $A_1(-8;0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{4}$. *ĐS:*

e) Đi qua điểm $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$. *ĐS:*

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (E) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý các công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (E):

$$\boxed{MF_1 = a + \frac{c}{a}x,\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x}$$

Bài 1. Cho elip (E) và đường thẳng *d* vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm bên phải F_2 cắt (E) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF_1, MF_2, MN.

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

ĐS:

Bài 2. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) sao cho:

i) $MF_1 = MF_2$ ii) $MF_2 = 3MF_1$ iii) $MF_1 = 4MF_2$

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

ĐS:

Bài 3. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

ĐS:

Bài 4. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0, với:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $MF_1 + MF_2 = 2a$ $\Rightarrow$ *Tập hợp là elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2, trục lớn 2a.*

Dạng 2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(a > b)* $\Rightarrow$ *Tập hợp là elip (E) có độ dài trục lớn 2a, trục nhỏ 2b.*

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$ và điểm $F_1(-3;0)$:

a) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C′) di động luôn đi qua F_1 và tiếp xúc với (C).
b) Viết phương trình của tập hợp trên.
ĐS:

Bài 2. Cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 32 = 0$ và (C′): $x^2 + y^2 - 4x = 0$:
a) Chứng minh (C) và (C′) tiếp xúc nhau.
b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) di động và tiếp xúc với hai đường tròn trên.
c) Viết phương trình của tập hợp đó.
ĐS:

Bài 3. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng *e*, với:

a) $F(3;0),\ \Delta: x - 12 = 0,\ e = \frac{1}{2}$ b) $F(2;0),\ \Delta: x - 8 = 0,\ e = \frac{1}{2}$

c) $F(-4;0),\ \Delta: 4x + 25 = 0,\ e = \frac{4}{5}$ d) $F(3;0),\ \Delta: 3x - 25 = 0,\ e = \frac{3}{5}$

ĐS:

Bài 4. Cho hai điểm A, B lần lượt chạy trên hai trục O*x* và O*y* sao cho AB = 12.
a) Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn AB.
b) Tìm tập hợp các điểm N chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.
ĐS:

VẤN ĐỀ 5: Một số bài toán khác

Bài 1. Tìm tâm sai của (E) trong các trường hợp sau:
a) Mỗi đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
b) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.
c) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60^0.
d) Độ dài trục lớn bằng *k* lần độ dài trục nhỏ (*k* > 1).
e) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục nhỏ bằng tiêu cự.
ĐS:

Bài 2. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Một góc vuông đỉnh O quay quanh O, có 2 cạnh cắt (E) lần lượt tại A và B.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ không đổi.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB. Suy ra đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn (C) cố định. Tìm phương trình của (C).

HD: a) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ *b)* $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Bài 3. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm, A_1, A_2 là 2 đỉnh trên trục lớn, M là 1 điểm tuỳ ý thuộc (E).

a) Chứng minh: $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2$.

b) Gọi P là hình chiếu của M trên trục lớn. Chứng minh: $\frac{MP^2}{A_1P.A_2P}=\frac{b^2}{a^2}$.

ĐS:

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

$$\boxed{M \in (H) \Leftrightarrow \left|MF_1 - MF_2\right| = 2a} \qquad (a < c)$$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.*

2. Phương trình chính tắc của hypebol

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (a, b > 0,\ b^2 = c^2 - a^2)$$

- Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- Với M(x; y) ∈ (H), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$$\boxed{MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|,\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|}$$

3. Hình dạng của hypebol

- (H) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$
- Độ dài các trục: trục thực: $2a$, trục ảo: $2b$
- **Tâm sai** của (H): $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$.
- Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

4. Đường chuẩn của hypebol

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (H) ta có: $\boxed{\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e}$ $(e < 1)$

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (H)

Đưa phương trình của (H) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Xác định a, b, c.*

Các yếu tố:
- *Độ dài trục thực 2a, trục ảo 2b.*
- *Tiêu cự 2c.*
- *Toạ độ các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- *Toạ độ các đỉnh* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$.
- *Tâm sai* $e=\frac{c}{a}$.
- *Phương trình các đường tiệm cận:* $y=\pm\frac{b}{a}x$
- *Phương trình các đường chuẩn* $x\pm\frac{a}{e}=0$

Bài 1. Cho hypebol (H). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường tiệm cận, phương trình các đường chuẩn của (H), với (H) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$

e) $16x^2-25y^2=400$ f) $x^2-4y^2=1$ g) $4x^2-9y^2=5$ h) $9x^2-25y^2=1$

ĐS:

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*
a								
b								

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (H)

Để lập phương trình chính tắc của (H) ta cần xác định độ dài các nửa trục a, b của (H).
Chú ý: *Công thức xác định các yếu tố của (H):*

+ $b^2=c^2-a^2$ + $e=\frac{c}{a}$ + *Các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$

+ *Các đỉnh:* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Độ dài trục thực bằng 6, trục ảo bằng 4. *ĐS:* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

b) Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10. *ĐS:*

c) Tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận là $y=\frac{2}{3}x$. *ĐS:*

d) Độ dài trục thực bằng 48, tâm sai bằng $\frac{13}{12}$. *ĐS:*

e) Độ dài trục ảo bằng 6, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$. *ĐS:*

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Một đỉnh là A(5; 0), một tiêu điểm là F(6; 0). *ĐS:*

b) Một tiêu điểm là F(–7; 0), tâm sai e = 2. *ĐS:*

c) (H) đi qua hai điểm $M\left(2;\sqrt{6}\right)$, $N(-3;4)$. *ĐS:*

d) Độ dài trục thực bằng 8 và đi qua điểm A(5; –3). *ĐS:*

e) Tiêu cự bằng 10 và đi qua điểm A(–4; 3). *ĐS:*

f) Có cùng tiêu điểm với elip (E): $10x^2+36y^2-360=0$, tâm sai bằng $\frac{5}{3}$.

ĐS:

Bài 3. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Một đỉnh là A(–3; 0) và một tiệm cận là *d*: $2x-3y=0$.

b) Hai tiệm cận là *d*: $2x\pm y=0$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Tiêu cự bằng 8 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Hai tiệm cận là *d*: $3x\pm 4y=0$ và hai đường chuẩn là Δ: $5x\pm 16=0$.

e) Đi qua điểm E(4; 6) và hai tiệm cận là *d*: $\sqrt{3}x\pm y=0$.

ĐS:

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (H) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý: • *Các công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (H):*

$$\boxed{MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|,\ MF_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|}$$

• *Nếu M thuộc nhánh phải thì $x\ge a$*

$$\Rightarrow MF_1=\frac{c}{a}x+a,\ MF_2=\frac{c}{a}x-a\ \ (MF_1>MF_2)$$

• *Nếu M thuộc nhánh trái thì $x\le -a$*

$$\Rightarrow MF_1=-\left(\frac{c}{a}x+a\right),\ MF_2=-\left(\frac{c}{a}x-a\right)\ \ (MF_1<MF_2)$$

Bài 1. Cho hypebol (H) và đường thẳng *d* vuông góc với trục thực tại tiêu điểm bên trái F_1 cắt (H) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF_1, MF_2, MN.

a) $16x^2-9y^2=144$ b) $12x^2-4y^2=48$ c) $10x^2+36y^2-360=0$

ĐS:

Bài 2. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M ∈ (H) sao cho:

i) $MF_2=3MF_1$ ii) $MF_1=3MF_2$ iii) $MF_1=2MF_2$ iv) $MF_1=4MF_2$

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ d) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

ĐS:

Bài 3. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M $\in$ (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

a) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

ĐS:

Bài 4. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M $\in$ (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc α, với:

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1, \alpha=120^0$ b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1, \alpha=120^0$ c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1, \alpha=60^0$

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $\left|MF_1-MF_2\right|=2a$ $\Rightarrow$ *Tập hợp là hypebol (H) có hai tiêu điểm F_1, F_2, trục thực 2a.*

Dạng 2: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Rightarrow$ *Tập hợp là hypebol (H) có độ dài trục thực 2a, trục ảo 2b.*

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2+4x=0$ và điểm $F_2(2;0)$.

a) Tìm toạ độ tâm F_1 và bán kính R của (C).
b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C′) di động luôn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C).
c) Viết phương trình của tập hợp trên.

ĐS:

Bài 2. Cho hai đường tròn (C): $x^2+y^2+10x+9=0$ và (C′): $x^2+y^2-10x+21=0$.

a) Xác định tâm và tính bán kính của (C) và (C′).
b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) tiếp xúc với (C) và (C′).
c) Viết phương trình của tập hợp đó trên.

HD: a) *b)* *c) (H):* $x^2-\frac{y^2}{24}=1$.

Bài 3. Cho hai đường thẳng Δ: $5x-2y=0$ và Δ': $5x+2y=0$.

a) Tìm tập hợp (H) các điểm M có tích các khoảng cách từ M đến Δ và Δ' bằng $\frac{100}{29}$.
b) Viết phương trình các đường tiệm cận của (H).
c) Gọi N là một điểm bất kì trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ N đến các đường tiệm cận của (H) bằng một số không đổi.

ĐS:

Bài 4. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng *e*, với:

a) $F(4;0),\ \Delta: x-1=0,\ e=2$

b) $F(3\sqrt{2};0),\ \Delta: x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ e=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}$

c) $F(6;0),\ \Delta: 3x-8=0,\ e=\dfrac{3}{2}$

d) $F(3;0),\ \Delta: 3x-4=0,\ e=\dfrac{3}{2}$

ĐS:

VẤN ĐỀ 5: Một số bài toán khác

Bài 1. Cho hypebol (H): $9x^2-16y^2-144=0$.

a) Viết phương trình các đường chuẩn của (H).

b) Viết phương trình các đường tiệm cận của (H).

c) Gọi M là một điểm bất kì trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

ĐS:

Bài 2. Cho hypebol (H): $9x^2-16y^2-144=0$.

a) Tìm điểm M trên (H) sao cho bán kính qua tiêu điểm bên trái bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm bên phải của M.

b) Tìm điểm N trên (H) sao cho $\widehat{F_1NF_2}=90^0$.

c) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng *d* cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận tại P′, Q′ thì PP′ = QQ′.

HD: a) b) c) Chứng tỏ hai đoạn PQ và P′Q′ có chung trung điểm.

Bài 3. Cho hypebol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

a) Gọi M là điểm tuỳ ý trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

b) Từ một điểm N bất kì trên (H), dựng hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận, cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một hình bình hành. Tính diện tích hình bình hành đó.

HD: a) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ *b)* $\dfrac{1}{2}ab$.

V. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa

Cho điểm F và đường thẳng Δ không đi qua F.

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M, \Delta)$$

F: **tiêu điểm**, Δ: **đường chuẩn**, $p = d(F, \Delta)$: **tham số tiêu**.

2. Phương trình chính tắc của parabol

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (p > 0)$$

- Toạ độ tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- Phương trình đường chuẩn: Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.
- Với M($x; y$) ∈ (P), **bán kính qua tiêu điểm** của M là $MF = x + \frac{p}{2}$.

3. Hình dạng của parabol

- (P) nằm về phía bên phải của trục tung.
- (P) nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Toạ độ đỉnh: $O(0;0)$
- Tâm sai: $e = 1$.

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (P)

Đưa phương trình của (P) về dạng chính tắc: $y^2 = 2px$. *Xác định tham số tiêu p.*

Các yếu tố: – *Toạ độ tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

– *Phương trình đường chuẩn* Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.

Bài 1. Cho parabol (P). Xác định toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của (P), với:

a) $(P): y^2 = 6x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

ĐS:

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (P)

Để lập phương trình chính tắc của (P) ta cần xác định ***tham số tiêu p*** *của (P).*

Chú ý: *Công thức xác định các yếu tố của (P):*

– *Toạ độ tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – *Phương trình đường chuẩn* Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của (P), biết:

a) Tiêu điểm F(4; 0) b) Tiêu điểm F(3; 0) c) Đi qua điểm M(1; –4)

c) Đường chuẩn Δ: $x + 2 = 0$ d) Đường chuẩn Δ: $x + 3 = 0$ e) Đi qua điểm M(1; –2)

ĐS:

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của (P), biết:

a) Tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E): $5x^2 + 9y^2 = 45$.

b) Tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của hypebol (H): $16x^2 - 9y^2 = 144$.

c) Tiêu điểm F trùng với tâm của đường tròn (C): $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$.

ĐS:

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (P) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý: *Công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (P):*

$$MF = x + \frac{p}{2}$$

Bài 1. Cho parabol (P) và đường thẳng *d* vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F cắt (P) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF, MN.

a) $(P): y^2 = 6x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

ĐS:

Bài 2. Cho parabol (P).

i) Tìm những điểm M ∈ (P) cách tiêu điểm F một đoạn bằng *k*.

ii) Chọn M có tung độ dương. Tìm điểm A ∈ (P) sao cho ΔAFM vuông tại F.

a) $(P): y^2 = 8x,\ k = 10$ b) $(P): y^2 = 2x,\ k = 5$ c) $(P): y^2 = 16x,\ k = 4$

ĐS:

Bài 3. Cho parabol (P) và đường thẳng *d* có hệ số góc *m* quay quanh tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại hai điểm M, N.

i) Chứng minh $x_M.x_N$ không đổi.

ii) Tính MF, NF, MN theo *m*.

a) $(P): y^2 = 4x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

ĐS:

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $MF = d(M, \Delta)$ $\Rightarrow$ *Tập hợp là (P) có tiêu điểm F.*

Dạng 2: $y^2 = 2px$ $\Rightarrow$ *Tập hợp là (P) có tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Bài 1. Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C) di động luôn đi qua điểm F và tiếp xúc với đường thẳng *Δ*, với:

a) $F(2;0),\ \Delta: x + 2 = 0$ b) $F(3;0),\ \Delta: x + 3 = 0$ c) $F(1;0),\ \Delta: x + 1 = 0$

ĐS:

Bài 2. Cho parabol (P). Đường thẳng d quay quanh O cắt (P) tại điểm thứ hai là A. Tìm tập hợp của:

i) Trung điểm M của đoạn OA   ii) Điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NO} = \vec{0}$.

a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 = 4x$ c) $y^2 = 2x$ d) $y^2 = x$

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho ba điểm A(2; 1), B(–2; 2), M(*x; y*).

a) Tìm hệ thức giữa *x* và *y* sao cho tam giác AMB vuông tại M.

b) Tìm phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường trung trực đoạn AB.

c) Tìm phương trình của đường thẳng *d* đi qua A và tạo với AB một góc 60^0.

HD: a) $x^2+y^2-3y-2=0$ *b)* $8x-2y+3=0$

c) $\left(4\sqrt{3}\mp 1\right)x-\left(\sqrt{3}\pm 4\right)y\pm 6-7\sqrt{3}=0$

Bài 2. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x+4y-12=0$, $d_2: 3x+4y-2=0$, $d_3: x-2y+1=0$.

a) Chứng tỏ rằng d_1 và d_2 song song. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

b) Tìm phương trình đường thẳng *d* song song và cách đều d_1 và d_2.

c) Tìm điểm M trên d_3 cách d_1 một đoạn bằng 1.

HD: a) 2 *b)* $3x+4y-7=0$ *c) M(3; 2) hoặc M(1; 1)*

Bài 3. Cho điểm A(2; –3) và hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=7-2m \\ y=-3+m \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=-5+4t \\ y=-7+3t \end{cases}$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và cắt *d, d′* tại B, B′ sao cho AB = AB′.

b) Gọi M là giao điểm của *d* và *d′*. Tính diện tích của tam giác MBB′.

HD: a) $\Delta: \{x=2+6t;\ y=-3+2t$ *b) S = 5*

Bài 4. Cho đường thẳng d_m: $(m-2)x+(m-1)y+2m-1=0$.

a) Chứng minh rằng d_m luôn đi qua một điểm cố định A.

b) Tìm *m* để d_m cắt đoạn BC với B(2; 3), C(4; 0).

c) Tìm phương trình đường thẳng đi qua A và tạo với BC một góc 45^0.

d) Tìm *m* để đường thẳng d_m tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính R = $\sqrt{5}$.

HD: a) A(1; –3) *b)* $\frac{8}{7}\le m\le\frac{3}{2}$ *c)* $x+5y+14=0,\ 5x-y-8=0$

d) $m=3,\ m=\frac{4}{3}$

Bài 5. Cho hai đường thẳng:

$d: x\cos t+y\sin t-3\cos t-2\sin t=0$ và $d': x\sin t-y\cos t+4\cos t+\sin t=0$

a) Chứng minh rằng *d* và *d′* lần lượt đi qua 2 điểm cố định A, A′ và $d\perp d'$.

b) Tìm phương trình tập hợp giao điểm M của *d* và *d′*. Viết phương trình tiếp tuyến của tập hợp đó vẽ từ điểm B(5; 0).

HD: a) A(3; 2), A′(–1; 4) *b) (C):* $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

$2x+11y-10=0,\ 2x+y-10=0$

Bài 6. Cho ba điểm M(6; 1), N(7; 3), P(3; 5) lần lượt là trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

a) Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

b) Tìm phương trình các trung tuyến AM, BN, CP.

c) Tính diện tích của tam giác ABC.

HD: a) A(4; 7), B(2; 3), C(10; –1)

b) $3x+y-19=0,\ y=3,\ 6x+7y-53=0$ *c) S = 20*

Bài 7. Cho tam giác ABC có A(8; 0), B(0; 6), C(9; 3). Gọi H là chân đường cao vẽ từ C xuống cạnh AB.

a) Tìm phương trình cạnh AB và đường cao CH.

b) Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của C trên Ox và Oy. Chứng minh I, H, K thẳng hàng.

ĐS:

Bài 8. Cho ba điểm A(0; –1), B(4; 1), C(4; 2). Viết phương trình đường thẳng *d* khi biết:

a) *d* đi qua A và khoảng cách từ B đến *d* bằng hai lần khoảng cách từ C đến *d*.

b) *d* đi qua C và cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại E và F sao cho: $\overline{OE} + \overline{OF} = -3$.

c) *d* đi qua B, cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại M, N với $x_M > 0,\ y_N > 0$ và sao cho:

i) OM + ON nhỏ nhất ii) $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất.

HD: a) $x - y - 1 = 0,\ 2x - 3y - 3 = 0$ *b)* $2x - y - 6 = 0,\ x - 4y + 4 = 0$

c) i) $x + 2y - 6 = 0$ *ii)* $4x + y - 17 = 0$

Bài 9. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết:

a) Đỉnh B(2; 6), phương trình một đường cao và một phân giác vẽ từ một đỉnh là:

$$x - 7y + 15 = 0,\ 7x + y + 5 = 0$$

b) Đỉnh A(3; –1), phương trình một phân giác và một trung tuyến vẽ từ hai đỉnh khác nhau là: $x - 4y + 10 = 0,\ 6x + 10y - 59 = 0$.

HD: a) $4x - 3y + 10 = 0,\ 7x + y - 20 = 0,\ 3x + 4y - 5 = 0$

b) $2x + 9y - 65 = 0,\ 6x - 7y - 25 = 0,\ 18x + 13y - 41 = 0$

Bài 10. Cho hai điểm A(3; 4), B(–1; –4) và đường thẳng $d: 3x + 2y - 7 = 0$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và có tâm I ∈ *d*.

b) Viết phương tiếp tuyến của (C) kẻ từ điểm $E\left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$. Tính độ dài của tiếp tuyến đó và tìm toạ độ tiếp điểm.

c) Trên (C), lấy điểm F có $x_F = 8$. Viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng với (C) qua đường thẳng AF.

HD: a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

b) $y - 4 = 0,\ 4x - 3y + 10 = 0$, $d = \dfrac{5}{2}$, *tiếp điểm (3; 4), (–1; 2)*

c) (C′): $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 55 = 0$

Bài 11. Cho đường cong (C_m): $x^2 + y^2 + mx - 4y - m + 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi *m*, (C_m) luôn là đường tròn và (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định A, B.

b) Tìm *m* để (C_m) đi qua gốc toạ độ O. Gọi (C) là đường tròn ứng với giá trị *m* vừa tìm được. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 4x + 3y - 5 = 0$ và chắn trên (C) một dây cung có độ dài bằng 4.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-2; 1)$.

d) Tìm *m* để (C_m) tiếp xúc với trục tung. Viết phương trình đường tròn ứng với *m* đó.

HD: a) A(1; 1), B(1; 3)

b) m = 2, (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, $\Delta_1: 4x + 3y - 8 = 0,\ \Delta_2: 4x + 3y + 7 = 0$

c) $x + 2y - 8 = 0,\ x + 2y + 2 = 0$ *d) m = –2,* $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

Bài 12. Cho đường cong (C_t): $x^2 + y^2 - 2x\cos t - 2y\sin t + \cos 2t = 0$ $(0 < t < \pi)$.

a) Chứng tỏ (C_t) là đường tròn với mọi *t*.

b) Tìm tập hợp tâm I của (C_t) khi *t* thay đổi.

c) Gọi (C) là đường tròn trong họ (C_t) có bán kính lớn nhất. Viết phương trình của (C).

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với trục O*x* một góc 45^0.

HD: b) $x^2+y^2=1$ c) $t=\dfrac{\pi}{2}$, $(C): x^2+y^2-2y-1=0$

d) $x-y-1=0,\ x+y+1=0,\ x-y+3=0,\ x+y-3=0$

Bài 13. Cho hai đường thẳng $d_1: x-3y+4=0,\ d_2: 3x+y+2=0$.

a) Viết phương trình hai đường tròn (C_1), (C_2) qua gốc toạ độ O và tiếp xúc với d_1, d_2. Xác định tâm và bán kính của 2 đường tròn đó. Gọi (C_1) là đường tròn có bán kính lớn hơn.

b) Gọi A và B là tiếp điểm của (C_1) với d_1 và d_2. Tính toạ độ của A và B. Tính góc $\widehat{AOB}$.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tạo ra 1 dây cung nhận điểm E(4; –2) làm trung điểm.

d) Trên đường thẳng $d_3: 3x+y-18=0$, tìm những điểm mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến của (C_1) vuông góc với nhau.

HD: a) $(C_1): x^2+y^2-6x+2y=0,\ (C_2): 5x^2+5y^2+2x-6y=0$

b) $A(2; 2), B(0; -2), \widehat{AOB}=135^0$ c) Δ: $x-y-6=0$ d) (5; 3), (7; –3)

Bài 14. Cho đường tròn (C) đi qua điểm A(1; –1) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+2=0$ tại điểm B có $y_B=2$.

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Một đường thẳng *d* đi qua M(4; 0) và có hệ số góc *k*. Biện luận theo *k* số giao điểm của *d* và (C).

HD: a) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

b) $k<\dfrac{5}{12}$: *2 điểm chung,* $k=\dfrac{5}{12}$: *1 điểm chung,* $k>\dfrac{5}{12}$: *không điểm chung*

Bài 15. Cho 4 số thực *a, b, c, d* thoả điều kiện: $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c+d=3 \end{cases}$. Bằng phương pháp hình học, chứng minh rằng: $ac+cd+bd \le \dfrac{9+6\sqrt{2}}{4}$.

HD: Xét đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ *và đường thẳng* $d: x+y=3$. *Gọi M(a; b) ∈ (C), N(c; d) ∈ d. Gọi A, B là các giao điểm của (C) và d với đường thẳng y = x.*

$\Rightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ B\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. *Tính* $MN^2=10-2(ac+cd+bd)$, $AB^2=\dfrac{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{2}$.

Từ MN ≥ AB ta suy ra đpcm.

Bài 16. Cho elip (E): $4x^2+9y^2-36=0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (E).

b) Tính diện tích hình vuông có các đỉnh là giao điểm của (E) với 2 đường phân giác các góc toạ độ.

HD: b) $S=\dfrac{144}{13}$.

Bài 17. Cho elip (E): $16x^2+25y^2-400=0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình các đường phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$ với $M\left(3;-\dfrac{16}{3}\right)$ và F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E).

HD: b) $3x-5y-25=0,\ 5x+3y-\dfrac{27}{5}=0$

Bài 18. Cho elip (E): $x^2+4y^2-20=0$ và điểm A(0; 5).

a) Biện luận số giao điểm của (E) với đường thẳng *d* đi qua A và có hệ số góc *k*.

b) Khi *d* cắt (E) tại M, N, tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

HD: a) $\left[\begin{array}{l} k<-\dfrac{1}{4} \\ k>\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$ *: 2 giao điểm,* $-\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{1}{4}$ *: không giao điểm,* $k=\pm\dfrac{1}{4}$ *: 1 giao điểm*

b) $x^2+4y^2=100$

Bài 19. Cho họ đường cong (C_m): $x^2+y^2-2mx+2m^2-1=0$ (*).

a) Tìm các giá trị của *m* để (C_m) là đường tròn.

b) Tìm phương trình tập hợp (E) các điểm M trong mặt phẳng O*xy* sao cho ứng với mỗi điểm M ta có duy nhất 1 đường tròn thuộc họ (C_m) đi qua điểm M đó.

HD: a) $-1\le m\le 1$ *b) (E):* $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ *(Đưa PT (*) về PT với ẩn m. Tìm điều kiện để PT có nghiệm m duy nhất).*

Bài 20. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có 2 đỉnh là 2 tiêu điểm của (E) và 2 tiêu điểm là 2 đỉnh của (E).

b) Tìm điểm M trên (H) sao cho 2 bán kính qua tiêu điểm của M vuông góc với nhau.

c) Chứng minh tích các khoảng cách từ một điểm N bất kì trên (H) đến hai đường tiệm cận của (H) bằng một hằng số.

HD: a) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$ *b) 4 điểm* $M\left(\pm\dfrac{5\sqrt{7}}{4};\pm\dfrac{9}{4}\right)$ *c)* $\dfrac{63}{16}$.

Bài 21. Cho hypebol (H): $x^2-4y^2-4=0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (H).

b) Gọi *d* là đường thẳng đi qua điểm A(1; 4) và có hệ số góc *k*. Biện luận theo *k* số giao điểm của *d* và (H).

ĐS:

Bài 22. Cho các điểm $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$ và điểm M(*x; y*). Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua trục tung.

a) Tìm toạ độ của điểm M′ theo *x, y* . Tìm phương trình tập hợp (H) các điểm M thoả $\overrightarrow{MA_2}.\overrightarrow{M'A_2}=0$. Chứng tỏ (H) là một hypebol. Xác định toạ độ các tiêu điểm và phương trình các đường tiệm cận của (H).

b) Viết phương trình của elip (E) có 2 đỉnh trên trục lớn của (E) trùng với 2 đỉnh của (H) và (E) đi qua điểm $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

c) Tìm toạ độ giao điểm của (H) với 2 đường chuẩn của (E).

HD: a) $x^2-y^2=4$ *b) (E):* $x^2+4y^2=4$ *c) 4 điểm* $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài 23. Cho hypebol (H): $4x^2-5y^2-20=0$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, tiệm cận của (H).

b) Gọi (C) là đường tròn có tâm trùng với tiêu điểm F_1 (có hoành độ âm) của (H) và bán kính R bằng độ dài trục thực của (H). M là tâm đường tròn đi qua tiêu điểm F_2 và tiếp xúc ngoài với (C). Chứng minh rằng M ở trên (H).

HD: b) (C): $(x+3)^2+y^2=20$. *Kiểm chứng* $MF_1-MF_2=2\sqrt{5}=2a \Rightarrow M \in (H)$.

Bài 24. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

a) Viết phương trình của elip (E) có cùng tiêu điểm với (H) và đi qua điểm $P\left(2;\frac{5}{3}\right)$.

b) Đường thẳng d đi qua đỉnh A_2 của (E) (có hoành độ dương) và song song với đường thẳng Δ: $2x-3y+12=0$. Viết phương trình của d. Tìm toạ độ giao điểm B (khác A_2) của d với (E). Xác định điểm $C \in$ (E) sao cho tam giác A_2BC có diện tích lớn nhất.

HD: a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ *b) d:* $2x-3y-6=0$, $B\left(-\frac{1}{3};-\frac{20}{9}\right)$, $C\left(-2;\frac{5}{3}\right)$

Bài 25. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm và A_1, A_2 là 2 đỉnh của (H).

Trên (H), lấy điểm M tuỳ ý, kẻ MP ⊥ Ox. Chứng minh:

a) $(MF_1+MF_2)^2=4(OM^2+b^2)$ b) $\frac{PM^2}{\overline{A_1P}.\overline{A_2P}}=\frac{b^2}{a^2}$.

HD: a) Viết $(MF_1+MF_2)^2=(MF_1-MF_2)^2+4MF_1.MF_2$.

b) Tính PM^2, $\overline{A_1P}.\overline{A_2P}$ *theo toạ độ điểm M.*

Bài 26. Cho parabol (P): $y^2=4x$.

a) Tìm toạ độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn Δ của (P).
b) Tìm điểm M trên (P) mà khoảng cách từ M đến F bằng 5.
HD: b) N(4; 4); N(4; –4)

Bài 27. Cho parabol (P): $y^2=2x$ có tiêu điểm F và điểm $M\left(\frac{t^2}{2};t\right)$ (với $t \neq 0$).

a) Chứng tỏ rằng M nằm trên (P).
b) Đường thẳng FM cắt (P) tại N (khác M). Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn MN theo t.
c) Tìm tập hợp (P′) các điểm I khi t thay đổi.

HD: b) $I\left(\frac{t^4+1}{4t^2};\frac{t^2-1}{2t}\right)$ *c) (P′):* $y^2=x-\frac{1}{2}$

Bài 28. Cho parabol (P): $y^2=2px$ ($p > 0$). Một đường thẳng d đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại M và N. Gọi t là góc của trục Ox và $\overrightarrow{FM}$.

a) Chứng minh rằng khi d di động quay quanh F thì tổng $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích FM.FN. Suy ra vị trí của d.

HD: a) $FM=\frac{p}{1-\cos t}$, $FN=\frac{p}{1+\cos t}$ $\Rightarrow \frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{2}{p}$

b) Áp dụng BĐT Cô–si: $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN} \geq 2\sqrt{\frac{1}{FM}.\frac{1}{FN}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p} \geq 2\sqrt{\frac{1}{FM.FN}} \Leftrightarrow FM.FN \geq p^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{FM} = \dfrac{1}{FN} \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow d \perp Ox.$

Phụ lục: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP

Bài 1. (TN 2002) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hypebol (H) đi qua điểm $M\left(5;\frac{9}{4}\right)$ và nhận điểm $F_1(5; 0)$ làm tiêu điểm của nó.

1. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $5x+4y-1=0$.

ĐS: 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ *2)* $5x+4y\pm16=0$

Bài 2. (TN 2003) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho một elip (E) có khoảng cách giữa các đường chuẩn là 36 và các bán kính qua tiêu điểm của điểm M nằm trên elip (E) là 9 và 15.

1. Viết phương trình chính tắc của elip (E).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của elip (E) tại M.

ĐS: 1) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$

2) $x+\sqrt{11}y=32,\ -x+\sqrt{11}y=32,\ x-\sqrt{11}y=32,\ x+\sqrt{11}y=-32$

Bài 3. (TN 2004) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho elíp (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2.

1. Cho điểm M(3; m) thuộc (E), hãy viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi m > 0.
2. Cho A và B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Hãy tính $AF_2 + BF_1$.

ĐS: 1) $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$ *2)* $AF_2+BF_1=12$

Bài 4. (TN 2005) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho parabol (P): $y^2 = 8x$.

1. Tìm toạ độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M thuộc (P) có tung độ bằng 4.
3. Giả sử đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2. Chứng minh: $AB = x_1 + x_2 + 4$.

ĐS: 1) F(2; 0), Δ: x = –2 *2) x – y + 2 = 0*

Bài 5. (TN 2006–kpb) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

1. Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh và viết phương trình các đường tiệm cận của (H).
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (H) biết các tiếp tuyến đó đi qua điểm M(2; 1).

ĐS: 1) $F_1(-3;0), F_2(3;0),\ A_1(-2;0), A_2(2;0),\ y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

2) x – 2 = 0, 3x – 2y – 4 = 0

Bài 6. (TN 2007–kpb) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Xác định toạ độ các tiêu điểm, tính độ dài các trục và tâm sai của elip (E).

ĐS: $F_1(-3;0),\ F_2(3;0),\ 2a=10,\ 2b=8,\ e=\frac{3}{5}$

Bài 7. (TN 2007–kpb–lần 2) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hypebol (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Xác định toạ độ các tiêu điểm, tính tâm sai và viết phương trình các đường tiệm cận của (H).

ĐS: $F_1(-5;0),\ F_2(5;0),\ e=\dfrac{5}{4},\ y=\pm\dfrac{3}{4}x$

Bài 8. (TN 2008–kpb) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hai điểm A(0; 8), B(–6; 0). Gọi (T) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

1. Viết phương trình của (T).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (T) tại điểm A. Tính cosin của góc giữa tiếp tuyến đó với đường thẳng $y - 1 = 0$.

ĐS: *1)* $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ *2)* $3x+4y-32=0,\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

Bài 9. (TN 2008–kpb–lần 2) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho tam giác ABC với A(2; 1), B(–1; 0) và C(1; –2).

1. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại đỉnh A.
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng AB.

ĐS: *2)* $9x+3y-5=0$

ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài 1. (ĐH 2002A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy*, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

ĐS: $G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3};\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$, $G_2\left(\dfrac{-4\sqrt{3}-1}{3};\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 2. (ĐH 2002B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy*, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và AB = 2AD. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

ĐS: A(–2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(–1; –2)

Bài 3. (ĐH 2002D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy*, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất.

ĐS: $M\left(2\sqrt{7};0\right)$, $N\left(0;\sqrt{21}\right)$, *minMN = 7*

Bài 4. (ĐH 2002A–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng *d* mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^0$.

ĐS: $M_1(3;4)$, $M_2(-3;-2)$

Bài 5. (ĐH 2002B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn:

$$(C_1):\ x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \text{ và } (C_2):\ x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

ĐS: 4 tiếp tuyến chung: $2x + y \pm 3\sqrt{5} - 2 = 0;\ y = -1;\ y = \dfrac{4}{3}x - 3$

Bài 6. (ĐH 2002D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d_m: mx - y - 1 = 0$.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của *m*, đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến đó đi qua điểm N(1; –3).

ĐS: 2) $5x - 4y - 17 = 0;\ x + 2y + 5 = 0$

Bài 7. (ĐH 2002D–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

1. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng *d:* $x + 6y - 6 = 0$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn (C_1), (C_2).

ĐS: 1) $(x-12)^2 + (y+1)^2 = 125$ *2)* $x + 7y - 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$

Bài 8. (ĐH 2003B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy*, cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^o$. Biết M(1; –1) là trung điểm cạnh BC và $G\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: A(0; 2), B(4; 0), C(–2; –2)

Bài 9. (ĐH 2003D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C′).

ĐS: $(C'):(x-3)^2+y^2=4$, *A(1; 0), B(3; 2)*

Bài 10. (ĐH 2003A–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho parabol $y^2=x$ và điểm I(0; 2). Tìm toạ độ hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$.

ĐS: $M(4;-2), N(1;1)$ *hoặc* $M(36;6), N(9;3)$

Bài 11. (ĐH 2003B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ: $2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng *d* tại điểm A(4; 2).

ĐS: $(x-6)^2+(y+12)^2=200$

Bài 12. (ĐH 2003B–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và các điểm M(–2; 3), N(5; *n*). Viết phương trình các đường thẳng d_1, d_2 qua M và tiếp xúc với (E). Tìm *n* để trong số các tiếp tuyến của (E) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2.

ĐS: $d_1: x=-2;\ d_2: 2x+3y-5=0;\ n=-5$

Bài 13. (ĐH 2003D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 0) và hai đường thẳng lần lượt chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là: $x-2y+1=0,\ 3x+y-1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS: $B(-5;-2), C(-1;4) \Rightarrow S=14$

Bài 14. (ĐH 2004A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai điểm A(0; 2) và $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

ĐS: $H\left(\sqrt{3};-1\right), I\left(-\sqrt{3};1\right)$

Bài 15. (ĐH 2004B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai điểm A(1; 1), B(4; –3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

ĐS: $C_1(7;3), C_2\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right)$

Bài 16. (ĐH 2004D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có các đỉnh A(–1; 0), B(4; 0), C(0; m) với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

ĐS: $G\left(1;\frac{m}{3}\right), m=\pm 3\sqrt{6}$

Bài 17. (ĐH 2004A–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(–1; 1) và đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua A, qua gốc toạ độ O và tiếp xúc với đường thẳng *d*.

ĐS:

Bài 18. (ĐH 2004A–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(0; 2) và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên *d* hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và AB = 2BC.

ĐS: $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right), C(0;1)$ *hoặc* $C\left(\frac{12}{25};\frac{19}{25}\right)$

Bài 19. (ĐH 2004B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm I(–2; 0) và hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$.

ĐS:

Bài 20. (ĐH 2004B–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng $d: x + \sqrt{2}y - 1 = 0$.

ĐS:

Bài 21. (ĐH 2004D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông ở A. Biết A(–1; 4), B(1; –4), đường thẳng BC đi qua điểm $K\left(\frac{7}{3}; 2\right)$. Tìm toạ độ đỉnh C.

ĐS: C(3; 5)

Bài 22. (ĐH 2004D–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(2; 3) và hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$. Tìm toạ độ các điểm B trên d_1 và C trên d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm G(2; 0).

ĐS: B(–1; –4), C(5; 1)

Bài 23. (ĐH 2005A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

ĐS: A(1; 1), B(0; 0), C(1; –1), D(2; 0) hoặc A(1; 1), B(2; 0), C(1; –1), D(0; 0)

Bài 24. (ĐH 2005B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai điểm A(2; 0), B(6; 4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

ĐS: $(C_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(C_2): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$

Bài 25. (ĐH 2005D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm C(2; 0) và elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

ĐS: $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ *hoặc* $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 26. (ĐH 2005A–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x - 2y - 4 = 0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: A(0; 3), B(0; –2), C(4; 0)

Bài 27. (ĐH 2005A–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

ĐS:

$$(C_1): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4,\ (C_2): (x-18)^2 + (y-18)^2 = 18,\ (C_3): (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$$

Bài 28. (ĐH 2005B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E) : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (E) biết d cắt hai hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho AO = 2BO.

ĐS: 4 tiếp tuyến: $x + 2y \pm 10 = 0$, $x - 2y \pm 10 = 0$

Bài 29. (ĐH 2005B–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho 2 đường tròn lần lượt có phương trình: $(C_1): x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$. Viết phương trình trục đẳng phương d của 2 đường tròn (C_1) và (C_2). Chứng minh rằng nếu K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2).

ĐS: $d: x + y + 7 = 0$, *xét* $OK^2 - IK^2 = -16 < 0 \Rightarrow OK < IK$

Bài 30. (ĐH 2005D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phương trình: $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 3 = 0$ sao cho MI = 2R, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

ĐS: $M(-4;-5)$, $M\left(\frac{24}{5};\frac{63}{5}\right)$

Bài 31. (ĐH 2005D–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho 2 điểm A(0;5), B(2; 3) . Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính R = $\sqrt{10}$.

ĐS: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10,\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$

Bài 32. (ĐH 2006A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường thẳng lần lượt có phương trình: $d_1: x + y + 3 = 0,\ d_2: x - y - 4 = 0,\ d_3: x - 2y = 0$. Tìm toạ độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

ĐS: M(–22; –11), M(2; 1)

Bài 33. (ĐH 2006B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(–3; 1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

ĐS: Chứng tỏ toạ độ $(x_0;y_0)$ *của T_1, T_2 thoả phương trình* $2x + y - 3 = 0$.

Bài 34. (ĐH 2006D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* lần lượt có phương trình: (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $d: x - y + 3 = 0$. Tìm toạ độ điểm M nằm trên *d* sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

ĐS: M(1; 4), M(–2; 1)

Bài 35. (ĐH 2006A–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E).

ĐS: (H): $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$

Bài 36. (ĐH 2006A–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với *d*. Phương trình đường cao BH: $x + y + 3 = 0$ và trung điểm của cạnh AC là M(1; 1). Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: $A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(-4;1)$, $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$

Bài 37. (ĐH 2006B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại B, với A(1; –1), C(3; 5). Điểm B nằm trên đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.

ĐS: AB: $23x - y - 24 = 0$, *BC:* $19x - 13y + 8 = 0$

Bài 38. (ĐH 2006B–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh A(2; 1), đường cao qua đỉnh B có phương trình $x - 3y - 7 = 0$ và đường trung tuyến qua đỉnh

C có phương trình $x+y+1=0$. Xác định toạ độ các đỉnh B và C của tam giác.

ĐS: B(–2; –3), C(4; –5)

Bài 39. (ĐH 2006D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(–1; 1) và đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A, gốc toạ độ O và tiếp xúc với đường thẳng *d*.

ĐS: $(C_1): x^2+y^2-2y=0, (C_2): x^2+y^2+2x=0$

Bài 40. (ĐH 2006D–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

ĐS: (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 41. (ĐH 2007A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có A(0; 2), B(–2; –2), C(4; –2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

ĐS: H(1; 1), $x^2+y^2-x+y-2=0$

Bài 42. (ĐH 2007B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(2; 2) và các đường thẳng: $d_1: x+y-2=0, d_2: x+y-8=0$. Tìm toạ độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

ĐS: B(–1; 3), C(3; 5) hoặc B(3; –1), C(5; 3)

Bài 43. (ĐH 2007D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* có phương trình: $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9, d: 3x-4y+m=0$

Tìm *m* để trên *d* có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

ĐS: m = 19, m = –41

Bài 44. (ĐH 2007A–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=1$. Đường tròn (C′) tâm I(2; 2) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

ĐS: Chú ý AB ⊥ OI. Phương trình AB: $y=-x\pm 1$

Bài 45. (ĐH 2007A–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có trọng tâm G(–2; 0), phương trình các cạnh AB: $4x+y+14=0$, AC: $2x+5y-2=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: A(–4; 2), B(–3; –2), C(1; 0)

Bài 46. (ĐH 2007B–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* lần lượt có phương trình: (C): $x^2+y^2-8x+6y+21=0$, $d: x+y-1=0$. Xác định toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C), biết A nằm trên *d*.

ĐS: A(2; –1), B(2; –5), C(6; –5), D(6; –1) hoặc A(6; –5), B(6; –1), C(2; –1), D(2; –5)

Bài 47. (ĐH 2007B–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm M(5; 1) và (C′) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

ĐS: $(C_1'): (x-5)^2+(y-1)^2=13, (C_2'): (x-5)^2+(y-1)^2=43$.

Bài 48. (ĐH 2007D–db1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm A(2; 1). Trên trục O*x*, lấy điểm B có hoành độ $x_B \ge 0$, trên trục O*y*, lấy điểm C có tung độ $y_C \ge 0$ sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các điểm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

ĐS: B(0; 0), C(0; 5)

Bài 49. (ĐH 2007D–db2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho các điểm A(0; 1), B(2; –1) và các đường thẳng

$$d_1:(m-1)x+(m-2)y+2-m=0\,,\ d_2:(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$$

Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm m sao cho PA + PB lớn nhất.

ĐS: Chú ý: $(PA+PB)^2 \le 2(PA^2+PB^2)=2AB^2=16$. *Do đó max(PA+PB)=4 khi P là trung điểm của cung AB. Khi đó P(2; 1) hay P(0; –1)* $\Rightarrow$ *m = 1 hoặc m = 2.*

Bài 50. (ĐH 2008A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

ĐS: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 51. (ĐH 2008B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, hãy xác định toạ độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(–1; –1), đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

ĐS: $C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$

Bài 52. (ĐH 2008D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho parabol (P): $y^2=16x$ và điểm A(1; 4). hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC}=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: Viết PT đường thẳng BC $\Rightarrow$ *BC đi qua điểm cố định I(17; –4)*

Bài 53. (ĐH 2009A)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng Δ: $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng Δ: $x+my-2m+3=0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

ĐS: 1) $y-5=0,\ x-4y+19=0$ *2) m= 0 hoặc* $m=\frac{8}{15}$.

Bài 54. (ĐH 2009B)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0,\ \Delta_2: x-7y=0$. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K ∈ (C)

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(–1; 4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng Δ: $x-y-4=0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

ĐS: 1) $K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right),\ R=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ *2)* $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ *hoặc* $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$

Bài 55. (ĐH 2009D)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có M(2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0,\ 6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$. Gọi I là tâm

của (C). Xác định toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^0$.

ĐS: 1) $AC: 3x - 4y + 5 = 0$ *2)* $M\left(\frac{3}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 56. (ĐH 2010A)

1)Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6); đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1; –3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

ĐS: 1) $(T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$ *2) B(0; –4), C(–4; 0) hoặc B(–6; 2), C(2; –6)*

Bài 57. (ĐH 2010B)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh C(–4; 1), phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho điểm $A\left(2; \sqrt{3}\right)$ và elip (E): $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF_2.

ĐS: 1) BC: $3x - 4y + 16 = 0$ *2)* $(x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

Bài 58. (ĐH 2010D)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có đỉnh A(3; –7), trực tâm là H(3; –1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(–2; 0). Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho điểm A(0; 2) và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

ĐS: 1) $C\left(-2 + \sqrt{65}; 3\right)$ *2) 2 đường Δ:* $\left(\sqrt{5} - 1\right)x \pm 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}\,y = 0$

Bài 59. (ĐH 2011A)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng Δ: $x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi *I* là tâm của (C), *M* là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* đến (C) (*A, B* là các tiếp điểm). Tìm toạ độ điểm M, biết tứ giác *MAIB* có diện tích bằng 10.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác *OAB* cân tại O và có diện tích lớn nhất.

ĐS: 1) M(2; –4), M(–3; 1)

2) $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *hoặc* $A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 60. (ĐH 2011B)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hai đường thẳng Δ: $x - y - 4 = 0$ và *d*: $2x - y - 2 = 0$. Tìm toạ độ điểm N thuộc đường thẳng *d* sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thoả mãn *OM.ON* = 8.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* tương ứng tại các điểm *D, E, F*. Cho *D*(3; 1) và đường thẳng *EF* có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm toạ độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

ĐS: 1) $N(0;-2), N\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$ *2)* $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$.

Bài 61. (ĐH 2011D)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh A và C.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác *AMN* vuông cân tại A.

ĐS: 1) $A(4;3), C(3;-1)$ *2)* $\Delta: y = 1;\ \Delta: y = -3$.

Bài 62. (CĐ 2011)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;-4)$ và tạo với đường thẳng *d* một góc bằng 45^0.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có phương trình các cạnh là $AB: x + 3y - 7 = 0$, $BC: 4x + 5y - 7 = 0$, $CA: 3x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh *A* của tam giác *ABC*.

ĐS: 1) $\Delta: y + 4 = 0;\ \Delta: x - 2 = 0$ *2)* $5x - 4y + 3 = 0$.

Bài 63. (ĐH 2012A)

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm toạ độ điểm A.

2) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn điểm của một hình vuông.

ĐS: 1) $A(1;-1), A(4;5)$ *2)* $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

Bài 64. (ĐH 2012B)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$, $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với *d* và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với *d*.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi ABCD có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox.

ĐS: 1) $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ *2)* $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Bài 65. (ĐH 2012D)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc *d*, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB=CD=2$.

ĐS: 1) $A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)$ *2)* $(C): (x+3)^2+(y+3)^2=10$.

Bài 66. (CĐ 2012)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+m=0$. Tìm *m* để *d* cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{AIB}=120^0$, với I là tâm của (C).

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC. Các đường thẳng BC, BB′, B′C′ lần lượt có phương trình là: $y-2=0$, $x-y+2=0$, $x-3y+2=0$; với B′, C′ tương ứng là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC.

ĐS: 1) $m=7; m=-3$ *2)* $AC: x+y+2=0$, $AB: 2x-y+2$ *hoặc* $AB: x-y+2=0$

Bài 67. (ĐH 2013A)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm toạ độ các điểm B và C, biết rằng $N(5;-4)$.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng Δ: $x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia O*y*. Viết phương trình đường tròn (C).

ĐS: 1) $B(-4;-7), C(1;-7)$. *2)* $(C): (x-5)^2+(y-3)^2=10$.

Bài 68. (ĐH 2013B)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình: $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm $H(-3;2)$. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm toạ độ đỉnh C.

ĐS: 1) $C(-1;6)$, $D(4;1)$ *hoặc* $D(-8;7)$ *2)* $C(9;11)$.

Bài 69. (ĐH 2013D)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(-2;4)$ và điểm $I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm toạ độ điểm C.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ và đường thẳng Δ: $y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N

và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm toạ độ điểm P.

ĐS: 1) $C(4;1)$ *hoặc* $C(-1;6)$ 2) $P(-1;3)$ *hoặc* $P(3;3)$.

Bài 70. (CĐ 2013)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường thẳng $d: x+y-3=0$, Δ: $x-y+2=0$ và điểm $M(-1;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M, có tâm thuộc *d*, cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB=3\sqrt{2}$.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông tại $A(-3;2)$ và có trọng tâm là $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC đi qua điểm $P(-2;0)$. Tìm toạ độ các điểm B và C.

ĐS: 1) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 2) $B(7;2), C(-3;-3)$ *hoặc* $B(-3;-3), C(7;2)$.

Bài 71. (ĐH 2014A)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN=3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2), N(2;-1)$.

ĐS: $y+2=0;\ 3x-4y-15=0$.

Bài 72. (ĐH 2014B)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành ABCD. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm toạ độ các điểm B và D.

ĐS: $B(-2;3), D(2;0)$.

Bài 73. (ĐH 2014D)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1;-1)$. Đường thẳng AB có phương trình $3x+2y-9=0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x+2y-7=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

ĐS: $x-2y-3=0$.

Bài 74. (CĐ 2014)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm $A(-2;5)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với *d*. Tìm toạ độ điểm M thuộc *d* sao cho $AM=5$.

ĐS: $4x+3y-7=0; M(1;1)$.

Bài 75. (ĐH 2015A)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho

ĐS:

Bài 76. (ĐH 2015B)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho

ĐS:

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitungqn@gmail.com