JNOTES

1. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0,\,\theta]$. По выборке объема n найдены оценки параметра θ : $\tilde{\theta_1} = 2\bar{x}$, $\tilde{\theta_2} = x_{\min}$,

$$\tilde{\theta_3} = x_{\max},\ \tilde{\theta_5} = \left(x_1 + \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} x_k}{(n-1)} \right).$$

a) Проверить оценки на несмещенность и состоятельность. Исправить эти оценки, если необходимо.

b) Какая из исправленных оценок более эффективна?

1) $\tilde{\theta}_1$: несмещенность: $M[\tilde{\theta}] = \theta$

$$M\left[2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = 2M\xi \qquad (x_i \sim R(0,\theta))$$

$$p(x) = \frac{1}{\theta}\{(0,\theta)\}$$

$$M[\xi] = \int_0^\theta x\cdot\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{\theta}{2} \longrightarrow M[\tilde{\theta}_1] = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta \to$$ несмещ. (подходит)

достаточность (теорема о достаточных условиях состоятель.)

$$D[\tilde{\theta}_1] = D\left[\frac{2}{n}\sum x_i\right] = \frac{4}{n^2}D\left[\sum x_i\right] = \frac{4}{n^2}\sum D x_i = \frac{4}{n}D\xi$$

$$D\xi = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$$

$$D[\tilde{\theta}_1] = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \to$$ состоятельна

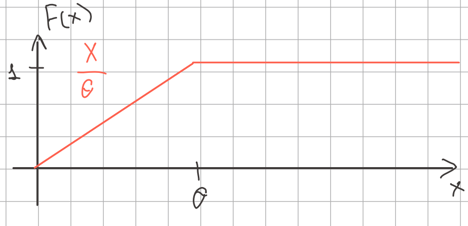
2) $\tilde{\theta}_2 = x_{\min} = x_{(1)}$

$$M[\tilde{\theta}_2] = \int_{-\infty}^{\infty} y\,q(y)\,dy$$

$x_i \sim R(0,\theta)$

$x_1 \sim 1-(1-F(y))^n$

$q(y) = n(1-F(y))^{n-1}\cdot F'(y)$



$$q(y) = n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}\{(0,\theta)\}$$

$$M[\tilde\theta_2] = \int_0^\theta y\, n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\,dy = \left| t = 1-\frac{y}{\theta}\right| = \int_1^0 \theta(1-t)\, n t^{n-1}\frac{1}{\theta}\,\theta\, dt$$

$$= n\theta\frac{1}{n} - n\theta\frac{1}{n+1} = \frac{\theta}{n+1}$$ смещенная

Исправляем: $\tilde\theta_2' = (n+1)X_{min}$ $\quad M[\tilde\theta_2'] = \theta$ несмещенная

Состоятельность:

$$D[\tilde\theta_2] = M[\tilde\theta_2^2] - M^2[\tilde\theta_2]$$

$$M[\tilde\theta_2^2] = \int_0^\theta y^2 n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\,dy = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$D[\tilde\theta_2] = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

но она смещена → теорема не работает

$$D[\tilde\theta_2'] = D[(n+1)\tilde\theta_2] = (n+1)^2\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

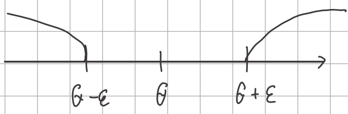
ничего не сработало →

По определению

$$\tilde\theta_2 \xrightarrow{P} \theta \quad \forall\,\theta>0$$

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad P(|\tilde\theta_2-\theta|\geq\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$P(\theta-\varepsilon \geq \underbrace{\tilde\theta_2}_{X_{min}}) + \overset{=0}{P(\tilde\theta_2\geq\varepsilon+\theta)}$$



$$P(X_{min}\le\theta-\varepsilon) = P(X_{min}<\theta-\varepsilon) = \Phi(\theta-\varepsilon)$$

$$\Phi(y) = 1-(1-F(\theta-\varepsilon))^n = 1-\left(1-\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = 1-\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

не состоятельная

$$\tilde{\theta}_2' \xrightarrow{P} \theta \quad \forall \theta > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\tilde{\theta}_2 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$P(|(n-1)x_{min} - \theta| \geq \varepsilon) \geq P(x_{min}(n+1) \geq \theta + \varepsilon) = P\left(x_{min} \geq \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)$$

$$= 1 - P\left(x_{min} < \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) = \left(1 - F\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n \to$$

$$\to e^{-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}} > 0$$ не состоятельна

3) $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$

$$M[\tilde{\theta}_3] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, q(y)\, dy = \int_0^{\theta} y\, y^n \frac{n}{\theta^n}\, dy = \frac{\theta n}{n+1}$$ смещенная

$$\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} x_{max} \qquad M[\tilde{\theta}_3'] -$$ несмещенная

$$\left(\Psi(z) = (F(z))^n \qquad q(y) = F'(y) = n\,(F(y))^{n-1} F'(y) \{(0;\theta)\} = n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \{[0;\theta]\} \right)$$

$$D[\tilde{\theta}_3] = M[\hat{\theta}_3^2] - M^2[\hat{\theta}_3] = \frac{\theta^2 n}{n+2} - \frac{\theta^2 n^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$D[\tilde{\theta}_3'] = D\left[\frac{n+1}{n} x_{max}\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\to$ по теореме достаточная

$$\tilde{\theta}_3 \xrightarrow{P} \theta \quad \forall \theta > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

тут ничего нет

непр.

$$P(x_{min} \leq \theta - \varepsilon) = P(x_{min} < \theta - \varepsilon) = \Phi(\theta - \varepsilon) = F(\theta - \varepsilon)^n \{(0;\theta)\}$$

$$\left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$ состоятель.

4) $\tilde{\theta}_4 = X_1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i$

несмещенная

$$M[\hat{\theta}_4] = M\left[X_1 + \frac{1}{n-1}\sum X_i\right] = M[X_i] + \frac{1}{n-1}\sum MX_i = 2M\xi = \theta$$

$$D[\tilde{\theta}_4] = D[X_i] + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=2}^{n} DX_i = \frac{\theta^2}{12} + \frac{1}{n-1}\frac{\theta^2}{12} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\theta^2}{12} \neq 0$$

ЗБЧ Хинчина: ξ_i независимы и одинаково распределены и $M\xi_i$ конечно $(<\infty)$ $\to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} M\xi_i$

$\xi_n \xrightarrow{P} X_1$ $\quad \eta_n \xrightarrow{P} MX_i = \frac{\theta}{2}$ $\quad \xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} X_1 + \frac{\theta}{2}$

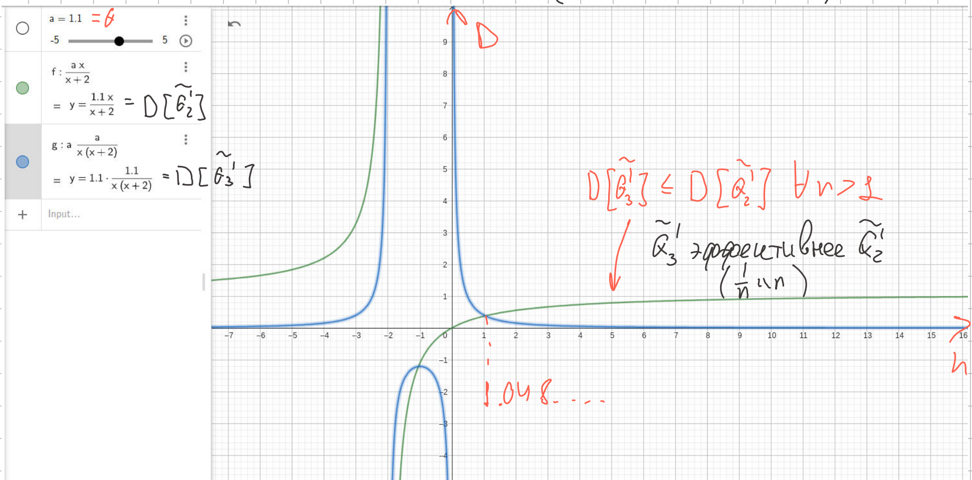
$\tilde{\theta}_4 \xrightarrow{P} \xi + \frac{\theta}{2}$ не состоятельная

б) Сравнение:

Мы изменяли только $\tilde{\theta}_2'$ и $\tilde{\theta}_3'$

$$D[\tilde{\theta}_2'] = D[(n+1)\tilde{\theta}_2] = (n+1)^2\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$D[\tilde{\theta}_3'] = D\left[\frac{n+1}{n}X_{max}\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$



3. Случайная величина имеет экспоненциальное распределение $p(x) = \begin{cases} e^{-x/\theta}/\theta, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $\theta > 0$. По выборке объема $n = 3$ найдены оценки параметра θ : $\tilde{\theta_1} = \bar{x}$, $\tilde{\theta_3} = x_{(2)}$ (второй член вариационного ряда).

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \theta > 0$

a) Проверить оценки на несмещенность. Исправить эти оценки, если необходимо.

b) Какая из исправленных оценок более эффективна?

c) Исследовать эти оценки на эффективность с помощью неравенства Крамера–Рао.

$$a)\ M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = M\xi \qquad D = \frac{1}{n}D\xi$$

$$M[\xi] = \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} e^{-x/\theta}\, x\, dx = \left| \begin{matrix} \frac{x}{\theta} = t \\ dx = \theta dt \end{matrix} \right| = \theta \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \theta$$

несмещенная

$$M[\xi^2] = \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x}{\theta} = t \\ dx = \theta dt \end{matrix} \right| = \frac{\theta^2}{\theta}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = 2\theta^2 \qquad \tilde{D} = \theta^2 \qquad D = \frac{\theta^2}{3}$$

- Пусть дана независимая выборка $X_1, \ldots, X_n$ из абсолютно непрерывного распределения, задаваемого плотностью распределения f_X и функцией распределения F_X. Тогда порядковые статистики также имеют абсолютно непрерывные распределения, и их плотности распределения имеют вид:

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}[F_X(x)]^{k-1}[1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x) \quad .$$

Мы выводили ее на семинаре

$$p(x_{(2)}) = nC_{n-1}^{1} F(y)\left(1 - F(y)\right)^{n-2} p(x)$$

$$3 \cdot 2 \cdot F(y)\left(1 - F(y)\right) \cdot p(x)$$

$$M[X_2] = 6\int_0^{\infty} x\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\left(e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}} =$$

$$\theta 6\int_0^{\infty} \frac{x}{\theta}\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\left(e^{-\frac{x}{\theta}}\right)e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \left|\begin{matrix} t=\frac{x}{\theta} \\ dx=\theta dt\end{matrix}\right| =$$

$$\theta 6\int_0^{\infty} t\left(1-e^{-t}\right)e^{-2t} = 6\left(-\int_0^{\infty} te^{-3t} + \int_0^{\infty} te^{-2t}\right)$$

$$\theta 6\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6}\theta \text{ - смещенная}$$

$$\tilde{\theta}_3' = \frac{6}{5}\theta_2 \qquad M[\tilde{\theta}_3'] = \theta \text{ - несмещенная}$$

$$M[X_{(2)}^2] = \int_0^{\infty} x^2\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\left(e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}6 = \left|\begin{matrix} \frac{x}{\theta}=t \\ dx=\theta dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^{\infty} t^2\theta^2\left(1-e^{-t}\right)e^{-2t} = \theta^2\int_0^{\infty} t^2\left(1-e^{-t}\right)e^{-2t} = \theta^2\int_0^{\infty} t^2e^{-2t}dt - \theta^2\int_0^{\infty} e^{-3t}t^2dt =$$

$$\theta\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{27}\right) = \frac{19}{18}\theta^2$$

$$D[X_{(2)}] = \frac{19}{18}\theta^2 - \frac{25}{36}\theta^2 = \frac{13}{36}\theta^2$$

$$D[\hat{X}_{(2)}] = \frac{13}{36}\theta^2\cdot\frac{36}{25} = \frac{13}{25}\theta^2$$

б) $D_1[\bar{X}] = \frac{\theta^2}{3}$ $\qquad D_2[\hat{X}_{(2)}] = \frac{13}{25}\theta^2$

$D_1 < D_2 \rightarrow \bar{X}$ более эффективна.

в) проверка модели на регулярность

$$\left(0 = \int \frac{\delta}{\delta\theta_i} p(x,\theta)\,dx = \int \frac{\delta(\ln p(x,\theta))}{\delta\theta_i} p(x,\theta)\,dx\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta\theta}\left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\right) dx = \int_0^\infty -\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} + \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 0$$

$p(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ непр. дифф-до на $\theta > 0$ (на $\mathbb{R}$)

$$I = M\left[\left(\frac{\delta \ln p}{\delta\theta}\right)^2\right] = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta^2} \quad \left(\ln p = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta\right)$$

модель и наши оценки регулярны

$$D[\tilde{g}(\vec{X}_n)] = \inf D[\tilde{g}(X_n)] = \frac{(g'(\theta))^2}{n I(\theta)} = \frac{1^2}{3 \cdot 1/\theta^2} = \frac{\theta^2}{3}$$

по всем регулярным оценкам

$g(\theta) = \theta$, $g'(\theta) = 1$

$D_1[\bar{X}] = \frac{\theta^2}{3}$ $\qquad D_2[\hat{X}_{(2)}] = \frac{13}{25}\theta^2$

$\parallel$

inf $\rightarrow$ она эффективнее