JNOTES

10. Основная гипотеза H_0 состоит в том, что случайная величина имеет распределение с плотностью $\overset{\ell_0,\, H_0}{p_0(x)} = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$. Альтернатива H_1 состоит в том, что случайная величина имеет распределение с плотностью $\overset{\ell_1,\, H_1}{p_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x}}{e-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$.

a) Построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке объема $n = 1$ с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

b) Построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке объема $n = 2$ с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

c) Построить наиболее мощный асимптотический критерий проверки этих гипотез по выборке объема n с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

d) Построить критерий по выборке объема n с критической областью $x_{\min} < c$ и уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

а) $\ell = \dfrac{\ell_1}{\ell_0} = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} = \dfrac{e^{1-x}}{1(e-1)} \geq C$ (по Т Неймона-Пирсона)

$x \le 1 - \ln C(e-1) = A$ $\qquad G_{кр}: \bar{x} \le A$

$P(x \le A \mid H_0) = \alpha \qquad \int_0^A p_0(x)\,dx = \alpha \qquad A = \alpha \qquad G_{кр}: x \le \alpha \qquad \boxed{\alpha_1 = \alpha}$

$\boxed{W} = P(x \le \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{A}} \mid H_1) = \int_0^{\alpha} p_1(x)\,dx = \boxed{\dfrac{e}{e-1}\left(1 - e^{-\alpha}\right)} \qquad \boxed{\alpha_2 = 1 - W}$

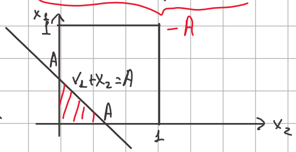
б) $n = 2$

$\ell = \dfrac{L_1}{L_0} = \dfrac{p_1(x_1)\,p_2(x_2)}{p_0(x_1)\,p_0(x_2)} = \dfrac{e^{2 - x_1 - x_2}}{(e-1)^2 \cdot 1 \cdot 1} \geq C$

$-x_1 - x_2 \geq \ln \dfrac{C(e-1)^2}{e^2} = \underbrace{2\ln(e-1) - 2 + \ln C}_{-A}$

$x_1 + x_2 \le A$

$P(x_1 + x_2 \le A \mid H_0) \le \alpha$



$$P(X_1+X_2\le A|H_0)=\iint\limits_{X_1+X_2\le A} 1\cdot 1\cdot dx_1\, dx_2 = \alpha = \frac{1}{2}A^2 \to A=\sqrt{2\alpha}$$

$$W = P(X_1+X_2\le A|H_1) = \iint\limits_{X_1+X_2\le A}\frac{e^{2-x_1-x_2}}{(e-1)^2}\,dx_1\,dx_2 = \frac{e^2}{(e-1)^2}\int_0^A dx_1\int_0^{A-x_1} e^{-x_1}e^{-x_2}\,dx_2 =$$

$$\frac{e^2}{(e-1)^2}\int_0^A e^{-x_1}\left(1-e^{(-A+x_1)}\right)dx_1 = \frac{e^2}{(e-1)^2}\left[1-e^{-A}-e^{-A}A\right]$$

$$\alpha_2 = 1-W$$

c) $$l = \frac{l_1}{l_0} = \frac{\prod p_1(x_i)}{\prod p_0(x_i)} = \prod\frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} \ge C \qquad \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln\frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)}}_{=\eta_i} \ge \ln C$$

ЦПТ: $$\frac{\sum\eta_i - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}} \sim N(0,1)$$

$$\eta_i = \ln\frac{e^{1-x_i}}{(e-1)1} = \ln\frac{e}{e-1} - x_i$$

H_0: $$M\eta_i = M\left[\ln\frac{e}{e-1}-x_i\right] = \ln\frac{e}{e-1}-\frac{1}{2}$$

$$D\eta_i = D\left[\ln\frac{e}{e-1}-x_i\right] = Dx_i = \frac{1}{12}$$

$$P(\ln l \ge \ln C|H_0)=\alpha$$

$$P\left(\sum\eta_i\ge\ln C|H_0\right) = P\left(\underbrace{\frac{\sum\eta_i - n\left(\ln\frac{e}{e-1}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n/12}}}_{=æ\sim N(0,1)\text{ по ЦПТ}} \ge \overbrace{\frac{\ln C - n\left(\ln\frac{e}{e-1}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n/12}}}^{=A}\right)$$

$$\int_A^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\alpha}}\,dx = \alpha \qquad A = u_{1-\alpha} = \frac{\ln C - n\left(\ln\frac{e}{e-1}\right) + \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \to$$

$$\ln l \ge \ln C$$

$$\ln l = \sum\eta_i = n\ln\frac{e}{e-1} - \sum x_i$$

$$\ln C = n\ln\frac{e}{e-1} - \frac{n}{2} + u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{12}}$$

$\to$ б: $$\overline{X} \le \frac{1}{2} - u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{12n}}$$

$$W = P(\ln l\ge \ln C|H_1)$$

ЦПТ: $$P\left(\frac{\sum\eta_i - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}} \ge \overbrace{\frac{\ln C - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}}}^{=B}\right) = \int_B^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

H_1 $\quad M\eta_i = \ln\frac{e}{e-1} - M[X_i] = \ln\frac{e}{e-1} - \int_0^1 x\,\frac{e^{1-x}}{e-1}\,dx = \ln\frac{e}{e-1} - \frac{e-2}{e-1}$

$D\eta_i = \frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$ $\qquad G_{кр}: \bar{x} \le \frac{1}{2} - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{12n}}$

$\alpha_2 = 1 - W \qquad \alpha_1 = \alpha$

$$W = \int_B^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 1 \qquad B = \frac{n\overbrace{\left(\frac{e-2}{e-1} - \frac{1}{2}\right)}^{=-0{,}082} + u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{12}}}{\sqrt{n\,\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} = E + F\sqrt{n}$$

При $n \to \infty \quad B \to -\infty$

d) $\quad G_{кр}: X_{min} < c$

$\alpha_1 = P(\vec{X}_n \in G_{кр} \mid H_0) = P(X_{min} < c \mid H_0) = \alpha$

$X_{min} \sim 1 - (1 - F(x))^n$

$H_0: \xi \sim p_0(x) = 1\{(0,1)\}$

$\alpha = P(X_{min} < c \mid H_0) = 1 - (1 - F_0(x))^n = 1 - (1-c)^n \to c = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$G_{кр}: X_{min} < 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$\alpha_1 = \alpha$ (простая гипотеза)

$W = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_1) = P(X_{min} < c \mid H_1) = 1 - (1 - F_1(x))^n$

$H_1: \xi \sim p_1(x) = \frac{e^{1-x}}{e-1}\{(0,1)\} \qquad F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(t)\,dt = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-x})$

$$W = 1 - (1 - F_1(c))^n = 1 - \left(\frac{e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}}{e-1} - \frac{1}{e-1}\right)^n$$

$$\alpha_2 = 1 - W = \left(\frac{e}{e-1} - \frac{1}{e-1}\right)^n$$

Состоятельность: $e^{\sqrt[n]{1-\alpha}} = e^{e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}} = e^{\left(1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} =$

$e\left[1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

$$W = 1-\left(\frac{1}{e-1}\left(e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}-1\right)\right)^n = 1-\left(\frac{1}{e-1}\left(-1+e\left[1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\right)^n$$

$$= 1-\left(1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n(e-1)}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-e^{\frac{\ln(1-\alpha)}{e-1}} = 1-(1-\alpha)^{\frac{1}{e-1}}$$

$\to 1$ только при $\alpha = 1$ (нельзя) $\to$ критерий не явл. состоят.

(например для $\alpha = 0{,}05$ $W = 0{,}03 \not\to 1$).

11. У игрока, наблюдавшего за игрой в четырехгранные кости, создалось впечатление, что четверка выпадает в 8 случаях из 24, тройка в 4, а остальные две грани выпадают равновероятно. Получив приглашение принять участие в игре, игрок попросил разрешения предварительно проверить свою гипотезу на двух производимых подряд бросаниях кости. Единственная рассматриваемая им альтернатива состоит в том, что игральная кость сделана «честно». Найти наиболее мощный критерий с уровнем значимости 0,2. Найти мощность критерия.

$\alpha_1 = P(\vec{X}_n \in G_{кр} | H_0) = \alpha = 0{,}2$ $G_{кр}: \ell \geq c$

$\frac{1}{2}$

H_0:

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$

H_1:

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

l :

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4
1	1	1	3/2	3/4
2	1	1	3/2	3/4
3	3/2	3/2	9/4	9/8
4	3/4	3/4	9/8	9/16

$\rightarrow$

(1,2)	(3)	(4)
1	3/2	3/4
3/2	9/4	9/8
3/4	9/8	9/16

максимусы (праймы)

$P(l \geq C \mid H_0) = \alpha \xrightarrow{} C = 3/2$

$\alpha_1 = P(l \geq 3/2) H_0 = 7/36$

$W = P(l \geq 3/2 \mid H_1) = 5/16 \qquad \alpha_2 = 1 - W = 11/16$

12. При применении определенной процедуры проверки коэффициента трения шины по мокрому асфальту установлено, что дисперсия результатов измерений этого коэффициента составляет $0,1$. Несмещенная оценка дисперсии, вычисленная по результатам 25 измерений коэффициента трения, оказалась равной $0,2$. Построить критерий для проверки гипотезы о том, что дисперсия результатов измерений равна $0,1$ против альтернативы, что дисперсия превышает $0,1$. Построить график мощности этого критерия. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

$\xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2) \qquad H_0: \theta_2^2 = 0,1 \quad H_1: \theta_2^2 > 0,1$

$\sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - \theta_1}{\theta_2} \sim N(0,1)$

$\dfrac{\bar{X} - \theta_1}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$ (Т Фишера)

$\dfrac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \tilde{\Delta} = \dfrac{0,2 \cdot 24}{0,1} = 48$

$$\text{p-value} = 2\int_{48}^{\infty} q_{\chi^2(24)}(t)\,dt = 0{,}005$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

$$0{,}025 < 0{,}005 < 0{,}975$$

отвергаем H_0

$$P(\vec{X}_n \in G_{кр} \mid H_0) = P(\Delta \geq C \mid H_0) = \alpha$$

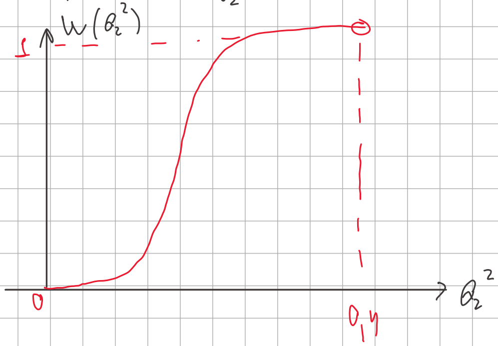
$$W = P(\vec{X}_n \in G_{кр} \mid H_1)$$

$$\int_{c}^{\infty} q_{\chi^2(24)}(t)\,dt = \alpha = 0{,}05 \rightarrow c = 36{,}41 \rightarrow G_{кр} : \Delta \geq 36{,}41$$

$$W = P(\vec{X}_n \in G_{кр} \mid H_1) = P(\Delta \geq C \mid H_1) = P\left(\frac{S^2(n-1)}{a^2} \geq 36{,}41 \mid H_1\right) =$$

$$P\left(\frac{S^2(n-1)}{a^2} \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \geq 36{,}41 \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \mid H_1\right) = P\left(\frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} \geq 36{,}41 \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \mid H_1\right)$$

$$= \int_{36{,}41}^{\infty} q_{\chi^2(24)}(t)\,dt = W(\theta_2^2)$$



13. Пусть z_n и y_m — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $a, \sigma_x^2 = 2$ и $b, \sigma_y^2 = 1$ соответственно. Используя реализации случайных выборок: $x = \{-1.11, -6.10, 2.42\}$, $y = \{-2.29, -2.91\}$, проверить гипотезу о равенстве средних против альтернатив $a > b$, $a < b$, $a \neq b$.

$x_i \sim N(a, 2) \qquad y_i \sim N(b, 1)$

$\sqrt{n}\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \qquad \sqrt{m}(\bar{y} - b) \sim N(0,1)$

$H_0: a = b$

$H_1: a \neq b \quad a < b, \ a > b$

$\tilde{\Delta} = \bar{x} - \bar{y} - (a - b) \sim N\left(0, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$

если $a = b$ $\qquad \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

$$\Delta = \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{mn}}{\sqrt{2m+n}} \sim N(0,1) \qquad \tilde{\Delta} \approx 0{,}9258$$

1) $a > b$

$$\text{p-value} = \int_{0{,}9258}^{\infty} q(t)\,dt = \int_{0{,}93}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 0{,}17 > 0{,}05$$

2) $a < b$

$$\text{p-value} = \int_{-\infty}^{-0{,}93} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 0{,}17 > 0{,}05$$

нет оснований отвергнуть

3) $a \neq b$

$$\text{p-value} = \int_{-\infty}^{0{,}93} + \int_{0{,}93}^{\infty} = 0{,}34 > 0{,}05$$