Enzyklopädie des Verrechnens

Auflistung und Klassifizierung verschiedener Rechenfehler in ingenieurwissenschaftlichen Rechnungen

Prof. Dr.-Ing. Thorbjörn Siaenen

Version v. 24. September 2024

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dies ist eine Auflistung von Fehlern aus dem Bereich der Ingenieurmathematik. Die Schwere von Fehlern ist mit ☹ (leichter Flüchtigkeitsfehler), ☹☹ (mittlerer Fehler) und ☹☹☹ (schwerwiegender Fehler) gekennzeichnet.

- Leichte Fehler sind Flüchtigkeitsfehler (Addition einmalig falsch, Übertragungsfehler)
- Mittlere Fehler liegen vor, wenn logische Zusammenhänge verfälscht werden. (Schließende Klammer vergessen, Bruchstrich zu kurz, Wurzel nicht über dem gesamten Radikanden), oder wenn logische Zusammenhänge nicht vollständig erfüllt sind.
- Schwerwiegende Fehler liegen vor, wenn Rechenschritte durchgeführt wurden, die geltenden Regeln widersprechen (Kürzen einzelner Summanden aus Summen).

Die Klassifizierung ist allerdings nicht immer eindeutig möglich.

1 Fehler

1.1 Falsches Zeichen, Übertragungsfehler ☹

Es ist ein Fehler, wenn ein Term fehlerhaft abgeschrieben wird.

Falsch (im Zähler der linken Seite steht ein Multiplikationszeichen, statt einem Pluszeichen):

$$\begin{aligned} 5\,s\,L + 5\,R &= \mathscr{L}(i(t)) \cdot \left(L\,s^2 + R\,s + \frac{1}{C}\right) \\ \Rightarrow \frac{5\,s\,L \cdot 5\,R}{L\,s^2 + R\,s + \frac{1}{C}} &= \mathscr{L}(i(t)) \end{aligned}$$

Richtig:

$$\begin{aligned} 5\,s\,L + 5\,R &= \mathscr{L}(i(t)) \cdot \left(L\,s^2 + R\,s + \frac{1}{C}\right) \\ \Rightarrow \frac{5\,s\,L + 5\,R}{L\,s^2 + R\,s + \frac{1}{C}} &= \mathscr{L}(i(t)) \end{aligned}$$

1.2 Gleicheitszeichen oder Folgepfeile fehlen ☹☹

Bei Umformungen, bei denen sich der Wert des Ausdrucks nicht ändert, muss ein Gleichheitszeichen gesetzt werden. Wenn bei Termumformungen sich der Wert einer Gleichung ändert, muss ein ⇒ gesetzt werden.

Falsch:

$$\begin{aligned} \overline{y(t)} =& \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} y(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Big|\, y(t) = 2\,t \\ & \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 2\,t\,\mathrm{d}t \\ & \frac{1}{T}\, 2 \int_{t=0}^{T} t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Richtig:

$$\begin{aligned}\overline{y(t)} &= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} y(t)\,\mathrm{d}t \qquad &\Big|\, y(t) = 2\,t\\ &= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} 2\,t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\,2\int_{t=0}^{T} t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Falsch:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 3 \qquad &\Big|\,(\dots)^2\\ x &= 9\end{aligned}$$

Richtig:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 3 \qquad &\Big|\,(\dots)^2\\ \Rightarrow x &= 9\end{aligned}$$

1.3 Gleicheitszeichen oder Folgepfeile falsch verwendet ☹☹

Falsch ist es, wenn aus einem Ausdruck ein anderer folgt und dies mit einem Gleichheitszeichen gekennzeichnet wird.

Beispiel Falsch:

$$\sqrt{x} = 3 = x = 9$$

Richtig:

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

Weiteres Beispiel: Gegeben ist die Funktion $y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}$. Leiten Sie diese Funktion einmal ab und werten sie diese bei $x_0 = \frac{1}{2}$ aus.

Falsch:

$$y'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x} = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{1}$$

Richtig:

$$y'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \qquad\qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{1}$$

$$y'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{1}$$

Weiteres Beispiel: Es ist folgender Ausdruck gegeben, bei dem durch einen Koeffizientenvergleich ein Gleichungssystem abgeleitet wird:

$$-6\,a_2\,t^2 + \left(-2\,a_2 - 6\,a_1\right)t + 2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = 4\,t^2 + 0\,t - 3$$

$$\Rightarrow 2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = -3$$

$$\Rightarrow -6\,a_2 = 4$$

$$\Rightarrow -2\,a_2 - 6\,a_1 = 0$$

Dies ist falsch, weil aus $2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = -3$ nicht folgt, dass $-6\,a_2 = 4$ ist. Weiterhin folgt nicht aus $-6\,a_2 = 4$ der Ausdruck $-2\,a_2 - 6\,a_1 = 0$. Richtig wäre:

$$-6\,a_2\,t^2 + \left(-2\,a_2 - 6\,a_1\right)t + 2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = 4\,t^2 + 0\,t - 3$$
$$\Rightarrow 2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = -3$$

und

$$-6\,a_2 = 4$$

und

$$-2\,a_2 - 6\,a_1 = 0\,.$$

Noch besser übersichtlicher wäre es, ein lineares Gleichungssystem direkt abzuleiten:

$$-6\,a_2\,t^2 + \left(-2\,a_2 - 6\,a_1\right)t + 2\,a_2 + a_1 - 6\,a_0 = 4\,t^2 + 0\,t - 3$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiteres Beispiel In diesem Beispiel werden Gleichheitszeichen verwendet um eine Nebenrechnung zu kennzeichnen. Falsch ist:

$$\frac{(4\cdot 1) + (-2\cdot(-3)) \;\; = 4 + 6}{(1\cdot 1) + (-3\cdot(-3)) \;\; = 1 + 9} = \frac{10}{10}$$

Richtig ist:

$$\frac{(4 \cdot 1) + (-2 \cdot (-3))}{(1 \cdot 1) + (-3 \cdot (-3))} \qquad \left| \begin{array}{l} 4 + 6 = 10 \\ 1 + 9 = 10 \end{array} \right.$$
$$= \frac{10}{10}$$

1.4 Integrationsvariable nicht nennen ☹

Die Angabe der Integrationsvariable darf nicht fehlen. Falsch:

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} 2\,t\, \cos\!\left(\frac{2\,k\,\pi}{T}\,t\right)$$

Richtig:

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} 2\,t\, \cos\!\left(\frac{2\,k\,\pi}{T}\,t\right) \mathrm{d}t$$

oder

$$a_k = \frac{4}{T} \int_{t=0}^{T/2} 2\,t\, \cos\!\left(\frac{2\,k\,\pi}{T}\,t\right) \mathrm{d}t$$

1.5 Integrand 1 nicht nennen ☹

Die Angabe des Integraden darf nicht fehlen, auch wenn er “1” ist. Falsch:

$$A = \int_0^4 \mathrm{d}x$$

Richtig:

$$A = \int_0^4 1\,\mathrm{d}x$$

1.6 Integrationskonstante bei unbestimmten Integralen nicht angeben ☹☹

Bei unbestimmten Integralen ist die Integrationskonstante mit anzugeben. Falsch:

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3$$

Richtig:

$$\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 + C$$

1.7 Unklare Grenzen einer Wurzel ☹☹

Der Beginn und das Ende einer Wurzel muss eindeutig erkennbar sein.

Falsch:

$$\begin{aligned} s_\mathrm{a} &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\,\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4-1}\,((3{,}4-3{,}3}25)^2 + (3{,}6-3{,}325)^2 + (3{,}2-3{,}325)^2 + (3{,}1-3{,}325)^2) \\ &= 0{,}221736 \end{aligned}$$

Richtig:

$$\begin{aligned} s_\mathrm{a} &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\,\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4-1}\,\Big((3{,}4-3{,}325)^2 + (3{,}6-3{,}325)^2 + (3{,}2-3{,}325)^2 + (3{,}1-3{,}325)^2\Big)} \\ &= 0{,}221736 \end{aligned}$$

1.8 Unklare Grenzen eines Bruchs☹☹

Der Bruchstrich muss länger sein als der Zähler und Länger als der Nenner.

Falsch:

$$y = \frac{4\,x^3 - 5\,x^2}{42} - 8\,x + 5$$

Richtig:

$$y = \frac{4\,x^3 - 5\,x^2 - 8\,x + 5}{42}$$

1.9 Nicht ausgeglichene Klammerpaare ☹☹

Klammern müssen immer paarweise gesetzt werden. Zu einer öffnenden Klammer gehört immer eine schließende Klammer. Zu einer schließenden Klammer gehört immer eine öffnende Klammer.

Falsch:

$$\big((x-2)^2 + 3^2\big) = \big(x^2 - 4\,x + 4 + 9$$

Falsch:

$$\big((x-2)^2+3^2\big)=x^2-4\,x+4+9\big)$$

Richtig:

$$\big((x-2)^2+3^2\big)=\big(x^2-4\,x+4+9\big)$$

Ausnahme: Intervalle. $L=(-4;\ 7]$

1.10 Kennzeichnung von Ableitungen ☹☹

Die n-te Ableitung kann dadurch gekennzeichnet werden, dass im Exponenten nach dem Funktionsnamen eine natürliche Zahl in Klammern steht.

Falsche Kennzeichnung der zweiten Ableitung der Funktion $y(t)$:

$$y^2(t)$$

Richtig:

$$y^{(2)}(t)$$

Richtig wäre in diesem Fall auch:

$$y''(t)$$

1.11 Kennzeichnung von Ableitungen ☹☹

Die erste Ableitung kann dadurch gekennzeichnet werden, indem ein $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (oder nach einer anderen Variablen abgeleitet) vorangestellt wird.

Richtig:

$$y'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$$

Falsch:

$$y'(t)=y(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

Rechenfehler

1.12 Unmögliches Ausklammern ☹☹☹

Falsch:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{6}\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{k\,2\,\pi}{6}\,t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{6}\,2\cdot\int_0^2 \cos\left(\frac{k\,2\,\pi}{6}\,t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{6}\,2\cdot\frac{2\,k}{6}\int_0^2 \cos(\pi\,t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Richtig ($\frac{k\,2}{6}$ kann nicht aus dem Argument der Kosinusfunktion vor die Funktion geschrieben werden) :

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{6}\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{k\,2\,\pi}{6}\,t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{6}\cdot\int_0^2 \cos\left(\frac{k\,2\,\pi}{6}\,t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

1.13 Falsches Kürzen ☹☹☹

Falsch:

$$
\frac{\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\,s+40}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\,s^2+8\,s+60} = \frac{5\,s+40}{s^2+8\,s+60}
$$

Richtig:

$$
\begin{aligned}
G(s) =& \frac{\frac{5}{4}\,s+40}{\frac{1}{4}\,s^2+8\,s+60} \qquad \left|\begin{matrix}\cdot 4\\ \cdot 4\end{matrix}\right. \\
=& \frac{5\,s+160}{s^2+32\,s+240}
\end{aligned}
$$

Falsch:

$$
\frac{4}{\pi^2} = \frac{\cancelto{2}{4}}{\pi^{\cancel{2}}} = \frac{2}{\pi}
$$

Richtig: In diesem Ausdruck kann nichts gekürzt werden. Möglich ist allerdings folgende Umformung:

$$
\frac{4}{\pi^2} = \frac{2\cdot 2}{\pi\cdot\pi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2
$$

1.14 Falsches Ausklammern ☹☹☹

Falsch (Klammern vergessen):

$$\frac{1}{4}\,s^2+8\,s+60=\frac{1}{4}\,s^2+32\,s+240$$

Richtig:

$$\frac{1}{4}\,s^2+8\,s+60=\frac{1}{4}\left(s^2+32\,s+240\right)$$

1.15 Falsches Ausklammern in Bezug auf das Summenzeichen ☹☹☹

Falsch:

$$x=\frac{\sum_{k=0}^{20}\frac{k}{2}}{\sum_{k=2}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k} \qquad \Big|\cdot 2$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\,\sum_{k=0}^{20}k}{\sum_{k=2}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

Richtig:

$$\frac{\sum_{k=0}^{20}\frac{k}{2}}{\sum_{k=2}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{\frac{1}{2}\,\sum_{k=0}^{20}k}{\sum_{k=2}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

1.16 Summenzeichen: die Laufvariable ausklammern ☹☹☹

Die Laufvariable des Summenzeichens existiert nur dort und kann nicht ausgeklammert werden. Falsch ist (Hinweis: es gilt $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n^2+n}{2}$)

$$\sum_{k=0}^{20}\frac{k}{2}=\frac{k}{2}\,\frac{20^2+20}{2}$$

Richtig ist:

$$\sum_{k=0}^{20} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{20} k = \frac{1}{2} \cdot \frac{20^2 + 20}{2}$$

1.17 Falsches Ausmultiplizieren ☹☹☹

Falsch: Das Vorzeichen des einen Faktors ignorieren

$$\begin{aligned} & 2\,a_2 - 9\left(a_2\,t^2 + a_1\,t + a_2\right) = 4\,t^2 - 3 \\ \Rightarrow\ & 2\,a_2 - 9\,a_2\,t^2 + 9\,a_1\,t + 9\,a_2 = 4\,t^2 - 3 \end{aligned}$$

Richtig:

$$\begin{aligned} & 2\,a_2 - 9\left(a_2\,t^2 + a_1\,t + a_2\right) = 4\,t^2 - 3 \\ \Rightarrow\ & 2\,a_2 - 9\,a_2\,t^2 - 9\,a_1\,t - 9\,a_2 = 4\,t^2 - 3 \end{aligned}$$

1.18 Determinantenstriche vergessen ☹☹

Determinanten verändern ihren Wert nicht, wenn Zeilen mit Konstanten multipliziert und zu anderen Zeilen addiert werden. Dasselbe gilt für Spalten. Dies wird “Vorbehandlung” von Determinanten genannt. Bei dieser Vorbehandlung dürfen die Determinantenstriche nicht entfallen.

Falsch:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{M}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \leftarrow + \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{\text{Entw.}}} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot |(-2)| \\ &= -2 \end{aligned}$$

Richtig:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| \qquad\qquad \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \leftarrow + \end{matrix} \\
&= \left| \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} \quad 1 \quad \\ \quad 0 \quad \end{matrix}}_{\text{Entw.}}} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \end{pmatrix} \right| \\
&= 1 \cdot |(-2)| \\
&= -2
\end{aligned}
$$

2 Mängel in der Nachvollziehbarkeit in technischen Berechnungen

2.0.1 Zahlenwerte nicht dokumentiert☹☹

Insbesondere in physikalischen und technischen Rechnungen ist die Nachvollziehbarkeit wichtig. Jede Rechnung sollte, nach Möglichkeit, folgende Punkte enthalten:

1. Ansatz (mit Variablen)
2. Umstellen nach der gesuchten Größe oder Lösung des Gleichungssystems (mit Variablen)
3. Einsetzen der Zahlenwerte einschließlich des Aufschreibens dieses Ausdrucks
4. Eingabe in den Taschenrechner und Aufscheiben des Gesamtergebnisses

Beispiel für eine korrekte Rechnung Gesucht ist die Zeit, die für einen Sprung vom 10 m-Brett im Schwimmbad vergeht. Ansatz:

$$s = \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Umstellen nach der gesuchten Größe:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\, g\, t^2 && \Big|\cdot\frac{2}{g} \\ \Rightarrow \frac{2\,s}{g} &= t^2 && \Big|\leftrightarrow \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{2\,s}{g} && \Big|\sqrt{()} \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \end{aligned}$$

Einsetzen der Zahlenwerte inkl. Dokumentation:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}}$$

Gesamtergebnis:

$$t = 1{,}428\,\mathrm{s}$$

Beispiel für eine fehlerhafte Rechnung Gesucht ist die Zeit, die für einen Sprung vom 10 m-Brett im Schwimmbad vergeht. Ansatz:

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Umstellen nach der gesuchten Größe:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\,g\,t^2 && \Big|\cdot\frac{2}{g} \\ \Rightarrow \frac{2\,s}{g} &= t^2 && \Big|\leftrightarrow \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{2\,s}{g} && \Big|\sqrt{()} \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \end{aligned}$$

Gesamtergebnis:

$$t = 1{,}428\,\mathrm{s}$$

Hier ist zwar das richtige Endergebnis angegeben, es fehlt aber das Einsetzen und Dokumentieren der Zahlenwerte. Dieser Schritt ist wichtig, um die Rechnung nachvollziehen zu können. Falls fehlerhafte Werte den Variablen zugeordnet wurden, ist das nur mit diesem Schritt erkennbar.

2.0.2 Falsch verwendetet Variablen☹☹

Es ist falsch in der Aufgabenstellung angegebene Variablen umzubenennen.

Beispiel für korrekt übernommene Variablen Ein Turmspringer springt von einem Turm der Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie die Fallzeit. Ansatz:

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Beispiel für falsch übernommene Variablen Ein Turmspringer springt von einem Turm der Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie die Fallzeit. Ansatz:

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

2.0.3 Variablen und Zahlenwerten in einer Gleichung☹☹

Es sollen in Gleichungen entweder nur Variablen oder nur Zahlenwerte verwendet werden, es sei denn, dass eine Unbekannte berechnet wird.

Beispiel für korrekte Rechnung Ein Turmspringer springt von einem Turm der Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$. Die Erdbeschlenigungskonstante ist $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Berechnen Sie die Fallzeit. Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,g\,t^2 &= h \qquad \Big|\cdot\frac{2}{g} \\
\Rightarrow t^2 &= \frac{2\,h}{g} \qquad \Big|\sqrt{()} \\
\Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \\
\Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \\
\Rightarrow t &= 1{,}428\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Beispiel für fehlerhafte Rechnung Ein Turmspringer springt von einem Turm der Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$. Die Erdbeschlenigungskonstante ist $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Berechnen Sie die Fallzeit. Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,g\,t^2 &= h \qquad \Big|\cdot\frac{2}{g} \\
\Rightarrow t^2 &= \frac{2\,h}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \qquad \Big|\sqrt{()} \\
\Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\,h}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \\
\Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \\
\Rightarrow t &= 1{,}428\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Fehlerhaft ist hier in der zweiten Zeile g durch den Zahlenwert zu ersetzen.