LÓGICA PROPOSICIONAL

Es una rama de la lógica matemática que se utiliza para la elaboración de las sentencias de decisión y control en la programación. Está íntimamente relacionada con la lógica binaria y de circuitos de las computadoras, cuya base de funcionamiento son las operaciones de conjunción, disyunción y negación. Dentro de la programación, lo utilizamos a la hora de armar una sentencia IF, WHILE.

¿Qué es la lógica?

La lógica es una ciencia formal y una rama de la filosofía que estudia los principios de la demostración e inferencia válida. Además de estudiar las estructuras que conforman el pensamiento, la lógica pretende ayudarnos a conducirnos con rigor, precisión y verdad hacia el conocimiento. "La lógica o arte de razonar es la parte de la ciencia que enseña el método para alcanzar la verdad" (San Agustín). La lógica es la ciencia de la demostración, pues sólo se preocupa de formular reglas para alcanzar verdades a través de la demostración" (Aristóteles). Pero la lógica se encuentra también presente en nuestra vida cotidiana; especialmente en la toma de decisiones. La lógica presenta las siguientes características:

- Elimina contingencias.
- Economiza pensamiento.
- Nos ayuda a razonar.
- Aporta claridad.

La matemática es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos (números, figuras geométricas, símbolos).

PROPOSICIONES LÓGICAS

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases que tienen un sentido pleno. Estas afirmaciones, sean verbales o escritas, se denominan enunciados o proposiciones.

Proposición: es una oración con valor declarativo (oración que afirma o niega algún estado de cosas) o informativo (oración donde se comunica algo). Por lo tanto, una oración puede ser verdadera **(V)** o falsa **(F)** pero no ambas a la vez. Por lo general, a las proposiciones se las representa por letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t, … etc.

A continuación, veremos proposiciones y analizaremos su valor de verdad:

p: $15 + 2 = 21$ **(F)**

q: Santa Fe es una provincia Argentina. **(V)**

r: El número 15 es divisible por 3. **(V)**

s: El perro es un ave. **(F)**

Las oraciones interrogativas o las imperativas NO son proposiciones “¿Qué hora es?” “¡Cuidado!”

De algunas proposiciones no necesariamente sabremos su valor de verdad y aun así no dejan de serlo. Por ejemplo:

p: Mañana saldrá el sol.

Es una proposición, pero no conozco su valor de verdad ahora. A este tipo de proposiciones, Aristóteles los llamó **futuros contingentes** y la exceptuó del estudio desde la lógica.

Proposiciones simples: son aquellas proposiciones que constan o se las puede representar por una sola variable. Por ejemplo:

$p: 3 + 6 = 9$

Proposición compuesta: es cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples. Por ejemplo: "*Pitágoras era griego y era geómetra*"

La lógica clásica de Aristóteles respeta los siguientes principios:

- **Principio del tercero excluido:** Cualquier afirmación es verdadera o es falsa
- **Principio de la no contradicción:** Ninguna afirmación puede ser verdadera y falsa a la vez

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados **conectivos lógicos**. El valor de verdad de las proposiciones compuestas dependerá de los valores de verdad de cada una de las proposiciones simples que las componen.

A continuación, vemos una concreta definición de algunos de ellos:

NEGACIÓN

Dada una proposición p, se denomina negación de p a otra proposición de denotada por $\sim p$ (se lee: no p) que le asigna el valor de verdad opuesto al de p. Por ejemplo:

p: Diego estudia matemática

$\sim p$: Diego no estudia matemática

Su tabla de verdad es;

p	$\sim p$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición $p \wedge q$ (se lee "p y q" , o "p además q", o "p pero q", "p sin embargo q"...), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación establece que la conjunción es verdadera solo si las dos proposiciones son verdaderas. En cualquier otro caso, sería falsa.

Ejemplos:

- El canasto es barato y cómodo

  p: El canasto es barato

  q: El canasto es cómodo

  $p \wedge q$

- No es cierto que Javier haya pintado y vendido ese cuadro

  p: Javier pintó ese cuadro

  q: Javier vendió ese cuadro

  $\sim (p \wedge q)$

DISYUNCIÓN

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \vee q$ (se lee "p o q"), cuya tabla de valor de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tabla que define esta operación define que la disyunción es falsa solo cuando amabas proposiciones son falsas. En los otros casos, es verdadera.

Ejemplo:

- Tengo un libro de trigonometría o uno de álgebra

  p: Tengo un libro de trigonometría

  q: Tengo un libro de algebra

  $p \vee q$

Existe también la **disyunción exclusiva** ($p \veebar q$). Se lee se lee "p o q, pero no ambas", cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tabla que define esta operación define que la disyunción exclusiva es falsa solo cuando amabas proposiciones sean falsas o ambas proposiciones sean verdaderas. En los otros casos, es verdadera.

Ejemplo:

- Esta noche, o duermo o salgo a bailar

  p: Esta noche duermo

  q: Esta noche salgo a bailar

  $p \veebar q$ (no pueden ocurrir a la vez)

En todos los siguientes casos está claro que puede ser una o la otra, pero no ambas a la vez, o ninguna de las dos:

- Es de día o de noche
- El número es racional o irracional
- Estoy bien o estoy mal

DEFINICIONES

- **Tautología:** Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Por ejemplo: $p \vee \sim p$

p	p	$p \vee \sim p$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

- **Contradicción:** Es aquella proposición compuesta que siempre es falsa para todos sus valores de verdad. Por ejemplo: $p \wedge \sim p$

p	p	$p \wedge \sim p$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

- **Contingencia:** A veces es verdadera y a veces es falsa.
- **Paradojas lógicas:** Para definirlo primero analicemos el valor de verdad de la siguiente proposición;

  p: "Esta oración es falsa" o p: "lo que estoy diciendo es falso"

Si p es verdad, entonces es falsa pero si p es falsa, es verdad. Esto es paradójico ya que tenemos dos afirmaciones condicionales: (1) si p es verdad, entonces es falsa; (2) si p es falsa, entonces es verdad.

Si se admite un principio de bivalencia, un principio que dice, de manera esquemática, que toda proposición es cierta o falsa, entonces, esto es una paradoja.

ACTIVIDADES

1. Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

a) Un cuadrado tiene 3 lados.
b) $x > 2$.
c) Hoy tardé más de una hora en llegar.
d) El mes de abril del 2019.
e) ¿Qué día es hoy?
f) Firulais es un perro
g) Hacete cargo de tus errores.
h) 4 es un número impar.
i) Juan ama la música.
j) La música es amada por Juan.
k) El 15 es un número impar.

2. Suponiendo p (F), q (V), y r (F), decidir el valor de verdad de:
a) $p \wedge q$
b) $r \vee q$
c) $\sim p \wedge r$
d) $\sim (\sim q \wedge \sim p)$
e) $\sim p \wedge q \wedge \sim r$
f) $p \vee (q \wedge r)$
g) $\sim q \wedge \sim (r \wedge p)$
h) $(\sim q \wedge p) \vee (p \wedge \sim r)$

3. Dadas las siguientes oraciones, definir proposiciones y traducir mediante conectivos lógicos.
a) Adriana desayunó tostadas y almorzó pastas
b) Mariano estudió, pero no aprobó
c) El lunes no será feriado, sin embargo, faltaré al trabajo.
d) N es un número impar o múltiplo de cinco.
e) Hoy, o me duermo temprano o salgo a pasear.

4. Traducir las siguientes proposiciones al lenguaje simbólico siendo, p: "Juan es trabajador", q: "Pedro es trabajador".
a) Juan es trabajador y Pedro es holgazán.
b) Juan y Pedro son holgazanes.
c) Ni juan ni Pedro son trabajadores.
d) Juan es holgazán, pero Pedro es trabajador.
e) No es cierto que Juan y Pedro sean holgazanes.

5. Construir las tablas de verdad de:
a) $\sim (p \wedge q)$
b) $(\sim p \wedge \sim r) \wedge p$
c) $\sim (p \vee q)$
d) $\sim q \wedge \sim r$
e) $(\sim s \wedge p) \vee (s \wedge \sim p)$
f) $\sim\sim p \vee q$
g) $(p \wedge s) \wedge (\neg s \vee q)$

6. Sin realizar una tabla de verdad, obtener el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$, sabiendo que el valor de verdad de p es Falsa.

7. Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias, mediante u tabla de verdad.

a) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
b) $(p \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge \sim p)$
c) $(p \wedge \sim q) \wedge q$
d) $\sim (\sim p) \wedge \sim p$
e) $\sim (\sim p) \vee \sim p$
f) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge \sim p)$

8. Sea A una tautología, B una contradicción y C una contingencia. Determine, si es posible, cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, cuáles contingencias y cuáles contradicciones.

a) $A \wedge C$
b) $A \vee C$
c) $B \wedge C$
d) $B \vee C$
e) $A \wedge B$
f) $A \vee B$
g) $\sim A$
h) $\sim B$
i) $\sim C$