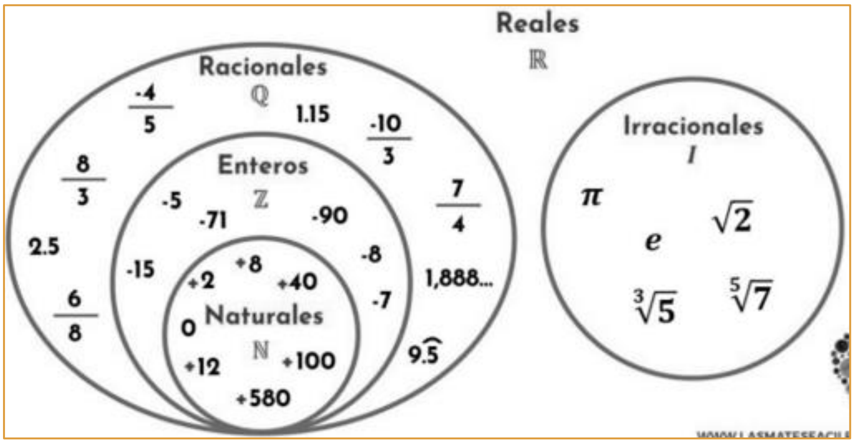
Temas a tratar:

- Conjuntos numéricos
- Módulo, definición y propiedades.
- MCM y DCM
- Factorización
- Números primos y coprimos

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos de números son “grupos” donde se categorizan a los números según sus diferentes características.



<u>Números naturales:</u>

Es el conjunto de todos los números con los cuales se puede contar. A este conjunto de lo denota con la letra ℕ y tiene como elementos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Tambien se lo suele diferenciar como $\mathbb{N}_0$ en donde incluye al cero como parte del conjunto.

<u>Números enteros:</u>

Es el conjunto de números que se utilizan para contabilizar (ejemplo, debe y haber en contabilidad), en donde forman parte los números naturales, el cero y los opuestos de los naturales. A este conjunto se lo denota con la letra ℤ y tiene como elementos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

<u>Números racionales:</u>

Es el conjunto de todos los números los cuales se pueden escribir como el cociente entre dos números enteros (fracción) en donde el divisor no puede ser cero, porque no se puede dividir por cero. Se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$ y cuya definición formal es:

$$\mathbb{Q}: \left\{\frac{p}{k}\ con\ p\ \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\ y\ k \neq 0\right\}$$

Por ejemplo:

$$-\frac{3}{2} = -1{,}5 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0,\hat{3} \qquad \frac{13}{6} = 2{,}16666\ldots = 2{,}1\hat{6} \qquad -\frac{4}{2} = -2$$

<u>Números irracionales:</u>

Es el conjunto de números que **no** se puede escribir como fracción, donde sus cifras decimales son infinitas y no periódicas. A este conjunto se lo denota con la letra $\mathbb{I}$ y donde podemos encontrar algunos de los siguientes números:

$$\pi = 3{,}14159\ldots \quad \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \quad e = 2{,}718281\ldots$$

<u>Números reales:</u>

Es la unión de todos los conjuntos mencionados y los cuales conforman toda la recta real. A este conjunto se lo denota con la letra $\mathbb{R}$.

MÓDULO

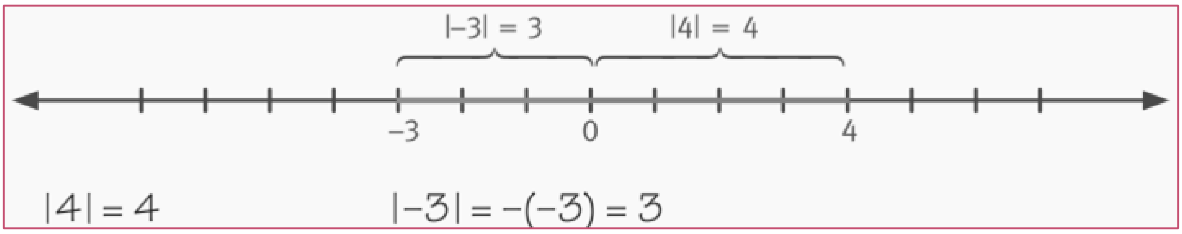
El módulo es una operación la cual es definida como: "la distancia de un número hacia el cero". Se lo denota como $|k|$ siendo $k \in \mathbb{R}$ y se lo define como:

$$|k| = \begin{cases} k\ \ si\ k\ \in \mathbb{R}_0^+ \\ -k\ \ si\ \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Por ejemplo, si yo quiero calcular $|-5|$ tengo que contar en la recta real cuántos "lugares me muevo" para llegar al cero; como se "mueve" 5 lugares, entonces ese es su valor:

$$|-5| = 5$$

El ejemplo anterior en para entender conceptualmente la definición. A continuación, veremos ejemplos aplicando la definición del módulo:



Propiedades del módulo:

1. $|x| \geq 0$ "El resultado del módulo de un número siempre nos da, como resultado, un número positivo".
2. $|x| = |-x|$ "El módulo de un número es igual al módulo de su opuesto"
3. $|x| = 0$ "El módulo de cero es cero"
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$

$\|-3+8\| \leq \|-3\| + \|8\|$	$\|3+8\| \leq \|3\| + \|8\|$
$\|5\| \leq 3 + 8$	$\|11\| \leq 3 + 8$
$5 \leq 11$	$11 \leq 11$
"Cinco es menor que once"	"Once es igual a once"

5. $|x.y| = |x|.|y|$

$$|-3.8| = |-3|.|8|$$

$$|-24| = 3.8$$

$$24 = 24$$

6. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ "El módulo de la diferencia entre dos numeros es igual a cero, si y solo si, dichos números son iguales".

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Múltiplos:

Sean a y k dos números enteros decimos que los múltiplos de a son aquellos formados por $a.k$. Por ejemplo, si quiero saber cuáles son los múltiplos de 3, debo multiplicar al tres por cualquier otro número entero (aclaración, puede ser él mismo):

$$3.1 = 3$$

$$3.2 = 6$$

$$3.3 = 9$$

$$3.4 = 12$$

$3, 6, 9, 12$ son múltiplos de 3 pero nótese que son infinitas la cantidad de múltiplos que se pueden formar. Generalizando, todos los números enteros tienen infinitos **múltiplos**.

- **Múltiplos comunes**: Supongamos que voy a buscar los múltiplos de dos números distintos, como por ejemplo, 2 y 3.

Múltiplos de 2= $\{2, 4, \mathbf{6}, 8, 10, \mathbf{12}, 14, 16, \mathbf{18}, 20, 22, \mathbf{24}, 26, 28, \mathbf{30}, 32, 34, \mathbf{36}, \ldots\}$

Múltiplos de 3 $= \{3, \mathbf{6}, 9, \mathbf{12}, 15, \mathbf{18}, 21, \mathbf{24}, 27, \mathbf{30}, 33, \mathbf{36}, 39, \ldots\}$

Todos los números resaltados son <u>múltiplos comunes</u> entre el 2 y 3 pero estos son infinitos. Aunque nosotros nos vamos a concentrar en buscar al **mínimo común múltiplo (MCM)**, el menor múltiplo común entre 2 y 3 es el 6.

- **<u>Mínimo común múltiplo (MCM):</u>** El **M.C.M** entre dos o más numeros se define como aquel múltiplo positivo que es múltiplo de todos los números involucrados y además es el menor de todos los múltiplos comunes. Por ejemplo, calcules el MCM entre 24 y 20:

$$MCM(24{,}20)$$

Busco los múltiplos de ambos números:

Múltiplos de $24 = \{24{,}48{,}72{,}96, \mathbf{120}, 144{,}168{,}192{,}216{,}240{,}264{,}288, 302, \ldots\}$

Múltiplos de $20 = \{20{,}40{,}60{,}80{,}100, \mathbf{120}, 140{,}160{,}180{,}200{,}220{,}240{,}260, 280, \ldots\}$

Buscamos el menor múltiplo en común, por lo tanto el $MCM(20{,}24) = 120$

<u>Divisores:</u>

Sean a y b dos número enteros, decimos que a es divisible por b, cuando $a{:}\,b$ es exacta, es decir, cuando su resto es cero. Otra definición es: cuando existe un entero c tal que $a = b.c$, en caso de esto no ocurra a no es divisible por b. Por ejemplo:

- 4 es divisor de 28 ya que $28 = 4.\mathbf{7}$/ 4 es divisor de 28 ya que su división es exacta por ende tiene resto cero.
- 5 no es divisor de 28 ya que no exite ningún número entero c que cumpla con $28 = 5.\boldsymbol{c}$ / 5 no es divisor de 28 ya que su división no es exacta y su resto es 3.

<u>Observación:</u> Todo número es divisible por 1 y por si mismo.

A diferencia de los múltiplos, la cantidad de divisores que puede llegar tener un número <u>son finitas</u>. Por ejemplo, al número 100 se lo puede dividir por $1, 2, 4, 5, 10, 25, 50\ y\ 100$; dichos números son sus **divisores**.

- **<u>Divisores comunes:</u>** Supongamos que voy a buscar los divisores de dos números distintos, 30 y 40.

Divisores de $30 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, \mathbf{5}, 6, \mathbf{10}, 15, 30\}$

Divisores de $40 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 4, \mathbf{5}, 8, \mathbf{10}, 20, 40\}$

Todos los números resaltados son los divisores que tienen en común 30 y 40, y como se puede ver, son finitos. Nosotros nos vamos a enfocar en buscar su **máximo común divisor (MCD)**, en este caso es 10.

- **Máximo común divisor (MCD):** El MCD entre dos o más números se define como aquel divisor positivo que divide a todos los números involucrados y además es el mayor de todos los divisores comunes. Por ejemplo, calculemos el MCD entre 24 y 42:

$$MCD(24,42)$$

Busco los divisores de ambos números

Divisores del $12 = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{6}, 12\}$

Divisores del $24 = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{6}, 8, 12, 24\}$

Divisores del $42 = \{1, 2, 3, \mathbf{6}, 7, 14, 21, 42\}$

Buscamos el mayor divisor en común, por lo tanto el $MCD(12,24,42) = 6$

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Los **números primos** son aquellos números naturales (mayores que 1) que tienen únicamente dos divisores positivos, él mismo y el 1. A continuación, escribimos algunos:

$$Números\ primos = \{\ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, \dots\}$$

A los números naturales que tienen más divisores (naturales positivos) aparte de sí mismos y del 1, se los denominan **números compuestos**.

Observación: Todo número compuesto puede escribirse como el producto entre sus factores primos y dicha escritura es única. Por ejemplo:

$$50 = 2.5^2$$

$$315 = 3^2.5.7$$

A este procedimiento lo denominamos **"factorización de un número"** o **"descomposición de un número en factores primos"**.

MCM Y DCM:

Con la descomposición de numeros en factores primos, podemos hallar el **MCM** y el **MCD** de manera más practica:

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.
- Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo, m.c.m. (30, 45), se siguen estos pasos:

  1.° Se descompone cada número en producto de factores primos.

  2.° El producto de estos factores comunes elevados al mayor exponente y de los no comunes es el mínimo común múltiplo de los números dados.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$45 = 3^2 \times 5$

m.c.m. $(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

- El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.
- Para hallar el máximo común divisor de dos o más números, por ejemplo, m.c.d. (12, 18), se siguen estos pasos:

  1.° Se descompone cada número en producto de factores primos.

  2.° El producto de estos factores comunes elevados al menor exponente es el máximo común divisor de los números dados.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

m.c.d. $(12, 18) = 2 \times 3 = 6$

NÚMEROS COPRIMOS

Los <u>**números coprimos**</u> (números primos entre sí o primos relativos) son dos números enteros a y b que <u>no tienen ningún factor primo en común</u>. Dicho de otra manera, si a y b no tienen otro divisor común más que 1 y -1; equivalentemente, son coprimos, si y sólo si, su DCM es igual a 1. Por ejemplo: los números 8 y 9 son coprimos porque su único divisor común es 1.

ACTIVIDADES

1. Indicar V o F según corresponda:

a) Todo número real es racional

b) Todo número natural es entero

c) Todo entero es racional

d) Todo número real es irracional

2. Clasifica e indica a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números.

a) 2π

b) $\sqrt{49}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{-5}$

e) $1{,}1111 \dots$

f) $75/-5$

3. Calcular los siguientes valores absolutos:

a) $|-124| =$

b) $|0| =$

c) $|56| =$

4. Indica V o F según corresponda:

a) $|-8| = 8$

b) $|-16|$ es menor que cero

c) $|-16|$ es mayor que cero

d) $|9 - 4| = |4 - 9|$

e) $|-1| = -1$

5. Resolver los siguientes cálculos:

a) $|-4|.|-3| =$

b) $|7-3| =$

c) $|7+3| =$

d) $|3-7| =$

e) $|9|.|-2| =$

f) $|-2-5|$

g) $-|-3|\,|-4| =$

h) $-|-3-4| =$

i) $-|9-8| =$

j) $|8-9| =$

6. Hallar los diez primeros múltiplos de los siguientes números:

a) 18

b) 29

c) 33

7. Hallar el conto de divisores de los siguientes números:

a) 18

b) 29

c) 33

8. Escribir todos los números que cumplen con cada una de las siguientes condiciones:

a) Divisores de 32

b) Divisores de 60 y mayores que 10

c) Divisores pares de 200

d) Múltiplos de 6 entre 50 y 100

e) Múltiplos de 11, impares y menores que 150

f) Múltiplos de 19 entre 100 y 200

9. Descomponer en factores primos a los siguientes números:

a) 259

b) 348

c) 721

d) 420

e) 2145

10. Hallar el MCD entre los siguientes pares de números enteros:

a) $MCD\ (87,45)$

b) $MCD\ (45,147)$

c) $MCD\ (94,97)$

d) $MCD\ (10,24)$

e) $MCD\ (36,45)$

f) $MCD\ (120,72)$

g) $MCD\ (140,220)$

11. Hallar el MCM entre los siguientes pares o ternas de números enteros:

a) $MCM\ (15,35)$

b) $MCM\ (24,60)$

c) $MCM\ (24,18,36)$

d) $MCM\ (14,12,21)$

12. Determinar cuáles de los siguientes pares de números son coprimos.

a) $39\ y\ 156$

b) $72\ y\ 55$

c) $169\ y\ 121$

d) $11\ y\ 101$

13. Resolver los siguientes problemas, indicando su procedimiento.

a) Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsitas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual que el que hay en la caja B. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

b) María y Jorge tienen 25 bolas blancas, 15 bolas azules y 90 bolas rojas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola. ¿Cuántos collares iguales pueden hacer? ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?

c) Un campo rectangular de 360 m de largo y 150 m de ancho, está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de estas parcelas cuadradas es la mayor posible. ¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?

d) Teresa tiene un reloj que suena cada 60 minutos, otro reloj que suena cada 150 minutos y un tercero cada 360 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido. ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir? ¿A qué hora volverán a sonar otra vez juntos?

e) Rosa tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de cubos rojos, quiere conseguir que las dos columnas sean iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?

f) En una librería se quieren colocar 72 libros de matemática, 48 de sociales, 54 de lengua y 162 de naturales en la menor cantidad de estantes y con la misma y mayor cantidad de libros de cada área en todos ellos. ¿Cuantos estantes se van a ocupar? ¿Cuántos libros de cada área habrá en cada uno?

g) En un local de iluminación decoraron la vidriera con tres tipos distintos de luces LED azules, blancas y lilas. Las luces azules se encienden cada 20 minutos; las blancas, cada 30 minutos y las lilas, cada 15 minutos. ¿Cada cuántos minutos se encienden simultáneamente los tres tipos de luz?

h) Un grupo de chicos recolectó 300 muñecas, 420 pistolas de agua, 480 pelotas y 600 rompecabezas para formar paquetes y regalar en el Día del Niño en un club del barrio. Si en cada paquete colocarán la misma cantidad de cada juguete, ¿cuál es la mayor cantidad de paquetes que podrán armar? ¿Cuántos juguetes de cada tipo tendrá cada paquete?

i) Juan va al club cada tres días, Santiago cada cuatro y Agustín cada seis días. Si fueron los tres juntos el 1 de junio, ¿cuándo volverán a encontrarse? ¿Se encontrarán el 23 de junio? ¿Y el 25?

j) Para festejar el Día del Amigo, Camila compró 12 esmaltes, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuántas amigas, como mínimo, le alcanza? ¿Qué deberá colocar en cada bolsa?