Temas a tratar:

- El factorial de un número natural
- Combinatoria: variación, permutación y combinación.

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

El factorial de un número natural es el producto de todos los número anteriores o iguales a él. Se escribe $n!$ Y se lee como "n factorial". Por ejemplo:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Por definición el factorial de cero es igual a uno, $0! = 1$.

COMBINATORIA

La combinatoria es una rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio es estudiar las posibles agrupaciones o formas de ordenar objetos.

Conceptos que debemos distinguir a la hora de ordenar o agrupar:

- Población: el número de elementos que se estan estudiando.
- Muestra: cuantos elementos se seleccionan del total para agrupar u ordenar

El objetivo de esta unidad no es hallar todas y cada una de las agrupaciones o combinaciones, sino la **cantidad** de ellas. Por ejemplo:

Dados los números $1, 2\ y\ 3$, encontrar todos los números de tres cifras que se puedan formar con ellos, sin repetirlos. Estos son:

123	213	312
132	231	321

Estos son todos los casos posibles y ¿cuántos son? 6. Bueno, justamente lo que vamos a buscar es la **cantidad de casos**, no cuáles son esos casos.

Para descubrir la cantidad de agrupaciones o combinaciones debemos hacernos las siguientes preguntas:

- ¿Importa el orden de los elementos?
- ¿Se incluyen todos los elementos?
- ¿Se pueden repetir los elementos?

TIPOS DE COMBINATORIA

VARIACIONES:

Son las distintas agrupaciones que se pueden formar con n elementos (una parte de elementos) de un conjunto de m elementos (total de elementos), **teniendo en cuenta el orden**. Existen dos tipos de variaciones, ***la variación ordinaria*** en la cual no se pueden repetir los elementos y la ***variación con repetición*** en la cual si se pueden repetir los elementos.

- **Variación ordinaria:** recordemos que en esta variación **no** se pueden repetir los elementos en n. Cuya fórmula es:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplos:

- *¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse 6 candidatos de un partido político para seleccionar los cuatro primeros puestos de la lista?*

Todos los elementos ($\boldsymbol{m}$) son los **6** candidatos de un mismo partido político y una parte de los elementos (n) son los **cuatro** primeros puestos de la lista. Pero entonces… ¿por qué es una variación ordinaria? Porque se "utiliza" una parte del total de los elementos, los cuales no se pueden repetir (tienen que ser personas distintas las que ocupen los puestos de la lista, no existe, por ejemplo, una persona que sea presidente y vicepresidente al mismo tiempo) y, además, SÍ me importa el orden porque no es lo mismo ser presidente que vicepresidente.

$$V_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.\cancel{2.1}}{\cancel{2.1}} = 6.5.4.3 = 360$$

Respuesta: son 360 posibles grupos para seleccionar a los primeros cuatro puestos de la lista.

- *En una escuela se realizará un sorteo entre 20 alumnos para elegir al abanderado, al primer escolta y al segundo escolta, de la bandera. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esta elección?*

$m: total\ de\ alumnos = 20$

$n: abanderado, escolta\ y\ segundo\ escolta = 3$

Ahora, es una variación ordinaria porque los elementos (los alumnos) no se pueden repetir (un alumno no puede ser escolta y abanderado al mismo tiempo) y, además, me importa el orden de los elementos (no es lo mismo que, por ejemplo, el alumno Juan sea abanderado que segunda escolta, es por eso que importa la posición o el lugar del alumno).

$$V_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} =$$

$$V_3^{20} = \frac{20.19.18.\cancel{17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}}{\cancel{17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}} = 20.19.28 = 6840$$

Respuesta: Son 6840 posibles grupos de 3 alumnos que pueden ir a la bandera.

- **Variaciones con repetición:** en este tipo de variación los elementos pueden estar más de una vez, o sea se pueden repetir los elementos en n. Y su fórmula es:

$$\boxed{VR_n^m = m^n}$$

Ejemplo:

- *¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos:* $1, 2, 3, 4$ *y* 5*?*

$m: cantidad\ de\ números = 5$

$n: cantidad\ de\ cifras = 3$

En este caso, el número 111 y 225 podrían ser números de tres cifras en este problema, eso nos quiere decir que los elementos **sí** se pueden repetir. Aplicando la formula nos quedaría:

$$VR_3^5 = 5^3 = 125$$

Respuesta: existen 125 posibles números de tres cifras formados con los números $1, 2, 3, 4$ y 5.

PERMUTACIONES:

La permutación son **todos los grupos** que se pueden formar **utilizando todos los elementos** (m) y **teniendo en cuenta el orden** de ellos. Cuya fórmula es:

$$\boxed{P_m = m!}$$

Ejemplos:

- ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener de una carrera en la que participan 5 caballos?

Si estamos hablando de una carrera de 5 caballos entonces vamos a tener 5 posiciones (primer, segundo, tercer, cuarto y quinto lugar), por ende, vamos a tener que utilizar todos los elementos (caballos en este caso). Y como las posiciones en los cuales salgan estos caballos sí importan, nos importa su orden (no es lo mismo salir primer lugar que segundo lugar).

Aplicando la fórmula:

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Respuesta: son 120 posibles resultados los de la carrera con 5 caballos.

- ¿Cuántos números distintos puedo formar con 4 cifras distintas, teniendo en cuenta que esas cifras son $1, 2, 3\ y\ 4$?

Como tenemos que formar numeros de 4 cifras con 4 números distintos, tenemos que utilizar todos los elementos que tenemos y como estas cifras tienen que ser distintas, no se pueden repetir los elementos.

Aplicando la fórmula:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Respuesta: son 24 números distintos posibles para formar con 4 cifras y que estas no se repitan. ¿Cuáles son?

1234	1243	1324	1342	1432	1423
2134	2143	2341	2314	2431	2413
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

COMBINACIONES

Son las distintas agrupaciones que se pueden formar con n elementos (una parte de elementos) de un conjunto de m elementos (total de elementos), **sin tener en cuenta el orden**. Como en este caso no nos importa el orden si yo quiero, por ejemplo, saber cuántas formas de elegir 2 colores de un total de 10 para combinarlos, no importa el orden en que los elija, el resultado será el mismo (si combino azul-amarillo o amarillo-azul de ambas maneras obtengo verde). En conclusión, las combinaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que no influyen el orden en las cuales estas se colocan. Como en la variación, existen dos tipos de combinaciones, la combinación sin repetición de los elementos y la combinación con repetición de los elementos.

- **Combinación sin repetición:** su fórmula es:

$$\boxed{C_n^m = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}}$$

Ejemplo:

- *Un cocinero va a preparar una ensalada de verduras con lechuga, tomate, cebolla y zanahoria. ¿De cuántas formas se puede preparar una ensalada usando solo 2 ingredientes?*

Es una combinación sin repetición porque no importa el orden en el cual elija los ingredientes para preparar la ensalada (es lo mismo si es una ensalada de lechuga-tomate o de tomate-lechuga) y, además los ingredientes no se pueden repetir ya que tienen que ser dos diferentes (no puedo elegir 2 veces zanahoria porque estaría usando 1 solo ingrediente). Entonces, siguiendo con el problema:

$$total\ de\ ingredientes: m = 4$$

$$ingredientes\ a\ usar: m = 2$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2!\,.\,2!} = \frac{4.3.\cancel{2.1}}{2.1.\cancel{2.1}} = \frac{12}{2} = 6$$

Respuesta: se pueden preparar 6 ensaladas con 2 ingredientes de 10. ¿Cuáles son? Lechuga-tomate, lechuga-cebolla, lechuga-zanahoria, tomate-cebolla, tomate-zanahoria y cebolla-zanahoria.

➢ **Combinación con repetición:** Su fórmula es:

$$\boxed{CR_n^m = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}}$$

Ejemplo:

- *En una confitería hay cinco tipos de tortas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles pudiéndose elegir varios del mismo tipo?*

Es una combinación porque no me importa el orden en los cuales me lleve las tortas (por ejemplo, es lo mismo decir que me llevo una de lemon pie y otra de cheesecake que me llevo una de cheesecake y otra de lemon pie) y es una combinación con repetición porque me puedo llevar, por ejemplo, cinco veces la misma torta. Siguiendo con el ejercicio,

$$total\ de\ tortas: m = 5$$

$$tortar\ a\ elegir: n = 4$$

$$CR_4^5 = \frac{(5+4-1)!}{4!.\,(5-1)!} = \frac{8!}{4!\,.\,4!} = \frac{8.7.6.5.\cancel{4.3.2.1}}{4.3.2.1.\cancel{4.3.2.1}} = \frac{1680}{24} = 70$$

Respuesta: son 70 formas diferentes de elegir 4 pasteles de 5 tipos diferentes.

A continuación, y a modo de resumen, nos podemos guiar del siguiente cuadro para identificar qué tipo de combinatoria tenemos:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">AGRUPACIONES</td><td colspan="2">¿SE REPITEN LOS ELEMENTOS?</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿IMPORTA EL ORDEN?</td><td rowspan="2">SI</td><td>VARIACIONES
Tomamos algunos elementos.</td><td>$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$</td><td>$VR_n^m = m^n$</td></tr>
<tr><td>PERMUTACIONES
Tomamos todos los elementos</td><td>$P_m = m!$</td><td></td></tr>
<tr><td>NO</td><td>COMBINACIONES
Tomamos algunos elementos</td><td>$C_n^m = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$</td><td>$CR_n^m = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}$</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES

1. ¿De cuántas formas pueden hacer fila 5 amigos para entrar al cine?
2. Un alumno tiene 7 libros, ¿de cuántas maneras puede acomodar cinco de ellos en un estante?
3. El capitán de un barco solicita 2 marineros para realizar un trabajo, sin embargo, se presentan 10. ¿De cuántas formas podrá seleccionar a los 2 marineros?
4. Con 4 frutas diferentes, ¿cuántos jugos surtidos se pueden preparar? (Un jugo surtido se prepara con 2 frutas).
5. ¿De cuántas formas puede un juez otorgar el primero, segundo y tercer premio en un concurso que tiene ocho concursantes?
6. ¿Cuántos grupos podemos formar al extraer 4 cartas de una baraja española de 40?
   a) Sin reposición de cartas
   b) Con reposición de cartas
7. Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. ¿Cuántos partidos se deben programar si cada integrante jugará con cada uno de los demás sin partidos de revancha?
8. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 2, 3, 4, 5?
9. ¿Cuántos números de 4 cifras podemos escribir con los números del 0 al 4 sin repetirlos?
10. En una clase de 35 alumnos, se requiere formar un comité de 3 alumnos. ¿De cuántas maneras se puede formar?
11. Si deseo elegir un pote con 3 gustos diferentes de helado en una heladería que tiene 26 gustos, ¿De cuántas formas puedo hacerlo?
12. Un club cuenta con 20 socios en condiciones de integrar la comisión directiva. Los cargos son presidente, vicepresidente, tesorero y vocal. ¿Cuántas formas hay de formar las listas?
13. A una reunión concurren 12 personas e intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos han intercambiado?

Respuestas:

1. Es una permutación de 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 120$$

2. Es una variación de 7 elementos tomados de a 5.

$$V_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

3. Es una combinación de 10 elementos tomados de 2.

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

4. Es una combinación de 4 elementos tomados de a 2.

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

5. Es una variación de 8 elementos tomados 3.

6. a) Es una combinación de 40 elementos tomados de a 4 sin repetición.

$$C_4^{40} = \frac{40!}{4!\,(40-4)!} = 91390$$

b) Es una combinación de 40 elementos tomados de a 4 con repetición.

$$CR_4^{40} = \frac{(40+4-1)!}{40!\,(40-1)!} = \frac{43!}{4!\,39!} = 1\,086\,088$$

7. Es una combinación de 10 elementos tomados de a 2.

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

8. Es una variación con repetición de 4 elementos tomados de 3.

$$VR_3^4 = 4^3 = 64$$

9. La respuesta es 96. Este ejercicio requiere un poco más de análisis. Veamos porqué:

Si tenemos que formar un número de 4 cifras y tenemos disponibles los números de 0 al 4, quiere decir que poseemos 5 opciones en las que elegir. El problema es el siguiente: un número de 4 cifras no puede empezar por el cero. Por lo tanto:

- en el primer espacio sólo caben 4 dígitos (el 1, 2, 3 y 4)
- en el segundo espacio vuelven a caber 4 opciones (el 0 ya se puede usar, más los otros 3 que no usamos)
- en el tercer espacio sólo caben 3 opciones.
- y al final las otras 2 opciones restantes

Entonces tenemos sólo 4 opciones para el primer dígito, luego 4 más, luego 3 y luego 2. La cantidad de casos posibles es:

$$4.4.3.2 = 96$$

10. Es una combinación de 35 elementos tomados de a 3.

$$C_3^{35} = \frac{35!}{3!\,(35-3)!} = 6545$$

11. Es una combinación de 26 elementos tomados de a 3.

$$C_3^{26} = \frac{26!}{3!\,(26-3)!} = 2600$$

12. Es una variación de 20 elementos tomados de 4.

$$V_4^{10} = \frac{20!}{(20-4)!} = 116280$$

13. Es una combinación de 12 elementos tomados de a 2.

$$C_2^{12} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = 66$$