Der Zeeman-Effekt

Arthur Heimbrecht und Jonas Dreher

Abstract—Der Zeeman-Effekt ist ein Phänomen der Atomphysik, der beschreibt, wie Spektrallinien eines Elements bei Kopplung des magnetischen Moments des Atoms mit einem externen Magnetfeld aufgespalten werden. Ziel dieses Versuches war es, den normalen Zeeman-Effekt bei Cadmium zu beobachten und anschließend die Aufspaltung der Spektrallinien in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke zu untersuchen. Im zweiten Teil des Experiments sollten wir dann die Wellenlängen der roten Cadmium-Linie und eines unbekannten Elements mit Hilfe eines Czerny-Turner-Spektrometers bestimmen. In unserer Messung bestimmten wir die Wellenlängen $\lambda_{Cd}=(643.84\pm0.05)nm$ und $\lambda_{unbekannt}=(652.20\pm0.06)nm$, wobei die unbekannte Wellenlänge zu mehreren Elementen passt. Aus beiden Versuchsteilen lies sich das Bohr'sche Magneton μ_B ausrechnen, wofür wir als Ergebnis $\mu_B=(9.5\pm1.4)\times10^{-24}\frac{J}{J}$ erhielten.

I. EINLEITUNG

Der Zeeman-Effekt wurde das erste Mal 1896 vom niederländischen Physiker Peter Zeeman untersucht, als er die Verbreiterung der gelben D-Linien von brennendem Natrium zwischen starken Magneten beobachtete. Später fand er heraus, dass es sich bei der Verbreiterung der Linien eigentlich um eine Aufspaltung in bis zu 15 Komponenten handelte.

Die Spektrallinien eines Elements entstehen dadurch, dass ein Elektron beim Übergang zwischen verschiedenen Energieniveaus ein Photon emittiert, dessen Wellenlänge von der Energiedifferenz der Energieniveaus abhängt. Legt man ein starkes äußeres Magnetfeld an, so ändert man durch die Kopplung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem externen Magnetfeld einzelne Energieniveaus, was zu einer Aufspaltung der Spektrallinien führt. Dabei unterscheidet man zwischen dem im Versuch beobachteten normalen Zeeman-Effekt und dem anormalen Zeeman-Effekt. Diese unterscheiden sich im Gesamtspin \vec{S} des Elektrons, der beim normalen Zeeman-Effekt $\vec{S} \neq 0$.

II. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

A. Der normale Zeeman-Effekt

Um die Grundlagen des Zeeman-Effekts zu verstehen, nehmen wir zunächst an, dass das magnetische Moment eines Elektrons I durch das Bohr'sche Atommodell ausreichend beschrieben werden kann. Nach diesem Modell kreist das Elektron als Punktmasse m_e mit der Geschwindigkeit v und der Ladung e in einem Abstand r_{Bohr} , dem Bohr-Radius, um den Atomkern. Benutzt man diese Approximation, erhält man folgendes magnetisches Moment

$$\vec{\mu}_l = \frac{evr}{2}\vec{n} \tag{1}$$

Dabei ist \vec{n} der Normalenvektor, senkrecht zur Kreisscheibe, auf der sich das Elektron bewegt (siehe Fig. 1). Man sieht

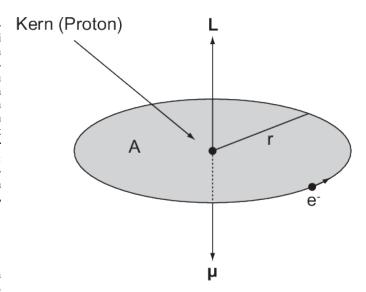


Fig. 1. [1] Bohr'sches Modell eines Elektrons mit dem Drehimpuls \vec{L} und dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$

leicht, dass das magnetische Moment dem Drehimpuls des Elektrons ähnelt.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r v \cdot \vec{n} \tag{2}$$

Legt man nun ein externes Magnetfeld \vec{B} an, so wechselwirkt dieses mit dem magnetischen Moment des Elektrons, sodass es zu einer Änderung des Energieniveaus kommt.

$$\Delta E_{Pot} = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l} \cdot \vec{B}$$
 (3)

Nun quantisiert man den Drehimpuls des Elektrons entlang des magnetischen Feldvektors \vec{B}

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$
 $l = 0, 1, \dots, n-1$ (4)

$$l_z = m_l \hbar \qquad -l \le m_l \le l \tag{5}$$

Damit lässt dich die Energiedifferenz ΔE_{Pot} vereinfachen zu

$$\Delta E_{Pot} = \frac{e\hbar}{2m_e} m_l B = \mu_B \cdot m_l \cdot B \tag{6}$$

Hier beschreibt μ_B das von uns gesuchte Bohr'sche Magneton. Die Änderung des Energieniveaus um ΔE_{Pot} bewirkt die Aufspaltung des ursprünglichen Energieniveaus mit Drehimpuls l in 2l+1 Unterniveaus mit demselben Drehimpuls l aber unterschiedlichem m_l .

Alternativ kann man diese Gleichung auch quantenmechanisch herleiten. Dafür betrachtet man alle Spins und Drehmomente der Elektronen eines Atoms als einzelne Summen, sowie den Gesamtspin \vec{J} , die für den Hamilton-Operator im

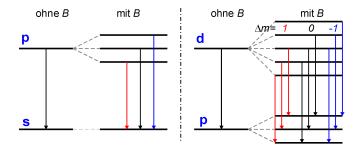


Fig. 2. [2] Aufspaltung der Energieniveaus für den normalen (links) und anormalen (recht) Zeeman-Effekt

externen Magnetfeld benötigt werden. Damit erhält man die Gleichung

$$\Delta E_{Pot} = \mu_B \cdot M_J \cdot B \cdot g_i \tag{7}$$

Mit g_j dem Landé-Faktor, der aber für den normalen Zeeman-Effekt 1 ist, wodurch (7) gleich zu (6) wird. In unserem Fall interessiert nur der normale Zeeman-Effekt.

B. Auswahlregeln und Polarisation des Lichts

Wenn ein Elektron zwischen zwei Elektronenschalen (E_1, E_2) "springt", so emittiert es ein Photon mit einer Wellenlänge λ , die von der Energiedifferenz der Elektronenschalen abhängt.

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{ph} = \Delta E = E_1 - E_2 \tag{8}$$

Jedoch gibt es Einschränkungen, welche Übergänge möglich sind. Wichtig hierfür ist das Dipol-Matrixelement M_{ik}

$$M_{ik} = e \int \psi_i^* \vec{r} \psi_k dV \tag{9}$$

 M_{ik} beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Elektronenschalen k nach i und muss mindestens eine Komponente besitzen, die nicht-Null ist, damit ein Übergang von k nach i möglich ist. Schreibt man (9) in alle drei Raumrichtungen um entstehen drei Integrale. So bekommt man die folgenden Vorschriften für die magnetische Quantenzahl M, den Drehimpuls L und den Spin S

$$\Delta M_J = M_{J,i} - M_{J,k} = 0, \pm 1 \tag{10}$$

$$\Delta L = L_i - L_k = \pm 1 \tag{11}$$

$$\Delta S = 0 \tag{12}$$

Angenommen, der magnetische Feldvektor \vec{B} zeigt in die z-Richtung, so kann nur das Matrixelement $(M_{ik})_z$ nicht-Null werden für $\Delta M_J=0$. Diese Übergange nennt man π -Übergänge. Diese sind äquivalent dazu, dass ein Dipol entlang der z-Achse oszilliert, wodurch entlang der z-Richtung keine Strahlung emittiert wird. In die beiden anderen Richtung ist diese Oszillation des Dipols als linear polarisiertes Licht zu beobachten. Ist dagegen $\Delta M_J=\pm 1$, so erhalten wir σ -Übergänge, für die die z-Komponente der Dipol-Matrix null wird und die x- und y-Komponenten ungleich null, jedoch zueinander um $\pi/2$ phasenverschoben. Dies führt dazu, dass

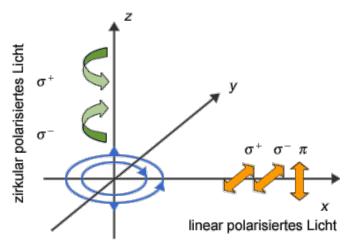


Fig. 3. [3] Darstellung der Polarisation anhand der x- und z-Richtung

wir entlang der z-Achse zirkular polarisiertes Licht beobachten und entlang der x- und y-Achse linear polarisiertes Licht.

Die Beobachtungsrichtung entlang der z-Achse wird longitudinal genannt und es sollten für $\Delta M_J=+1$ und $\Delta M_J=-1$ je eine zirkular polarisierte σ -Linie zu sehen sein. Im Gegensatz dazu sollten in transversaler Richtung (senkrecht zur z-Achse) eine linear polarisierte π -Linie für $\Delta M_J=0$ und zwei ebenfalls linear polarisierte σ -Linien zu beobachten sein.

III. DURCHFÜHRUNG UND AUSWERTUNG

A. Versuchsteil 1: Spektroskopie des Zeeman-Effekts

Im ersten Versuchsteil wurde der Zeeman-Effekt anhand der roten Cadmium-Linie untersucht, welche beim Übergang von $^1D_2 \rightarrow \ ^1P_1$ entsteht.

Dazu sollte zunächst untersucht werden, ob bei den verwendeten Magneten ein Hysterese-Effekt auftritt. Dafür wurde je drei Mal eine Messung mit einer Hall-Sonde bei zu- und abnehmender Feldstärke im relevanten Bereich durchgeführt und die Ergebnisse für B_{inc} und B_{dec} gemittelt. In Fig. 4 sieht man die Ergebnisse dieser Messung. Man erkennt, dass es einen kleinen Unterschied zwischen den Messungen gibt, jedoch offenbart der Fit, dass dieser Unterschied innerhalb des Fehlers liegt, weshalb man in unserem Fall von keinem signifikanten Effekt reden kann.

Als nächstes sollte der Zeeman-Effekt in longitudinaler und transversaler Richtung qualitativ untersucht werden. Dazu verwendeten wir den in Fig. 5 dargestellten Aufbau.

Das wichtigste Element dieses Aufbaus ist die Lummer-Gehrcke-Platte. Dabei handelt es um eine dünne Glasplatte mit nahezu plan-parallelen Flächen. Tritt Licht durch ein Prisma mit dem Einfallswinkel β in die Platte ein, so wird dieses innerhalb der Platte reflektiert. Nach jeder Reflexion wird etwas Licht an der Oberfläche gebrochen, das mit Hilfe einer Linse fokussiert und zur Interferenz gebracht wird. Erfüllt der Gangunterschied die Bedingung

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - 1} = k\lambda \tag{13}$$

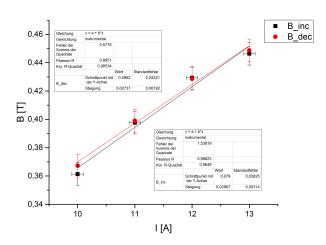


Fig. 4. Vergleich der magnetischen Feldstärke bei zu- und abnehmender Stromstärke

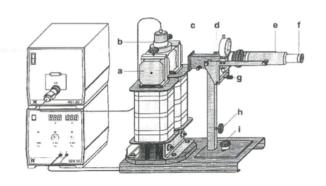


Fig. 5. [4] Versuchsaufbau nach dem Skript: (Darstellung aus Leybold, Physics Leaflets). a) Polschuhe des Magneten, b) Cd-Lampe, c) Rotlicht Filter, d) Lummer-Gehrcke Platte, e) Teleskop, f) Okular, g) Höheneinstellung für das Teleskop, h) Feststellschraube für die Teleskophalterung, i) Feststellschraube für die Grundplatte.

erhält man konstruktive Interferenz mit dem Gangunterschied $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$, dem Brechungsindex $n = n_2, n_1 \approx 1$, der Dicke der Platte d und der Interferenzordnung k (siehe Fig. 6). Der Reflexionswinkel α innerhalb der Platte wird als $\approx 90^\circ$ angenommen, wodurch es annähernd zu totaler Reflexion innerhalb der Platte kommt.

Das Interferenzmuster der Lummer-Gehrcke Platte für eine Aufnahme in transversaler Richtung kann in Fig. 7 betrachtet werden.

Mit dieser Messmethode und unter Zuhilfenahme eines Teleskops konnten wir in transversaler Richtung 3 Linien beobachten, in der Mitte die π -Linie, parallel dazu links

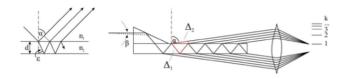


Fig. 6. [5] Funktionsweise der Lummer-Gehrcke-Platte.



Fig. 7. Zeeman-Effekt in transversaler Richtung bei I = 13A.

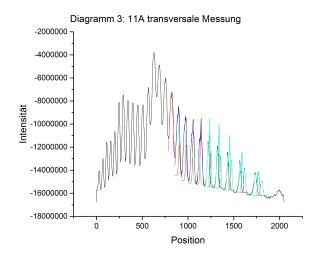


Fig. 8. Zeeman-Effekt in transversaler Richtung bei I=11A entlang der y-Achse integriert. Nicht aus derselben Messreihe wie Fig. 7!

und rechts die σ_{\pm} -Linien. Wird ein Polarisationsfilter in den Strahlengang gehalten, können wir entweder die π - oder die beiden σ -Linien komplett herausfiltern. Die drei Linien sind somit linear polarisiert, wobei die Polarisation der π -Linie senkrecht zu der der σ_{\pm} -Linien und parallel zu den B-Feldlinien ist. In longitudinaler Richtung können wir die σ_{+} -und σ_{-} -Linie beobachten. Es ist nicht möglich, allein mit dem Polarisationsfilter eine Linie auszublenden, hält man jedoch noch ein $\lambda/4$ -Plättchen vor den Polarisationsfilter, das aus zirkular polarisiertem Licht linear polarisiertes Licht macht, so kann man mit dem Polarisationsfilter je eine der beiden Linien unter Drehung um 90° ausblenden. Dies lässt auf rechts- bzw. links-polarisiertes Licht schließen.

Die quantitativen Ergebnisse aus der Beobachtung der Zeeman-Effekts sollten als nächstes dazu verwendet werden, das Bohr'sche Magneton zu bestimmen. Dazu wurden die Aufnahmen aus dem ersten Versuchsteil mit dem Programm ImageJ entlang der Y-Achse integriert und mit "multiple peaks" in Origin Gauß-gefittet. Dadurch erhielten wir die Positionen und die Breite der Interferenzlinien in Pixel für jede Messung mit I=10,12 und 13A. Die Ordnungen der π -Linie wurden dann gegen die Position in Pixel geplottet und mit einem polynomialen Fit zweiter Ordnung versehen. Mit Hilfe dieses Fits wurden die Ordnungen der σ -Linien bestimmt.

Um daraus das Bohr'sche Magneton bestimmen zu können, benutzen wir folgenden Ansatz:

Betrachtet man den Abstand zwischen den π - und σ -Linien,

so kann man die Wellenlängen als λ und $\lambda + \delta\lambda$ identifizieren. Dabei gilt für $\delta\lambda$ aus der Messung

$$\delta\lambda = \frac{\delta k}{\Delta k} \Delta\lambda = \delta k \Delta\lambda \tag{14}$$

mit Δk der Ordnungsdifferenz zwischen zwei π -Linien, δk der Ordnungsdifferenz zwischen π - und σ -Linie und $\Delta \lambda$ bestimmt durch

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}}\tag{15}$$

Damit ergibt sich für $\delta\lambda$ in Abhängigkeit von δk

$$\delta\lambda = \delta k \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}} \tag{16}$$

mit n=1,457 und d=4,04mm. Für diese Messung ist λ die Wellenlänge der roten Cadmium-Linie, welche wir im zweiten Versuchsteil (siehe (b)) als $\lambda_{Cd}=(643,84\pm0,05)nm$ bestimmt haben.

Verwendet man die Energiedifferenz ΔE_{pot} zweier Wellenlängen

$$\Delta E_{pot} = hc(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}) \approx hc\frac{\delta\lambda}{\lambda_1^2}$$
 (17)

und setzt diese mit der Energiedifferenz der zugehörigen Energieniveaus aus (6) gleich, so erhält man

$$\mu_B = \frac{hc}{2Bd\sqrt{n^2 - 1}}\delta k \tag{18}$$

In unserem Versuch ergab sich ein mittleres Bohr'sches Magneton von

$$\mu_B = (9, 5 \pm 1, 4) \times 10^{-24} \frac{J}{T}$$
 (a)

Das Ergebnis für μ_B wurde aus der Messreihe in Tabelle 1 gemittelt

Der Fehler ergibt sich aus Fehlerfortpflanzung, die auf der Standardabweichung analog zur Standardabweichung der Gauß-Peaks in Fig. 8 aufbaut.

B. Versuchsteil 2: Präzisionssprektroskopie

Im zweiten Teil des Versuchs sollten die Wellenlängen von zwei Linien des Cadmium-Spektrums bestimmt werden.

Hierzu wurde ein Czerny-Turner-Sprektrometer mit einer Neon-Lampe als Referenz verwendet. Das Czerny-Turner-Spektrometer erlaubt die Wellenlängen von eintretendem Licht mit Hilfe eines Gitters spektral zu erfassen. Dazu wird das Licht, das durch eine Öffnung eintritt, durch einen konkaven Spiegel auf das Gitter fokussiert, wo es spektral aufgespaltet wird und anschließend von einem weiteren Spiegel reflektiert wird, sodass die eingebauten CCD-Kamera in der Fokusebene des Spektrums liegt.

Zunächst bestimmten wir in einer Referenz-Messung die Position der Peaks im Neon-Spektrum im Bereich um 640nm. Die Peaks in der Aufnahme des Spektrums wurden zur Bestimmung der Postion mit Gauß-Fits versehen und den passenden Wellenlängen zugeordnet. Anschließend wurde die Wellenlänge der Peaks gegen deren Postion in Pixel aufgetragen (Fig. 11) und mit einer polynomialen Funktion zweiter

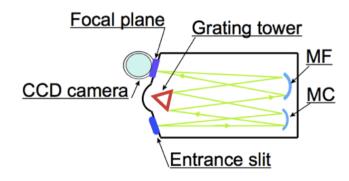


Fig. 9. [6] Aufbau Czerny-Turner-Spektrometer.

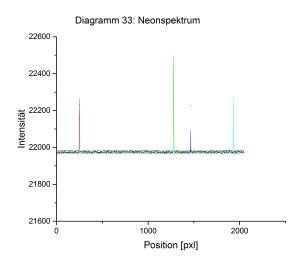


Fig. 10. Aufnahme des Neon-Spektrums um $\lambda = 640nm$

Ordnung gefittet. Als Fehler wurde die Halbwertsbreite des Fits verwendet.

In einer zweiten Messung haben wir bei gleichen Einstellungen das Spektrum der Cadmium-Lampe aufgenommen und ebenfalls durch einen Gauß-Fit die Position der Peaks bestimmt. Aus dem Fit der ersten Messung konnten wir dann die Wellenlängen der beiden sichtbaren Linien berechnen.

Für die starke Cadmium-Linie erhielten wir eine Wellenlänge von

$$\lambda_{Cd} = (643, 84 \pm 0, 05)nm$$
 (b)

und für die schwache Linie eine Wellenlänge von

$$\lambda_{unbekannt} = (652, 20 \pm 0, 06)nm$$
 (c)

Mit Hilfe der NIST Atomic Spectra Database[7] konnten wir unser unbekanntes Element auf folgende Elemente eingrenzen:

- Schwefel
 Silizium
 Xenon
 Wolfram
- Thorium Cobalt Stickstoff

Davon sind Xenon als gasförmige Verunreinigung, sowie Wolfram und Thorium als Elektrodenmaterial am wahrscheinlichsten.

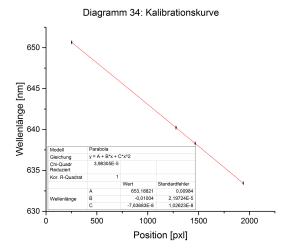


Fig. 11. Position der Neon-Peaks gegen die bekannte Wellenlänge

C. Kritische Würdigung

Ziel des Versuches war es, anhand des Zeeman-Effekts das Bohr'sche Magneton zu bestimmen und anschließend mit Hilfe eines Czerny-Turner-Spektrometers die Wellenlängen der roten Cadmium-Linie und eines unbekannten Elements zu bestimmen.

Im ersten Versuchsteil wurde der verwendete Magnet auf Hysterese-Effekte untersucht, welche sich jedoch als vernachlässigbar herausstellten. Vermutlich überwiegten bei den dazugehörigen Messungen die äußeren Fehler, wie zum Beispiel das manuelle Einführen der Hall-Sonde.

Als nächstes wurde der Zeeman-Effekt selbst qualitativ mit einer Cadmium-Lampe beobachtet. Hierbei wurde die Polarisation, sowie die Anzahl der Interferenzlinien in longitudinaler und transversaler Richtung untersucht. Die Beobachtungen stimmten mit den vorhergehenden theoretischen Überlegungen überein.

Aus der transversalen Beobachtungsrichtung konnten wir zusätzlich noch Informationen über die Linienposition erhalten und so das Bohr'sche Magneton errechnen. Wir erhielten einen experimentellen Wert von $\mu_{B,exp}=(9,5\pm1,4)\times 10^{-24}\frac{J}{T}$, welcher innerhalb des Fehlerbereichs des Literaturwert $\mu_{B,lit}=9,274\times 10^{-24}\frac{J}{T}$ übereinstimmte. Bemerkenswert hierbei ist der große Fehler von über 14% für den Mittelwert aus 3 Messungen. Der Fehler resultiert hauptsächlich aus der Ungenauigkeit der Fit-Kurven, da hier als Fehler der Position der Peaks die Standardabweichung verwendet wurde.

Im zweiten Teil des Versuchs sollten die Wellenlängen von Cadmium, sowie eines weiteren Elements bestimmt werden. Für die starke rote Cadmium-Linie ergab sich eine Wellenlänge von $\lambda_{Cd,exp}=(643,84\pm0,05)nm$, welche nicht signifikant vom Literaturwert $\lambda_{Cd,lit}=643,847nm$ abwich. Für das unbekannte Element, was eine Wellenlänge von $\lambda_{unbekannt}=(652,20\pm0,06)nm$ besaß, kamen für uns vor allem die Elemente Xenon, Wolfram und Thorium in Frage, da diese als Bauelemente oder mögliche Verunreinigungen in der Gaslampe vorkommen können.

Insgesamt verlief der Versuch somit zufriedenstellend, da

alle Messwerte im Fehlerbereich mit den Literaturwerten übereinstimmten. Als mögliche Verbesserung würden wir zum einen eine optische Bank zur Befestigung der optischen Elemente vorschlagen, wodurch versehentliche Fehljustierungen seltener werden. Zum anderen wäre eine mechanische Befestigung für die Hall-Sonde von Vorteil, da der Hysterese Effekt offensichtlich sehr klein ausfällt und somit eine Fehlerquelle beseitigt werden könnte.

APPENDIX A WERTETABELLEN

I[A]	B [T]	δk	$\delta\lambda$ [pm]	$\mu_B \ [10^{-24} \frac{J}{T}]$
10,0	$0,37 \pm 0,05$	$0,15 \pm 0,04$	$7,4 \pm 1,7$	$9,6 \pm 2,6$
12, 0	$0,43 \pm 0,05$	$0,18 \pm 0,03$	$8,5 \pm 1,6$	$9,5 \pm 2,1$
13, 0	$0,46 \pm 0,06$	$0,19 \pm 0,04$	$9,0 \pm 2,1$	$9, 3 \pm 2, 5$

Tabelle 1: Messreihe zur Bestimmung des Bohr'schen

Magnetons

APPENDIX B QUELLEN

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3, Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer, Berlin, 2010.

Max-Planck-Institut für Kernphysik. Zeeman effect. Heidelberg, 2012.

REFERENCES

- Physik IV Einführung in die Quantenmechanik, qudev.phys.ethz.ch/content/science/BuchPhysikIV/PhysikIVch12.html (stand: 06.09.16)
- [2] Der Zeeman-Effekt, www.ipf.uni-stuttgart.de/lehre/onlineskript/f30_09.html (stand: 06.09.16)
- [3] Atome im Magnetfeld, www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/13/vlu/analytik/aas/zeeman.vlu/Page/vsc/de/ch/13/pc/analytik/aas/aas4_ze1.vscml.html (stand: 06.09.16)
- [4] Skript F44 Zeeman-Sprektroskopie, Universität Heidelberg, Seite 4 Fig. 3
- [5] Skript F44 Zeeman-Sprektroskopie, Universität Heidelberg, Seite 2 Fig.
- [6] Skript F44 Zeeman-Sprektroskopie, Universität Heidelberg, Seite 7 Fig. 4
- [7] NIST Atomic Spectra Database Lines Form, http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html (stand: 22.09.16)