ШИРОКОПОЛОСНЫЕ УСТРОЙСТВА

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Неравномерность модуля коэффициента передачи s_{21}
(или неравномерность усиления) в полосе частот $[f_н; f_в]$:

$$20\lg\left(\frac{\max\left(|s_{21}\left(f\right)|\right)}{\min\left(|s_{21}\left(f\right)|\right)}\right), f \in [f_н; f_в]$$

СОКРАЩЕНИЯ

- АЭ – активный элемент
- ЦК – цепь коррекции
- ЦС – цепь связи
- ШПУ – широкополосный усилитель

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $f_н$ – нижняя частота полосы пропускания
- $f_в$ – верхняя частота полосы пропускания
- $\alpha\|\beta = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
- Δ – детерминант матрицы рассеяния четырёхполюсника
- θ – угловая электрическая длина
- a – падающая волна
- b – отражённая волна
- K – инвариант устойчивости четырёхполюсника (по Роллетту)
- s – коэффициент отражения от двухполюсника ($s \in \mathbb{C}$)
- s_{ij} – элемент i-ой строки j-ого столбца матрицы рассеяния ($s_{ij} \in \mathbb{C}$)
- $z = r + jx$ – нормированный импеданс ($z \in \mathbb{C}$)
- W – волновое сопротивление длинной линии

1 Децибелы

1.1 Определение

Про значения двух мощностей P_1 и P_2 говорят, что они отличаются на

$$10\lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \tag{1.1}$$

децибел.

1.2 Абсолютные и относительные величины

Когда нужно выразить *абсолютное* значение мощности P_2 по децибельной шкале, после сокращения "дБ" даётся указание на мощность P_1, от которой децибелы отсчитываются. Если $P_1 = 1$ мВт, то результат записывают в дБм или дБмВт (dBm), если $P_1 = 1$ Вт, то дБВт (dBW). Например, $P_2 = 10$ мВт. По децибельной шкале это либо $10\lg\left(\frac{10\text{мВт}}{1\text{мВт}}\right) = 10$дБм, либо $10\lg\left(\frac{0{,}01\text{Вт}}{1\text{Вт}}\right) = -20$дБВт.

При описании некоторых устройств (например, смесителей) бывает заведомо известно, что обсуждаемых P_1 и P_2 выполняется $\frac{P_2}{P_1} < 1$, и, следовательно, величина в (1.1) всегда отрицательна. В этих случаях принято брать $-10\lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ и называть эту величину *потерями* (мощности).

1.3 Важные соотношения

При вычислениях с децибелами полезно помнить некоторые часто встречающиеся соотношения (см. таблицу 1).

Таблица 1: Децибелы – важные соотношения

$\frac{P_2}{P_1}$	$10\lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$
2	3 дБ
4	6 дБ
5	7 дБ
10	10 дБ

2 Коэффициент отражения

2.1 Коэффициент отражения от импеданса на конце длинной линии

Коэффициент отражения s от импеданса Z для длинной линии с волновым сопротивлением W описывается формулой

$$s = \frac{Z - W}{Z + W} \tag{2.1}$$

Отношение справа в (2.1) зависит только от отношения $\frac{Z}{W}$, которое называется *нормированным импедансом* и обозначается $z = \frac{Z}{W}$. Тогда (2.1) переходит в

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{2.2}$$

Зная s, нормированный импеданс находят по формуле

$$z = \frac{1 + s}{1 - s} \tag{2.3}$$

Физический смысл имеют величины, использующие квадрат модуля s. Так $|s|^2$ – это отношение мощности волны, отражённой от Z, к мощности падающей волны, а $1-|s|^2$ показывает отношение мощности, выделяемой в Z, к мощности падающей волны. Последняя величина не превышает единицу для пассивного Z, и логарифм её всегда отрицателен. Поэтому в децибельной шкале её берут с обратным знаком и называют *потерями рассогласования*:

$$-10 \lg \left(1 - |s|^2\right) \tag{2.4}$$

2.2 Передача мощности от генератора в нагрузку

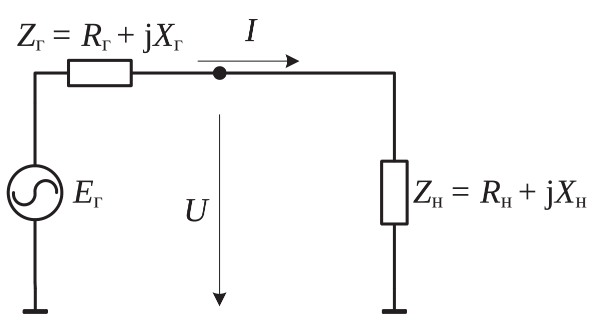

Рисунок 1 – Передача мощности от генератора в нагрузку

Мощность (, выделяемая) в нагрузке $P_н = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(U\overset{*}{I}\right) =$

$$P_н = \frac{1}{2}\frac{|E_г|^2}{4R_г + \frac{(R_н - R_г)^2}{R_н} + \frac{(X_н + X_г)^2}{R_н}} \tag{2.5}$$

Доступная мощность $P_г$ (наибольшая достижимая мощность в нагрузке)

$$P_г = \frac{|E_г|^2}{8R_г} \tag{2.6}$$

Доступная мощность выделяется в режиме согласования: $Z_н = \overset{*}{Z}_г$.

Используя (2.5), (2.6) можно переписать так: $P_г \frac{4R_г R_н}{(R_н+R_г)^2+(X_н+X_г)^2}$. Отсюда легко видеть, что доля доступной мощности, теряемой из-за рассогласования

$$\frac{P_г - P_н}{P_г} = \frac{(R_н - R_г)^2 + (X_н + X_г)^2}{(R_н + R_г)^2 + (X_н + X_г)^2} \tag{2.7}$$

Выражение в правой части (2.7) – это $\left|\frac{Z_н - \overset{*}{Z}_г}{Z_н + Z_г}\right|^2$. Введём понятие коэффициента отражения от нагрузки $s_н$ по аналогии с (2.1):

$$s_н = \frac{Z_н - \overset{*}{Z}_г}{Z_н + Z_г} \tag{2.8}$$

Если $Z_г = R_г + j0$, то (2.8) численно совпадает с (2.1) при замене $Z_н$ на Z, а $Z_г$ на W. Значит можно воспользоваться и (2.2), если принять $z = \frac{Z_н}{R_г}$. Следовательно, $\frac{P_н}{P_г} = 1 - |s|^2$.

Иногда удобнее рассмотреть коэффициент отражения от генератора $s_г = \frac{Z_г - \overset{*}{Z}_н}{Z_г + Z_н}$. Для него верно

$$1 - |s_г|^2 = \frac{(R_г - R_н)^2 + (X_г + X_н)^2}{(R_г + R_н)^2 + (X_г + X_н)^2} \tag{2.9}$$

Это выражение численно совпадает с (2.7). То есть оба коэффициента отражения сообщают одинаковую информацию о передаче мощности от генератора в нагрузку, поскольку квадраты их модулей равны. Следовательно, если $Z_н = R_н + j0$, то, принимая $z = \frac{Z_г}{R_н}$, можем воспользоваться (2.2), и снова получим $\frac{P_н}{P_г} = 1 - |s|^2$.

2.3 Коэффициент отражения: обобщение

Обобщив пп.2.1 и 2.2, можно сделать следующий вывод: в задачах, связанных с передачей мощности, удобно пользоваться величиной s, вычисляемой по формуле (2.2). При этом неважно, идёт ли речь о цепях с сосредоточенными или распределёнными параметрами. Соответственно, в обоих случаях потери рассогласования описываются формулой (2.4).

Строгое определение коэффициента отражения таково:

$$s = \frac{b}{a},$$

где

$a = \frac{U + IR_г}{\sqrt{8R_г}}$ – амплитуда падающей волны мощности (падающая волна);

$b = \frac{U - IR_г}{\sqrt{8R_г}}$ – амплитуда отражённой волны мощности (отражённая волна).

Стоит отметить, что в англоязычной литературе величины W или $R_г$ обозначаются как Z_0.

2.4 Коэффициент отражения: математические сведения

Формула (2.2) осуществляет *дробно-линейное преобразование* (см. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, 1958, с. 120-131 или любую другую книгу по теории функций комплексного переменного, где есть глава «Конформные отображения») полной комплексной плоскости переменного $z = r + jx$ (z-плоскости) в полную комплексную плоскость переменного s (s-плоскость). (*Полная* комплексная плоскость содержит бесконечно удалённую точку, например, $z = \infty$ для z-плоскости). Пример отображения точки $z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ показан на рисунке 2.

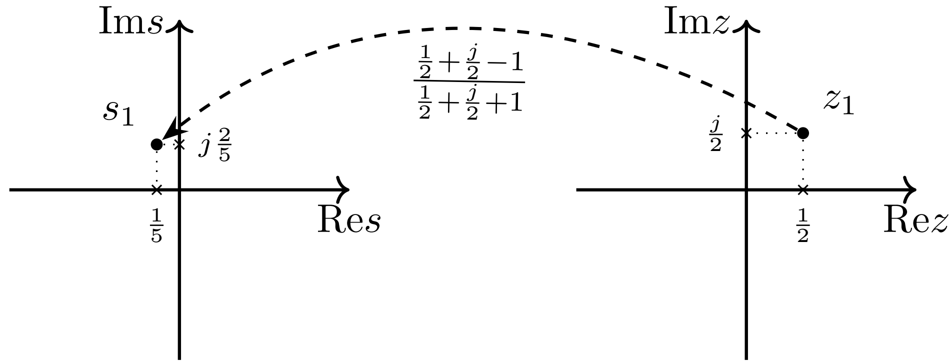

Рисунок 2 – Отображение точки $z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ в s-плоскость

Любое дробно-линейное преобразование обладает следующим свойством: оно отображает окружности одной плоскости в окружности другой плоскости. При этом нужно помнить, что *прямые в комплексной плоскости являются окружностями, проходящими через бесконечно удалённую точку.* Поэтому, например, образом прямой Re$z = 0$ является окружность в s-плоскости (Рисунок 3).

Для того, чтобы построить окружность *достаточно* знать произвольные *три* точки, принадлежащие ей. Поэтому для построения образа окружности достаточно найти три точки этого образа, что и сделано на рисунке 3).

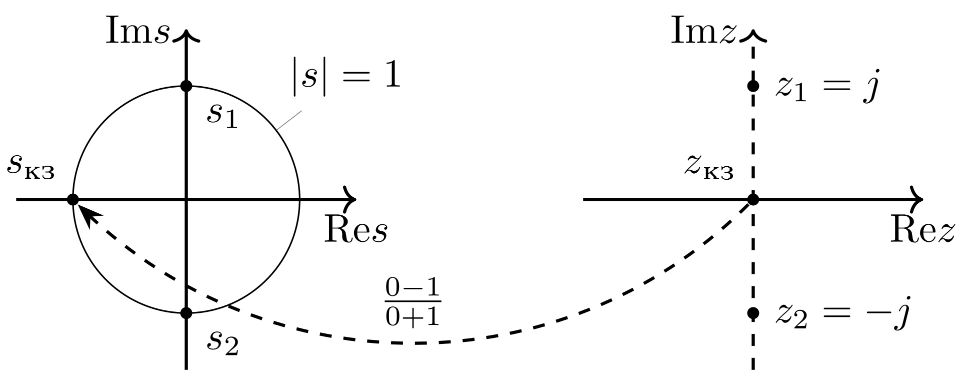

Рисунок 3 – Отображение мнимой z-оси в s-плоскость, построенное по трём точкам: $z_{\text{кз}} = 0 + j0$, $z_1 = 0 + j$, $z_2 = 0 - j$

Образом мнимой оси Re$z = 0$ является окружность $|s| = 1$. Она служит границей между областями коэффициентов отражения от пассивных и активных 2П. Внутри окружности находятся точки, соответствующие 2П, поглощающим энергию.

У преобразования (2.2) есть следующее свойство: $\operatorname{sgn}(\mathrm{Im}z) = \operatorname{sgn}(\mathrm{Im}s)$. Поэтому если окружность в z-плоскости расположена симметрично относительно действительной оси, её образ также будет симметричен относительно действительной оси s-плоскости. Поэтому для построения образа такой окружностей достаточно найти образы двух точек, лежащих на действительной оси (Рисунок 4).

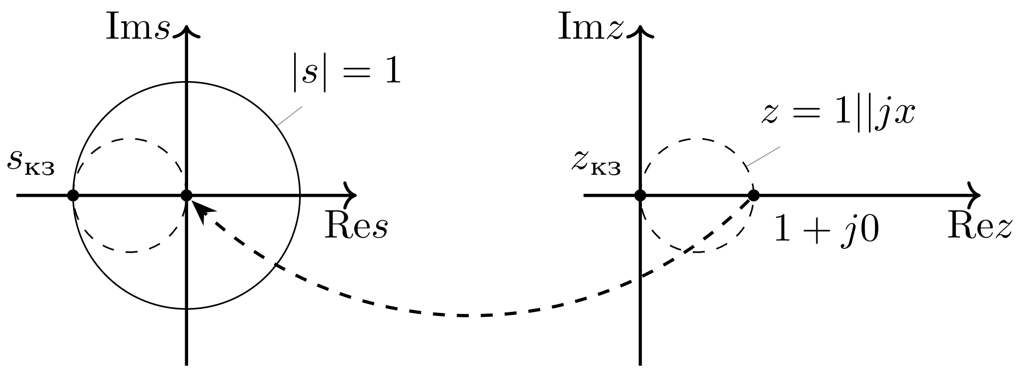

Рисунок 4 – Отображение окружности $z = 1\|jx$ в s-плоскость, построенное по двум точкам: $z_{\text{кз}} = 0 + j0$, $z = 1 + j0$

Окружность в s-плоскости на рисунке 4 является образом импедансов, обладающих единичной проводимостью.

Упомянутое выше свойство позволяет по образу в s-плоскости определить характер реактивности импеданса: если образ лежит в верхней плоскости, то характер – индуктивный, если в нижней – ёмкостный (Рисунок 5).

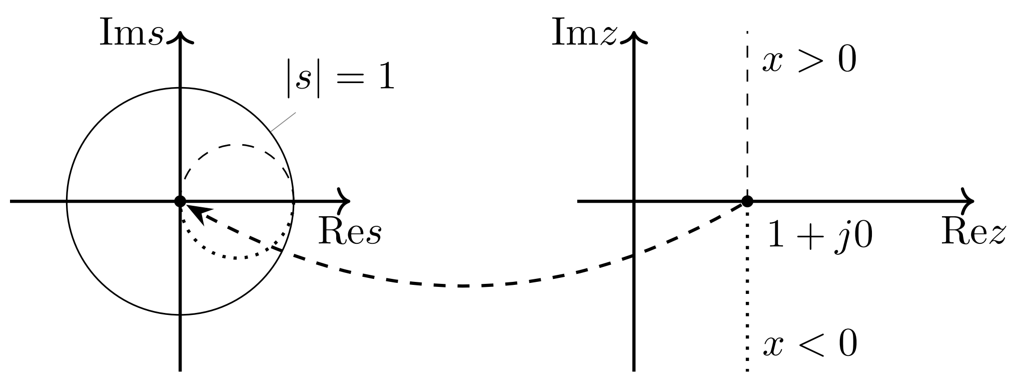

Рисунок 5 – Отображение прямой $z = 1 + jx$ в s-плоскость с выделением частей образов, лежащих в разных полуплоскостях

2.5 Простейшее согласование двухполюсников

Свойства отображения (2.2), описанные выше, позволяют легко сформулировать правила составления простейших цепей, обеспечивающих, режим согласования между произвольными генератором и нагрузкой. Постановка задачи сводится к следующему набору условий:

- активный и пассивный 2П, описываемые импедансами $Z_{\text{г}} = R_{\text{г}} + jX_{\text{г}}$ и $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}}$, не соотносящиеся дегенеративно, то есть: $Z_{\text{н}} \neq \overset{*}{Z}_{\text{г}}$;
- нужно подключить к каждому 2П простейший реактивный 2П так, чтобы обеспечить согласование в каком-либо сечении между двумя исходными 2П.

Выполнение условие согласования в каком-либо сечении каскадно соединённых 4П эквивалентно выполнению условия $s_{\Lambda}^{*} = s_{\Pi}$, где s_{Λ} и s_{Π} – коэффициенты отражения в левом и правом направлении от плоскости сечения соответственно.

Очевидно, что наличие реактивной части в одном из импедансов не влияет принципиально в $Z_{\text{г}}$ на решение задачи. Поэтому положим $Z_{\text{г}} = R_{\text{г}} + j0$ пронормируем $Z_{\text{н}}$ к $R_{\text{г}}$, то есть $z_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}}}{R_{\text{г}}}$. Слева на рисунке окажется импеданс $1 + j0$. Подключение последовательного или параллельного импедансов может привести только к движению точки s_{Λ} по одной из двух окружностей, обсуждённых ранее (Рисунок).

Рисунок Возможные положения ко от правой стороны сечения при согласовании двух произвольных двухполюсников

Следовательно, каждое решение задачи эквивалентно нахождению таких включений реактивных 2П справа, которые переведут точку $s_{\text{н}}$ в точку s_{Π}, принадлежащую одной из этих окружностей. Тогда левый 4П тривиально строится с помощью реактивного 2П, перемещающего $s_{\text{г}}$ в точку s_{Π}^{*}, получающуюся зеркальным отражением вдоль оси $\mathrm{Re} s = 0$.

Можно выделить лишь четыре качественно различные случая:

- $s_{\text{н}}$ лежит внутри окружности γ (соответствующей, проводимостям больше 1);
- $s_{\text{н}}$ лежит внутри окружности ρ (соответствующей, сопротивлениям больше 1);
- $s_{\text{н}}$ лежит вне окружностей γ и ρ, и при этом $\mathrm{Im} s > 0$;
- $s_{\text{н}}$ лежит вне окружностей γ и ρ, и при этом $\mathrm{Im} s < 0$.

Решения в этих случаях могут быть получены лишь включением последовательного, параллельного, ёмкостного или индуктивного 2П справа соответственно. Для первых двух случаев соответствующий 2П слева должен быть разноимённого включения и противоположной реактивности.

3 Обратимые четырёхполюсники

3.1 Нагруженный четырёхполюсник

Если к 4П подключён 2П, как показано на рисунке 6, то говорят, что он нагружен этим 2П со стороны плеча 2. При этом со стороны плеча 1 измеряется входной импеданс $Z_{\text{вх}_1}$. Аналогично вводится определение $Z_{\text{вх}_2}$.

Входные импедансы со стороны i-го плеча при условии, что другое плечо нагружено КЗ или ХХ обозначаются $Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_i}$ и $Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_i}$ соответственно.

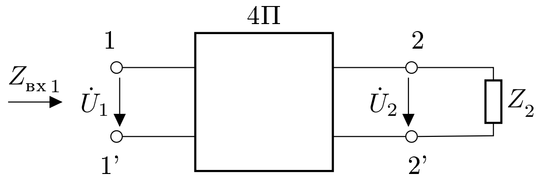

Рисунок 6 – Четырёхполюсник, нагруженный двухполюсником с импедансом Z_2 на плече 2

3.2 Собственные параметры обратимых четырёхполюсников

Записать любую матрицу обратимого 4П можно, зная лишь три параметра, которые называются характеристическими. Эти параметры – постоянная (или мера) передачи g и два характеристических импеданса Z_{W_1} и Z_{W_2}.

Характеристические импедансы (сопротивления) описываются выражением

$$Z_{W_i} = \sqrt{Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_i} Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_i}}. \tag{3.1}$$

а постоянная передачи связана с $Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_i}$ и $Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_i}$ простыми соотношением:

$$\frac{e^{2g}-1}{e^{2g}+1} = \sqrt{\frac{Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_1}}{Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_1}}} = \sqrt{\frac{Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_2}}{Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_2}}}, \tag{3.2}$$

3.3 Согласованное включение обратимых четырёхполюсников

Если нагрузить плечо 2 импедансом $Z_2 = Z_{W_2}$ (см. рисунок 6), то $Z_{\text{вх}_1} = Z_{W_1}$. При этом, будет выполнено равенство $\frac{\dot{U}_1}{\sqrt{Z_{W_1}}} = e^g \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{Z_{W_2}}}$. Из него следует, что мощность, поступившая через плечо 1, в $\left|e^{2g}\right|$ раз больше, чем мощность, выделившаяся в нагрузке $Z_2 = Z_{W_2}$. Следовательно, величина e^{-g} аналогична s_{21}.

Если включить согласованно несколько обратимых 4П постоянная передачи составного 4П g_Σ будет суммой постоянных передачи отдельных 4П g_i:

$$g_\Sigma = \sum g_i$$

.

3.4 Примеры

3.4.1 Г-образный четырёхполюсник

Г-образный 4П состоит из двух импедансов (Рисунок 7). Очевидно, что:

$$\begin{cases} Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_1} = Z_\Pi; & Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_2} = Z_T + Z_\Pi; \\ Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_1} = Z_T \| Z_\Pi; & Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_2} = Z_T. \end{cases} \tag{3.3}$$

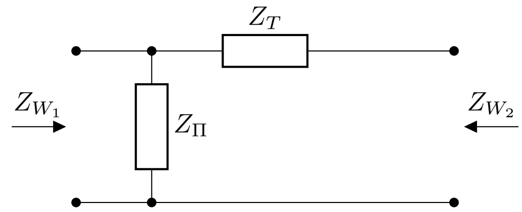

Рисунок 7 – Г-образный четырёхполюсник

Пользуясь (3.1) и (3.3), легко показать, что для Г-образного 4П

$$Z_{W_1} Z_{W_2} = Z_T Z_\Pi. \tag{3.4}$$

Пользуясь (3.2) и (3.3), получаем

$$\frac{e^{2g}-1}{e^{2g}+1} = \sqrt{\frac{Z_T}{Z_T+Z_\Pi}}. \tag{3.5}$$

Тогда, очевидно, что

$$\begin{cases} Z_{W_1} = Z_\Pi \frac{e^{2g}-1}{e^{2g}+1}; \\ Z_{W_2} = Z_T \frac{e^{2g}+1}{e^{2g}-1}. \end{cases} \tag{3.6}$$

3.4.2 Г-образный аттенюатор 1,5 дБ

Рассчитать резистивный Г-образный аттенюатор с $Z_{W_1} = 50$ Ом и затуханием $1,5$ дБ (Рисунок 8).

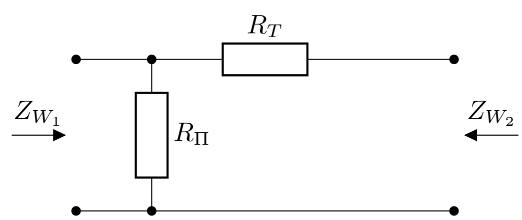

Рисунок 8 – Г-образный аттенюатор

Поскольку аттенюатор не содержит реактивных элементов, e^g будет действительной величиной.

1. Потерям 1,5 дБ соответствует $e^{2g} = 10^{\frac{1.5}{10}} = 1,41$.
2. Следовательно, $\frac{e^{2g}-1}{e^{2g}+1} = 0,17$.
3. Пользуясь (3.6), получаем:
   $R_\Pi = \frac{50}{0{,}17} = 292$ Ом;
4. Пользуясь тем, что $\frac{e^{2g}+1}{e^{2g}-1} = \sqrt{1+\frac{R_\Pi}{R_T}}$, получаем :
   $R_T = \frac{292}{1-(0{,}17)^2} = 8,7$ Ом.

3.4.3 П-образный аттенюатор 3 дБ

Рассчитать П-образный аттенюатор с $Z_{W_1} = Z_{W_2} = 50$ Ом и затуханием 3 дБ.

1. Включим последовательно два Г-образных аттенюатора, рассчитанных в 3.4.2, так, чтобы они соединились плечами, соответствующими Z_{W_2}.
2. Тогда при работе с 50-омными генератором и нагрузкой затухание получившегося 4П будет суммой затуханий двух Г-образных аттенюаторов, то есть 1,5+1,5=3 дБ.
3. Следовательно, решением задачи является П-образный 4П, состоящий из двух параллельных сопротивлений 292 Ом и последовательного сопротивления $2 \cdot 8,7 = 17,4$ Ом.

3.4.4 Т-образный аттенюатор 6 дБ

Из рассмотрения предыдущих примеров очевидно, что расчёт Т-образного аттенюатора 6 дБ $Z_{W_1} = Z_{W_2} =$ 50 Ом легко провести в два шага. Сначала рассчитать Г-образный аттенюатор 3 дБ с $Z_{W_2} = 50$ Ом. Затем соединить два таких аттенюатора плечами соответствующими Z_{W_1}.

Результат первого шага: $R_T = 16,7$ Ом, $R_\Pi = 133,3$ Ом.

Результат второго шага: $R_T = 16,7$ Ом, $R_\Pi = 66,7$ Ом.

3.4.5 Г-образная цепь согласования

Согласовать с помощью Г-образного 4П генератор с внутренним импедансом $50 + j0$ с нагрузкой $25 + j0$. Иначе говоря, нужно построить Г-образный 4П с $\left|e^{2g}\right| = 1$, $Z_{W_1} = 50$ Ом и $Z_{W_2} = 25$ Ом.

Сначала заметим, что $Z_{W_2} = \sqrt{Z^{\text{кз}}_{\text{вх}_2} Z^{\text{хх}}_{\text{вх}_2}} = \sqrt{Z_T^2 + Z_\Pi Z_T}$. Здесь уместно применить (3.4). Тогда

$Z_T = \sqrt{Z_{W_2}\left(Z_{W_2} - Z_{W_1}\right)} = \pm j\sqrt{Z_{W_2}\left(Z_{W_1} - Z_{W_2}\right)} = \pm j25$ Ом.

Ещё раз использовав (3.4), получим

$Z_\Pi = \frac{Z_{W_1} Z_{W_2} \cdot}{Z_T} = \mp j Z_{W_1}\sqrt{\frac{Z_{W_2}}{Z_{W_1} - Z_{W_2}}} = \pm j50\,\text{Ом}.$

Подставив полученные значения Z_T и Z_Π в (3.5) можно убедиться, что $\left|e^{2g}\right| = 1$.

Здесь уместно обсудить физический смысл полученного результата. Из приведённых выше выкладок следует, что

- элементы Z_T и Z_Π должны быть должны быть реактивностями противоположных знаков;
- должно выполняться неравенство $Z_{W_1} > Z_{W_2}$.

4 s-параметры четырёхполюсников

4.1 s-параметры – элементы матрицы рассеяния

По аналогии с коэффициентом отражения для 2П вводятся величины s_{ij}, описывающие поведение линейных многополюсников, в том числе четырёхполюсников (4П). Эти величины являются элементами матрицы, которая называется матрицей рассеяния или S-матрицей. Также s_{ij} часто называют s-*параметрами*.

Для децибельного представления модулей s-параметров усилителей есть устоявшиеся названия:

- $-20\lg|s_{11}|$ – обратные потери по входу (input return loss);
- $-20\lg|s_{11}|$ – обратные потери по входу (input return loss);
- $-20\lg|s_{12}|$ – развязка (isolation);
- $20\lg|s_{21}|$ – усиление (gain).

Обсуждаемые параметры дают возможность моделировать характеристики описываемых ими устройств. Информацию об S-матрицах на различных частотах сводят в специальные файлы.

4.2 Структура файла s-параметров (.s2p)

Файл s-параметров четырёхполюсника имеет расширение .s2p и содержит 9 столбцов данных. Каждая строка содержит значение частоты и соответствующие этой частоте модули и аргументы элементов s-матрицы в следующем порядке:

Частота	$\|s_{11}\|$	$\arg(s_{11})$	$\|s_{21}\|$	$\arg(s_{21})$	$\|s_{12}\|$	$\arg(s_{12})$	$\|s_{22}\|$	$\arg(s_{22})$

$|s_{ij}|$может быть указан как в относительных единицах, так и в децибелах ($20\lg|s_{ij}|$).

Обычно таблице с данными предпосылается несколько строк комментария. Каждая строка комментария начинается с символа “!”. В некоторых строках комментария можно найти указание на условия измерения и формат данных.

Также есть строка начинающаяся с символа “#” (строка 15 в нижеследующем примере), в которой указаны

- единицы измерения частоты;
- тип данных (s-параметры);
- формат записи комплексного числа (MA – амплитуда в относительных единицах и аргумент, DB – амплитуда в децибелах и аргумент, RI – действительная и мнимая части);
- сопротивление нормировки (волновое сопротивление) в Омах.

Пример файла .s2p дан на рисунке 9.

```
! Filename  P\Prog\Test\Noise\ATS_data\Testdata_Net\03 Spar\BFU520A_APG2013_30_A05_08p0V_0
! Date/Time Wed 24/Apr/2013
! BFU520A_APG2013_30_A05_08p0V_1to20mA_SP_CM01_Bias8_R.s2p
! MDIF S-parameter v. bias file
! BFU520A_APG2013_30_A05_08p0V_1to20mA_SP_CM01
!
! VAR V_out= 8.0000
! VAR I_out= 19.9950
! VAR V_in= 0.8266
! VAR I_in= 0.2168
! Device data file deembeded for feedlines and parallel
! Original file: \03 Spar\BFU520A_APG2013_30_A05_08p0V_020mA_SP_CM01_R.s2p
! Feed-files: PR017V01_150413_Feed1.s2p, PR017V01_150413_Feed2.s2p
! Parallel-file PR017V01_150413_Par.s2p
# MHz S MA R 50
!  Freq-MHz   S11-mag  S11-arg    S21-mag  S21-arg    S12-mag  S12-arg    S22-mag  S22-arg
         40   0.54458   -17.08     34.721   163.79  0.0061906    83.61    0.95882    -8.99
         50   0.53201   -21.34     33.925   160.18  0.0076653    81.71    0.94296   -11.16
         60   0.51988   -25.13     33.138   156.42  0.0091139    80.46    0.92721   -13.05
         70     0.508   -28.93     32.369   153.25   0.010463    79.18    0.90935   -14.82
         80    0.4938   -32.66     31.541   149.89   0.011749    78.09    0.89039   -16.50
         90   0.47802   -35.94     30.539   146.77   0.012952    77.13    0.86993   -17.96
        100   0.46432   -39.11     29.622   143.98   0.014147    76.38    0.84999   -19.28
        120   0.43422   -45.32     27.849   138.70   0.016364    75.01    0.81112   -21.50
        140   0.40699   -50.68     26.032   134.14   0.018431    74.11    0.77403   -23.20
        160   0.37988   -55.64     24.294   130.05   0.020442    73.33    0.74027   -24.52
        180   0.35564   -60.14     22.743   126.48   0.022312    72.90    0.70885   -25.51
        200    0.3329   -64.13     21.304   123.27   0.024116    72.69    0.68171   -26.19
```

Рисунок 9 – Пример структуры файла s-параметров

4.3 Каскадное соединение четырёхполюсников

4.3.1 Общий подход: использование t-параметров

Даны N четырёхполюсников с S-матрицами S_I, S_{II}, ..., и требуется найти S-матрицу устройства, полученного путём их каскадного соединения S_Σ. Эта задача решается в три шага:

1. матрицы S_I, S_{II}, ... пересчитываются в T-матрицы T_I, T_{II}, ... (см. п. 4.3.2);
2. рассчитывается T-матрица каскадного соединения T_Σ:

$$T_\Sigma = \underbrace{T_I T_{II} \ldots}_{N} \tag{4.1}$$

3. по матрице T_Σ получают искомую матрицу S_Σ.

Примечание. Предполагается, что все матрицы измерены с использованием генераторов и нагрузок с одинаковыми импедансами $Z = R + j0$.

4.3.2 Перевод s-параметров в t-параметры и обратно

$$T = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -s_{22} \\ s_{11} & s_{12}s_{21} - s_{11}s_{22} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$S = \frac{1}{t_{11}} \begin{pmatrix} t_{21} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \\ 1 & -t_{12} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

4.3.3 Матрицы элементарных четырёхполюсников с сосредоточенными элементами

Для построения простейших цепей связи достаточно использовать только два элементарных четырёхполюсника:

- Четырёхполюсник, образованный включённым *последовательно* двухполюсником с импедансом Z:

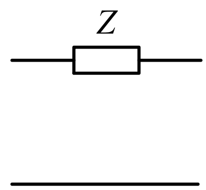

Рисунок 10 – Четырёхполюсник, состоящий из последовательно включённого двухполюсника

S-матрицу такого черырёхполюсника удобно записать с использованием нормированного импеданса $z = \frac{Z}{R}$ (см. примечание к п. 4.3.1):

$$S = \frac{1}{z+2}\begin{pmatrix} z & 2 \\ 2 & z \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

- Четырёхполюсник, образованный включённым *параллельно* двухполюсником с импедансом Z:

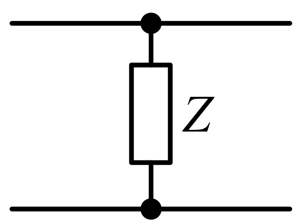

Рисунок 11 – Четырёхполюсник, состоящий из параллельно включённого двухполюсника

S-матрицу такого черырёхполюсника удобно записать с использованием нормированного адмитанца (комплексной проводимости) $y = \left(\frac{Z}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{z}$ (см. примечание к п. 4.3.1):

$$S = \frac{1}{y+2}\begin{pmatrix} -y & 2 \\ 2 & -y \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

5 Коррекция частотной характеристики

5.1 Введение

При построении широкополосного усилителя (ШПУ), чтобы компенсировать неравномерность частотной характеристики усиления активного элемента (АЭ) каскадно с ним включают цепи коррекции (ЦК). Это пассивные цепи, вносящие потери на частотах с избыточным усилением АЭ, так чтобы снизить неравномерность модуля коэффициента передачи ШПУ $\left|s_{21}^{\text{ШПУ}}\right|$.

ЦК бывают двух типов: ЦК с отражением (реактивные) и ЦК с поглощением (диссипативные). Ниже каждый тип будет проиллюстрирован одним примером. Про них и про другие цепи коррекции можно прочитать в следующей литературе:

1. Проектирование радиопередающих устройств СВЧ: учебное пособие для радиотехнических специальностей вузов / Г. М. Уткин, и др. – М. : Советское радио, 1979. – 320 с. (гл. 6, с. 81-92)

2. Линейные транзисторные усилители СВЧ / Н. З. Шварц. – М.: Советское радио, 1980. – 368 с. (гл. 8-9, с. 183-232)

3. Широкополосные радиопередающие устройства / О. В. Алексеев, А. А. Головков, В. В. Полевой, А. А. Соловьев; под ред. О. В. Алексеева. — М. : Связь, 1978. — 304 с. (с. 40-45, с. 221-233)

5.2 Коррекция частотной характеристики с отражением

5.2.1 Коррекция частотной характеристики с помощью малодобротного контура

Между генератором и нагрузкой последовательно включены L и C элементы (Рисунок 12).

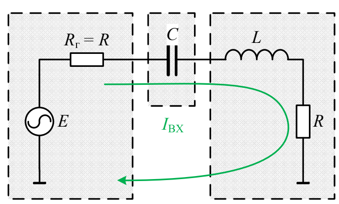

Рисунок 12 – Включение последовательного контура между генератором и нагрузкой

Эта цепь представляет собой последовательный колебательный контур с импедансом

$$Z = 2R\left(1 + j\xi\right), \tag{5.1}$$

где $\xi\left(f\right) = Q_{\text{кк}}\left(\frac{f}{f_{\text{р}}} - \frac{f_{\text{р}}}{f}\right)$, $Q_{\text{кк}} = \frac{\sqrt{L/C}}{2R}$ – добротность контура и $f_{\text{р}}$ – резонансная частота контура. Далее, $I_{\text{вх}}\left(f\right) = \frac{I_{max}}{\sqrt{1+\xi^2(f)}}$, где $I_{max} = I_{\text{вх}}\left(f_{\text{р}}\right)$ – максимальная амплитуда тока в контуре. Достижение I_{max} соответствует условию $\xi\left(f_{\text{р}}\right) = 0$. Настройкой контура можно добиться $I_{\text{вх}} = I_{max}$ на любой частоте внутри $[f_{\text{н}}, f_{\text{в}}]$ (Рисунок 13).

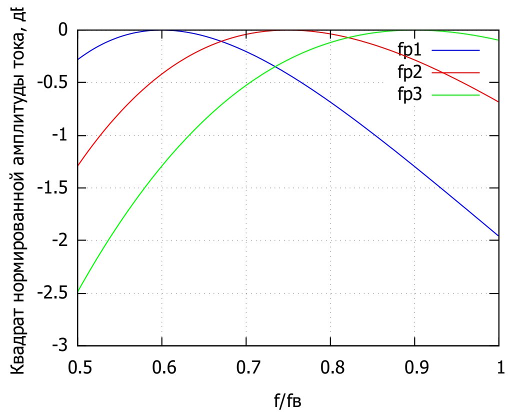

Рисунок 13 – Частотная характеристика $20\lg\left|\frac{I_{\text{вх}}}{I_{max}}\right|(f_{\text{р}1} < f_{\text{р}2} < f_{\text{р}3})$

Поскольку обсуждаемая цепь является частью ШПУ, в котором используется транзистор с убывающим обратно пропорционально частоте коэффициентом передачи тока, то стоит выбрать $f_{\text{р}} = f_{\text{в}}$, тем самым добившись максимального тока на входе АЭ. А затем подобрать $Q_{\text{кк}}$ так, чтобы скомпенсировать избыточное усиление на нижнем краю полосы пропускания.

Результирующий коэффициент передачи пропорционален произведению двух сомножителей:

- Множитель 1: $\left(\frac{f_{\text{в}}}{f}\right)^2$ описывает поведение частотной характеристики транзистора
- Множитель 2: $\frac{1}{1+\xi^2(f)}$ описывает поведение частотной характеристики ЦК (Рисунок 14)

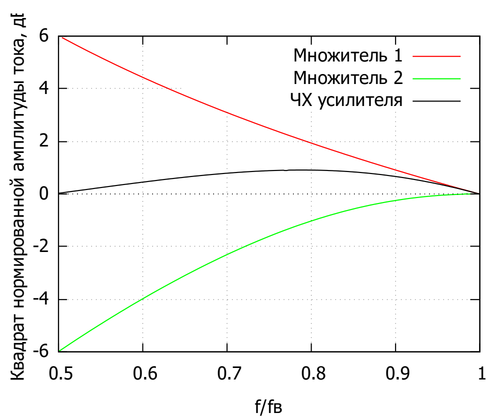

Рисунок 14 – Частотные характеристики нормированных коэффициентов передачи

При $f = f_{\text{в}}$ произведение сомножителей равно 1. Нужно найти $Q_{\text{кк}}$, которая обеспечит выполнение того же равенства при $f = f_{\text{н}}$: $\left(\frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}}\right)^2 \frac{1}{1+\xi^2(f_{\text{н}})} = 1$. Используя (5.1) получим: $\left(\frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}}\right)^2 = 1 + Q_{\text{кк}}^2\left(\frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{в}}} - \frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}}\right)^2$. Откуда следует искомое выражение

$$Q_{\text{кк}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}}\right)^{-2}}} \tag{5.2}$$

Например, для октавного ШПУ ($f_{\text{в}} = 2f_{\text{н}}$) $Q_{\text{кк}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$. Добротности, отклоняющиеся от этого значения, приводят к большей неравномерности частотной характеристики в октавной полосе частот (Рисунок 15).

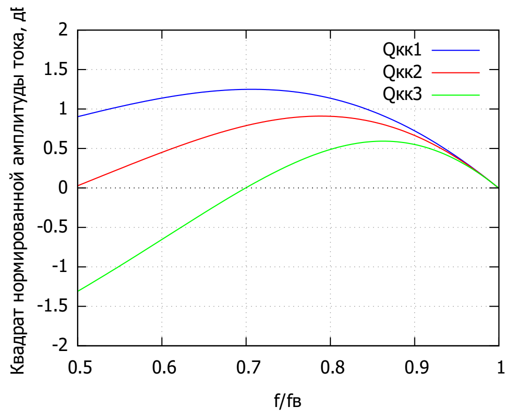

Рисунок 15 – Влияние величины добротности на выравнивание частотной характеристики: $Q_{кк1} < Q_{кк2} < Q_{кк3}$ ($Q_{кк2} = 1,15$)

5.3 Коррекция частотной характеристики с поглощением

5.3.1 Коррекция частотной характеристики с помощью цепи постоянного входного сопротивления

Цепь, рассмотреная в п.5.2.1, может быть дополнена таким образом, чтобы (а) её импеданс Z_1 со стороны генератора был частотно независимым и действительным (причём $Z_1 = R + j0$), и чтобы (б) $I_b\left(\omega_в\right) = I_1$ (Рисунок 16).

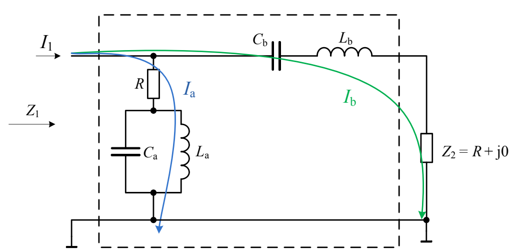

Рисунок 16 – Цепь постоянного входного сопротивления

Для этого требуется выполнение следующих двух условий

$$\omega_в = \frac{1}{\sqrt{L_a C_a}} = \frac{1}{\sqrt{L_b C_b}} \tag{5.3}$$

$$\sqrt{\frac{L_a}{C_a}} = \frac{R}{Q_b} \tag{5.4}$$

где $Q_b = \frac{\omega_в L_b}{R} = \frac{1}{R\omega_в C_b}$ – добротность контура, состоящего из элементов L_b, C_b и R.

Из (5.3), (5.4) можно получить формулы для расчёта элементов такой ЦК:

$$\begin{cases} L_a = \frac{R}{Q_b \omega_в} \\ C_a = \frac{Q_b}{R\omega_в} \\ L_b = \frac{Q_b R}{\omega_в} \\ C_b = \frac{1}{Q_b R \omega_в} \end{cases} \tag{5.5}$$

При подключении на входе такой ЦК генератора с $Z_\text{г} = R + j0$ будет обеспечена минимальная неравномерность частотной характеристики $\left|s_{21}^\text{ШПУ}\right|$ в полосе $[f_\text{н}; f_\text{в}]$ при условии, что $\left|s_{21}^\text{ШПУ}(f_\text{в})\right| = \left|s_{21}^\text{ШПУ}(f_\text{н})\right|$. Для выполнения этого условия Q_b должна быть

$$Q_b = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_\text{в}}{f_\text{н}}\right)^{-2}}} \tag{5.6}$$

Рассчитанная ЦК – это четырёхполюсник, включаемый каскадно с другими цепями усилителя (Рисунок 17).

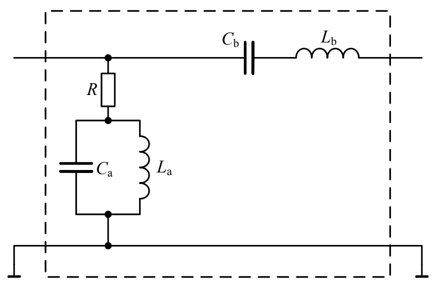

Рисунок 17 – Диссипативная цепь коррекции представляет собой четырёхполюсник, подключаемый каскадно с другими цепями усилителя

6 Устойчивость четырёхполюсника

При подключении ко входу и выходу четырёхполюсника некоторых импедансов с неотрицательными действительными частями могут возникнуть незатухающие колебания. То есть система из двух двухполюсников и одного четырёхполюсника *потеряет устойчивость* и образует *автогенератор*.

На *каждой* рассматриваемой частоте четырёхполюсник может быть либо *безусловно* устойчивым, либо *условно* устойчивым. В первом случае не существует пара импедансов, дополняющих четырёхполюсник до автогенератора. Во втором случае такие импедансы можно подобрать.

Подробнее об устойчивости четырёхполюсников, например, в:

Линейные транзисторные усилители СВЧ / Н. З. Шварц. – М.: Советское радио, 1980. – 368 с. (с.92-99)

6.1 Инвариант устойчивости четырёхполюсника по Роллетту (Rollett)

При исследовании характера устойчивости четырёхполюсника важную роль играет *инвариант* устойчивости четырёхполюсника K (часто называемый коэффициентом устойчивости четырёхполюсника):

$$K = \frac{1 + |\Delta|^2 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2}{2\,|s_{12}|\,|s_{21}|}, \tag{6.1}$$

где $\Delta = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}$ – детерминант матрицы рассеяния.

Для *безусловной* устойчивости четырёхполюсника на какой-либо *одной* частоте, необходимо и достаточно, чтобы на *этой* частоте выполнялись два условия:

$$\begin{cases} K > 1 \\ |\Delta| < 1 \end{cases} \tag{6.2}$$

Для безусловной устойчивости четырёхполюсника в полосе частот соотношения (6.2) должны быть выполнены во всей полосе.

Этот критерий впервые был введён в

J. Rollett, "Stability and Power-Gain Invariants of Linear Twoports," in IRE Transactions on Circuit Theory, vol. 9, no. 1, pp. 29-32, March 1962. Величина K была названа *инвариантом*, потому что остаётся неизменной при каскадном подключении к данному 4П произвольного 4П без потерь, то есть такого 4П, для которого верно

$$1 = |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2\,,$$

$$1 = |s_{22}|^2 + |s_{12}|^2\,.$$

6.2 Параметры μ и μ'

Позже (см. M. L. Edwards and J. H. Sinsky, "A new criterion for linear 2-port stability using a single geometrically derived parameter," in IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 40, no. 12, pp. 2303-2311, Dec. 1992) было подмечено, что можно характеризовать устойчивость 4П, используя лишь одно неравенство. Для этого вводятся два комплементарные параметра μ и μ' :

$$\mu = \frac{1 - |s_{11}|^2}{|s_{22} - s_{11}^*\Delta| + |s_{12}|\,|s_{21}|},$$

$$\mu' = \frac{1 - |s_{22}|^2}{|s_{11} - s_{22}^*\Delta| + |s_{12}|\,|s_{21}|}.$$

С помощью их условие безусловной устойчивости 4П выражается так:

$$\mu > 1,$$

или так

$$\mu' > 1.$$

Нужно подчеркнуть, что для безусловной устойчивости достаточно выполнения *любого* из этих неравенств.

7 Микрополосковые цепи. Отрезки линий передачи

7.1 Расчёт параметров микрополосковой линии и её отрезков

Для параметров микрополосковой линии не существует точных формул. Рассчитывать их следует по приближённым формулам, приведенным в литературе или используя компьютерные вычислительные средства.

7.1.1 Литература

1. Виноградов, А. Ю. Устройства СВЧ и малогабаритные антенны : учебное пособие / А. Ю. Виноградов, Р. В. Кабетов, А. М. Сомов; под редакцией А. М. Сомова. — Москва : Горячая линия-Телеком, 2016. — 444 с. (с. 235-251)

2. Справочник по расчету и проектированию СВЧ полосковых устройств/ Под ред. В.И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1982 г. – 328 с. (с. 62-66)

7.1.2 Компьютерные средства: "microstrip line calculator"

1. https://chemandy.com/calculators/microstrip-transmission-line-calculator-hartley27.htm

2. https://www.pasternack.com/t-calculator-microstrip.aspx

3. https://www.emtalk.com/mscalc.php

Такие калькуляторы также встроены в САПР (например, в QucsStudio: Tools/Line Calculation).

7.2 Основная формула для отрезка линии передачи (трансформация импеданса)

В основе построения цепей с распределёнными параметрами, лежат свойства отрезка линии передачи с волновым сопротивлением W, к одному концу которого подключён импеданс Z:

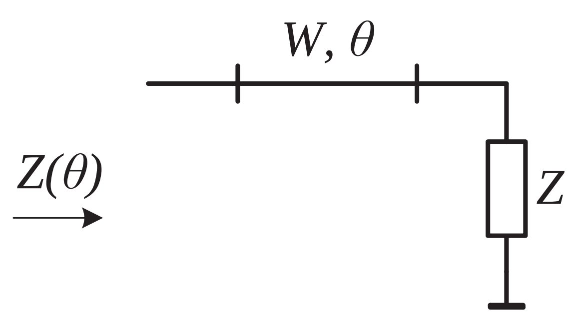

Рисунок 18 – Отрезок длинной линии (волновода)

У такого отрезка угловой электрической длины θ импеданс, измеренный со стороны другого конца, $Z\left(\theta\right)$ определяется по формуле \mathrm{Re}z

$$Z\left(\theta\right) = W\frac{Z + Wj\mathrm{tg}\theta}{W + Zj\mathrm{tg}\theta} \tag{7.1}$$

Угловая электрическая длина находится по формуле

$$\theta = 2\pi\frac{l}{\lambda}, \tag{7.2}$$

где l – длина отрезка линии передачи, λ – длина волны в линии передачи.

Для построения частотных характеристик цепей с распределёнными параметрами удобно пользоваться следующих соотношением

$$\theta = \theta_0 \frac{f}{f_0}, \tag{7.3}$$

где θ_0 – это угловая электрическая длина, соответствующая частоте f_0.

7.3 Замена цепей с сосредоточенными параметрами отрезками линий

С помощью микрополосковой линии легко осуществить параллельно включённнный импеданс. Поэтому на *одной частоте* параллельно включённую цепь с сосредоточенными параметрами можно заменить отрезком линии передачи. Но такая замена в *полосе частот* всегда приводит к неидентичным частотным характеристикам.

7.3.1 Замена параллельно включённой катушки индуктивности

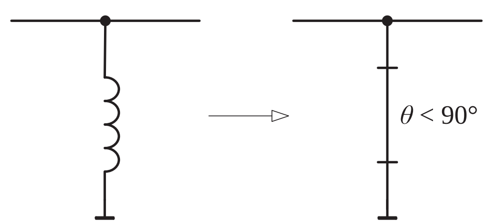

Рисунок 19 – Замена параллельно включённой индуктивности с помощью отрезка длинной линии

$$Z(\theta) = Wj\text{tg}\theta \tag{7.4}$$

7.3.2 Замена параллельно включённого конденсатора

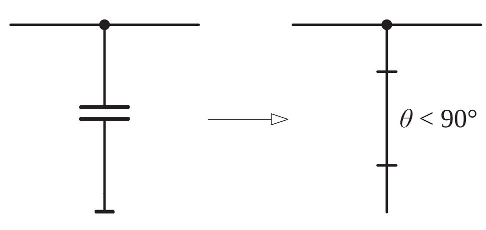

Рисунок 20 – Замена параллельно включённой индуктивности с помощью отрезка длинной линии

$$Z(\theta) = \frac{W}{j\text{tg}\theta} \tag{7.5}$$

8 Аппроксимация частотных характеристик сосредоточенных цепей отрезками длинных линий

8.1 Последовательное включение отрезка длинной линии

В общем случае последовательное включение некоторого произвольного импеданса не может быть реализовано с помощью отрезков длинных линий. Поэтому замена последовательно включённых сосредоточенных элементов должна осуществляться с учётом особенностей той схемы, в которой эти элементы используются.

Такую замену следует осуществлять, используя трансформирующие свойства последовательно включённого отрезка длинной линии. Для описания этих свойств вводятся следующие обозначения:

$$\psi = \frac{W}{R_{\text{г}}} \tag{8.1}$$

$$\eta = \mathrm{tg}\theta \tag{8.2}$$

с учётом которых (7.1) примет новый вид. Если к одному концу отрезка длинной линии подключён импеданс $z_2 = \frac{Z_2}{R_{\text{г}}}$, то с другого его конца будет измеряться импеданс

$$z_\psi\left(\eta\right) = \frac{z_2 + \psi j\eta}{1 + z_2 \frac{j\eta}{\psi}} \tag{8.3}$$

При изменении η (а следовательно, и θ) точка в s-плоскости, соответствующая $z_\psi\left(\eta\right)$, будет описывать окружность C_ψ, центр которой лежит на действительной оси. При изменении ψ как радиус, так и положение центра этой окружности будут меняться (но центр остаётся на действительной оси). Все окружности этого семейства пересекаются в точке $s_2 = \frac{z_2-1}{z_2+1}$. Возрастанию θ соответствует движение по часовой стрелке в s-плоскости.

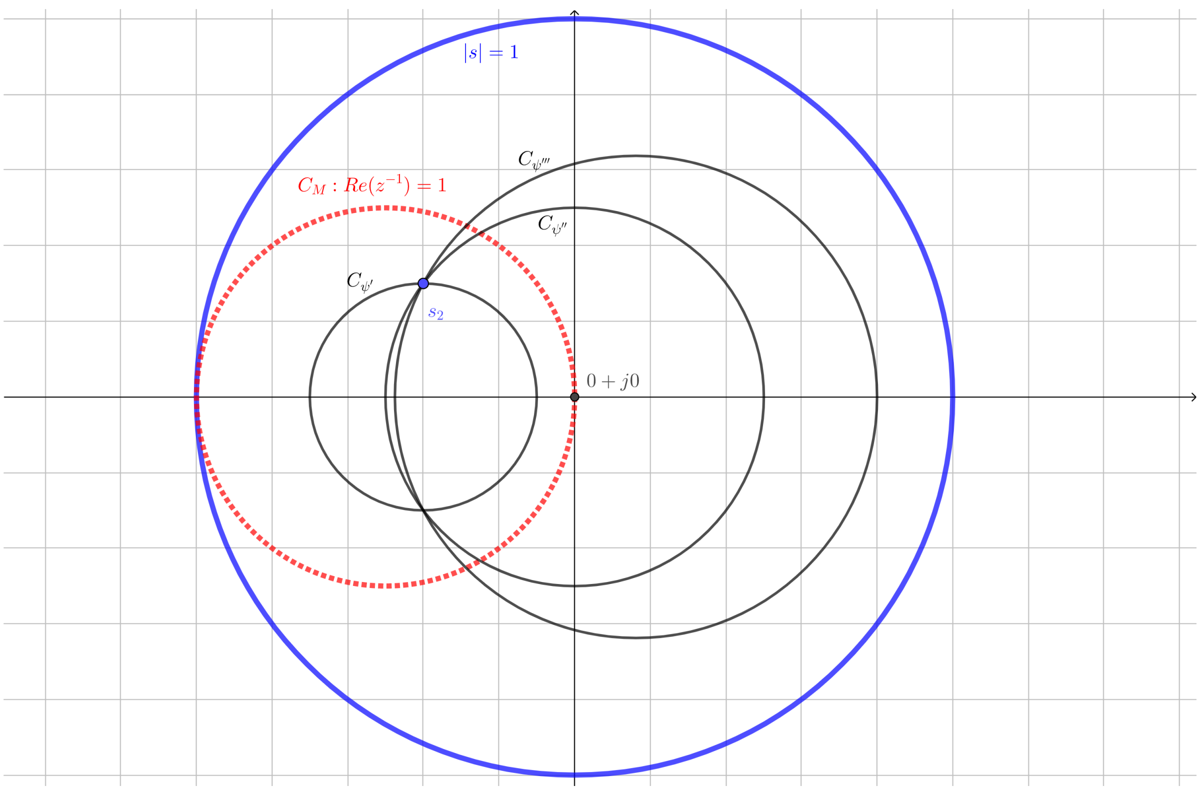

Рисунок 21 – Трансформация импеданса отрезками длинных линий с разными волновыми сопротивлениями: $\psi' < \psi'' < \psi'''$

8.1.1 Замена Г-образного четырёхполюсника (для схемы на рисунке 7)

Замена последовательного элемента Г-образного четырёхполюсника отрезком длинной линии должна осуществлять решение уравнения

$$Re\left(\frac{1}{z_\psi\left(\eta\right)}\right) = 1 \tag{8.4}$$

Графически решениям (8.4) соответствуют точки пересечения C_ψ с окружностью C_M, являющейся образом окружности импедансов, для которых $Re\left(z^{-1}\right) = 1$. В зависимости от значения ψ уравнение (8.4) может иметь разное число корней η_i: один, два или ни одного.

Если ограничиться значениями $\theta < 180°$ (такой выбор способствует расширению полосы частот согласования), то в случае одного корня последовательный элемент Г-образного четырёхполюсника можно заменить всего лишь одним отрезком длинной линии. При этом подключение параллельного элемента не требуется (поскольку окружности касаются друг друга в точке $0 + j0$).

Два корня соответствуют двум возможным заменам последовательного элемента (например, реактивности jX_b на рисунке 7). Они отличаются электрической длиной. В этом случае необходимо добавить параллельный элемент, чтобы добиться согласования (см. подраздел 7.3).

Отсутствие корней говорит о том, что Г-образный четырёхполюсник нельзя заменить одним или двумя отрезками длинной линии, так чтобы обеспечить согласование.

В случае двух корней нужно иметь в виду, что необходимый импеданс параллельного элемента **никогда** не совпадает с импедансом, рассчитанным для Г-образного четырёхполюсника на сосредоточенных элементах, что видно на рисунке 22.

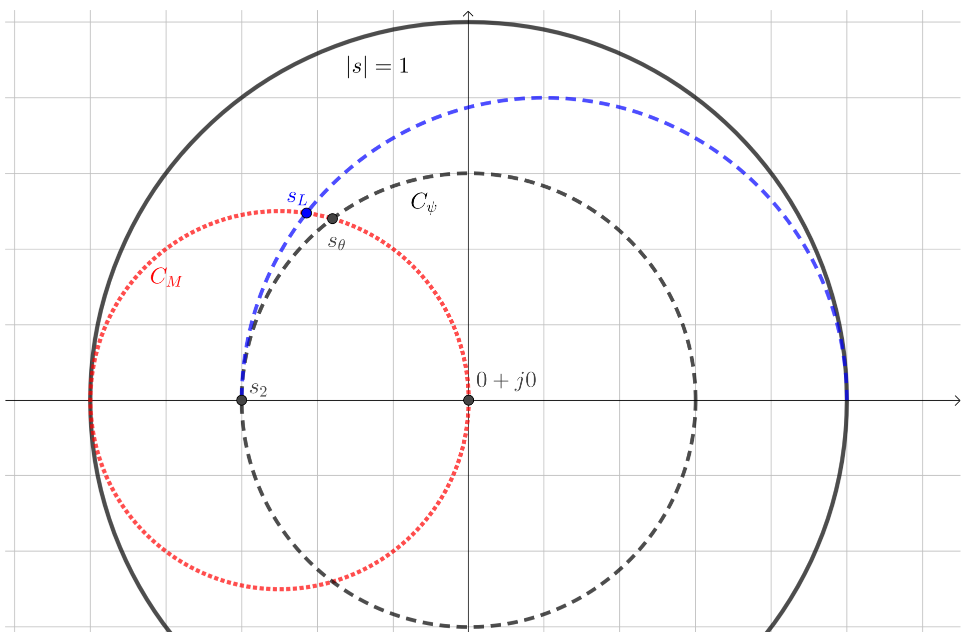

Рисунок 22 – Трансформация импеданса с помощью отрезка длинной линии

Действительно, если последовательная сосредоточенная индуктивность трансформирует s_2 в s_L, то отрезок длинной линии переводит s_2 в s_θ, всегда отличную от s_L. Следовательно, и импеданс параллельного элемента Г-звена, выполненного в виде отрезка линии примет новое значение.

8.1.2 Замена последовательного контура (для ЦК на рисунке 12)

Полуволновый отрезок линии ($\theta_в = 180°$) эквивалентен последовательному колебательному контуру в одной точке независимо от значения ψ. На s-плоскости это точка касания окружностей C_ψ и C_{LC}, где C_{LC} – окружность коэффициентов отражения от последовательного соединения L, C и $R = R_г$ (Рисунок 23).

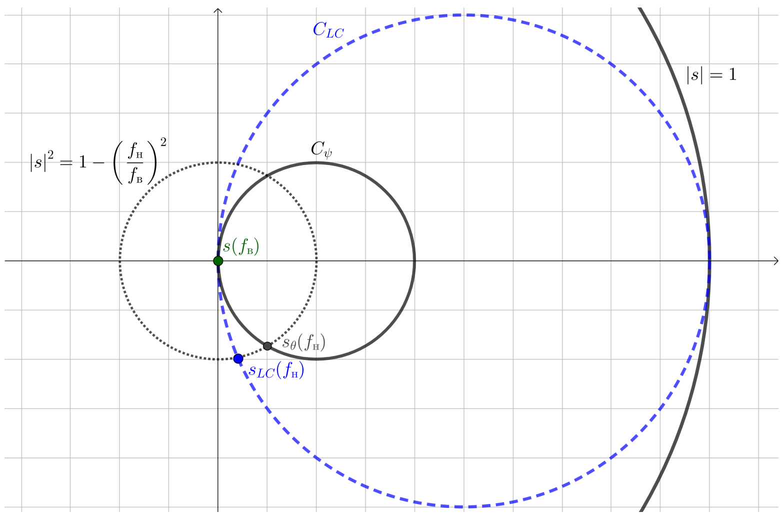

Рисунок 23 – ЦК с отражением: рассогласование на $f_н$ с помощью полуволнового отрезка длинной линии

Второе условие накладывается на частоте $f_н$:

$$1 - \left(\frac{f_н}{f_в}\right)^2 = \left|\frac{z_\psi(\eta_н) - 1}{z_\psi(\eta_н) + 1}\right|^2, \tag{8.5}$$

где $\eta_н = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_н}{f_в}\right)$. Корень этого уравнения ψ обеспечит потери рассогласования на $f_н$ распределённой ЦК те же, что и у сосредоточенной цепи.

8.1.3 Замена диссипативной цепи коррекции (для ЦК на рисунке 17)

Если, пользуясь результатом предыдущего пункта, взять полуволновый отрезок в качестве замены последовательного контура диссипативной ЦК (Рисунок 17), то его нормированное волновое сопротивление ψ_b находится из уравнения

$$\left(\frac{f_н}{f_в}\right)^2 = \frac{r_{\psi_b}}{r_{\psi_b}^2 + x_{\psi_b}^2}, \tag{8.6}$$

где $r_{\psi_b} + jx_{\psi_b} = z_{\psi_b}(\eta_н)$.

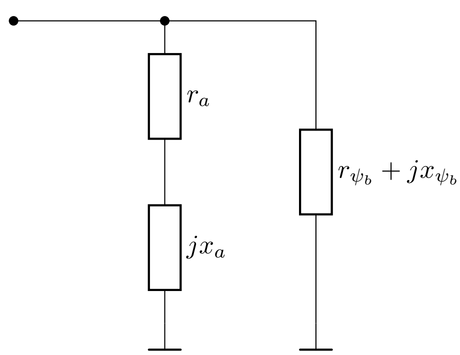

Рисунок 24 – ЦК с поглощением, нагруженная на $R = R_г$:

Чтобы цепь коррекции представляла собой цепь постоянного входного сопротивления, реактивный элемент jx_a заменяются разомкнутым полуволновым отрезком с нормированным волновым сопротивлением ψ_a, причём

$$\psi_a = \frac{1}{\psi_b - \psi_b^{-1}}. \tag{8.7}$$

Омическое сопротивление r_a получает новое значение по сравнению с цепью на сосредоточенных элементах:

$$r_a = \frac{1}{1-\psi_b^{-2}}. \tag{8.8}$$

Замена jx_a полуволновым отрезком имеет два недостатка по сравнению с параллельным контуром на рисунке 17. Во-первых, при убывании частоты, начиная со значения $\frac{f_в}{2}$, $\left|s_{21}^{ЦК}\right|$ начинает расти, то есть вне основной полосы пропускания каскад будет иметь значительное усиление. Во-вторых, в этом случае значительно снижается положительный эффект оказываемый r_a на устойчивость усилителя вне полосы $[f_н, f_в]$.

Чтобы в какой-то мере компенсировать эти недостатки, можно отказаться от строгого постоянства входного сопротивления во всей полосе частот и заменить jx_a параллельным соединением двух отрезков линий, короткозамкнутым и разомкнутым, имитирующими соответственно индуктивность и ёмкость параллельного контура.

8.2 S-матрица отрезка линии передачи

Матрица рассеяния отрезка линии угловой электрической длины θ, согласованного с генератором и нагрузкой ($\psi = 1$), имеет очень простой вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

Для случая $\psi \neq 1$ удобно ввести следующие обозначения:

$$h = e^{-j\theta} \tag{8.10}$$

$$\sigma = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \tag{8.11}$$

Этот приём способствует компактной записи матрицы рассеяния:

$$S = \frac{1}{1-h^2\sigma^2} \begin{pmatrix} \sigma\left(1-h^2\right) & h\left(1-\sigma^2\right) \\ h\left(1-\sigma^2\right) & \sigma\left(1-h^2\right) \end{pmatrix} \tag{8.12}$$