

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Matematika
Študijný odbor: 1114 Matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. Mgr. Radoslav Harman, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Róbert Druska
Študijný program: matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov
Row-column designs of statistical experiments

Anotácia: Prvým cieľom je analyzovať vlastnosti odhadov parametrov regresného modelu pre takzvaný riadkovo-stĺpcový experimentálny návrh. Druhým cieľom je navrhnúť algoritmus na výpočet optimálneho návrhov tohto typu, v závislosti na požiadavkách experimentátora.

Vedúci: doc. Mgr. Radoslav Harman, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 15.10.2019

Dátum schválenia: 18.10.2019

prof. RNDr. Ján Filo, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

TODO

Klíčové slova: lineární regresný model

Abstract

TODO

Keywords: linear regression

Obsah

Úvod	8
1 Lineárny regresný model	9
1.1 Metóda najmenších štvorcov	9
1.2 Maticová príprava	11
1.3 Metodika skúmania	12
2 Môj model	13
2.1 Odhadnuteľnosť h^Tb	15
Záver	19
Zoznam použitej literatúry	20
Príloha A	21

Úvod

TODO

1 Lineárny regresný model

Majme n nameraných štatistických jednotiek tvaru $\{y, x_1, \dots, x_p\}$, ktoré sme dostali ako výsledok experimentu. Lineárny regresný model predpokladá, že medzi jednotlivými prvkami y, x_1, \dots, x_p je lineárny vzťah. Motiváciou za lineárnym regresným modelom je spravidla aproximovať tento lineárny vzťah.

Aproximácia lineárneho vzťahu nám v praxi ponúkne mechanizmus, ktorým možno predikovať neznámu hodnotu y na základe známych hodnôt y, x_1, \dots, x_p , čo v reálnom živote predstavuje často sa vyskytujúci problém.

Označme teda daný lineárny vzťah medzi zložkami nameranej štatistickej jednotky:

$$y_i = b_0 + b_1x_{i1} + \dots + b_px_{ip} + e_i = b^T x_i + e_i$$

kde $\{y_i, x_i\}$ je i -ta nameraná jednotka, b je vektor lineárneho vzťahu a e_i je chyba merania.

Keď lineárne vzťahy pre každú z n nameraných jednotiek zapíšeme maticovo, dostaneme vzťah

$$y = Xb + e \tag{1}$$

kde $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ a

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

je matica tvaru $n \times p$. V praxi je b neznámy vektor, ktorý sa snažíme odhadnúť.

Na spočítanie odhadu b sa používajú rôzne metódy, najčastejšie napr. metóda najmenších štvorcov alebo metóda maximálnej vierohodnosti.

1.1 Metóda najmenších štvorcov

Metódou najmenších štvorcov vypočítame odhad \hat{b} parametra b nasledovne:

$$\hat{b} = \underset{b \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} (y - Xb)^T C (y - Xb) = \underset{b \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|y - Xb\|_{C^{-1}}^2$$

kde C je nejaká kladne definitná matica. Ak $C = I$, potom minimalizujeme výraz $\|y - Xb\|_I^2 = \|y - Xb\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - X_i \cdot b)^2$, kde X_i značí i -ty riadok matice X . V našej práci budeme predpokladať homogenitu chýb, čo v praxi znamená, že skutočne budeme môcť dosadiť $C = I$. Preto maticu C v ďalšom opise teórie spomínať nebudeme.

Geometricky metódu najmenších štvorcov možno interpretovať ako projekciu vektora y na stĺpcový priestor matice X . Hľadáme teda taký vektor \hat{b} , pre ktorý platí $X\hat{b} = Py$, kde P je matica ortogonálnej projekcie na stĺpcový priestor X . Z teórie lineárnej algebry vieme, že $P = X(X^T X)^- X^T$, kde znamienko $-$ označuje g -inverziu. (g -inverziou matice A je taká matica A^- , pre ktorú platí $AA^-A = A$).

Odhad \hat{b} parametra b je teda riešením rovnice

$$Xb = X(X^T X)^- X^T y \quad (2)$$

Toto riešenie spočítame ako:

$$\hat{b} = (X^T X)^- X^T y$$

kde použitá g -inverzia je ľubovoľná.

Z uvedeného vyplýva, že v prípade regulárnosti X je odhad \hat{b} jednoznačný. V našej práci budeme skúmať matice (modely) X , ktoré nie sú regulárne, takže jednoznačný odhad \hat{b} nebudeme schopní nájsť (čo v konečnom dôsledku ani nie je naším záujmom). Budeme odhadovať lineárnu funkciu zložiek vektora b , konkrétne $h^T b = h_1 b_1 + \dots + h_p b_p$, ktorá býva odhadnuteľná aj v prípade singularity X , ak vektor h spĺňa určité podmienky. Je niekoľko ekvivalentných podmienok, ktoré stačia na to, aby $h^T b$ bolo odhadnuteľné. Z nich spomenieme jednu v nasledovnej vete, ktorú použijeme neskôr v našej práci.

Veta 1.1. *$h^T b$ je odhadnuteľné, ak platí nasledovné ekvivalentné podmienky:*

1. *pre ľubovoľné riešenia b^* a b^{**} rovnice (2) platí $h^T b^* = h^T b^{**}$*
2. *$h \in \mathcal{M}(X^T)$*
3. *$h \in \mathcal{M}(X^T X)$,*

kde \mathcal{M} označuje stĺpcový priestor matice.

Ak h patrí do riadkového priestoru matice X , potom existuje také u , že $h = X^T u$. Potom pre jednoznačný odhad $h^T \hat{b}$ vektora $h^T b$ platí:

$$h^T \hat{b} = u^T X \hat{b} = u^T P y = u^T X (X^T X)^- X^T y$$

Výsledok predchádzajúcej vety je dôležitý pre našu prácu, pretože nebudeme skúmať odhady b , ale odhady niektorých lineárnych kombinácií zložiek vektora b , konkrétne napr. rozdiely medzi parametrami.

Odhad \hat{b} parametra b , ako aj odhad $h^T \hat{b}$ parametra $h^T b$, sú lineárne nevychýlené odhady, ktorým prislúcha disperzia (TODO: popremýšľaj, či treba bližšie opísať lineárny nevychýlený odhad). Neskôr v našej práci budeme hľadať také modely X , pri ktorých je disperzia odhadov b či $h^T b$ najmenšia možná, čo nám dá najlepší lineárny nevychýlený odhad. Ak nami navrhované modely X budú opisovať ten istý experiment, ten model X , pre ktorý disperzia odhadu $h^T b$ bude najmenšia, bude svojím spôsobom optimálny.

K nájdeniu optimálneho modelu X nám posluží Gaussova-Markovova veta, ktorá určuje minimálnu možnú disperziu odhadu $h^T b$.

Veta 1.2. (*Gaussova-Markovova*) *Nech h je z riadkového priestoru X . Potom minimálna možná disperzia lineárneho nevychýleného odhadu $h^T b$ je*

$$m = \text{Var}[h^T b] = h^T M^- h$$

kde $M = X^T X$ je informačná matica parametra b a M^- je jej ľubovoľná g -inverzia.

1.2 Maticová príprava

V našej práci budeme často pracovať s poznatkami z lineárnej algebry, preto v krátkosti zhrnieme niektoré najdôležitejšie z nich.

Definícia 1.3. *Nech A je ľubovoľná matica. Potom matica A^- také, že*

$$A A^- A = A$$

sa nazýva g -inverzia (alebo pseudoinverzia) matice A .

Poznámka: Ak A^{-1} neexistuje, tak pre maticu A existuje nekonečný počet g -inverzií.

Pseudoinverzie použijeme neskôr v našej práci, keď budeme skúmať, či vektor patrí do stĺpcového priestoru matice. Na to nám posluží nasledovná veta.

Veta 1.4. *Nech rovnica $Ax = y$ má riešenie a nech A^- je ľubovoľná g -inverzia. Potom A^-y je riešením tejto rovnice.*

Dôkaz: Keďže $Ax = y$ má riešenie, tak existuje také x_0 , že $Ax_0 = y$. Potom

$$A(A^-y) = A(A^-Ax_0) = Ax_0 = y$$

1.3 Metodika skúmania

Cieľom nášho skúmania bude nájsť ideálnu maticu vstupu do experimentu (konkrétny problém popíšeme v nasledujúcej kapitole). Pokúsime sa vysloviť závery pre všeobecný prípad matice $m \times n$, avšak pre istý prvotný náhľad do problematiky problém popíšeme a preskúmame na menších rozmeroch, konkrétne do rozmeru, do ktorého nám to umožní výpočtová technika. Pracovať budeme s programovacím jazykom *python*.

Od „preskúmania situácie“ do istého rozmeru si sľubujeme dôležité náhľady, ktoré nám umožnia vysloviť závery a hypotézy pre všeobecný prípad $m \times n$. Tie sa následne pokúsime dokázať matematickými metódami.

2 Môj model

Cieľom tejto práce je skúmať experiment reprezentovaný binárnou maticou. Možná reprezentácia nášho modelu pri matici rozmeru $m \times n$ je takáto:

Uvažujeme model s dvomi kvalitatívnymi faktormi A a B , pričom faktor A má m úrovní a faktor B n úrovní. Pre každú kombináciu faktorov experimentátor zvolí jedno z dvojice ošetrení (angl. treatment). Budeme uvažovať len aditívny model bez interakcií.

(Harmanov text == TODO: prepísať) Napríklad faktor A môže označovať dobrovoľníka (t.j. máme m dobrovoľníkov) a faktor B účinnú látku, ktorú nazveme liečivo (t.j. máme n liečiv). Ošetrovanie 0 reprezentuje podanie liečiva orálnym spôsobom a ošetrovanie 1 vnútrožilne). Účinok, ktorý po čase nameriame na dobrovoľníkovi, závisí aditívne od efektu samotného dobrovoľníka (jeho predispozícií), efektu liečiva a efektu ošetrovania. Všetky tieto efekty uvažujeme ako neznáme parametre modelu.

Návrh teda možno reprezentovať binárnou maticou (alebo bipartitným grafom, čo opíšeme neskôršie v našej práci).

Cieľom experimentu je odhadnúť rozdiel medzi dvoma efektmi (treatmentami). Cieľom hľadania optimálneho modelu je nájsť taký návrh, pri ktorom rozptyl Gauss-Markovovho odhadu rozdielu medzi efektmi dvojice ošetrení (t.j. odhadu kontrastu ošetrení) bude čo najmenší. (Použijeme pri tom Gaussovu-Markovovu vetu z predošlej kapitoly.)

Pre maticu typu $m \times n$ dostaneme teda mn vzťahov tvaru:

$$y_{ij} = a_i + b_j + t + e_{ij}$$

$i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; t je t_0 alebo t_1 podľa hodnoty na ij -tej pozícii matice a e_{ij} je chyba. Budeme odhadovať rozdiel medzi t_0 a t_1 .

Z návrhu modelu v podobe binárnej matice tvaru $m \times n$ vytvoríme lineárny regresný model s maticou tvaru $mn \times (m+n+2)$, pretože máme mn meraní závislých od $m+n+2$ premenných.

Príklad:

Maticu návrhu experimentu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

prepíšeme ako (TODO: popíš tými strapatými zátvorkami čo znamená čo):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Označme vo všeobecnosti maticu modelu (3) B a maticu lineárneho zobrazenia (4) X . Predpokladáme lineárne vzťahy, preto dostávame lineárnu regresiu

$$y = Xb + e$$

kde y je vektor dát nameraných v experimente, b je vektor neznámych koeficientov a $e = (e_{11}, e_{12}, e_{13}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})^T$ je vektor chýb merania. Uvedomme si, že v našej práci nebudeme pracovať s konkrétnym vektorom y ; snažíme sa totiž navrhnúť maticu modelu B (a z nej vyplývajúcu maticu X) ešte pred tým, než experiment vykonáme.

Naším cieľom teraz bude odhadnúť rozdiel medzi efektmi t_0 a t_1 , resp. zistiť, aká môže byť disperzia tohto odhadu pri danej matici návrhu B . Modely, pre ktoré bude možná disperzia najmenšia, budeme považovať za optimálne.

V danej lineárnej regresii $y = Xb + e$ teda nebudeme odhadovať celý vektor b , ale len jeho lineárnu kombináciu $h^T b$, kde h je vektor rozmeru $m + n + 2$, ktorý má na $m + n$ miestach 0 a na zvyšných dvoch miestach +1 a -1, ktoré zodpovedajú efektom t_0 a t_1 . Z algoritmu, ktorým sme z matice návrhu B vytvorili maticu lineárnej regresie X , vyplýva, že vektor h má tvar $(0, 0, 0, \dots, +1, -1)^T$.

Na zistenie, či $h^T b$ je odhadnuteľné, použijeme vetu (1.1), a na následné nájdenie minimálneho rozptylu Gauss-Markovovho odhadu rozdielu medzi efektmi použijeme Gaussovu-Markovovu vetu (1.2).

2.1 Odhadnuteľnosť $h^T b$

Pokúsime sa preskúmať, kedy matica návrhu umožňuje odhadnuteľnosť hodnoty $h^T b$ pre vyššie spomenuté h . Situáciu preskúmame do rozmeru 4×5 a na základe našich zistení vyslovíme hypotézu pre všeobecný prípad $m \times n$.

Postupovať budeme nasledovne: vyberieme si malý rozmer a pre všetky matice daného rozmeru zistíme, či $h^T b$ bude alebo nebude odhadnuteľné, a to nasledovným spôsobom. Z danej matice návrhu B vytvoríme maticu lineárnej regresie X spôsobom spomenutým vyššie. Hodnota $h^T b$ bude na základe vety (1.1) odhadnuteľná práve vtedy, keď vektor $h = (0, 0, 0, \dots, +1, -1)^T$ patrí do stĺpcového priestoru matice $X^T X$.

Označme $M = X^T X$, túto maticu budeme nazývať informačnou maticou. Ak h patrí do stĺpcového priestoru M , potom existuje taký vektor v , že $Mv = h$. Na základe vety (1.4) vieme, že ak toto riešenie existuje, tak sa rovná $M^- h$, pričom zvolená g -inverzia môže byť ľubovoľná. Preto na zistenie, či h patrí do stĺpcového priestoru $M = X^T X$ stačí overiť platnosť rovnosti $M(M^- h) = h$.

Demonštrujme algoritmus na maticiach rozmeru 3×3 . Existuje $2^9 = 512$ binárnych matíc typu 3×3 , a keď sme na nich rozbehli daný algoritmus, dospeli sme k zisteniu, že pri 12 z nich hodnota $h^T b$ NIE JE odhadnuteľná. To znamená, že optimálne matice návrhu budeme hľadať v zvyšných 500 maticiach.

Ako vyzerajú matice, pri ktorých $h^T b$ nie je odhadnuteľné? Zoznam všetkých sa nachádza v Prílohe A, tu uvedieme 3 z nich:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Týmto spôsobom sme pri našom výskume získali zoznam matíc, pri ktorých $h^T b$ nie je odhadnuteľné, až do rozmeru 4×5 . Zoznam všetkých sa nachádza v GitHub repozitári spomenutom v úvode. Na základe podobnosti matíc daného typu sme prišli s nasledovnou hypotézou.

Hypotéza 2.1. $h^T b$ je odhadnuteľné práve vtedy, keď v matici návrhu B existuje aspoň jeden riadok a aspoň jeden stĺpec taký, ktorý má aspoň jednu 0 a aspoň jednu 1.

Dôkaz: Na základe vety (1.1) vieme, že $h^T b$ je odhadnuteľné práve vtedy, keď $h \in \mathcal{M}(X^T)$ (keď h patrí do riadkového priestoru X), preto s danými podmienkami môžeme pracovať ekvivalentne.

\Rightarrow Nech $h = (0, \dots, +1, -1) \in \mathcal{M}(X^T)$. Použijeme dôkaz sporom. Nech v matici B typu $m \times n$ neexistuje taký riadok, ktorý má aspoň jednu 0 a aspoň jednu 1, t. j. všetky riadky obsahujú buď samé 0 alebo samé 1. Ako vyzerá matica X ?

Pozrime sa na riadky matice X zodpovedajúce prvému riadku matice B . Sú to práve tie riadky, ktoré majú na prvej pozícii 1, pričom si uvedomme, že všetky ostatné riadky majú na prvej pozícii 0.

$$x_1 = (1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, 0),$$

$$x_2 = (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0, 1, 0),$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1, 1, 0)$$

Keďže $h \in \mathcal{M}(X^T)$, existuje taká lineárna kombinácia riadkov X , ktorá dokopy dáva vektor h . Aké môžu mať v tejto lineárnej kombinácii zastúpenie riadky x_1, \dots, x_n ? Označme postupne a_1, \dots, a_n koeficienty vektorov x_1, \dots, x_n v lineárnej kombinácii riadkov X , ktorá dáva vektor h . Keďže x_1, \dots, x_n sú jediné riadky matice X s 1 na prvej pozícii a vektor h má na prvej pozícii 0, musí platiť $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Z predpokladu, že každý z riadkov matice B obsahuje buď samé 0 alebo samé 1, vyplýva, že každý z vektorov x_1, \dots, x_n má rovnaké posledné dve hodnoty, a to buď $(0, 1)$ alebo $(1, 0)$. Z toho spolu s rovnosťou $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ vyplýva, že lineárna kombinácia $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ bude mať na posledných dvoch miestach hodnoty $(0, 0)$, a teda nijako "neprispeje" do vektoru h .

Analogicky môžeme postupovať pre všetky riadky matice B . Týmto spôsobom pokryjeme všetky riadky matice X , vďaka čomu dospejeme k záveru, že z riadkov X nie je možné lineárnou kombináciou zostrojiť vektor h . To nám dáva spor s predpokladom $h \in \mathcal{M}(X^T)$. Preto nemôže platiť, že všetky riadky matice B obsahujú buď samé 0

alebo samé 1, a platí opačné tvdenie, t.j v B existuje aspoň jeden riadok taký, ktorý obsahuje 0 aj 1.

Rovnakou úvahou pre stĺpce B dospejeme k záveru, že B musí takisto obsahovať aspoň jeden stĺpec obsahujúci 0 aj 1.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nech matica B je taká, že existuje aspoň jeden riadok a aspoň jeden stĺpec také, že majú 0 aj 1. Zostrojíme takú lineárnu kombináciu riadkov X , ktorá sa bude rovnať h .

Nech riadok, ktorý má 0 aj 1, je i -ty v poradí a stĺpec s rovnakou vlastnosťou je j -ty v poradí. Bez ujmy na všeobecnosti, nech na ij -tom mieste matice B sa nachádza 0, teda $B_{ij} = 0$.

Potom v i -tom riadku B sa určite nachádza hodnota $B_{ik} = 1$ a v j -tom stĺpci sa nachádza hodnota $B_{lj} = 1$, pričom, samozrejme, $k \neq j$ a $l \neq i$. Označme $x_{ij}, x_{ik}, x_{lj}, x_{lk}$ riadky matice X prislúchajúce prvkom $B_{ij}, B_{ik}, B_{lj}, B_{lk}$ matice B . Potom:

$$x_{ij} - x_{ik} - x_{lj} + x_{lk} = (0, 0, 0, \dots, 0, N_1, N_2)$$

je vektor, ktorý má na prvých $m+n$ miestach 0, a na posledných dvoch hodnoty N_1 a N_2 , ktoré zatiaľ necháme bokom. Prečo má daný vektor na prvých $m+n$ miestach 0? Vo všeobecnosti má riadok x_{rs} matice X prislúchajúci prvku B_{rs} matice B na prvých $m+n$ miestach dve 1, jednu prislúchajúcu riadku, druhú stĺpcu matice B . Konkrétne, riadok x_{rs} má 1 na r -tom mieste a $(m+s)$ -tom mieste.

Súčet $x_{ij} + x_{lk}$ má teda štyri jednotky na miestach $i, j, m+j, m+k$. Súčet $x_{ik} + x_{lj}$ má jednotky na tých istých miestach, preto $x_{ij} - x_{ik} - x_{lj} + x_{lk} = x_{ij} + x_{lk} - (x_{ik} + x_{lj})$ má na prvých $m+n$ miestach 0.

Takto to vyzerá, keď zanedbáme stĺpce so samými nulami:

$$\begin{aligned} &+(1, 0, 1, 0) \\ &-(1, 0, 0, 1) \\ &-(0, 1, 1, 0) \\ &+(0, 1, 0, 1) \\ &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Ako vyzerá chvost (N_1, N_2) ? Keďže $B_{ij} = 0$ a $B_{ik} = B_{lj} = 1$, výraz $x_{ij} - x_{ik} - x_{lj} + x_{lk}$ nám vytvorí chvost $(1, -2)$ (prípadne $(-2, 1)$, na tom ale nezáleží). Potom na základe

toho, či na mieste B_{lk} matice návrhu bola 0 alebo 1, nám výraz $x_{ij} - x_{ik} - x_{lj} + x_{lk}$ dá na posledných dvoch miestach $(2, -2)$ alebo $(1, -1)$. Vo všetkých prípadoch vektor h dostaneme ihneď, prípadne po pre násobení konštantou. Našli sme teda lineárnu kombináciu riadkov X , ktorá nám dala vektor h , preto $h \in \mathcal{M}(X^T)$. \square

Záver

TODO

Zoznam použitej literatúry

- [1] Pázman, A., Lacko, V.: *Prednášky z regresných modelov*, Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2012, 2015

Príloha A