

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Študijný program: Matematika  
Študijný odbor: 1114 Matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. Mgr. Radoslav Harman, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Róbert Druska  
**Študijný program:** matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Riadkovo-stĺpcové návrhy štatistických experimentov  
*Row-column designs of statistical experiments*

**Anotácia:** Prvým cieľom je analyzovať vlastnosti odhadov parametrov regresného modelu pre takzvaný riadkovo-stĺpcový experimentálny návrh. Druhým cieľom je navrhnúť algoritmus na výpočet optimálneho návrhov tohto typu, v závislosti na požiadavkách experimentátora.

**Vedúci:** doc. Mgr. Radoslav Harman, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
**Dátum zadania:** 15.10.2019

**Dátum schválenia:** 18.10.2019

prof. RNDr. Ján Filo, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** [nepovinné] Na tomto mieste môže byť vyjadrenie pod'akovania napr. vedúcemu práce resp. konzultantom za pripomienky a odbornú pomoc pri vypracovaní práce. Vyjadrenie pod'akovania v prípade využitia inej práce (pomoci) sa uskutočňuje formou citácie na konci hlavného textu práce a odkazy na citáciu sa musia uviesť aj na zodpovedajúcich miestach v texte.

*Možno tu však d'akovať konkrétnym osobám za pomoc pri vytlačení práce, za pomoc pri skontrolovaní pravopisu, za finálnu a morálnu podporu rodičom a pod. Vždy treba uviesť konkrétny druh pomoci, treba sa vyhnúť všeobecnému pod'akovaniu za pomoc osobám iným ako je vedúci práce. Budí to podozrenie, že ste prácu nevypracovali samostatne.*

*Príklad pod'akovania (K. Pokorná 2010):*

Touto cestou sa chcem pod'akovať svojej vedúcej bakalárskej práce Doc. RNDr. Margárete Halickej, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

## Abstrakt v štátnom jazyku

Abstrakt obsahuje informáciu o cieľoch práce, jej stručnom obsahu a v závere abstraktu sa charakterizuje splnenie cieľa, výsledky a význam celej práce. Súčasťou abstraktu je 3 - 5 kľúčových slov. Abstrakt sa píše súvisle ako jeden odsek a jeho rozsah je spravidla 100 až 500 slov.

*Abstraktu predchádza uvedenie mena autora, názov práce, typ práce, názov fakulty a katedry, meno vedúceho práce, mesto, rok, počet strán. Príklad abstraktu (upravené):*  
NOVÁK, Vladimír: Indexové stratégie pre dynamické a stochastické úlohy [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Peter Jacko, PhD., Bratislava, 2011, 38 s.

V našej práci sa zaoberáme Whittlovou metódou odvodenia indexových stratégií pre problémy formulované v prostredí Markovovských rozhodovacích procesov. Analyzujeme model pre rozvrhovanie úloh užívateľov viacerých tried, v ktorom užívatelia môžu aj odchádzať, ak ich úloha nie je ukončená včas. Naším cieľom je minimalizácia celkových nákladov a pokút za odchody užívateľov. Práca poskytuje analytické riešenie optimálnych stratégií pre prípady s 1 a 2 užívateľmi v systéme. Pre prípad s viacerými užívateľmi sme použitím posledných poznatkov z oblasti "Multiarmed restless bandit" odvodili novú jednoduchú stratégiu, označovanú ako AJN, pre systémy s povinným, aj bez povinného obsluhovania. Túto stratégiu navrhujeme používať aj v prípadoch s príchodmi užívateľov. Okrem toho poukazujeme aj na dôkladnú štúdiu numerických experimentov pre oba systémy, v ktorých porovnávame AJN indexovú stratégiu s určitými dvomi štandardnými stratégiami. Táto výpočtová štúdia naznačuje, že naša stratégia je takmer vždy lepšia, alebo porovnateľná s ostatnými stratégiami a často býva optimálna.

**Kľúčové slová:** Markovovské rozhodovacie procesy, Multi-armed restless bandit, Whittlov index, Indexové stratégie, Bellmanova rovnica

## Abstract

Text abstraktu v svetovom jazyku je potrebný pre integráciu do medzinárodných informačných systémov (napr. The Network Digital Library of Theses and Dissertations).

*Príklad abstraktu (upravený):*

NOVÁK, Vladimír: Index Policies for Dynamic and Stochastic Problems [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Peter Jacko, PhD., Bratislava, 2011, 38p.

In our work we investigate the Whittle's index policy derivation framework in the Markov decision process environment. We analyze a model for the multi-class job scheduling for user with abandonment, with the objective of minimizing the total holding costs and abandonment penalties. The work provides analytical solution of an optimal index rule for the case in which there are 1 or 2 users in the system. For the case with more users we use recent results from the multi-armed restless bandits approach and derive a new simple index rule, denoted by AJN, for the idling and the non-idling system. This index rule is proposed to use also in the system with arrivals. We also report on an exhaustive study of numerical experiments for both systems, in which we compare AJN index rule with certain two standard rules. This computational study suggests that our rule is almost always superior or equivalent to the other rules, and it is often optimal.

**Keywords:** Markov Decision Process, Multi-armed Restless Bandit, Whittle Index, Index Policies, Bellman Equation

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Názov kapitoly</b>	<b>8</b>
1.1 Názov podkapitoly . . . . .	9
1.1.1 Názov Tretia úroveň . . . . .	10
<b>2 Príklad členenia kapitol</b>	<b>10</b>
2.1 Ilustrácie . . . . .	10
2.2 Tabuľky . . . . .	11
2.2.1 Rovnice, vzorce . . . . .	12
<b>Záver</b>	<b>14</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>15</b>
<b>Príloha A</b>	<b>16</b>

# Úvod

Hlavnú textovú časť záverečnej práce tvorí: úvod, jadro, záver, zoznam použitej literatúry.

V úvode autor stručne a výstižne charakterizuje stav poznania alebo praxe v oblasti, ktorá je predmetom záverečnej práce a oboznamuje čitateľa s významom, cieľmi a zámermi práce. Autor v úvode zdôrazňuje, prečo je práca dôležitá a prečo sa rozhodol spracovať danú tému.

Rozsah úvodu je 1 až 1,5 strany. Úvod spravidla obsahuje:

- vymedzenie problematiky BP v kontexte aplikácií matematiky;
- zdôvodnenie aktuálnosti danej témy;
- charakterizácia stavu poznania alebo praxe (odkazy na literatúru);
- nastolenie problémov, ktoré chce autor v BP riešiť;
- vytýčenie cieľov, ktoré majú byť v BP dosiahnuté;
- uvedenie použitých metód a postupov riešenia;
- stručný náčrt obsahu jednotlivých kapitol BP.

## 1 Názov kapitoly

Jadro je hlavná časť práce a jeho členenie je určené typom práce. Vo vedeckých a odborných prácach má jadro spravidla tieto hlavné časti: súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí,

- cieľ práce,
- metodika práce a metódy skúmania,
- výsledky práce,
- diskusia.



V časti Súčasný stav riešenej problematiky autor uvádza dostupné informácie a poznatky týkajúce sa danej témy. Zdrojom pre spracovanie sú aktuálne publikované práce domácich a zahraničných autorov. Podiel tejto časti práce má tvoriť približne 30 % Časť Cieľ práce jasne, výstižne a presne charakterizuje predmet riešenia. Súčasťou sú aj rozpracované čiastkové ciele, ktoré podmieňujú dosiahnutie cieľa hlavného.

Časť Metodika práce a metódy skúmania spravidla obsahuje:

- charakteristiku objektu skúmania,
- pracovné postupy,
- spôsob získavania údajov a ich zdroje,
- použité metódy vyhodnotenia a interpretácie výsledkov,
- štatistické metódy.

Výsledky práce a diskusia sú najvýznamnejšími časťami záverečnej práce. Výsledky (vlastné postoje alebo vlastné riešenie vecných problémov), ku ktorým autor dospel, sa musia logicky usporiadať a pri popisovaní sa musia dostatočne zhodnotiť. Zároveň sa komentujú všetky skutočnosti a poznatky v konfrontácii s výsledkami iných autorov. Ak je to vhodné, výsledky práce a diskusia môžu tvoriť aj jednu samostatnú časť a spoločne tvoria spravidla 30 až 40 % záverečnej práce.

*V prípade čisto teoretických matematických prác je členenie jadra práce určené povahou problematiky. Zvyčajne prvé kapitoly oboznamujú s pojmami a výsledkami nevyhnutnými na pochopenie problematiky, nasleduje súčasný stav problematiky, ktorý logicky vyúsťuje do podrobného formulovania cieľov práce. Ďalšie kapitoly obsahujú vlastné výsledky práce. Tieto majú byť formulované, popísané a odôvodnené tak, aby bolo možné ľahko overiť ich pravdivosť.*

## 1.1 Názov podkapitoly

Podkapitoly diplomovej práce slúžia na členenie textu bakalárskej práce s cieľom čo najväčšej prehľadnosti.

### 1.1.1 Názov Tretia úroveň

Editujte svoju prácu v kapitolách a podkapitolách. Čísla kapitol a podkapitol (druhej a tretej úrovne) sa citujú v texte práce takto:

... V kapitole 1 sme už uviedli, že ...; ... pozri 2.1 ... atď. ...

Odporúčaný rozsah bakalárskej práce je 30 až 40 strán (54 000 až 72 000 znakov vrátane medzier). Do tohto rozsahu sa počíta len hlavný text, t. j. úvod, kapitoly, záver a zoznam použitej literatúry. Dôležitejší ako rozsah práce je kvalita práce a úroveň jej spracovania. Pri písaní je dôležité dbať na vyváženosť (proporcionálnosť) jednotlivých častí práce.):

- úvod má spravidla 1 - 2 strany,
- teoreticko-metodologická časť tvorí spravidla jednu tretinu práce,
- ostatné kapitoly tvoria približne dve tretiny práce,
- záver má zvyčajne 1 - 2 strany.

## 2 Príklad členenia kapitol

V práci sa môžu vyskytovať okrem slovného textu aj informácie vyjadrené v obrazovej forme a symbolmi.

### 2.1 Ilustrácie

**Ilustrácie** sú obrázky obsahujúce **grafy, diagramy, mapy, schémy** a pod. Nie je potrebné rozlišovať rozličné typy ilustrácií, stačí, ak sa všetky označia ako „Obrázok“. Všetky ilustrácie musia byť očíslované súvislým radom číslíc v celej práci a musia mať titulky (názov obrázku) pri každom obrázku. Text titulu musí byť pochopiteľný aj bez kontextu. Majú sa zaradiť bezprostredne za textom, kde sa spomínajú po prvýkrát (najlepšie na tej istej strane). Obrázok by mal byť podľa možnosti centrováný. Pri odkazovaní na daný obrázok v texte treba použiť krížové odkazy na obrázok (napr. Obr. 1). Obrázky a tabuľky vkladáme v tejto šablóne takto:

Na obrázky v texte sa odvolávame pomocou 1 (teda `nref{}`).



**Obr. 1:** Tu je názov obrázku

Ak by ste prácu písali v angličtine použite príkaz Figure 1 (teda `\autoref{}`). Rovnako sa potom môžete odvolávať aj na tabuľky, či dokonca kapitoly a podkapitoly, ale potom je potrebné označovať kapitoly nasledovne:

`\section{Názov kapitoly}`

`\label{section:Nazovkapitoly}`

## 2.2 Tabuľky

Tabuľky prezentujú myšlienky a tvrdenia popisované v práci. Akýkoľvek tabuľkový materiál, ktorý sa skladá z viac než štyroch alebo piatich riadkov, by mal byť spracovaný do formy tabuľky Tab. 2. Popis a záhlavie tabuľky má byť zrozumiteľné samostatne bez odkazu na text. Záhlavia majú vyjadrovať druh veličiny a typy jednotiek vo forme „veličina/jednotka“, je potrebné používať rovnaké symboly a skratky ako v texte. Každá tabuľka musí mať poradové číslo a titulok, umiestnený zvyčajne nad tabuľkou. Tabuľka by mala mať rovnakú orientáciu, ako text práce.

**Tabuľka 1:** Názov tabuľky

	PP - 01	PP - 05
$C10^8(s^{-2})$	10,1	10,0
$t_010^{-14}(s)$	2,63	1,44

### 2.2.1 Rovnice, vzorce

$$a + b = c \tag{1}$$

$$a = c - d \tag{2}$$

Na rovnice sa odvolávame potom takto: Podľa rovnice (1) je ... a podľa (2) ...

Prípadne ak máme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a + b &= c \\ a &= c - d \end{aligned} \tag{3}$$

Potom sa môžeme odvolať na sústavu (3).

*Dodržiavame pravidlá slovenského pravopisu! V prípade, že neovládáte pravopis, dajte si ho niekomu skontrolovať! Najčastejšie chyby v sklonovaní slova: model Model, dva modely, ale v tomto modeli, o tomto modeli (spelček túto chybu neodhalí); Písanie veľkých a malých písmen v názvoch-nenázvoch: spoločná európska mena je euro (malé e).*

*Vzorce sú súčasťou gramatických viet a na takéto vety sa viažu pravidlá slovenského pravopisu. Týka sa to hlavne písania čiarok a bodky za vetou. Vyhýbame sa schematickému zápisu pomocou rozličných skratiek, symbolov implikácie, ekvivalencie a i. najmä v bežnom texte. Pripúšťa sa to v centrovaných vzorcoch, pokiaľ to slúži prehľadnosti zápisu. Zložitejšie matematické výrazy umiestňujeme vždy ako centrovaný výraz na nový riadok. Rovnice a vzorce čísloujeme. Uľahčuje to odvolávanie sa na konkrétne vzťahy nielen autorovi, ale aj oponentovi. Napr. (1),...(59), resp. (1.1), (1.2), (2.19), umiestňujeme na pravý okraj príslušného riadku.*

*Matematické vety označujeme ako Veta, Tvrdenie, Lema, Dôsledok a čísloujeme, napr. Veta 1, Veta 2, Dôsledok 1 a pod. Znenia viet sa píše kurzívou. Za vetou nasleduje dôkaz, alebo odkaz na dôkaz. Za dôkazom symbol ukončenia dôkazu: prázdny štvorček.*

*Používajte príkazy v nastavení dokumentu*

`\newtheorem{internal name}{external name}[in_counter]`

*Prostredie potom v texte (v dokumente) voláte nasledovne*

```
\begin{internal name}[nejaký text, ktorý môže špecifikovať názov]  
...  
\end{internal name}
```

## Záver

V závere je potrebné v stručnosti zhrnúť dosiahnuté výsledky vo vzťahu k stanoveným cieľom. Vzhľadom na to, že v práci už boli definované všetky potrebné pojmy, možno byť v závere omnoho konkrétnejší ako v úvode. Pri argumentovaní o splnení cieľov je žiaduce odkazovať na konkrétne očíslované alebo inak pomenované časti práce (odseky, algoritmy, metódy, vzorce, vzťahy, vety a ich dôkazy a pod.).

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000
- [2] Siebertová, Z.: *Prednášky z ekonometrie*, učebné texty, FMFI UK Bratislava, 2007, dostupné na internete (xx.xx.2017 - vložit' dátum stiahnutia z internetu): <http://www.defm.fmph.uniba.sk/ludia/siebertova/ekonometria2011.html>
- [3] Ševčovič D., Halická M., Brunovský, P.: *DEA analysis for a large structured bank branch network*, Central European Journal of Operational Research 9 (2001), 329–342, dostupné na internete (xx.xx.2017 - vložit' dátum stiahnutia z internetu): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl19.pdf>

# Príloha A

## Malá násobilka

$$1 \times 2 = 3 \tag{A.1}$$