

# Apuntes -Cinemática de Robots

Raúl

Israel

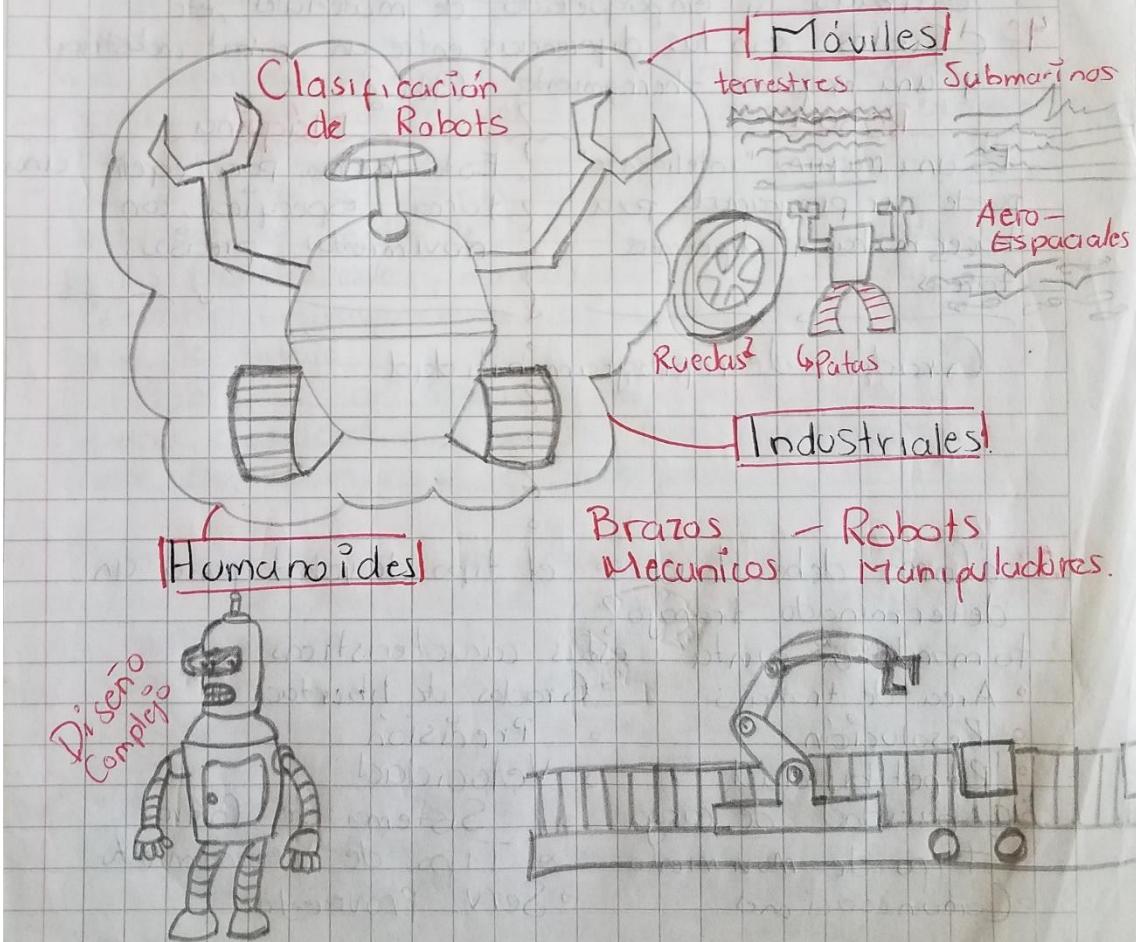
García

Barajas

UPZMG

García Barajas Raúl Israel Cinemática de Robots.

1. ¿Qué es un robot? Es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una variedad de tareas.
2. ¿Cuáles son los tipos de robots?



3º Mencione algunas aplicaciones típicas de un robot industrial

Pintado de carrocería automotriz, accesorios, cubetas, tinas, cajus, soldadura de punto y por arco en carrocerías automotrices y puertas y diversas piezas industriales, traslados de herramientas, estibado y empaquetado de materiales, etc.

4º ¿Cuáles son las diferencias entre un robot industrial y una máquina-herramienta CNC?

### ROBOT

Es una máquina "inteligente" que puede ser programada para hacer muchas y diferentes tareas

### Máquina

Está hecho para repetir una tarea específica, con movimientos precisos.

• Grado de reprogramabilidad

• Repetibilidad

• Precisión

5º ¿Cómo debe decidirse el tipo de robot para un determinado trabajo?

tomando en cuenta

estas características

- Área de trabajo
- Resolución
- Repetibilidad
- Capacidad de carga
- Tipo de movimiento
- Comunicaciones
- Gradas de libertad
- Precisión
- Velocidad
- Sistema de control
- Tipo de aceleramiento
- Serv. Proveedor

• Componentes

• Libro de manual

• Cabecera de cable

• Cabecera de bobina

• Fijación

• Vida útil

• Zona blanca

• Libro de accesorios

• Diagrama de fuga

• Ajustes

• Fijación

• Vida útil



11º ¿Qué industria es considerada el usuario más grande de robots en el mundo de tipo serial?

Industria Automotriz

12º ¿Cuáles son las áreas nuevas de aplicaciones de robots?

- Control de calidad
- Aplicación de sellantes y adhesivos
- Inspección
- Construcción
- Doméstico
- Espacio
- Medicina
- Minería
- Seguridad y Vigilancia
- Industria Nuclear
- Aplicación de materiales

Resumen cap. 3 de Fundamentos de Robótica

Mapa conceptual

14 - Enero - 2019

García Barajas  
Raúl Israel.  
Cinematografía de  
Robots.

Fecha:

Herramientas matemáticas para la localización espacial.

Representación de la posición

La forma más intuitiva y utilizada para especificar la localización de un punto son coordenadas cartesianas.

Sistema cartesiano de referencia: Se definen mediante ejes perpendiculares con origen definido. Si se trabaja 2D se determinan 2 vectores coordenados y en 3D son 3 vectores.

Coordenadas cartesianas: Son las proyecciones de un vector "p", siendo  $(x, y)$  en 2D y  $(x, y, z)$  en 3D.

Coordenadas polares: Se utilizan para representar una localización mediante  $(r, \theta)$ , donde

es la distancia de origen al extremo del vector  $p$  y  $\theta$  es el ángulo formado en el eje X. Para 3D, se utiliza  $(r, \theta, \phi)$ .

Representación de la orientación

Un objeto además de su posición, también debe tener definida una orientación.

Para poder definir la orientación, podemos utilizar:

Matrices de rotación: Es el método más extendido. Se utilizan sistemas de matrices así como transformaciones y equivalencias de las mismas.

Ángulos de Euler: A diferencia del anterior, donde son necesarios 9 elementos, con este método solo es necesario definir 3.

Se utilizan 3 ángulos:  $\theta, \phi, \psi$

Matrices de transformación homogénea

Se utilizan para representar conjuntamente posición - orientación.

Coordenadas y matrices homogéneas: Se hace dimensional de tal manera representado como:

Cuaternios: Se consigue por 4 componentes ( $q_0, q_1, q_2, q_3$ ) que presentan la base en una base ( $e_i, i = 1, 2, 3$ ).

Par de rotación: Se define mediante el uso de un vector  $K(K_x, K_y, K_z)$  girando sobre un eje.

XY

DX

min. "O"

sto

OZ

y

cual.

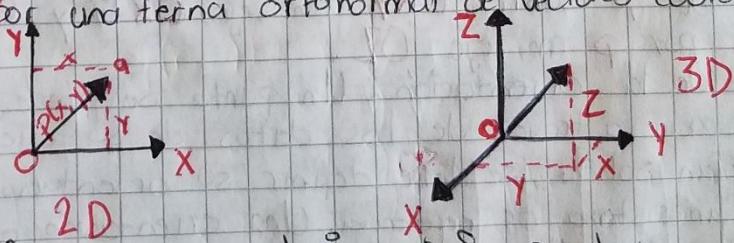
Uso de un sistema (n+1) que el vector  $p(x, y, z)$ ,  $p(w_x, w_y, w_z, w)$ , donde representa un factor escalar. Estas coordenadas son representante el vector columna (matriz).



• Herramientas matemáticas para la localización espacial.  
La manipulación de piezas llevada a cabo por un robot implica el movimiento espacial de su extremo. Para que un robot pueda recoger una pieza, es necesario conocer la posición y orientación de ésta con respecto a la base del robot. Es necesario contar con herramientas matemáticas que nos permitan especificar la posición y orientación en el espacio de cualquier objeto.

- Representación de la posición: La forma más intuitiva y utilizada de especificar la posición de un punto, son coordenadas cartesianas. Además, existen otros 2 métodos igualmente válidos: coordenadas polares para 2D y cilíndricas para espacios 3D.

-- Sistema cartesiano de referencia: Normalmente los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre sí, con un origen definido. Estos se denominan sistemas cartesianos, y en el caso de trabajar en el plano (2 dimensiones), el sistema de referencia  $OXY$  correspondiente queda definido por dos vectores coordenados  $OX$  y  $OY$  perpendiculares entre sí y un punto de intersección en común. Si se trabaja en 3D, el sistema cartesiano  $OXYZ$  está compuesto por una terna ortonormal de vectores coordinados  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ .



--- Coordenadas cartesianas: Si se trabaja en un plano con un sistema coordenado  $OXY$ , un punto  $A$  vendrá expresado por las componentes  $(x, y)$  correspondientes. Este punto

por los componentes  $(x, y)$  correspondientes. Este punto se moverá con respecto al eje X, si se desplaza en la dirección Y. --- Componentes cartesianas: Si se desplaza en la dirección X, se moverá con respecto al eje Y.

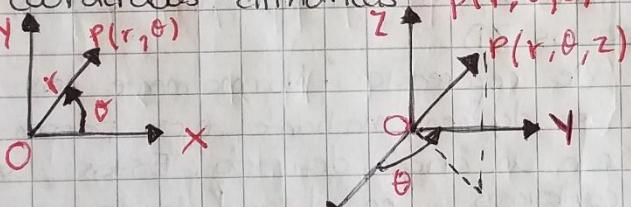
3D



Tiene asociado un vector  $\vec{P}(x,y)$  que va desde el origen  $O$  del sistema hasta el punto  $a \cdot P$ , estando caracterizado por  $(x,y)$  denominadas "coordenadas cartesianas" del vector y son las proyecciones del vector  $\vec{P}$  sobre ejes  $OX$  y  $OY$ .  
 Si se trabaja en 3D  $OXYZ$ ,  $P$  estará definido por  $(x,y,z)$ .

--- Coordenadas Polares y Cilíndricas: En el plano se puede localizar un punto o vector  $P$  respecto un sistema de ejes  $Oxy$  utilizando -coordenadas polares-  $p(r, \theta)$ ,  $r$ , representa la distancia desde el origen  $O$  hasta el extremo del vector  $P$  y  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $P$  con el eje.

Si, se trabaja en 3D, el vector  $\vec{P}$  se puede definir con coordenadas cilíndricas  $p(r, \theta, z)$



• Coordenadas esféricas: Este tipo de coordenadas también se pueden utilizar para localizar un vector en un espacio 3D. Utilizando  $OXYZ$ ,  $P$ , tendríamos como referencia  $(r, \theta, \phi)$ , donde  $r$  = distancia de origen  $O$  a extremo de  $P$ ;  $\theta$  = ángulo formado por la proyección de  $P$  sobre  $OXY$  con eje  $OX$ ; y  $\phi$  = ángulo formado por  $P$  con eje  $OZ$ .

Representación de la orientación: Un punto se puede definir en el espacio a través de los datos de su posición. Para el caso de un sólido, se debe definir su orientación con respecto a un sistema de referencia. Una orientación en el espacio 3D viene definida por tres grados de libertad.

-- Matrices de Rotación: Son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido a la comodidad de las matrices.

MORFOLÓGIA

Suponiendo tener 2 sistemas en el plano  $OXY$  y  $OUV$  con mismo origen  $O$ , siendo  $OXY$  el de referencia fijo y  $OUV$  el móvil solidario al objeto. Los vectores unitarios de los ejes coordenados de  $OXY$  son  $i_x, j_y$ , mientras de  $OUV$  son  $i_u, j_v$ .

El vector  $P$  se puede representar en ambos sistemas como:

$$P_{OXY} = [P_x, P_y]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y$$

$$P_{OUV} = [P_u, P_v]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v$$

Con transformaciones se puede llegar a la sig.

equivalencia:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \end{bmatrix}$$

Donde:

$$R = \begin{bmatrix} i_x & i_u \\ j_y & j_v \end{bmatrix}$$

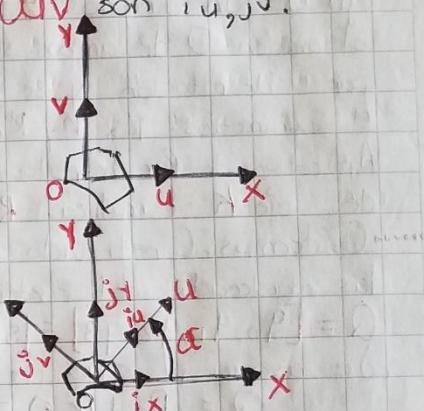
Es la llamada

"matriz de rotación", que define la orientación del sistema  $OUV$  con respecto al sistema  $OXY$  y sirve para transformar las coordenadas de un vector en un sistema  $OUV$  a las del otro.

--- Angulos de Euler: Para representar la orientación en un espacio 3D mediante matriz de rotación, es necesario definir 9 elementos. A pesar de las ventajas de las matrices, utilizar los angulos de Euler es más viable ya que solo usan 3 componentes. Todo sistema  $OUVW$  solidario al cuerpo central orientación se quiere describir puede definirse con respecto al sistema  $OXYZ$  mediante 3 cíngulos:  $\phi, \theta, \psi$ , denominados Angulos de Euler.

.... Roll, pitch and yaw (alabeo, cabecero y quinado): Es la representación más utilizada en aeronautica. Si se parte de los sistemas  $OXYZ$  y  $OUVW$ , se puede colocar  $OUVW$  en cualquier orientacion con:

1. Girar  $OUVW$  un ángulo  $\psi$  con respecto eje  $OX$ . = Yaw o quinado
2. Girar  $OUVW$  un ángulo  $\theta$  con respecto eje  $OY$ . = Pitch o cabecero.
3. Girar  $OUVW$  un ángulo  $\phi$  con respecto eje  $OZ$ . = Roll o alabeo.



3º girar  $OUVW$  un quinado  $\psi$  con respecto de  $OX$  = Roll o alabeo.  
 2º girar  $OUVW$  un pitch  $\theta$  con cabecero de  $OY$  = Pitch o cabecero.  
 1º girar  $OUVW$  un yaw  $\phi$  con rotación de  $OZ$  = yaw o desplazamiento.  
 $OUVW$  se tiene que colocar  $OUVW$  en la orientación deseada.  
 .... Roll, pitch y yaw forman la representación de la orientación de  $OXYZ$ .

Garcia Barrios Raúl Israel

- ..... Par de Rotación: la orientación de un sistema  $Ouvw$  con respecto a  $oxyz$  tambien puede realizarse mediante la def. de un vector  $K$  ( $K_x, K_y, K_z$ ) y un ángulo de giro  $\theta$ , tal que  $Ouvw$  corresponde a  $oxyz$  girado un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $K$ . El eje  $K$  ha de pasar por el origen  $O$  de ambos sistemas. Al par  $(K, \theta)$  se le denomina par de rotación y se puede demostrar que es único. Se deben definir 4 parámetros:  $K_x, K_y, K_z$  y  $\theta$ . Se representa como  $\text{Rot}(K, \theta)$ . Aplicación de Par de rotación que rote un vector  $p$  un ángulo  $\theta$  alrededor de eje  $K$  se realiza:  $\text{Rot}(K, \theta) p = p \cos \theta - (K \cdot p) \sin \theta + K (K \cdot p) (1 - \cos \theta)$
- ..... Cuaternios: const. fijado por 4 componentes  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ , que presentan las coordenadas del cuaternion en una base,  $(e, i, j, k)$   
 $Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [s, v]$ .  $s = \text{escalar}$   $v = \text{parte vectorial}$   
 Se asocia el giro de un ángulo  $\theta$  sobre el vector  $K$
- $$Q = \text{Rot}(K, \theta) = \left( \cos \frac{\theta}{2}, K \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

- Matrices de transformación homogénea: Para la representación conjunta de la posición y orientación se introdujeron las coordenadas homogéneas.
- Coordenadas y matrices homogéneas: Esta representación se realiza a través de coordenadas de un espacio  $(n+1)$ -dimensional. De tal forma que un vector  $p(x, y, z)$ , vendrá representado  $p(wx, wy, wz, w)$  donde  $w$  tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala. De forma gral, un vector  $p = ai + bj + ck$ , donde  $i, j, k$  son los vectores unitarios de ejes  $ox, oy$  y  $oz$  del sistema  $oxyz$ , se representará en coordenadas homogéneas mediante el vector columna

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} M \\ S \\ A \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ CM \\ PM \\ OM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ C \\ P \\ d \end{bmatrix}$$

Al multiplicar a los dos primeros matrices se obtiene el resultado de la tercera multiplicación de la cuarta.

21-Enero-2019

García Barafas  
Raúl Israel

Cinematica de Robots

$$1 \rightarrow X = 90^\circ \rightarrow Y = 30^\circ \rightarrow Z = 70^\circ$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) - \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & 0 & \sin(30^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(30^\circ) & 0 & \cos(30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \cos(70^\circ) - \sin(70^\circ) & 0 \\ \sin(70^\circ) & \cos(70^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X * Y = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.866 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z * Y = \begin{bmatrix} 0.2961807 & -0.9396 & 0.171 \\ 0.8137175 & 0.342 & 0.4698 \\ -0.5 & 0 & 0.8660254 \end{bmatrix}$$

$$Z * Y * X = \begin{bmatrix} 0.2961807 & 0.171 & 0.9396 \\ 0.8137175 & 0.4698 & -0.342 \\ -0.5 & 0.8660254 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ \rightarrow Y = 78^\circ \rightarrow X = 60^\circ \rightarrow Y = 7^\circ$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} \cos(78^\circ) & 0 & \sin(78^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(78^\circ) & 0 & \cos(78^\circ) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^\circ - \sin 60^\circ & 0 \\ 0 & \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \cos 7^\circ & 0 & \sin 7^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 7^\circ & 0 & \cos 7^\circ \end{bmatrix}$$

$$Y_1 * X = \begin{bmatrix} 0.9925 & 0 & 0.1218 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.1218 & 0 & 0.9925 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.8660 \\ 0 & 0.8660 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{bmatrix} 0.9925 & 0.1054 & 0.0609 \\ 0 & 0.5 & -0.8660 \\ -0.1218 & 0.8595 & 0.4962 \end{bmatrix}$$

$$XY * Y_2 = \begin{bmatrix} 0.1980 & 0.1054 & 0.9744 \\ 0.8364 & 0.5 & -0.2241 \\ -0.5108 & 0.8595 & 0.0107 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 * XY = \begin{bmatrix} 0.9925 & 0.1054 & 0.0609 \\ 0 & 0.5 & -0.8660 \\ -0.1218 & 0.8595 & 0.4962 \end{bmatrix}$$

Garcia Barajas  
Raúl Israel

21-Enero-2019

$$3^\circ \rightarrow Z_2 = 45^\circ \rightarrow X = 38^\circ \rightarrow Z_1 = 15^\circ$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 & 0 \\ 0.2588 & 0.9659 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8191 & -0.5735 \\ 0 & 0.5735 & 0.8191 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 X = \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2120 & 0.1484 \\ 0.2588 & 0.7912 & -0.5540 \\ 0 & 0.5735 & 0.8191 \end{bmatrix} * Z_2 = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 X Z_2 = \begin{bmatrix} 0.5330 & -0.8329 & 0.1484 \\ 0.7425 & 0.3764 & -0.5540 \\ 0.4055 & 0.4055 & 0.8191 \end{bmatrix}$$

$$4^\circ \quad Z_3 = 15^\circ \quad X = 38^\circ \quad Z_1 = 45^\circ$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8191 & -0.5735 \\ 0 & 0.5735 & 0.8191 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 X = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.5792 & 0.4055 \\ 0.7071 & 0.5792 & -0.4055 \\ 0 & 0.5735 & 0.8191 \end{bmatrix} * Z_2 = \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 & 0 \\ 0.2588 & 0.9659 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 X Z_2 = \begin{bmatrix} 0.5330 & -0.7425 & 0.4055 \\ 0.8329 & 0.3764 & -0.4055 \\ 0.1484 & 0.5540 & 0.8191 \end{bmatrix}$$

21-Enero-19 / 23-Enero-2019

García Berajús

Raúl Israel.

\* Algoritmo de Denavit-Hartenberg para la obtención del modelo cinemático directo.

Pasos del algoritmo para obtención de parámetros DH:

1. Numerar Eslabones: Se llamará "0" a la "tierra", o base fija donde se anda el robot. "1" el primer eslabón móvil, etc.
2. Numerar Articulaciones: La "1" será el primer grado de libertad, y "n" el último.
3. Localizar eje de cada articulación. Para pares de revolución será el eje de giro. Para prismáticos, será eje ~~el~~ largo del cual se mueve el eslabón
4. Se colocan los sistemas XYZ. Situamos  $Z_{i-1}$  en los ejes de las articulaciones  $i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Es decir:  $Z_0$  va sobre el eje de la 1ra articulación,  $Z_1$  sobre el eje del 2<sup>do</sup> grado de libertad, etc.
5. Sistema de coordenadas 0: Se sitúa el punto origen en cualquier punto a lo largo de  $Z_0$ . La orientación de  $X_0$  e  $Y_0$  puede ser arbitraria, siempre que se respete que XYZ sea un sistema dextrógiro
6. Resto de sistemas  $i = 1 \dots n-1$ , colocar el origen en la intersección de  $Z_i$  con la normal común a  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$ . En caso de cortarse los 2 ejes  $Z$ , colocarlo en ese punto de corte. En caso de ser paralelos, colocarlo en algún punto de la articulación  $i+1$ .
7. Ejes X: Cada  $X_i$  va en la dirección de la normal común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , en dirección de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$
8. Ejes Y: Situar  $Y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $X_i$  y  $Z_i$
9. Sistema del extremo del robot: El  $n$ -ésimo sistema XYZ se coloca en el extremo del robot (herramienta) con su eje Z paralelo a  $Z_{n-1}$  y X e Y en cualquier dirección válida.

Cual es es?

Coq Q Q<sup>2</sup>

5 bocajos o 5x5 en cuadrado que no se copia o se expresa por los otros cuadrados con su eje dextrógiro que son los demás cuadrados.

El 5x5 tiene que ser una diagonal de 5x5 de 1x1.

10. Ángulos téticos: Cada  $\theta_i$  es el ángulo desde  $X_{i-1}$  hasta  $X_i$  girando al rectedor de  $Z_i$ .
11. Distancias  $d_i$ : Cada  $d_i$  = distancia desde el sistema XYZ  $i-1$  hasta la intersección de las normales comunes de  $Z_{i-1}$  hacia  $Z_i$ , a lo largo de  $Z_{i-1}$ .
12. Cada  $a_i$  es la longitud de dicha normal común.
13. Ángulos Alfa: Ángulo que hay que rotar  $Z_{i-1}$  para llegar a  $Z_i$ , rotando al rectedor de  $X_i$ .
14. Matrices individuales: Cada eslabón define una matriz de transformación

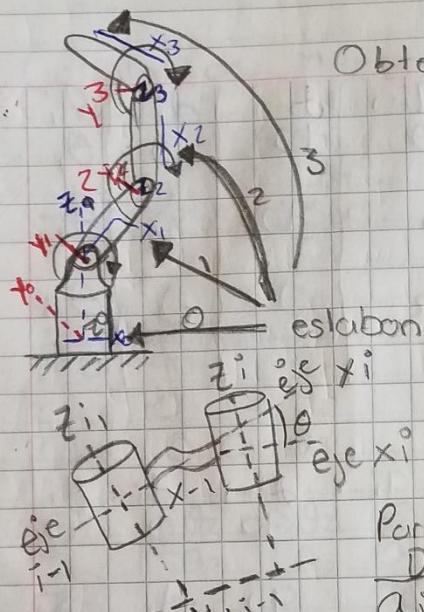
$${}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & d_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Transformación Total: Relaciona la base del robot con su herramienta, es la encadenación (multiplicación) de todas esas matrices.  $T = {}^0A_1 A_2 \dots {}^{n-1}A_n$

16. Matriz T: Define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de n coordenadas articulares.

11-Feb-2019

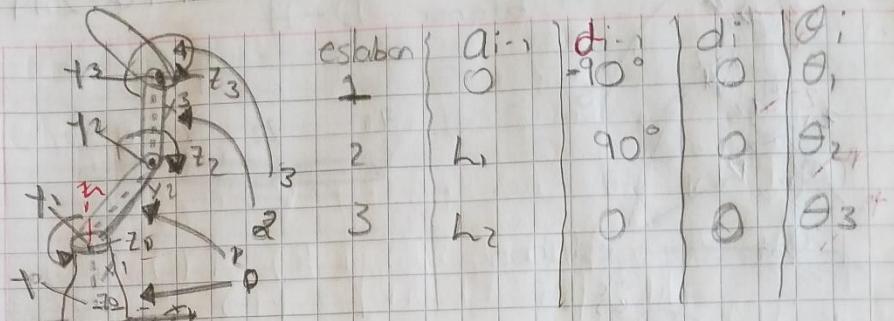
Obtener D-H.



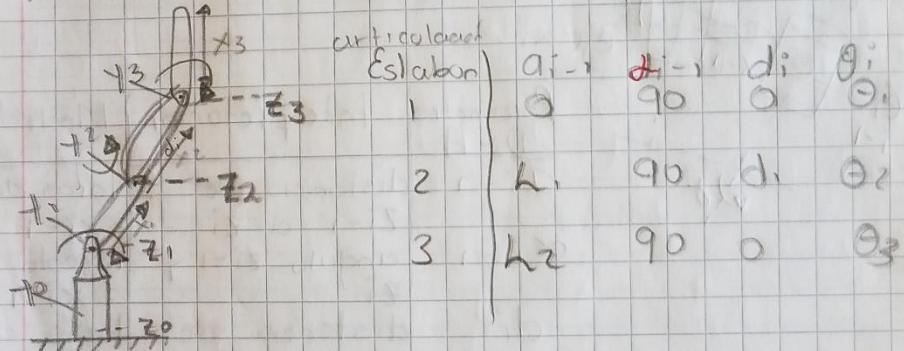
Parámetro	Interpretación	Medido
D-H		
$a_{i-1}$	distancia de $z_{i-1}$ a $z_i$	largo de $x_{i-1}$
$\alpha_{i-1}$	ángulo $z_{i-1}$ y respecto a $z_i$	$x_{i-1}$
$d_i$	distancia de $x_{i-1}$ a $x_i$	largo de $z_i$
$\theta_i$	ángulo $x_{i-1}$ y respecto a $x_i$	$z_i$
Eslabón	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$

Eslabón	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$90^\circ$	0	$\theta_1$
2	0	0	L	$\theta_2$
3	0	0	h	$\theta_3$

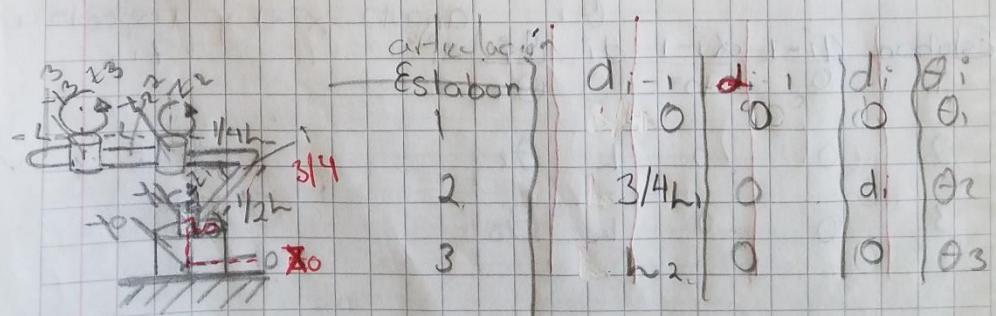
11- Feb - 2019



Estábelo	$a_{i-1}$	$d_{i-1}$	$\theta_i$
1	0	-90°	$\theta_1$
2	$h_1$	90°	$\theta_2$
3	$h_2$	0	$\theta_3$



articulación Estábelo	$a_{i-1}$	$d_{i-1}$	$\theta_i$
1	0	90°	$\theta_1$
2	$h_1$	90°	$\theta_2$
3	$h_2$	0	$\theta_3$



articulación Estábelo	$a_{i-1}$	$d_{i-1}$	$\theta_i$
1	0	0	$\theta_1$
2	$3/4 h_1$	0	$\theta_2$
3	$h_2$	0	$\theta_3$

## Calculo de Matrices Homogeneas

$$T_i^{-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i | a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_{i-1}, \theta_i$

1	0	$q_0$	0	$\theta_1$
2	$h_1$	0	0	$\theta_2$
3	$h_2$	0	0	$\theta_3$

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

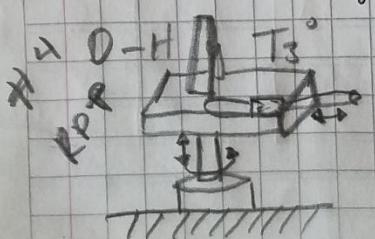
$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & h_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & h_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

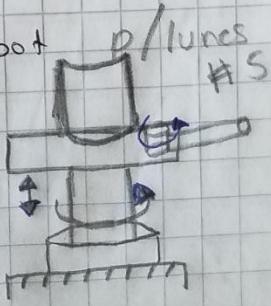
$$T_3 = T_1^\circ T_2^{-1} T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + S\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \end{bmatrix}$$

Tarea:

Obtener D-H y  $T_3^\circ$  de su Robot



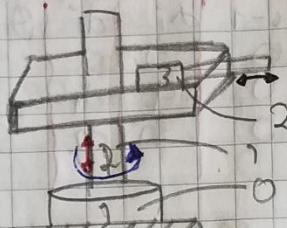
RPR



Lapicero  
García Barajas Raúl

13 - Feb - 19

RPP.



articulación

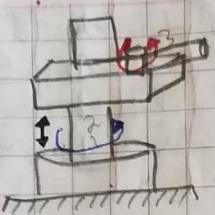
	$\alpha_{i-1}$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	90°	$d_1$	0
3	0	0	$d_2$	0

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_1 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~Q~~

$$T_3 = \begin{bmatrix} -C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 C\theta_3 & 0 \\ C\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 C\theta_3 & C\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 C\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



RPR

Articulación	$a_{i-1}$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$90^\circ$	$d_1$	$\theta_2$
3	0	$90^\circ$	$d_2$	$\theta_3$

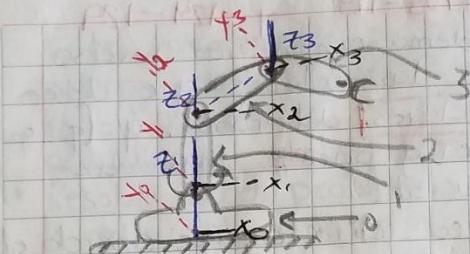
$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 0 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_3 C\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L \\ C\theta_3 C\theta_2 S\theta_2 & S\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Garcia Barrios Raúl Israel

18-Feb-19



Articulación	$a_{i-1}$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$h_1$	$90^\circ$	0	$\theta_2$
3	$h_2$	0	0	$\theta_3$

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(C<sub>θ<sub>3</sub></sub>, C<sub>θ<sub>2</sub></sub>C<sub>θ<sub>3</sub></sub> - C<sub>θ<sub>3</sub></sub>S<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>, -C<sub>θ<sub>1</sub></sub>C<sub>θ<sub>3</sub></sub>S<sub>θ<sub>2</sub></sub> - C<sub>θ<sub>2</sub></sub>C<sub>θ<sub>3</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>, -S<sub>θ<sub>3</sub></sub>, L<sub>1</sub>L<sub>2</sub>)

(C<sub>θ<sub>3</sub></sub>C<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>3</sub></sub> - S<sub>θ<sub>3</sub></sub>S<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>, -C<sub>θ<sub>1</sub></sub>S<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>3</sub></sub> - C<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>S<sub>θ<sub>3</sub></sub>, C<sub>θ<sub>3</sub></sub>, L<sub>1</sub>L<sub>2</sub>)

(C<sub>θ<sub>1</sub></sub>S<sub>θ<sub>2</sub></sub> + C<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>, C<sub>θ<sub>1</sub></sub>(C<sub>θ<sub>2</sub></sub> - S<sub>θ<sub>2</sub></sub>S<sub>θ<sub>1</sub></sub>), 0, 0, 0, 1)

García Borgías Raúl Israel

18 Feb -2019

### Fundamentos de Robótica p. 108-118 → 124-129

Cinematica Inversa: El problema cinemático inverso tiene como objetivo encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares, del robot.  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

A diferencia de la cinemática directa, que aborda el problema de una manera sistemática a partir de las matrices de transformación homogénea e independiente de la configuración del robot, la cinemática inversa tiene un procedimiento de obtención de ecuaciones muy dependiente de la configuración del robot.

Al resolver un problema cinemático inverso es adecuado encontrar una solución cerrada. Encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ k = 1, \dots, n \text{ (GDL)}$$

Los métodos geométricos permiten obtener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot. Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot.

Una alternativa puede ser recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes a la cinemática directa. Esto es:

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{donde los elementos } t_{ij} \text{ son función de las}$$

coordenadas articulares  $[q_1, \dots, q_n]^T$

- Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos. • Este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad. • para considerar solo los primeros grados de libertad.

por detrás de los de reparación.

que tienen que tener que a base de una sola 20,10  
diseñadas. • Esas bases tienen que ser diseñadas para 10,10,7

- Reparación de bases cinemáticas para las que se  
diseñan en el futuro.

Este procedimiento se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las "coordenadas del extremo del robot", sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

- Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea. • Es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación las relaciones inversas. En la práctica, esta tarea no es trivial siendo en ocasiones tan compleja que se obliga a desecharla.

Jacobiana Inversa Del mismo modo en que la relación directa permite obtener las velocidades del extremo a partir de las velocidades articulares, la relación inversa permite calcular las velocidades articulares partiendo de las del extremo. En la obtención de la relación inversa pueden emplearse diferentes procedimientos.

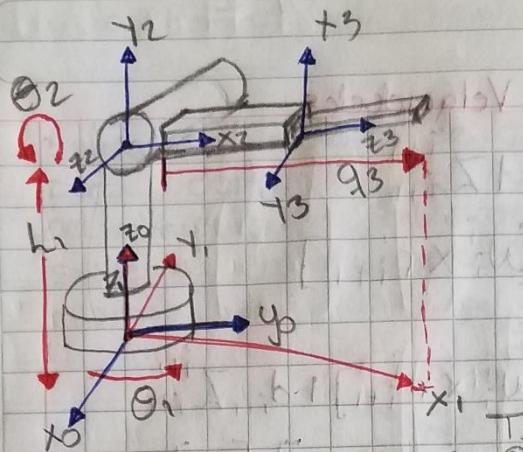
En primer lugar, conociendo la relación directa, dada por la matriz jacobiana, se puede obtener la relación inversa invirtiendo simbólicamente la matriz.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$

2 → x 20 Feb 2019  
 $x \rightarrow z$



i	$a_{i-1}$	$d_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	-90°	0	$\theta_2$
3	0	90°	q3	q3

$$T_3^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 - S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 - S\theta_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} C\theta_2 - S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S\theta_2 - C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & L_1 \\ C\theta_1 S\theta_2 + C\theta_2 S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & 0 & 0 & -q_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - C\theta_2 S\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$$

$$\frac{T_0^3}{T_2^3 T_1^2} = T_0^1 = T(T_2^3)(T_1^2)^{-1} T_0^3 = T_0^1$$

$$I_3^0 = I^0, I^1, I^2$$

$$\frac{I_0^0}{I_3^0} = I^0 = I(I_3^1)(I_3^2), I_3^0 = I^0$$

$$C\theta_1 C\theta_2 - 20' 20'' - C\theta_1 20'' - C\theta_2 20' + C\theta_1 20' + C\theta_2 20'' = 0$$

## Método de Propagación de Velocidades

Rotacional

$$\omega_{i+1} = R_i^{i+1} \omega_i^i + \theta_{i+1}^i + \dot{\theta}_{i+1}^i$$

$$v_{i+1} = R_i^{i+1} v_i^i + R_i^{i+1} [\omega_i^i \times r_{i+1}^i]$$

Prismática

$$v_{i+1} = R_i^{i+1} v_i^i + R_i^{i+1} [\omega_i^i \times r_{i+1}^i] + d_{i+1} \dot{z}_{i+1}^i$$

$$\omega_{i+1} = R_i^{i+1} \omega_i^i$$

$$T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & a_x \\ n_y & 0 & a_y \\ n_z & 0 & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0_x & a_x \\ n_y & 0_y & a_y \\ n_z & 0_z & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

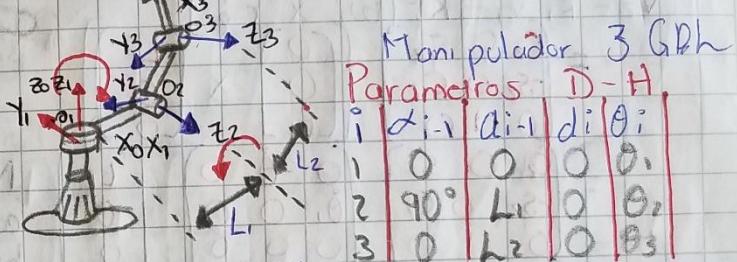
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ 0_x & 0_y & 0_z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x & 0_x & a_x \\ n_y & 0_y & a_y \\ n_z & 0_z & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad J(q) = \begin{bmatrix} J_v(4) \\ J_w(4) \end{bmatrix}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta_1 & S\theta_1 & 0, q_3 - q_3 \\ 0 & -S\theta_1 & C\theta_1 + q_3 S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & q_3 - l_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & q_3 \\ S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Garcia Borgas Raul Israel

Aplicar el método de propagación de velocidades para determinar la velocidad angular y lineal del manipulador mostrado en la figura para el sistema de referencia (3). Además, expresar los mismos resultados en el sistema de referencia (0)



Empleando los valores D-H del manipulador, se obtienen las siguientes matrices de transformación homogéneas:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & L_1C_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & C_1 & L_1S_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & L_1C_1 + L_2C_1C_2 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & C_1 & L_1S_1 + L_2S_1C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con toda la información necesaria para aplicar el método de propagación de Velocidades. Para ello, comenzando con  $i=0$ , se obtiene:

$$\omega_i^0 = R_0^i \omega_0^0 + \dot{\theta}_i z_i^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_i^0 = R_0^i v_0^0 + R_0^i [\omega_0^0 \times r_i^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_i^0 = R_0^i m_0^0 + \dot{\theta}_i f_i^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_i^0 = R_0^i f_0^0 + R_0^i [m_0^0 \times v_i^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se prosigue con  $i = 1$ :

$$\omega_2^2 = R_1^2 \omega_1 + \dot{\theta}_2 \tau_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$V_2^2 = R_1^2 v_1 + R_1^2 [\omega_1 \times r_2^1]$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

decir, se empleó  $S(\omega_1) \cdot r_2^1 = \omega_1 \times r_2^1$ . Finalmente,

para  $i = 2$ :

$$\omega_3^3 = R_2^3 \omega_2^2 + \dot{\theta}_3 \tau_3^3$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) \\ \dot{\theta}_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 S_{23} \\ \dot{\theta}_1 C_{23} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$V_3^3 = R_2^3 v_2 + R_2^3 [\omega_2 \times r_3^2]$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

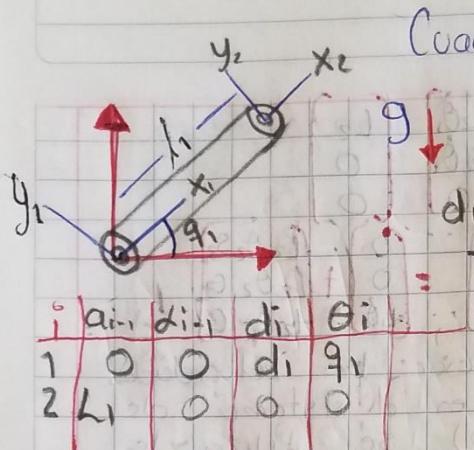
Notese que en el cálculo anterior se hizo uso de la matriz antisimétrica para obtener el producto cruz, es

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & C_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & -S_2\dot{\theta}_1 \\ -C_2\dot{\theta}_1 & S_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2\dot{\theta}_2 \\ -L_2\dot{\theta}_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2\dot{\theta}_2 C_3 \\ L_2\dot{\theta}_1 C_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2\dot{\theta}_2 C_3 \\ -\dot{\theta}_1(L_1 + L_2 C_2) \end{bmatrix} \quad \text{Para expresar las velocidades anteriores en el sistema de referencia (0), se utiliza la}
 \end{aligned}$$

matriz de rotación  $R_3^0$ , con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_3^0 &= R_3^0 \vec{v}_3^3 = \begin{bmatrix} C_1(C_{23} - C_1 S_{23} S_1) & L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ S_1 C_{23} - S_1 S_{23} - C_1 & L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ S_{23} C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1(L_1 + L_2 C_2) \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_1 [S_3 C_{23} - C_3 S_{23}] + \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_1 [S_3 C_{23} - C_3 S_{23}] + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 [S_3 C_{23} - C_3 S_{23}] + \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_1 [S_3 C_{23} - C_3 S_{23}] + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_3 S_{23} + L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_2 \end{bmatrix} \\
 \vec{w}_3^0 &= R_3^0 \vec{w}_3^3 \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} - C_1 S_{23} S_1 \\ S_1 C_{23} - S_1 S_{23} - C_1 \\ S_{23} C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 S_{23} \\ \dot{\theta}_1 C_{23} \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 S_1 + \dot{\theta}_3 S_1 \\ -\dot{\theta}_2 C_1 - \dot{\theta}_3 C_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4-Marzo-2019



Cuadrante I

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C(q_1) & -S(q_1) & 0 & 0 \\ S(q_1) & C(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C(q_1) & -S(q_1) & 0 & L_1 \\ S(q_1) & C(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuadrante IV

$$\theta = 270^\circ \quad T_1^0 = \begin{bmatrix} C(270) & -S(270) & 0 & 0 \\ S(270) & C(270) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} C(q_1) & -S(q_1) & 0 & 0 \\ S(q_1) & C(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S(q_1) & C(q_1) & 0 & 0 \\ -C(q_1) & S(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cd_1 & 2d_1 & 0 & 0 \\ 2d_1 & cd_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Marzo. 2019

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & L_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -C(q_1) & S(q_1) & 0 & L_1 \\ -S(q_1) & -C(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = R_0^1 \omega_0 + q_1 z_1 = [R_0^1] [\omega_0^0 - i \dot{\theta}_1 z_1]$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = R_0^1 V_0^0 + R_0^1 [\omega_0^0 \times r_1^0] = [R_0^1] V_0^0 + [R_0^1] (\omega_0^0 \times r_1^0)$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} + q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$V_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 S(q_1) \\ L_1 C(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_s^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$m_s^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

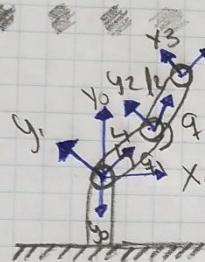
6 - Marzo - 2019

$$V_0^2 \cdot V_2^2 = \begin{pmatrix} l_1 S(q_1) \\ l_1 C(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial q_1} \dot{q}_1 = \begin{pmatrix} l_1 C(q_1) \\ l_1 S(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}_1$$

$$= \begin{pmatrix} l_1(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 S(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

$$\dot{q}_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{x}{y} \right] = IKD \text{ Cinematica Inversa}$$



$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline & l_1 \sin(q_1) & l_1 \cos(q_1) & q_1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & l_1 & 0 & 0 \\ 3 & l_1 \cos(q_1) & l_1 \sin(q_1) & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

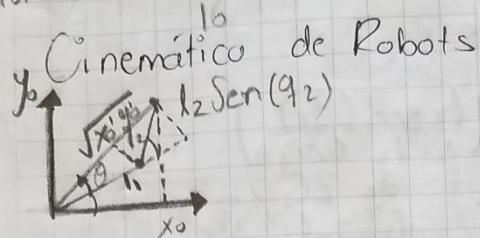
$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_1 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_1 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_3^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2), -\sin(q_1+q_2), 0, l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2), \cos(q_1+q_2), 0, l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1+q_2) \\ 0, 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot (4) \cdot (5) = 1$$

25-03-2019

Pulso a RPM - 8 - orificios 8 sin orificio



Cinemático de Robots

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ B_1 + B_2 \end{bmatrix}$$

El jacobiano del Robot de ZGDL

$$J(q) = \frac{\partial F_R}{\partial q} (B_1, B_2, l_1, l_2, q)$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2)}{\partial q} & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ B_1 + B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = [l_1 + l_2 \cos(q_2)]^2 + [l_2 \sin(q_2)]^2$$

$$= l_1^2 + l_2^2 [\cos^2(q_2) + \sin^2(q_2)] + 2l_1l_2 \cos(q_2)$$

$$q_2 = \arccos \left( \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)} \right)$$

Tomando los angulos  $\alpha$  y  $\beta$  dentro del triángulo y la hipotenusa  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  se cumple lo siguiente

$\alpha$  por pitágoras  $x_0^2 + y_0^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  se cumple lo siguiente

$$\theta = \arctan \left( \frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)} \right)$$

Plus 30 - 2

$$\theta + q_1 = \alpha \tan\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$

entonces:

$$q_1 = \alpha \tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \theta$$

$$= \alpha \tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \alpha \tan\left(\frac{l_2 \sin(q_1)}{l_1 + l_2 \cos(q_1)}\right)$$

• La cinematica del robot de 2GDL

$$q_2 = \cos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

$$q_1 = \alpha \tan\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \alpha \tan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

### Practica #2

Obtener  $q_1$  y  $q_2$  del robot de 2GDL con  
 $L_1 = 30$   $L_2 = 20$  con punto en el origen . en (4,4)  
para los sig. puntos.

1. (-1 6) (9 - 6) (-5 6) Anitu

2. (2 - 7) (8 - 7) (-4 7) JP

3. (-3 8) (-7 8) (3 - 8) Yuritzi

4. (4 - 9) (6 - 9) (2 - 9)

5. (2 5 1) (-5 1) (-1 1)

6. (6 - 2) (4 - 2) (-2 2)

7. (-7 3) (-3 3) (3 - 3)

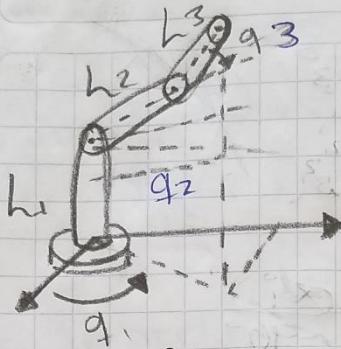
8. (8 - 4) (2 - 4) (4 - 4)

9. (-9 5) (-1 5) (-5 5)

10.

### Practica #3

Investigar y explicar las librerias de  
ROS en su robot.



Datos:  $P_x, P_y, P_z$   
dónde queremos  
situar el extremo  
del robot

$$q_1 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\therefore q_3 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_1}\right)$$

Para la articulación  $q_2$

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{P_z}{r}\right)$$

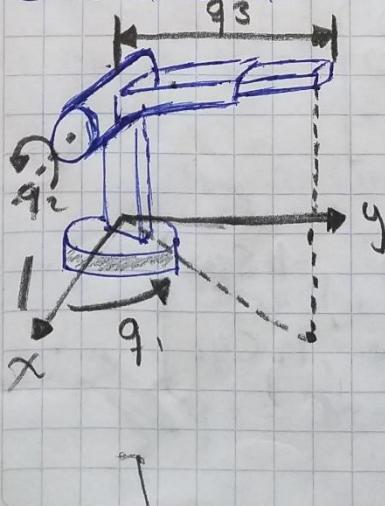
$$= \arctan\left(\frac{P_z}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L_3 \sin q_3}{L_2 L_3 \cos q_3}\right)$$

$$\therefore q_2 = \arctan\left(\frac{P_z}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{L_3 \sin q_3}{L_2 L_3 \cos q_3}\right)$$

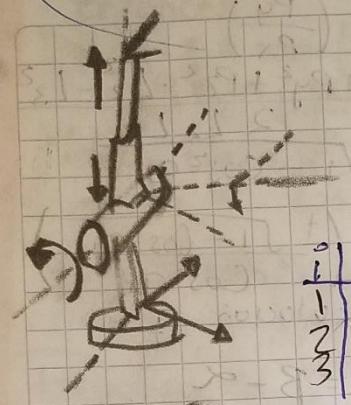
Cinematica inversa por matrices homogéneas.

Robot 3DL



Garcia B.  
Raúl I.

1 - Abril - 19



Obtener:  $T_3^0$

*[Signature]*

Tabla D-H

	$q_1$	$d_1$	$\alpha_1$	$q_2$	$d_2$	$\alpha_2$	$q_3$	$d_3$	$\alpha_3$
1	$q_1$	$l_1$	0	0	0	$-90^\circ$			
2	$q_2$	0	0	0	0	$90^\circ$			
3	0	$q_3$	0	0	0	0			

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & -S_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} (C_{q_2}, -S_{q_2}, 0, 0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_{q_2} & C_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} (C_{q_1} C_{q_2}, -C_{q_1} S_{q_2}, -S_{q_1}, -S_{q_2}, -1) \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{q_1} S_{q_2}, -S_{q_1} S_{q_2}, C_{q_2}, 1, C_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Garcia Barajas Raúl.

1-Abril-2019

Práctica # 2

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1-m^2}}{m} \right)$$

$$m = \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}$$

$$q_1 = \arctan \left( \frac{y_0}{x_0} \right) - \arctan \left( \frac{l_2 \cdot \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \right)$$

Puntas ubicadas en coordenadas P(2, -7)

$$m = \frac{2 + (-7) - 30 - 20}{2 + 20 + 30} = \frac{-1247}{1200} = -1.03916667$$

Empezamos por obtener  $q_2$ :

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - (-1.03916667)^2}}{-1.03916667} \right)$$

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - 1.079867362}}{-1.03916667} \right)$$

Segundo caso, con coordenadas P(8, -7).

$$m = \frac{8 + (-7) - 30 - 20}{2 + 20 + 30} = \frac{-1187}{1200} = -0.989166667$$

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - (-0.989166667)^2}}{-0.989166667} \right)$$

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - 0.9784506944}}{-0.989166667} \right)$$

$$q_2 = \arctan (-0.1484045307)$$

P105 - 1.4.4.4 - 1

$$q_2 = -8.441342643$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{-7}{8}\right) - \arctan\left(\frac{20 \cdot \sin(-8.441342643)}{30 + 20 \cos(-8.441342643)}\right)$$

$$q_1 = -37.81085693$$

Caso en el que las coordenadas  $P = (-4, 7)$

$$m = \frac{(-4)^2 + 7^2 - 30^2 - 20^2}{2 \cdot 20 \cdot 30} = \frac{-1235}{1200} = -1.0291666667$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - (-1.0291666667)^2}}{-1.0291666667}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - 1.059184028}}{-1.0291666667}\right)$$

El resultado da una raíz negativa y no se puede obtener el valor de  $q_2$ , interpretando que no se pueden poner los puntos en esas coordenadas.

$$\left( \frac{(F_{1234} \cdot P_{12}) - 1}{F_{1234} \cdot P_{12}} \right) \text{not} \rightarrow sP$$

$$\left( \frac{(F_{1234} \cdot P_{12}) - 1}{F_{1234} \cdot P_{12}} \right) \text{not} \rightarrow sP$$

$$(F_{1234} \cdot P_{12}) - 1 \text{ not} \rightarrow sP$$

1-Abril-2019

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} M & T \\ C_{q_1} & 0 & S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & -C_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} M & T \\ C_{q_2} & 0 & -S_{q_2} & 0 \\ S_{q_2} & 0 & C_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3^0 = A_1^1 A_2^1 A_3^2 \cdot \dots$$

$$(A_1^1)^{-1} \cdot T = A_2^1 A_3^2 A \rightarrow \text{Despejamos } q_1$$

$$(A_1^1)^{-1} = \begin{bmatrix} M & T \\ C_{q_1} & 0 & -S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & C_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} nx & 0 \times ax & px \\ ny & 0 \times ay & py \\ nz & 0 \times az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & S_{q_2} & 0 \\ S_{q_2} & 0 & -C_{q_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{q_1} & S_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nx & 0 \times ax & px \\ ny & 0 \times ay & py \\ nz & 0 \times az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & S_{q_2} & S_{q_3}q_3 \\ S_{q_2} & 0 & -C_{q_2} & C_{q_3}q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-pxS_{q_1} + pyC_{q_1} = \rightarrow \frac{S_{q_1}}{C_{q_1}} \cdot \frac{py}{px} \rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{px}{py}\right)$$

$$-bx^2d^2 + b^2cd^2 = \rightarrow \frac{cd^2}{2d^2} \cdot \frac{bx}{b^2} \rightarrow d^2 = \arctan\left(\frac{bx}{b^2}\right)$$

A105-1.1dA - 1

$$\begin{pmatrix} C_{q_2} & S_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{q_1} & S_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S_{q_2} & C_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x & 0 & x & a'_x \\ n_y & 0 & y & a'_y \\ n_z & 0 & z & a'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{q_2}C_{q_1} & C_{q_2}S_{q_1} & S_{q_1} & -L_1 \\ -S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ -S_{q_2}C_{q_1} & -S_{q_2}S_{q_1} & C_{q_1} & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x & 0 & x & a'_x \\ n_y & 0 & y & a'_y \\ n_z & 0 & z & a'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_x C_{q_2} C_{q_1} + P_y S_{q_1} C_{q_2} + P_z S_{q_2} - L_1 S_{q_2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{-S_{q_2}}{C_{q_2}} = \frac{P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1}}{P_z - L_1} \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ 1 \end{array} \right) \text{ and } \left( \begin{array}{c} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1} \\ P_z - L_1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

García Barrajas Raúl Israel

8/Abril/2019

## Librerías ROS

### Librería KDL

Esta librería se utiliza para convertir y realizar transformaciones de cuadros y vectores en 3D. Tiene funciones que permiten ayudar para trabajar con vectores, puntos, transformaciones de cuadros, etc. Estas librerías nos permiten realizar cálculos de un producto vectorial.

### Rospy

Biblioteca de cliente de python para Ros. La API del cliente Rospy permite a los programadores de Python interactuar rápidamente con los temas, servicios y parámetros de ROS. El diseño de rosPy favorece la necesidad de la velocidad de implementación (es decir, el tiempo del desarrollador) sobre el rendimiento en tiempo de ejecución.