Polinômios Ortogonais

Lucas Santana da Cunha
http://www.uel.br/pessoal/lscunha

Universidade Estadual de Londrina

21 de setembro de 2019
Londrina

Introdução

- A variável analisada na análise de variância nos delineamentos discutidos anteriormente pode ser **qualitativa ou quantitativa.**

Introdução

- A variável analisada na análise de variância nos delineamentos discutidos anteriormente pode ser **qualitativa ou quantitativa.**

- Uma variável quantitativa é aquela cujos níveis podem ser associados com pontos em uma escala numérica, tal como temperatura, pressão ou tempo.

Introdução

- A variável analisada na análise de variância nos delineamentos discutidos anteriormente pode ser **qualitativa ou quantitativa.**

- Uma variável quantitativa é aquela cujos níveis podem ser associados com pontos em uma escala numérica, tal como temperatura, pressão ou tempo.

- Variáveis qualitativas, por outro lado, apresentam valores que não podem ser colocados em ordem de magnitude.

Teste F

- Se o efeito do fator for significativo e, os níveis desse fator forem quantitativos, pode-se decompor os graus de liberdade dos tratamentos em **regressão linear, quadrática e cúbica** desde que a relação seja linear.

Teste F

- Se o efeito do fator for significativo e, os níveis desse fator forem quantitativos, pode-se decompor os graus de liberdade dos tratamentos em **regressão linear, quadrática e cúbica** desde que a relação seja linear.

- Nas situações em que os níveis do fator são **igualmente espaçados**, esta decomposição pode ser feita **pelo método dos polinômios ortogonais**, com o auxílio de coeficientes dados em tabelas.

Tabela ANAVA

Tabela 1: Quadro da Análise de Variância.

CV	G.L.	S.Q.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}
(Trat)	$(a-1)$	(SQ_{Trat})	$\frac{SQTrat}{a-1}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}$	$F_{(\alpha;GL_{Trat},GL_{Res})}$
Linear	1	$SQ_{\hat{Y}_L}$	$QM_{\hat{Y}_L}$	$\frac{QM_{\hat{Y}_L}}{QM_{res}}$	
Quadrática	1	$SQ_{\hat{Y}_Q}$	$QM_{\hat{Y}_Q}$	$\frac{QM_{\hat{Y}_Q}}{QM_{res}}$	
Cúbica	1	$SQ_{\hat{Y}_C}$	$QM_{\hat{Y}_C}$	$\frac{QM_{\hat{Y}_C}}{QM_{res}}$	
Resíduo	$a(b-1)$	SQ_{Res}	$\frac{SQRes}{a(b-1)}$	-	-
Total	$ab-1$	SQ_{Total}	-	-	-

- As somas de quadrados das regressões (contrastes) é definida por:

$$SQ\widehat{Y}_{reg} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i T_i\right)^2}{b \times K};$$

em que: T_i são os totais dos tratamentos; b é o número de repetições; c_i e K são obtidos da tabela de polinômios ortogonais.

Exemplo

Num experimento de alimentação de suínos em crescimento realizado no delineamento inteiramente casualizado foram utilizadas quatro tipos de ração: A, B, C e D. Os animais da raça Duroc-Jersey, com idade aproximada de 3 meses.

Nas rações, a farinha de carne era substituída total ou parcialmente pelo farelo de soja torrada, de tal modo que a porcentagem desta última nas rações eram as seguintes:

- **A** - zero de soja;
- **B** - 10% de soja;
- **C** - 20% de soja;
- **D** - 30% de soja;

O experimento foi conduzido por 98 dias, procedendo-se às pesagens regulares dos animais a cada 14 dias, sempre pela manhã e com animais em jejum por mais de 15 horas.

Tabela 2: Índices de conversão (*kg* de ração / *kg* de ganho de peso)

0	10%	20%	30%
3,66	3,15	3,14	3,17
3,38	3,33	3,47	3,04
2,93	3,42	3,11	2,97
3,71	3,28	3,38	3,13
3,67	3,16	3,15	2,75
3,39	3,47	3,00	2,62
3,22	3,35	3,06	3,37
3,34	2,99	3,01	3,05
27,3	26,15	25,32	24,10

Fazer a análise de variância e caso haja significância entre os tratamentos fazer a decomposição dos graus de liberdade dos tratamentos por meio da técnica dos polinômios ortogonais (regressão linear, quadrática, cúbica, etc). Utilize ($\alpha = 5\%$).

Tabela 3: Análise de variância para índices de conversão.

CV	gl	SQ	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Rações	3	0,68321	0,22774	5,025	$0,0065^{**}$
Resíduos	28	1,26899	0,04532		
Total	31	1,952197			

Constrói-se uma tabela em que constam os totais dos tratamentos (T_i) e os coeficientes (c_i) a serem usados:

Tabela 4: Tabela Auxiliar com os coeficientes

Níveis dos Tratamentos	Totais de Tratamentos (T_i)	Coeficientes dos contrastes ortogonais (c_i)		
		Linear	Quadrático	Cúbico
0	27,30	-3	1	-1
10	26,15	-1	-1	3
20	25,32	1	-1	-3
30	24,10	3	1	1
	K	20	4	20
	M	2	1	$\frac{10}{3}$

Tabela 5: Decomposição dos graus de liberdade de tratamentos.

CV	gl	SQ	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Rações	(3)	(0,68321)	0,22774	5,025	$0,0065^{**}$
Linear	1	0,679906	0,679906	$15,002^{**}$	$0,0065^{**}$
Quadrática	1	0,000153	0,000153	$0,003^{ns}$	$0,954^{ns}$
Cúbica	1	0,003151	0,003151	$0,069^{ns}$	$0,794^{ns}$
Resíduos	28	1,26899	0,04532		
Total	31	1,952197			

- Da Tabela 5 nota-se que apenas o modelo linear foi significativo. Assim, deve-se determinar os coeficientes do modelo:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x)$$

.
em que:

  - $\alpha_0 = \bar{y}$, ou seja, a média geral dos dados;
  - $\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{a} c_{iL} T_i}{b \times K_L} = \frac{\hat{Y}_L}{b \times K_L}$.

Os primeiros cinco polinômios ortogonais são:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= M_1\left[\frac{x-\bar{x}}{d}\right] \\
P_2(x) &= M_2\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d}\right)^2-\left(\frac{a^2-1}{12}\right)\right] \\
P_3(x) &= M_3\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d}\right)^3-\left(\frac{x-\bar{x}}{d}\right)\left(\frac{3a^2-7}{20}\right)\right] \\
P_4(x) &= M_4\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d}\right)^4-\left(\frac{x-\bar{x}}{d}\right)^2\left(\frac{3a^2-13}{14}\right)+\frac{3(a^2-1)(a^2-9)}{560}\right]
\end{aligned}
$$

sendo $\bar{x}$ a média dos níveis quantitativos e d a distância entre os níveis de x e a é o número de níveis dos tratamentos.

- Como $\alpha_0 = \bar{y}_{..} = 3,214688$, $M_1 = 2$, tem-se

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x)$$

$$\hat{y} = \bar{y} + \frac{\widehat{Y}_L}{b \times K_L} \times M_1 \left[\frac{x - \bar{x}}{d}\right]$$

$$\hat{y} = 3,2146 + \frac{-10,43}{8 \times 20} \times 2 \times \frac{(x - 15)}{10}$$

- Assim, o modelo de regressão linear ajustado aos dados é:

$$\hat{y} = 3,41 - 0,013\, x$$

Exercício 1

Os dados a seguir são de um experimento com milho, com 4 blocos e 5 tratamentos (Dose de P_2O_5: 0; 25; 50; 75; 100 kg/ha). A variável resposta é o rendimento em kg/parcela.

Blocos	Doses					$y_{\cdot j}$
	0	25	50	75	100	
I	3,38	7,15	10,07	9,55	9,14	39,29
II	5,77	9,78	9,73	8,95	10,17	44,40
III	4,90	9,99	7,92	10,24	9,75	42,80
IV	4,54	10,10	9,48	8,66	9,50	42,28
$y_{i\cdot}$	18,59	37,02	37,20	37,40	38,56	168,77
$\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^2$	89,339	348,581	348,675	351,158	372,281	1510,034