Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне - вариант 15

Ласурия Данил Рустанбеевич

Содержание

List of Figures

List of Tables

1 Цель работы

Создать математическую модель задачи о погоне

2 Описание задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 8,1 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,2 раза больше скорости браконьерской лодки

3 Задание

1. Провести необходимые рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

4 Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $\upsilon_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\upsilon = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $\upsilon r = r\frac{d\theta}{dt}$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $\upsilon_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon_r^2 - \upsilon^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна υ, то тангенциальную скорость находим из уравнения $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon^2 - \upsilon^2}$. Следовательно, $\upsilon_\tau = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \upsilon \\ r\frac{d\theta}{dt} = \upsilon\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

4.1 Код программы

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plot

delta = 8.1 # заданное расстояние
n = 3.2 # разница в скорости
fi = math.pi * 3/4 # угол движения

# растояние до движения по полюсу
r0 = delta/(n+1)
r1 = delta/(n-1)

# функция, описывающая движение катера береговой охраны
def der(tetha, r):
    dr = r / math.sqrt(pow(n,2) -1)
    return dr

# функция, описывающая движение лодки браконьеров
def der2(time):
    xt = math.tan(fi) * time
    return xt

def solver(rs, name):
    print(f"Решение условия {name} r{name} := {round(rs,6)}")
    # решение дифур для катера
    tetha = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)
    r = odeint(der, rs, tetha)
```

```
    # движение лоджки
    t=np.arange(0.00000000000001, 20)
    temp_r=np.sqrt(pow(t,2) + pow(der2(t),2))

    tet1=np.arctan(der2(t)/t)

    dot_cross=0
    for i in range(len(tetha)):
        if round(tetha[i], 2) == round(fi+math.pi, 2):
            dot_cross=i  # точка встречи

    plot.rcParams["figure.figsize"] = (8, 8)

    plot.polar(tetha, r, 'blue', label = 'Катер охраны')
    plot.polar(tet1, temp_r, 'red', label = 'Лодка браконьеров')

    plot.legend()
    plot.savefig(f"{name}")
    plot.clf() # сброс plot

    print("Tetha := {} \t R := {} ".format(tetha[dot_cross], float( r[d
    print("x := {} \t y := {}".format(round(r[dot_cross][0] / math.sqrt
r[dot_cross][0] / math.sqrt(2), 6)))

  solver(r0, "1")
  solver(r1, "2")
```

4.2 Решение

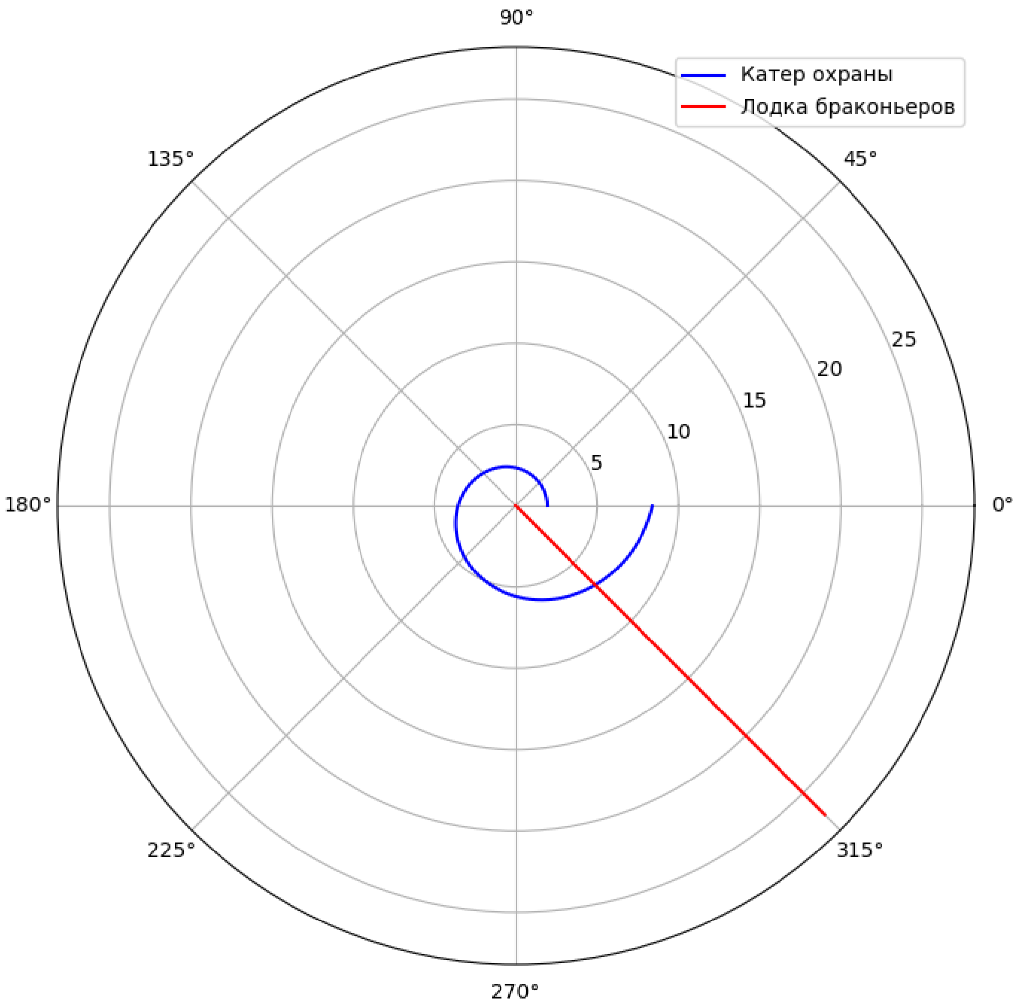

Figure 4.1: Траектории движения для певрого случая

Точка пересечения синего и красного графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет координаты

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 6.9 \end{cases}$$

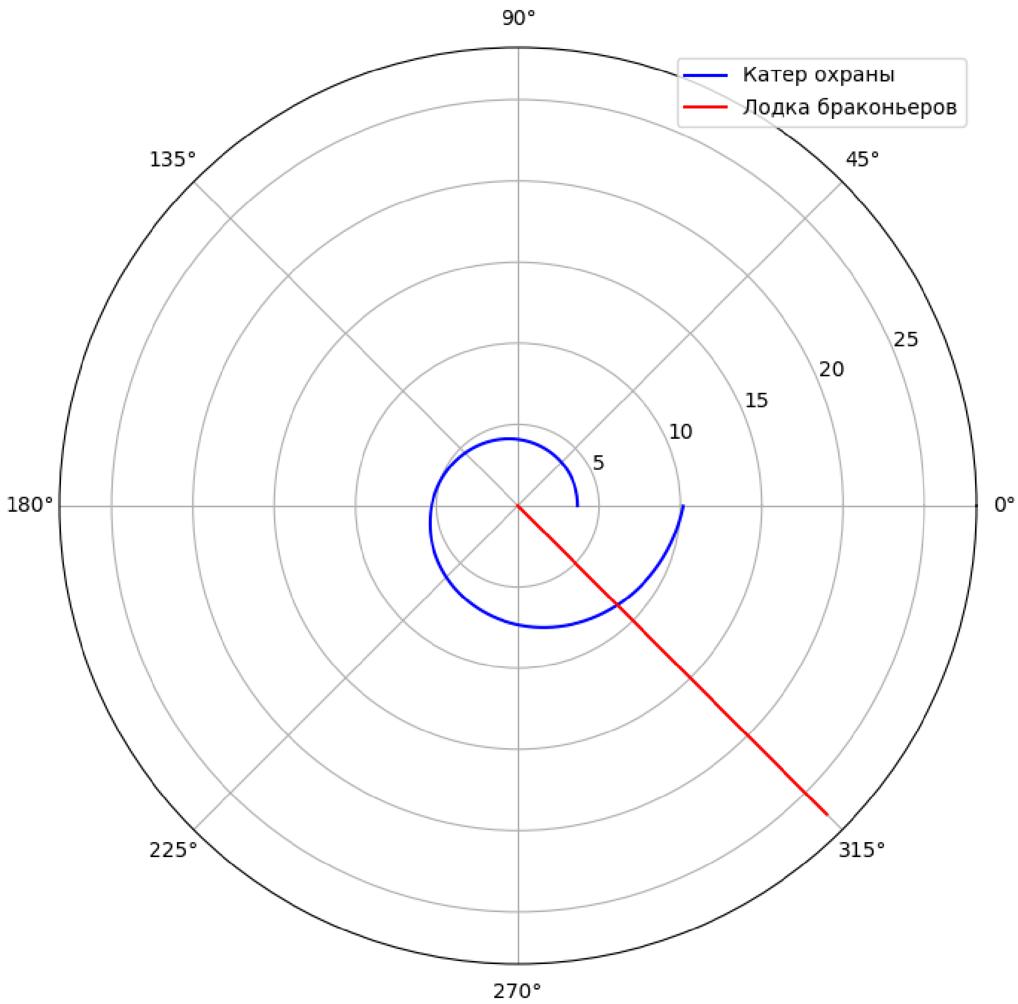

Figure 4.2: Траектории движения для второго случая

Точка пересечения синего и красного графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет координаты

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 8.65 \end{cases}$$

Исходя из полученных данных первый вариант погони более выгодный

5 Выводы

Рассмотрел задачу о погоне. Провел анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировал задачу и проанализировал полученные данные