“科林明伦杯”哈尔滨理工大学第15届校赛题解

相对难度

- 签到：A
- 简单：G, H
- 普通：
  - 思维向：C, F
- 困难：
  - 代码向：B, D
  - 思维向：E

致谢名单

- 出题人：yihang_01, Kaibad
- 验题人：Bunnycxk, cutekibry, ligen131, Right_One, LJY--2002, havegoodmorning
- 排名不分先后

A. CircleHrbust

tag：贪心、模拟

题意

给定一个字符串，询问其中是否能循环遍历这个字符串得到‘hrbust’

题解

只需要将原字符串变为原来两倍，然后通过遍历或find方法寻找即可

时间复杂度：$O(n)$ 空间复杂度：$O(n)$

B. 关键边

tag: 图、最短路

题意

定义一条边为"关键边"，当且仅当该边存在于所有 s 到 t 的最短路径中。请找出所有关键边的数量。

题解

对于图中每一条边 (u, v)（权值为 w），数组d代表起点到某一点的最短距离，d_2代表终点到某一点到最短距离，$count$代表起点到某一点最短路径方案数，$count_2$代表终点到某一点最短路径方案数，如果它位于某些最短路径上，那么必满足下面的性质：

$$d[u] + w + d_2[v] == d[t]$$

若不满足，则该边不可能出现在任何一条 s 到 t 的最短路径上。

对于一个满足上述性质的边 (u, v)，可以统计经过该边的最短路径条数，该数字为 $count[u] * count_2[v]$，因为

- 从 s 到 u 有 $count[u]$ 条最短路径
- 从 v 到 t 有 $count_2[v]$ 条最短路径

两者组合正好构成通过(u, v) 的最短路径条数。

如果 $count[u] * count_2[v]$ 等于 total，则说明所有 s 到 t 的最短路径都必须经过边(u, v) ，即 (u, v) 是“关键边”。

时间复杂度：$O((n+m) \times logn)$ 空间复杂度：$O(n)$

C. 魔法石头

tag: 区间dp、数学

题意

将n个数字组合成一个，每一次组合代价是两个数字的和，组合后数字会变成 $((x+1)(y+1)-1) \mod (10^9+7)$，询问最低的代价与最终的数字

题解

1. 首先我们观察到$((x+1)(y+1)-1+1)(z+1)-1=(x+1)(y+1)(z+1)-1$，具有结合律，因此我们可以不用管它结合的顺序，只需要知道某一区间的最终数字即可，这个可以在$O(n^2)$的时间复杂度内算出
2. 因此我们定义$dp_{i,j}$为将i到j的数字合并的最小代价，$sum_{i,j}$为将i到j的数字合并后得到的数字，因此可以得到很经典的区间dp转移方程

$$dp_{i,j} = min(\sum_{k=i}^{j-1} dp_{i,k} + dp_{k+1,j} + val_{i,k} + val_{k+1,j})$$

3.

最后输出$dp_{1,n}$与$val_{1,n}$即可

时间复杂度：$O(n^3)$ 空间复杂度：$O(n^2)$

D. 连连看1

tag: STL，二分，思维

题解

考虑 meet in the middle。一个合法的方案实际等价于：

1. 小 A 从 S 点向任意方向滑动一段距离（必须保持 x 或 y 不变）
2. 小 B 从 T 点向任意方向滑动一段距离
3. 此时若小 A 和小 B x 一样或 y 一样，则可以滑动并相遇

这里 1. 2. 能到的点集分别是两个十字形的点集。

$O(n+m)$ 枚举 1. 滑动的目标点 $P_1=(x_1,y_1)$，查看能否滑动到 2. 的十字形上，如果能则合法。这个查看是 $O(\log n)$ 的，因为 P_1 到十字形上最多两个交点，判断只需要判断中间是否有障碍即可，即判断 x_1 行 $y_1\sim y_2$ 列是否存在障碍（反之亦然）。这个判断可以通过 vector 储存二分判断。

复杂度：$O(Tn\log n)$。

E. 连连看2

tag：大力分类讨论

题解

直接大力分类讨论即可。

一个可能需要注意的情况：

```
......
..s...
......
....t.
......
```

答案为 3：

```
......
..s.x.
...x..
..x.t.
......
```

由于情况复杂故不赘述，可以对着正解对拍。

```
int solve(stx,sty,edx,edy){
    if(abs(stx-edx)+abs(sty-edy)==1) return -1;
    if(n==1||m==1) return 1;
    if((stx==1||stx==n)&&(sty==1||sty==m)) return 2;
    if(abs(stx-edx)==1&&abs(sty-edy)==1) return 2;
    if(stx==1&&edx<=2) return 2;
    if(stx==n&&edx>=n-1) return 2;
    if(sty==1&&edy<=2) return 2;
    if(sty==m&&edy>=m-1) return 2;
    if(stx==1||stx==n||sty==1||sty==m) return 3;
    if(abs(stx-edx)<=1||abs(sty-edy)<=1) return 3;
    if(abs(stx-edx)==2&&abs(sty-edy)==2) return 3;
    return 4;
}
solve(stx,sty,edx,edy),solve(edx,edy,stx,sty);
```

参考说明：

1. **相邻点（无法阻止）**：当起点与终点曼哈顿距离为1时，直接返回-1，因为无法阻止一步到达。
2. **单行或单列**：若网格是单行或单列，只需放置1个障碍即可阻断路径。
3. **起点位于角落**：当起点在网格的四个角落之一时，返回2，需在两个关键位置放置障碍。

4. **对角相邻**：若起点和终点在对角相邻（坐标各差1），返回2。
5. **边界附近移动**：若起点在边界且终点邻近该边界（如顶行且终点x≤2），返回2。
6. **起点在边界**：若起点位于非角落的边界，返回3。
7. **坐标差较小**：若x或y坐标差≤1，返回3。
8. **坐标差均为2**：若x和y坐标各差2，返回3。
9. **其他情况**：以上均不满足时，返回4。

时间复杂度：$O(T)$。

F.飞机座位分配概率2

tags: 思维（整体考虑法）

题解

第 i 名乘客坐在自己座位上，等价于前 i-1 个人都没有坐在他的座位上。

考虑如果 a 坐了 b 的座位，那么 b 就要去找一个 c 的座位做。
这对于 d > a,b,c 来讲，等价于 b 坐在自己的座位，a 去找随机一个座位坐。

推演到最后会发现核心性质：a=1 时实际上所有占座都不成立。当 1 占了前 (i - 1) 人的座位时，他仍然需要重新再选一次。

所以实际上 1 是：

- 有 (n - i + 1)/n 的概率占了后面人的座位。这个时候没有任何问题。
- 有 (i - 2)/n 的概率占了前面人的座位。这个时候他要再选一次，也就又回到 case 1/3。
- 有 1/n 的概率占了自己的座位。这个时候也没有问题。

所以实际上是在 1, i, i+1, i+2, ..., n 中选一个坐。

所以概率是 1 / (n - i + 2)。

特别地，i=1 时特殊处理。

复杂度：$O(Tn)$。

G. 化方为圆

tags: 数论

题意

给定 N, C, D，定义 $A_1 = 1, A_n = (CA_{n-1}^2 + D)$，求 $A_N \bmod 10000$。$N \leq 10^{18}$。

题解

注意到 $A_n \bmod 10000$ 只有 10000 个取值，且每一项只根据前一项决定，因而必定存在循环节，即存在 $1 \leq n_0, n_1 \leq 20000$ 使得 $A_{n_0} \equiv A_{n_1} \pmod{10000}$。此时对于任意 $n \geq n_1$ 均有 $A_n = A_{n-(n_1-n_0)}$。

求出循环节之后将 N 削减到 ≤ 20000 即可。

注意可能前面一段不循环。例如 $[1, 8, 4, 12, 6, 9, 2, 6, 9, 2, \ldots]$ 只有后面一段循环。

时间复杂度：$O(TM)$，$M = 10^4$ 为模数。

H.不对称的风筝

tags: 几何

题意

求凸四边形ABCD中AC的长度。已知AB⊥BC，AD⊥DC，AB=x，AD=y，∠BAD=α。

题解1

通过坐标系建模，推导出AC的表达式：

1. 设点A在原点，B为(x,0)，D为(y cosα, y sinα)。
2. 由BC⊥AB和DC⊥AD的条件，可解出点C的坐标：$C\left(x, \frac{y-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$，得$AC=\frac{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}}{\sin\alpha}$

题解2

二分∠BAC，用余弦定理对于△BAC和△DAC分别计算$AC_{\triangle BAC}$和$AC_{\triangle DAC}$，显然$AC_{\triangle BAC}-AC_{\triangle DAC}$单调，当其差为0时的AC即为答案。

题解3

由于BC⊥AB，DC⊥AD，四边形四点共圆，AC即为圆直径。设圆心为O，连接OB，OD，BD，通过圆心角可以得出BOD为2α，用余弦定理可以算出BD，再用余弦定理可以得出半径OB，x2即为直径AC。