

Punto 2.

$$E = \int_a^b e(x) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} e(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} e(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} e(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} e(x) dx = I$$

$$I \approx \frac{h}{2} [e(x_0) + e(x_1)] + \frac{h}{2} [e(x_1) + e(x_2)] \dots + \frac{h}{2} [e(x_{n-1}) + e(x_n)]$$

El error entonces sería como:

$$E_n^T(e) = \int_a^b e(x) dx - T_n(e)$$

que que, e es como la unión de todas esas $f(x)$ en diferentes subintervalos de $[x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots$ entonces,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+h} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(\lambda) + f(\lambda+h)]$$

en un intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ donde $x_{j-1} \leq \xi \leq x_j$, la combinación de estos errores es:

$$\begin{aligned} E_n^T(f) &= -\frac{h^3}{12} f''(\xi_1) - \dots - \frac{h^3}{12} f''(\xi_n) \\ &= -\frac{h^3 n}{12} \left[\frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)}{n} \right] \end{aligned}$$

Como se toma que es continua la función, entre ξ_n y ξ_1 debe haber unos números específicos que cumplan con:

$$\bar{\epsilon}_n(f) = -\frac{h^3 n}{12} \left[\frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)}{n} \right]$$

$$= -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi_n) \rightarrow \text{Donde ese } \xi \text{ ahora es un punto de la función, por continuidad } f''(\xi_n) = \xi_n$$

Por último como $h = (b-a)$ se tiene

$$\bar{\epsilon} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$