1. Interpolador único.

Se tiene los $n+1$ polinomios

$$L_k(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$j \neq k$

$k = (0, 1, 2, 3 \ldots n)$

$$L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdots \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$$

grado $(L_k) = n$ por la última x

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } k = j \\ 0 & \text{cuando } k \neq j \end{cases}$$

Polinomio interpolador

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \cdots + y_n L_n(x)$$

Al ser suma, se tiene que el grado es menor o igual a n

¿Por qué es único?

Si hay otro polinomio h, con grado $\leq n$, que cumpla lo mismo, sería

$$p(x_i) = h(x_i) = \underbrace{y_i}_{i} \rightarrow p(x_n) = y_n$$

$i = 0, 1, 2 \ldots n$

↳ Para que interpole todos los puntos

$\Rightarrow$ $p-q$ va a tener grado $\leq n$
y anula en $n+1$ puntos x_i

TFA

Polinomio con grado n, tiene n ceros.
Por lo que, lo anterior sería contradictorio a
menos de que $p-q=0$

Entonces $p=q$, al final, será único.

Si hubiera un q, quedaría con un grado $\leq n$ y
ceros $n+1$, a menos que sean iguales.