Tarea 2 **February 15, 2022**
Métodos computacionales 2 Presentado por:
Profesor: Manuel Alejandro Segura delgado Daniel Salamanca R. 201915269
Sebastián Camilo Menjura 201913267

1 Colisiones 2D de duración finita (juguemos billar)

1.
$$\vec{f}(\vec{r_1},\vec{r_2}) = \begin{cases} k|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3\hat{n} & si \quad |\vec{r_1}-\vec{r_2}| < R_1 + R_2 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

(a) K hace referencia a la fuerza por unidad de volumen necesaria para generar una fuerza entre las partículas.

(b) Para que la fuerza sea conservativa se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r_1},\vec{r_2})}{\partial r_1} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{r_1},\vec{r_2})}{\partial r_2}$$

En este caso

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r_1},\vec{r_2})}{\partial r_1} = 3k\frac{(\vec{r_1}-\vec{r_2})^3}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}$$

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r_1},\vec{r_2})}{\partial r_2} = -3k\frac{(\vec{r_1}-\vec{r_2})^3}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}$$

Con lo cual esta no sería una fuerza conservativa

2 03 Termodinámica

a) Para encontrar la temperatura de equilibrio de la sección de la derecha primero debemos comprender la condición de equilibrio inicial que presenta nuestro sistema. Sabemos que el pistón se encuentra de tal forma que la sección de la derecha cuenta con 2/3 de la longitud total del cilindro. De modo que aunque las temperaturas de ambos compartimientos no sean la misma debido a que la pared que divide nuestro sistema es adiabático en un primer instante. Las presiones si deben ser iguales a ambos lados del pistón para que este este inmóvil(condición de equilibrio). De modo que nuestra primera condición de equilibrio es:

$$P_0^1 = P0^2 \tag{1}$$

Para hallar estas presiones utilizaremos la ley de los gases ideales.

$$PV = NRT \tag{2}$$

Sabemos que la parte a la derecha del pistón cuenta con 2/3 de la longitud total del cilindro. Entonces sea (A) el área de la base del cilindro y (L) su longitud, la presión para esta parte esta dada por:

$$P_0^1 = \frac{N_0^1 R T_0^1}{V} = \frac{3N_0^1 R T_0 1}{2AL} \tag{3}$$

Ahora remplazamos esta expresión hallada en la ecuación de gases ideales pero ahora para el compartimiento izquierdo del cilindro para hallar su temperatura.

$$T_0^2 = \frac{P_0^2 V_0^2}{N_0^2 R} = \left(\frac{3\cancel{N_0^1}\cancel{R}T_0 1}{(2\cancel{AL})\cancel{N_0^2}\cancel{R}} \right) * \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{AL} \quad Siendo: \frac{1}{3}AL = V_0^2 \tag{4}$$

$$T_0^2 = \frac{T_0^1}{2} = 200K \tag{5}$$

b) Para encontrar las expresiones de la ecuación 6 de la guía requerimos de primero repasar la primera ley de la termodinámica, la lay de Transferencia de Fourier y la ecuación del calor.

$$\Delta U = Q + W \quad Primera \quad ley \quad termodinámica \tag{6}$$

$$H = \frac{dQ}{dt} = \frac{KA[T_1 - T_2]}{l} \quad Ley \quad transferencia \quad Fourier \tag{7}$$

$$Q = nC_v \Delta T \quad Ley \quad Calor \tag{8}$$

Dado lo lento que se realiza la transferencia de energía el trabajo durante este proceso es cero. Si ahora sacamos además el derivada temporal a la ecuación 6 y aplicamos la ley del calor se obtiene que:

$$\Delta \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} \tag{9}$$

$$nC_v \frac{dT}{dt} = \frac{KA[T_1 - T_2]}{l} \tag{10}$$

De esta ultima expresión podemos hallar las siguientes ecuaciones:

$$nC_v \frac{dT_1}{dt} = -\frac{KA[T_1 - T_2]}{l} \tag{11}$$

$$nC_v \frac{dT_2}{dt} = \frac{KA[T_1 - T_2]}{l} \tag{12}$$

Es importante aclarar que la ecuación 11 tiene un signo negativo ya que el lado derecho del pistón, el cual tiene una temperatura inicial de 400 K, se enfría al ser el cuerpo que sede calor.

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} = -C(T_1^0 + T_2^0) \tag{13}$$

$$\left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} = C(T_1^0 + T_2^0) \tag{14}$$

c) Encontremos la solución al sistema de ecuaciones diferenciales. Para encontrar las expresiones que satisfacen la ecuación utilizaremos el método de sustitución.

$$T_1' = -C(T_1 - T_2) \tag{15}$$

$$T_2' = C(T_1 - T_2) \tag{16}$$

Despejando la variable T_1 de la ecuación 16 y hallando su derivada, tenemos que:

$$T_1 = \frac{1}{C}T_2' + T_2 \tag{17}$$

$$T_1' = \frac{1}{C}T_2' + T_2' \tag{18}$$

Remplazando las ecuaciones 18 y 17 en la expresión 15.

$$\frac{1}{C}T_2'' + T_2' = -C\left(\frac{1}{C}T_2' + T_2\right) + CT_2 \tag{19}$$

$$\frac{1}{C}T_2'' + T_2'' = -T_2' - \cancel{CT_2} + \cancel{CT_2} \tag{20}$$

$$T_2'' + 2CT_2 = 0 \tag{21}$$

Observamos que obtenemos una ecuación diferencial homogenia de segundo grado. Dicha ecuación tiene como solución:

$$\boxed{T_2 = k_1 + k_2 e^{-2Ct}} \tag{22}$$

$$T_2' = -2Ck_2 e^{-2Ct} \tag{23}$$

Con estas dos ecuaciones remplazamos en la ecuación 17

$$T_1 = \frac{-2}{\cancel{C}}\cancel{C}k_2 e^{-2Ct} + k_1 + k_2 e^{-2Ct} \tag{24}$$

$$\boxed{T_1 = -k_2 e^{-2Ct} + k1} \tag{25}$$

Donde k_1 y k_2 son constantes a determinar por las condiciones iniciales.

Sea T_1Inicial= 400 y T_2Inicial=200. Entonces

$$T_1(0) = -k_2 e^{2C(0)} + k_1 \tag{26}$$

$$\boxed{400 = -k_2 + k_1} \tag{27}$$

$$T_2(0) = k_1 + k_2 e^{-2C(0)} \tag{28}$$

$$\boxed{200 = k_1 + k_2} \tag{29}$$

Con las ecuaciones 27) y 29) encontramos que la constante $k_1 = 300$ y $k_2 = 100$

Con estas constantes obtenemos que las funciones solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\boxed{T_1 = -100e^{-2Ct} + 300}$$

(30)

$$\boxed{T_2 = 300 + 100e^{-2Ct}} \tag{31}$$