Tarea 2 — **February 25, 2022**

Métodos computacionales 2 — Presentado por:

Profesor: Manuel Alejandro Segura delgado

Daniel Salamanca R. 201915269

Sebastián Camilo Menjura 201913267

1 Colisiones 2D de duración finita (juguemos billar)

1. Lunar Rocket

   (a)

$$w = 2.6 \times 10^{-6} s^{-1}$$

   (b) Simulación

   (c)

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos a \tag{1}$$

   De la imagen 1 es posible definir la distancia entre la Nave y la luna ($r[t]$)

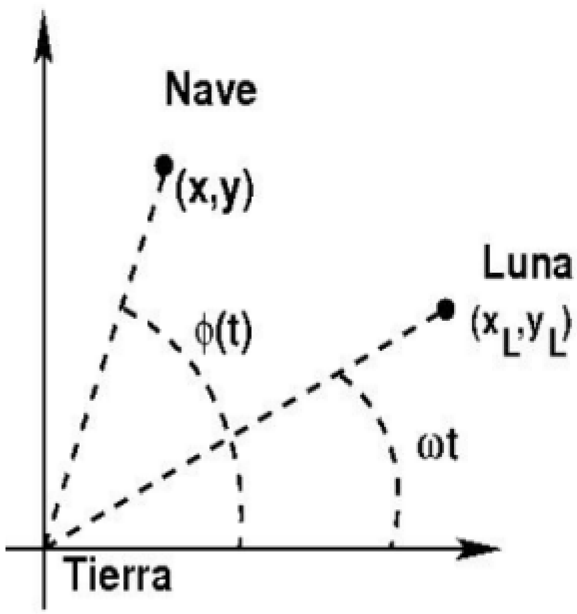

Figure 1: Diagrama de posición Nave-Luna

   haciendo uso de la ecuación (1) (ley de coseno) es posible obtener que

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2\ r(t)\ d\cos(\phi - wt)}$$

   (d) Con el fin de obtener el Hamiltoniano del sistema es necesario encontrar la energía cinética y potencial de los movimientos que lo conforman. Siendo este el lineal y el angular.

$$E_{Kr} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}P_r^2$$

$$E_{K\phi} = \frac{1}{2}Iw^2 = \frac{P_\phi^2}{2I} = \frac{P_\phi^2}{2mr^2}$$
$$E_{Vr} = G\frac{mM_T}{r}$$
$$E_{Vr} = G\frac{mM_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

De esta manera. Como

$$H = E_k - E_v = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mM_T}{r} - G\frac{mM_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

(e) Dado $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r}$ y $\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi}$ entonces

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m}$$
$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2}$$

De la misma manera, como $\dot{P}_r = \frac{-\partial H}{\partial r}$ y $\dot{P}_\phi = \frac{-\partial H}{\partial \phi}$ buscamos encontrar

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_L}\right) = -\frac{1}{r_L^2}\frac{\partial r_L}{\partial r} = -\frac{[r - d\cos(\phi - wt)]}{r_L^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r_L}\right) = -\frac{1}{r_L^2}\frac{[2rd\sin(\phi - wt)]}{2r_L} = \frac{-rd\sin(\phi - wt)}{r_L^3}$$

De esta manera

$$\dot{P}_r = \frac{P_\phi}{mr^3} - \frac{GmM_T}{r^2} - \frac{GmM_L}{r_L^3}[r - d\cos(\phi - wt)] \tag{2}$$

$$\dot{P}_\phi = -\frac{GmM_L}{r_L^3}[rd\sin(\phi - wt)] \tag{3}$$

(f) Como $\tilde{r} = \frac{r}{d}$ entonces $\dot{r} = d\dot{\tilde{r}}$, de la misma manera $\tilde{P}_r = \frac{P_r}{md}$ y $P_r = md\dot{\tilde{r}}$. Así $md\tilde{P}_r = md\dot{\tilde{r}}$, entonces $\tilde{P}_r = \dot{\tilde{r}}$.

Dado $\tilde{P}_\phi = \frac{P_\phi}{md^2}$ y $P_\phi = mr^2\phi$, con esto $\tilde{P}_\phi = \frac{r^2\dot{\phi}}{d^2}$ y $\frac{1}{\tilde{r}^2} = \frac{d^2}{r^2}$ entonces $\dot{\phi} = \frac{\tilde{P}_\phi}{\tilde{r}^2}$. Remplazando en la ecuación de momento en r

$$md\dot{\tilde{P}}_r = \frac{m^2d^2\tilde{P}_\phi^2}{m\tilde{r}^3d^3} - \frac{\Delta m}{\tilde{r}^2d^2} - \frac{GM_Lm[\tilde{r}d - d\cos(\phi - wt)]}{(\tilde{r}d^2 + d^2 - 2\tilde{r}d^2\cos(\phi - wt))^{3/2}}$$

Como $\tilde{r}'^2 = 1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - wt)$ y $\Delta\mu = \frac{GM_L}{d^3}$ se obtiene

$$\dot{\tilde{P}}_r = \frac{\tilde{P}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left[\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{N}{\tilde{r}'^3}(\tilde{r} - \cos(\phi - wt))\right] \tag{4}$$

De la misma manera

$$md^2\dot{\tilde{P}}_\phi = -\frac{GmM_L - \tilde{r}d^2\sin(\phi - wt)}{[\tilde{r}^2d^2 + d^2 - 2\tilde{r}d^2\cos(\phi - wt)]^{3/2}}$$

Con $\Delta\mu = \frac{GM_L}{d^3}$

$$\dot{\tilde{P}}_\phi = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3}\sin(\phi - wt)$$

(g) Dado $\tilde{P}_r{}^0 = \frac{P_r}{md}$ y $P_r = m\dot{r}$ entonces

$$\tilde{P}_r{}^0 = \frac{\dot{r}}{d} = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt}$$

Dada la magnitud del vector de posición $r = \sqrt{x^2+y^2}$ entonces

$$\tilde{P}_r{}^0 = \frac{1}{d}\frac{d}{dt}(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{d}\frac{2x\dot{x}+2y\dot{y}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{rd}$$

Dado que $\cos\phi = \frac{x}{r}$ y $\sin\phi = \frac{y}{r}$ se puede despejar y remplazar, obteniendo que

$$\tilde{P}_r{}^0 = \frac{\dot{x}}{d}\cos\phi + \frac{\dot{y}}{d}\sin\phi$$

En este punto, como $\tilde{V}_x = \frac{\dot{x}}{d} = \tilde{V}_0\cos\theta$ y de la misma manera $\tilde{V}_y = \tilde{V}_0\sin\theta$, entonces

$$\tilde{P}_r{}^0 = \tilde{V}_0\cos\theta\cos\phi + \tilde{V}_0\sin\theta\sin\phi = \tilde{V}_0\cos(\theta-\phi)$$

Ahora bien, para $\tilde{P}_\phi{}^0$ sabemos que $\tilde{P}_\phi{}^0 = \frac{P\phi}{md^2} = \frac{mr^2\dot{\phi}}{md^2}$. Por geometría sabemos que

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \to \dot{\phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)$$

De esta manera

$$\tilde{r}^2\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2} = \left(\frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2+y^2}\right)\tilde{r}^2$$

Usando la definición de la magnitud del vector de posición sabemos que, como $r^2 = x^2+y^2$, entonces

$$\tilde{r}^2\dot{\phi} = \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^2(\dot{y}x-\dot{x}y)$$

Similarmente a como se hizo para la expresión anterior, como $\dot{y}/r = \tilde{V}_0\sin\theta$ y $\dot{x}/r = \tilde{V}_0\cos\theta$ entonces

$$\frac{\tilde{r}^2}{r}(\tilde{V}_0\sin\theta\phi - \tilde{V}_0\cos\theta\sin\phi) = \frac{\tilde{r}^2}{r}\tilde{V}_0\sin(\theta-\phi)$$

De esta manera, como $\frac{\tilde{r}^2}{r} = \frac{r}{d} = \tilde{r}_0$ entonces

$$\tilde{P}_\phi{}^0 = \tilde{r}_0\tilde{V}_0\sin(\theta-\phi) \tag{5}$$