Navier-Stokes Equations

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{\text{T. temporal}} + \underbrace{\bar{u} \cdot (\nabla \bar{u})}_{\text{T. advectivo convectivo}} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\nabla P}_{\text{Grad presión}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \bar{u}}_{\text{T. viscoso}} + \bar{g} \pm \bar{F}$$ → [Son 3 ecuaciones en una sola]

Donde

- $\bar{u} = (u, v, w)$ (vector velocidad del fluido)
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$
- ν = viscosidad
- $\bar{g}$ (gravedad)
- $\bar{F}$ Fuerzas externas que afecta al fluido
- ρ densidad del fluido constante (fluido incompresible)

Expandimos en una dirección (en x)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{T. Temporal}} + \underbrace{\frac{u\,du}{\partial x} + \frac{v\,du}{\partial y} + \frac{w\,du}{\partial z}}_{\text{T. advectivo convectivo}} = 1/\rho \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{G P}} + \frac{v\,d^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{\nu\left(\frac{d^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{Termino Viscoso}}$$

Esta parte tiene que ver con la aceleración — "Aceleración"

Esta parte tiene que ver con las Fuerzas → Esfuerzos — "Resistencia"

Para saber que parte de la ecuación predomina tenemos el numero de reynolds

¿Que son entonces las ecuaciones de Navier stokes?

Son ecuaciones diferenciales parciales que describen el movimiento de un fluido Newtoniano incompresible

- Fluido Newtoniano → la viscosidad es constante
- Viscosidad → Resistencia de un fluido al movimiento
- Fluido Newtoniano incompresible → cumple lo anterior y su densidad no varia en el espacio ni en el tiempo.

2D Navier-stokes equations.

- Para describir el movimiento de un fluido usamos campos vectoriales los cuales en cada punto describen la dirección y velocidad de una partícula que pasa por allí por medio de un vector

- Puedes pensar en las ecuaciones de navier-Stokes como en la segunda ley de Newton pero para fluidos.

Para deducir esta formula comencemos con la segunda ley Newton

$$\overline{m\vec{a} = \Sigma \vec{F}} \quad 1.1)$$

Como las ecuaciones de Navier stokes trabaja no con partículas individuales sino con volumenes de fluido, Entonces

$$\frac{m\vec{a}}{V} \; \Sigma \frac{\vec{F}}{V} \quad 1.2)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{f} \quad 1.3)$$

Entonces sea $\vec{v}$ un campo vectorial tq:

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) \quad 1.4)$$

$$= \underbrace{u(x,y,z,t)}_{\begin{bmatrix}\text{componente}\\ \text{vel }(x)\end{bmatrix}}\hat{\imath} + \underbrace{v(x,y,z,t)}_{\begin{bmatrix}\text{componente}\\ \text{vel }(y)\end{bmatrix}}\hat{\jmath} + \underbrace{w(x,y,z,t)}_{\begin{bmatrix}\text{componente}\\ \text{vel }(z)\end{bmatrix}}\hat{k}$$

La derivada total de la velocidad con respeto al tiempo se puede expresar como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cancel{\frac{dt}{dt}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$1.5) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}w$$

Usando el gradiente tenemos que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} \quad 1.6)$$

y con esta ultima expresion, si remplazamos en 1.3) tenemos que

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)}_{\text{Hace referencia a la aceleracion y depende del tiempo y la posición}} = \underbrace{\Sigma \vec{f}}_{\text{Son las fuerzas que actuan dentro y sobre el fluido}} \quad 1.7)$$

Enfocandonos en tres fuerzas $(\vec{g}, \vec{P}, \mathcal{V})$

o $\vec{F} = m\vec{g}$ 1.8)

Dividiendo todo sobre volumen

$\vec{f} = \rho\vec{g}$ 1.9)

gravedad

Presión

1.10) $\vec{f} = -\nabla P$ Presión aplicada al fluido en un punto (x,y,t) a un tiempo (t)

Viscosidad

Un fluido se mueve por capas por lo general una capa de agua en el medio del fluido tiende a ir mas rapido que el agua a las orillas.

Un cambio de velocidad entre capas se debe a la fuerza de viscosidad

$$\vec{f} = \mu \cdot \nabla^2\vec{v} \quad 1.11)$$

Donde μ es una constante llamada viscosidad dinamica y depende de cada fluido

Juntando todos los resultados, llegamos a lo siguiente

$$1.12)\quad \underbrace{\overset{\text{densidad}}{\rho}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)}_{\text{aceleración}} = \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{gravedad}} - \overbrace{\nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\mu\cdot\nabla^2\vec{V}}_{\text{viscosidad}}$$

recordando que $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$

entonces 1.12) se puede expresar como 3 ecuaciones

En dirección (x)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$1.13)\quad \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

En direccion (y)

$$1.14)\quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

En direccion (z)

$$1.15)\quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Otra condicion vital para estos fluidos newtonianos incompresibles es

$$\nabla\vec{V} = 0 \quad 1.16)$$

Todo fluido que entra con un determinado volumen, sale.

y estas 4 ecuaciones tenemos todas las ecuaciones de Navier-stokes continuemos con navie stokes

llegamos a dos conclusiones para fluidos incompresibles

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}$$

[No tomamos en cuenta la gravedad]

Ahora definimos una función llamada Función de corriente $\vec{u}(x)$, de modo que para calcular el campo de velocidades a través de una operación vectorial.

$$\underbrace{\vec{V}}_{\text{campo vectorial}}=\underbrace{\nabla\times}_{\text{Rotacional}}\underbrace{\vec{u}(x)}_{\text{Función de corriente}}$$

Esta definición satisface que la divergencia del campo de velocidades sea igual a cero.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})=0$$

Sea $\psi=u(x,y)$

y $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$

$$\vec{V}=u(x,y,z,t)\hat{\imath}+V(x,y,z,t)\hat{\jmath}$$

entonces

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v=\frac{-\partial\psi}{\partial x}$$

componentes de velocidad

$$u(x,y)+v(x,y)=\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

$$V_x(x,y)\hat{\imath}+V_y(x,y)\hat{\jmath}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

- $V_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$
- $V_y=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Definición Función de corriente

Con ello podemos definir una nueva función denominada como vorticidad

$$\omega=\nabla\times\vec{V}$$

campo velocidades

$$\omega_z=\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

y la relacionamos con la función de corriente a través de

$$\vec{\omega}=\nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\nabla^2\vec{u}$$

Ecuación de Poisson

$$\Delta\varphi=f$$

$$\nabla^2\vec{u}=-\vec{\omega}$$

y con ello llegamos a que

$$\nu\nabla^2\vec{\omega}=[(\nabla\times u)\cdot\nabla]\vec{\omega}$$

2D Navier-Stokes equations

Estas ecuacione describen la dinamica de fluidos incomprensibles en terminos del campo de velocidades

Definimos una función potencial de corriente $\vec{u}(x)$, de modo que podemos calcular el campo de velocidades:

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{u}(x)$$

Esta función se define como aquella que cumple con las siguientes condiciones

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$v_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

2 Definimos otro campo vectorial denominado vorticidad.

Vorticidad Es una magnitud física empleada en mecanica de fluidos para cuantificar la rotación de un fluido

De manera matematica, la vorticidad es el campo vectorial definido por el rotacional del campo de velocidades

$$\omega = \nabla \times \vec{v}$$

Dado que el campo esta en 2 dimensiones, entonces tenemos que las velocidades no cambian en la dirección z. de modo que

$$\nabla \times \vec{v} = \left[\cancelto{0}{\frac{\partial \vec{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial z}}\right]\hat{i} + \left[\cancelto{0}{\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}}\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial \vec{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y}\right]\vec{z}$$

Obteniendo que:

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Para Hallar las relaciones entre la vorticidad y función de corriente podemos usar las ecuaciones de Navier-stokes

$$\nabla \times \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right) = \nabla \times \left(\frac{-1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times u) + \nabla \times ((u\cdot\nabla)u) = \cancelto{0}{-\frac{1}{\rho}\nabla \times (\nabla p)} + \nu(\nabla^2(\nabla \times u))$$

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u + \right]\omega\cancelto{0}{(\nabla\cdot u)} + u\cancelto{0}{(\nabla\cdot\omega)} = \nu\nabla^2\omega$$

$\downarrow$

Lo simplificamos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\omega = \nu\nabla^2\omega + (\omega\cdot\nabla)u$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega\cdot\nabla)u + \nu\nabla^2\omega$$

con $\nu \rightarrow$ viscosidad

Con esta expresión podemos derivar la ecuación

$$\vec{\omega} = \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla^2\vec{u}$$

y esta ultima expresión queda reducida a una ecuación de tipo Poisson

$$\nabla^2\vec{u} = -\vec{\omega}$$

Aplicando el operador Rotacional a las ecuaciones de Navier stokes se obtiene

$$\nu \nabla^2 \vec{\omega} = [(\nabla \times u)\cdot \nabla]\vec{\omega}$$

y finalmente encontramos las siguientes ecuaciones

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \omega$$

2) $$\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

Ahora si aplicamos el metodo de diferencias finitas podemos discretizar estas ecuaciones

Entonces sea

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$$

Podemos generar una aproximación para las segundas derivadas

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ij} \frac{1}{h^2}[u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}]$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{ij} = \frac{1}{h^2}[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}]$$

Donde h es el tamaño del paso

Entonces Remplazando estas expresiones en la ecuación 1, tenemos que

$$\frac{1}{h^2}(-2u_{i,j}) + \frac{1}{h^2}(-2u_{i,j}) + \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

$$+\frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) = \omega$$

$$\frac{1}{h^2}\left[-4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right] = \omega$$

$$-4u_{i,j} = \omega h^2 - u_{i,j-1} + u_{i,j+1}$$
$$- u_{i-1,j} - u_{i+1,j}$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - \omega h^2\right]$$

Ahora Hallemos la discretización para la segunda expresión

Usando las siguientes aproximaciones junto con las 2 anteriores para las segundas derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2h}[-u_{i,j-1} + u_{i,j+1}]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2h}[-\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2h}[-u_{i-1,j} + u_{i+1,j}]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{2h}[-\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}]$$

Remplazando tenemos que

$$\nu\left[\frac{1}{h^2}\left[\omega_{i-1,j}-\underline{2\omega_{i,j}}+\omega_{i+1,j}+\omega_{i,j-1}-\underline{2\omega_{i,j}}+\omega_{i,j+1}\right]\right]$$

$$\nu\left[\frac{1}{h^2}\left[-4\omega_{i,j}+\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}+\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}\right]\right]$$ lado izquierdo de la ecuación

Lado derecho ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2h}\left[-u_{i,j-1}+u_{i,j+1}\right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{1}{2h}\left[-\omega_{i-1,j}+\omega_{i+1,j}\right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4h^2}\left[\left(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i-1,j}-\omega_{i-1,j}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2h}\left[-u_{i-1,j}+u_{i+1,j}\right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{2h}\left[-\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j+1}\right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4h^2}\left[\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\right]$$

Juntando todo tenemos que:

$$\frac{\nu}{\cancel{h^2}}\left[-4\omega_{i,j}+\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}+\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}\right]=\frac{1}{4\cancel{h^2}}\left[\left(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i-1,j}-\omega_{i-1,j}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{4\cancel{h^2}}\left[\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\right]$$

$$-4\omega_{i,j}+\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}+\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}=\frac{1}{4\nu}\left[\left(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i-1,j}-\omega_{i-1,j}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4\nu}\left[\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\right]$$

$$\omega_{i,j}=\frac{1}{4}\left[\omega_{i+1,j}\ \omega_{i-1,j}+\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}\right]-\frac{1}{16\nu}\left[\left(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i-1,j}-\omega_{i-1,j}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{16\nu}\left[\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\right]$$