Práctico 9

BASE Y DIMENSIÓN.

1. En los siguientes casos, hallar una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y - z = 0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(2) = 0\}$.

   c) $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3x3}$, $S = \{A \in \mathcal{M}_{3x3} \colon A \text{ es simétrica}\}$.

   d) $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2}$, $S = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} \colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

2. En cada parte, el conjunto S es un conjunto generador del espacio vectorial V. Encontrar una base que sea un subconjunto de S.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,-1,2), (4,-3,7), (2,0,5), (1,2,6)\}$.

   b) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Sea S un subconjunto LI de V. Agregar vectores a S hasta conformar una base de V.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,0,2,2), (1,1,0,0)\}$.

   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{1 - x + x^2, x - x^2\}$.

4. En cada ítem probar que $\mathcal{B}$ es una base del espacio V, y hallar las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$.

   a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, y $v = (1,2,3)$.

   b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathcal{M}_{2x2}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$ si el conjunto $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[t]$ donde

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 + \alpha t + t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2.$$

6. **Rango.** En este ejercicio se vincula el rango de una matriz con la dimensión de cierto espacio asociado a ella. En cada parte se brinda una $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y se debe calcular:

   - $\operatorname{rango}(A)$
   - La dimensión del espacio $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1} : AX = 0\}$.
   - Verificar que $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rango}(A) = n$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

7. En cada caso se debe hallar bases de los subespacios S_1, S_2, $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$. En función de ello deducir cuándo la suma es directa.

   a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = z\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$.

   b) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \colon p(x) = ax^2, \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \colon p(x) = cx^2 + bx + c, \text{ con } b, c \in \mathbb{R}\}$.

8. Sea $\mathcal{B}_1 = \{(1,-2,1,1),(3,0,2,-2),(0,4,-1,1)\}$ base de S_1 y $\mathcal{B}_2 = \{(0,4,-1,1),(5,0,3,-1)\}$ base de S_2.

   a) Probar que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

   b) ¿ Se cumple que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$?

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y S_1, S_2 dos subespacios de V.

   a) Probar que $V = S_1 \oplus S_2$ si y sólo si $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$.

   b) Si $V = S_1 \oplus S_2$, probar que $dim(S_1) + dim(S_2) = dim(V)$.

   c) Si $dim(S_1) + dim(S_2) = dim(V)$, ¿ se cumple que $V = S_1 \oplus S_2$?. Demostrar o dar un contraejemplo.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B}_1$ base del subespacio S_1 y $\mathcal{B}_2$ base de S_2.

    a) Si $V = S_1 \oplus S_2$, probar que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V. ¿Vale el recíproco del resultado anterior?

    b) Si $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, ¿se cumple que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$? Demostrar o dar un contraejemplo.

    c) Si $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V y $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, probar que $V = S_1 \oplus S_2$.