Práctico 7

Espacios y Subespacios Vectoriales.

1. Investigar si $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial en caso de que las operaciones de suma y producto se definan de las siguientes maneras:

   a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y_1, x_1);$

   b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, 0);$

   c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   e) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|), \quad \lambda(x_1, y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|).$

2. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ dado por $V = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Definimos la suma $+_V$ como:

   $$(x_1, y_1, 1) +_V (x_2, y_2, 1) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, 1\right);$$

   y definimos $\times_V$ como:

   $$\lambda \times_V (x_1, y_1, 1) = (\lambda x, \lambda y, 1).$$

   Determinar si $(V, \mathbb{R}, +_V, \times_V)$ es un espacio vectorial.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. A partir de los axiomas de espacio vectorial, probar las siguientes propiedades (se pueden ver los axiomas en las notas).

   a) El neutro de la suma es único. Es decir, si $v_1, v_2 \in V$ verifican que $v_1 + v = v_2 + v = v$ para todo $v \in V$ entonces $v_1 = v_2$.

   b) El opuesto es único. Es decir, dado $v \in V$, si $v + v_1 = v + v_2 = O_V$, entonces $v_1 = v_2$.

   c) Sea $0 \in \mathbb{K}$ (el neutro del cuerpo con respecto a la suma). Para todo $v \in V$ se tiene que $0v = O_V$.

   d) Sea $O_V \in V$ (el neutro del espacio vectorial). Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda O_V = O_V$

   e) Probar que para todo $v \in V$, el opuesto de v es $(-1)v$, donde -1 es el opuesto de 1 en el cuerpo $\mathbb{K}$.

4. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   a) Sean $u, v \in V$ dos vectores tal que $3v + 5w = 7v - 2w$, mostrar que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda v = w$.

   b) Sea $v \in V$ tal que $3v = v$, probar que $v = 0$, es decir, v es el vector nulo.

5. Sea X un conjunto no vacío cualquiera, y $(V, \mathbb{K}, +, .)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones de X que toman valores en V. Es decir,

   $$\mathcal{F} = \{f \text{ tales que } f : X \to V\}.$$

   Definimos

   - suma de dos funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X;$
   - producto de una función f por un escalar λ: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in X.$

   Mostrar que $(\mathcal{F}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

6. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones reales de variable real. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}$ son subespacios vectoriales:

a) para un $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, el conjunto de las funciones f tales que $f(x_0) = 0$;

b) el conjunto de funciones f que tiene al menos una raíz. Es decir, aquellas funciones f para las que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

7. Determinar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales.

    a) El conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\colon\ A^T = A\}$.

    b) El conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\colon\ A^T = -A\}$.

    c) El conjunto de las matrices invertibles.

    d) El conjunto de las matrices no invertibles.

    e) El conjunto de matrices de rango k, para $k = 0, 1, \dots, n$;

    f) El conjunto de matrices de traza 0 (recordar que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal).

    g) El conjunto de matrices triangulares superiores.

    h) Fijado $X \in \mathbb{K}^n$, el conjunto de matrices A tales que $AX = 0$;

    i) Fijado $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ el conjunto de matrices A tales que $AB = BA$;

    j) el conjunto de matrices nilpotentes, es decir las matrices A tal que existe $k \in \mathbb{N}$ que verifica $A^k = 0$;

    k) el conjunto de matrices idempotentes, es decir las matrices A tal que $A^2 = A$.

8. Determinar en qué condiciones los siguientes conjuntos S son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

    a) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $S = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = d\}$.

    b) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : (x,y,z) \wedge (a,b,c) = v\}$.

    c) Fijo $r \in \mathbb{R}$, $S = \{(x,y,z) : \|(x,y,z)\| = r\}$.

9. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.

    a) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ considerar:

        1) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a+b+c = 2\}$;
        2) $S = \{(a,b,c) \in V;\ 3a-2 = 3b+c\}$;
        3) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a = b = c\}$;
        4) $S = \{(a, a+b, a+b+c) \in V;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$;
        5) $S = \{(b-6c, b, c) \in V;\ b,c \in \mathbb{R}\}$;
        6) $S = \{(b/c, b, c) \in V;\ b,c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\}$;
        7) $S = \{(x,y,z) \in V;\ z \geq x^2 + y\}$.

    b) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ considerar:

        1) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;
        2) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
        3) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;
        4) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;
        5) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$;
        6) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_i \leq x_j$ para todo $i \leq j\}$.

    c) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:

        1) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
        2) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
        3) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];$ el grado de p es $n\}$;

4) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(1-x) = p(1+x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
5) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(x) \leq p(2x)\}$;
6) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ |p(x)| \leq |p(2x)|\}$.

d) Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, considerar:

1) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
2) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
3) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es par$\}$.
4) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es impar$\}$;
5) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es periódica con período $\pi\}$;
6) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con 1 como raíz$\}$;
7) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con alguna raíz$\}$.

10. Sea (S) un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n incógnitas. Probar que las soluciones de (S) son un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

11. **Intersección de una colección de subespacios.**

a) Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección subespacios de un espacio vectorial V. Mostrar que la intersección $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ de todos los subespacios es un subespacio vectorial.

b) Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales. Mostrar que el conjunto de las funciones f reales y continuas tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ es un espacio vectorial real.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Dados W_1, W_2 dos subespacios de V. Probar que si $W = W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V entonces $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

13. **Espacios vectoriales de funciones.** Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios.

a) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es continua$\}$;
b) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es derivable$\}$;
c) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es derivable y $f' = -f\}$;
d) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es acotada$\}$.
e) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$;
f) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x \to +\infty} f(x)$ es finito$\}$;
g) $S = \left\{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ es finito}\right\}$;
h) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es integrable$\}$;
i) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es monótona$\}$.

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Probar que los conjuntos

$$\mathrm{Im} = \{v \in \mathcal{M}_{m \times 1} :\ \text{existe } u \in \mathcal{M}_{n \times 1} \text{ tal que } v = Au\} \subset \mathcal{M}_{m \times 1} \text{ y } \mathrm{Ker} = \{u \in \mathcal{M}_{n \times 1} : Au = 0_{m \times 1}\} \subset \mathcal{M}_{n \times 1},$$

son subespacios vectoriales.

15. Sea V un $\mathbb{K}$ esp vectorial. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ tres vectores de V. Probar que el conjunto

$$A = \{v \in V : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio de V.

16. **Suma de subespacios.** Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define el subconjunto de V dado por:

$$W = \{v \in V : \text{ tal que existen } w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2 \text{ con } v = w_1 + w_2\}.$$

   a) Probar que W es un subespacio de V.

   b) Mostrar que W contiene a W_1 y W_2.

   c) Probar que cualquier otro subespacio S que contenga a W_1 y W_2 también debe contener a W.
   Se dice que W es la suma de los subespacios W_1 y W_2.

17. Sean $V = \mathbb{R}^+$ y las siguientes operaciones $+ : V \times V \to V$ y $* : \mathbb{R} \times V \to V$ dadas por $+(u,v) = uv$ y $*(\lambda, u) = u^\lambda$. Probar que $(V, \mathbb{R}, +, *)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.