Práctico 8

Combinaciones Lineales, Dependencia e Independencia Lineal.

Combinaciones lineales y generadores

1. Investigar si el vector v se puede escribir como combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$, y en caso afirmativo hallar alguna de ellas.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,1),\ (3,-1,5),\ (1,1,0)\}$ y $v = (3,0,6)$.

   b) $\mathcal{A} = \{(1,3,2,1),\ (2,-2,-5,4),\ (2,-1,3,6)\}$ y $v = (2,5,-4,0)$.

   c) $\mathcal{A} = \{2-x,\ 2x-x^2\}$ y $v = 6-5x+x^2$.

   d) $\mathcal{A} = \{3x^3+x,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x-1\}$ y $v = -3x^3+4x^2+x-2$.

   e) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   f) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Hallar un generador finito de los siguientes subespacios S.

   a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

   b) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1-x) = p(1+x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

   c) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0\}$.

   d) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A$ es simétrica$\}$.

   e) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A$ es antisimétrica$\}$.

3. Determinar si el conjunto de vectores $\mathcal{A}$ es un generador del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \left\{(1,\pi), \left(\sqrt{2}, e\right)\right\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(0,1,1), (0,0,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{A} = \{(-1,2,0,0),\ (2,0,-1,0),\ (3,0,0,4),\ (0,0,5,0)\}$.

   d) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   e) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \left\{1,\ (x-2),\ (x-2)^2\right\}$.

4. Determinar si los conjuntos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{A}_1 = \{(1,2,-1),\ (0,1,1),\ (2,5,-1)\},\quad \mathcal{A}_2 = \{(-2,-6,0),\ (1,1,-2)\}.$$

Conjuntos LI, conjuntos LD y conjuntos generadores

5. En los siguientes casos determinar si el conjunto $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Cuando no lo sea encontrar un subconjunto linealmente independiente que permita expresar a los restantes vectores como combinación lineal del subconjunto seleccionado.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,3),\ (0,1,2),\ (1,1,1)\,,(2,3,4)\}$.

   b) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   c) $\mathcal{A} = \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde

   $$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x + 2, \quad p_4(x) = x^2 + 3x.$$

6. Discutir cuándo los siguientes conjuntos $\mathcal{A}$ son linealmente independientes según $a \in \mathbb{R}$. Cuando no lo sean, hallar un subconjunto linealmente independiente con la mayor cantidad de elementos posible.

   a) $\mathcal{A} = \{(a, a^2, 1),\ (-1, a, a),\ (0, 2a^2, a^2 + 1)\}$.

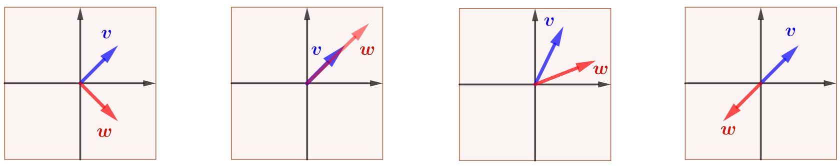
   b) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

7. El conjunto $\mathcal{A}$ dado genera un subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Eliminar elementos de $\mathcal{A}$ hasta conseguir un generador de S que sea LI.

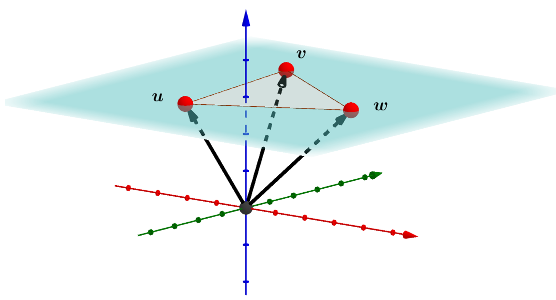
   $$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8. En los siguientes ejemplos determine en qué casos el conjunto es LI.

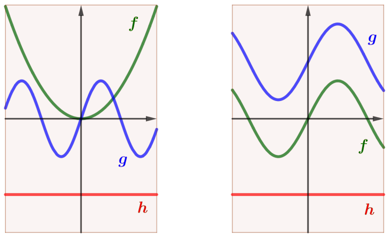
   a) En las siguientes figuras, determine si el conjunto $\{v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ es LI.



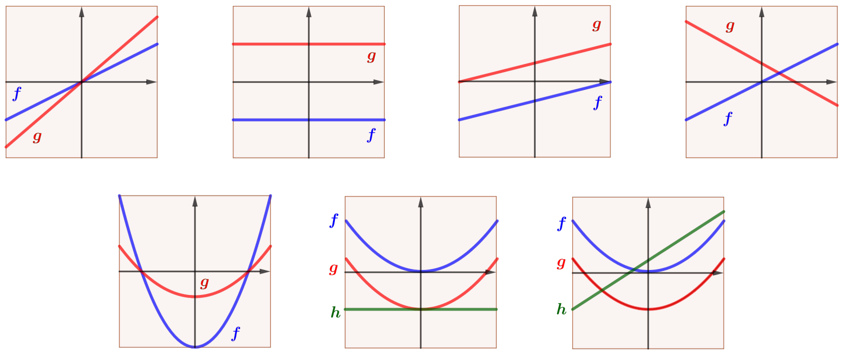
   b) En la siguientes figura, determine si el conjunto $\{u, v, w\} \subset R^3$ es LI.



c) Utilizando las siguientes figuras determine si el conjunto de funciones $\{f, g, h\}$ es LI.



d) En las siguientes figuras se expresan los gráficos (parciales) de funciones polnómicas, determine si $\{f, g\}$ o $\{f, g, h\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}_2[x]$.



9. Considere el siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \{\operatorname{sen}(x),\ \cos(x),\ \operatorname{sen}(2x),\ \cos(2x)\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ es un conjunto LI.

10. Sea V un espacio vectorial.

    a) Dado $\mathcal{A} \subset V$ un conjunto LI y $v \in V$ un vector, probar que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \{v\}$ es LI si y solo si $v \notin [\mathcal{A}]$.

    b) Sean u, v, w tres vectores de V. Probar que $\{u, v, w\}$ es LI si y solo si $\{u + v, v, w - v + u\}$ es LI.

11. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \{Av_1, Av_2, \dots, Av_\ell\} \subset \mathbb{R}^m$.
Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

    b) Si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

    c) Si $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente.

    En el caso de que alguna de las afirmaciones sea falsa dar un contraejemplo, y estudiar cuál o cuáles hipótesis adicionales sobre A permiten asegurar que la afirmación es verdadera.

12. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto LI de un espacio vectorial V. Se considera el vector

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad \text{con} \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

a) Asumiendo que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i - v) = 0$, probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

b) Bajo la hipótesis que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \ldots, (v_n - v)\}$ es LI.

c) Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \ldots, (v_n - v)\}$ es linealmente dependiente.

13. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de funciones con las operaciones usuales. Determinar si los siguientes conjuntos son LI.

$$a) \quad \left\{\sin(x),\ e^x,\ x^2\right\} \qquad b) \quad \{\cos(x),\ \cos(x+1),\ \cos(x+2).\}$$

14. Probar que el conjunto $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[x]$.

15. Probar que el conjunto $\{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $[0, 2\pi]$ a $\mathbb{R}$.