

Monografía

Modelo de propagación de incendios basado en la ecuación lineal de reacción-convección-difusión

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Informática

Daniel San Martín Reyes
<daniel.sanmartinr@sansano.usm.cl>

9 de marzo de 2018

1. Motivación

Los incendios forestales son uno de los fenómenos más dañinos en Chile, quemando miles de hectáreas de bosques, destruyendo la flora y la fauna, afectando el aire, los ciclos del agua y el ecosistema presente en estos lugares. Estos daños generan pérdidas económicas, ambientales y sociales que son combatidas por 2 sistemas de protección: uno compuesto por el sector privado y el otro por el estado.

El origen de un incendio puede estar relacionado con la negligencia de las personas al utilizar fuentes de calor sobre vegetación que actúa como combustible, una pobre cultura medioambiental e incluso de acciones deliberadas. Sin embargo, estas no son las únicas causas de los incendios, el fuego también puede comenzar bajo algunas condiciones ambientales como temperaturas extremas, períodos de sequía y fuertes vientos, entre otros, y que significan alrededor de 5000 y 7000 incendios forestales. En términos de superficie, el daño promedia unas 52000 hectáreas quemadas y en períodos extremos han oscilado entre 10000 y 101000 hectáreas ([CONAF, 2013](#)).

La motivación principal de este trabajo, es proponer un modelo matemático que permita simular la propagación del fuego en un incendio forestal, mediante el análisis de la ecuación de reacción-convección-difusión.

2. Estado del Arte

Según ([Preisler & Ager, 2013](#)) los modelos de incendios se pueden agrupar en tres tipos: los modelos de riesgo, de propagación y de efecto. Los primeros están asociados a cuantificar la probabilidad y potenciales efectos ante posibles episodios de incendio. Según las variables utilizadas se pueden encontrar distintos trabajos por ejemplo la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un incendio en función de la ubicación y el día del año ([Brillinger et al., 2003](#); [Hernandez-Magallanes, 2010](#)), peligro de incendio e índices climáticos ([Van Wagner, 1987](#); [Burgan, 1988](#)), entre otros ([Braun et al., 2010](#); [Ager et al., 2007](#); [Calkin et al., 2011](#)). El segundo grupo intenta modelar el movimiento del fuego y existen desde enfoques físicos ([Rothermel, 1972](#)) hasta modelos de regresión para estimar la tasa de propagación ([Sullivan,](#)

2009). Generalmente este tipo de modelos asume que el combustible (lugar donde ocurre el incendio) puede ser teselado por una malla regular en donde cada celda tiene asociada una probabilidad de quemarse y que depende de las condiciones de las celdas vecinas. Existen distintas herramientas asociadas a este tipo de modelos y pueden ser revisados en (Andrews, 1986; Finney, 2006, 1998; Finney et al., 2011, 2011). Por último, los modelos de efecto son importantes para estudiar la administración y gestión de los combustibles, por ejemplo el control de mortalidad de árboles o análisis de ecosistemas, entre otros (Larkin et al., 2009; Reinhardt, 2003; Robichaud et al., 2007).

3. Modelo

Para el trabajo se utilizará la ecuación de reacción-convección-difusión (Liu, 2009), definida por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \nabla^2 u - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + au, \quad (1)$$

que en este caso particular, u representa la temperatura en una cierta región $\Omega \in \mathbb{R}^n$. La constante $\mu > 0$ es la difusividad térmica, el vector $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$ es el campo de velocidad de un flujo de fluido, y $a(\mathbf{x})$ es la tasa de reacción. ∇^2 está definido por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (2)$$

denominado el operador Laplaciano. El gradiente de u se define como

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (3)$$

$\nabla \cdot (u \mathbf{v}) = \text{div}(u \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (u v_i)}{\partial x_i}$ denota la divergencia del vector $u \mathbf{v}$. Dado que la cinética de las reacciones son usualmente no-lineales, el término lineal au es una aproximación de los originados en problemas reales. Además, se requiere que el campo de velocidad \mathbf{v} debe satisfacer las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

donde p representa la presión, ρ la densidad del fluido, ν viscosidad dinámica del fluido, y $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ algunas fuerzas externas.

Vale mencionar que las condiciones de frontera de tipo Dirichlet se interpretan como fijar una temperatura en los bordes, mientras que las condiciones de tipo Neumann pueden representar un flujo de calor.

4. Contexto y Supuestos

Para simular el comportamiento de un incendio forestal, utilizaremos la EDP descrita anteriormente. Supondremos que el dominio de propagación del fuego será un terreno cuadrado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que por conveniencia será definido como $\Omega : [-1, 1]^2$. La variable que modelaremos será la temperatura $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que en este caso específico será definida como una función del espacio en 2D y tiempo $u(x, y, t)$. El campo vectorial $\mathbf{v}(x, y)$ representará el efecto del viento dentro del dominio Ω . Por último, utilizaremos el campo escalar $a(x, y)$ para representar la distribución del combustible dentro del dominio Ω . Con estos supuestos, el modelo se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \nabla^2 u - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + au \text{ en } \Omega \\ u|_{\Gamma} &= f \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\Gamma = \partial\Omega$ representa la frontera del dominio. Por simplicidad, en este ejemplo supondremos que en la frontera del dominio se cierra la propagación del incendio por medio de un cortafuegos. Además, es importante mencionar que $u_0(x, y)$ se interpreta como un foco inicial de incendio. Si bien por definición es necesario que $\mathbf{v}(x, y)$ debe satisfacer las ecuaciones de Navier-Stokes, solo se utilizaron campos vectoriales que parecieran un flujo de aire.

5. Metodología

Para la implementación del modelo, se utilizarán las herramientas entregadas por el curso *INF-510: Métodos Numéricos Computacionales* (Sauer, 2011; Fasshauer, 2007; Logan, 2013; Saad, 2003; Trefethen, 2000; Demmel, 1997; Trefethen & Bau III, 1997).

En particular, el método utilizado en este trabajo fue la matriz de diferenciación de Chebyshev junto a métodos clásicos de resolución de EDOs (Trefethen, 2000). Se realizó un esquema numérico en el cual las derivadas en el espacio fueron aproximadas por la matriz de diferenciación de Chebyshev y el dominio del tiempo fue aproximado utilizando el método de Euler.

La derivación del esquema numérico se presenta a continuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \nabla^2 u - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + au \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial(uv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(uv_2)}{\partial y} \right) + au \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} v_1 + u \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} v_2 + u \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + au, \end{aligned} \tag{6}$$

luego, sea D_N la matriz de diferenciación de Chebyshev y aplicando el método de Euler obtenemos

$$U_{i+1} \approx U_i + \Delta t (\mu(U_i \cdot (D_N^2)^T + D_N^2 \cdot U_i) - ((U_i \cdot D_N^T) \cdot V_1 + U_i \cdot (V_1 \cdot D_N) + (D_N \cdot U_i) \cdot V_2 + U_i \cdot (D_N \cdot V_2)) + AU_i). \quad (7)$$

U_i , A , V_1 y V_2 son matrices que representan la aproximación de la solución en la iteración i , la tasa de reacción y la primera y segunda componente del campo vectorial respectivamente. Dado que D_N es la misma matriz para la derivada con respecto a x e y , se utiliza $u \cdot D_N$ para derivar con respecto a x y $D_N \cdot u$ para derivar con respecto a y . Esto último es para ser consistente con la representación de *Python*. Vale mencionar que en un principio la iteración en el tiempo fue desarrollada con el método de *Euler* y *Runge-Kutta* de cuarto orden, pero se cambió a la implementación *odeint* de *Python*, para el cual se vectorizó el resultado de la operación de matrices descrito en la Ecuación (7).

6. Experimentos y Resultados

Los parámetros utilizados en la simulación fueron los siguientes:

- Número de nodos por eje x e y , $N_x = N_y = 40$.
- Constante de difusión $\mu = 0,8$.
- Paso de tiempo $\Delta t = 1e - 2$.
- Número de pasos en el tiempo $T = 20$.
- Condiciones de borde $f = 0$.
- Condición inicial $u_0(x, y) = \exp(-40((x + 0,5)^2 + (y + 0,5)^2))$ (Figura 1a).
- Campo vectorial $\mathbf{v}(x, y) = (1, \sin(x^2 + y^2))$ (Figura 1b).
- Tasa de reacción $a(x, y) = 10S(x, y)$, donde $S(x, y) = G(2x, 2y) + 0,8G(2x + 1,25, 2y + 1,25) + 0,5G(2x - 1,25, 4y + 1,25) - 0,5G(3x - 1,25, 3y - 1,25) + 0,35G(2x + 1,25, 2y - 1,25) + 0,8G(x - 1,25, 3y + 1,5) + 1,2G(x + 1,25, 3y - 1,85)$, y $G(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ (Figura 1c).

Los resultados del experimento se presentan en la Figura 2.

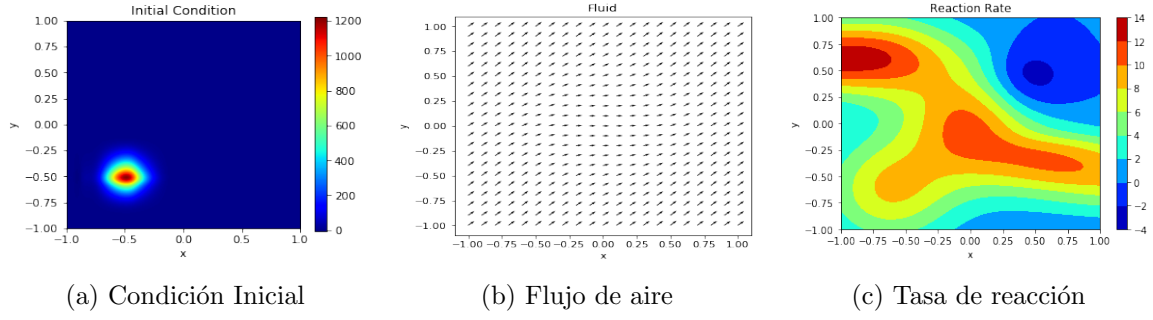


Figura 1: Campos utilizados.

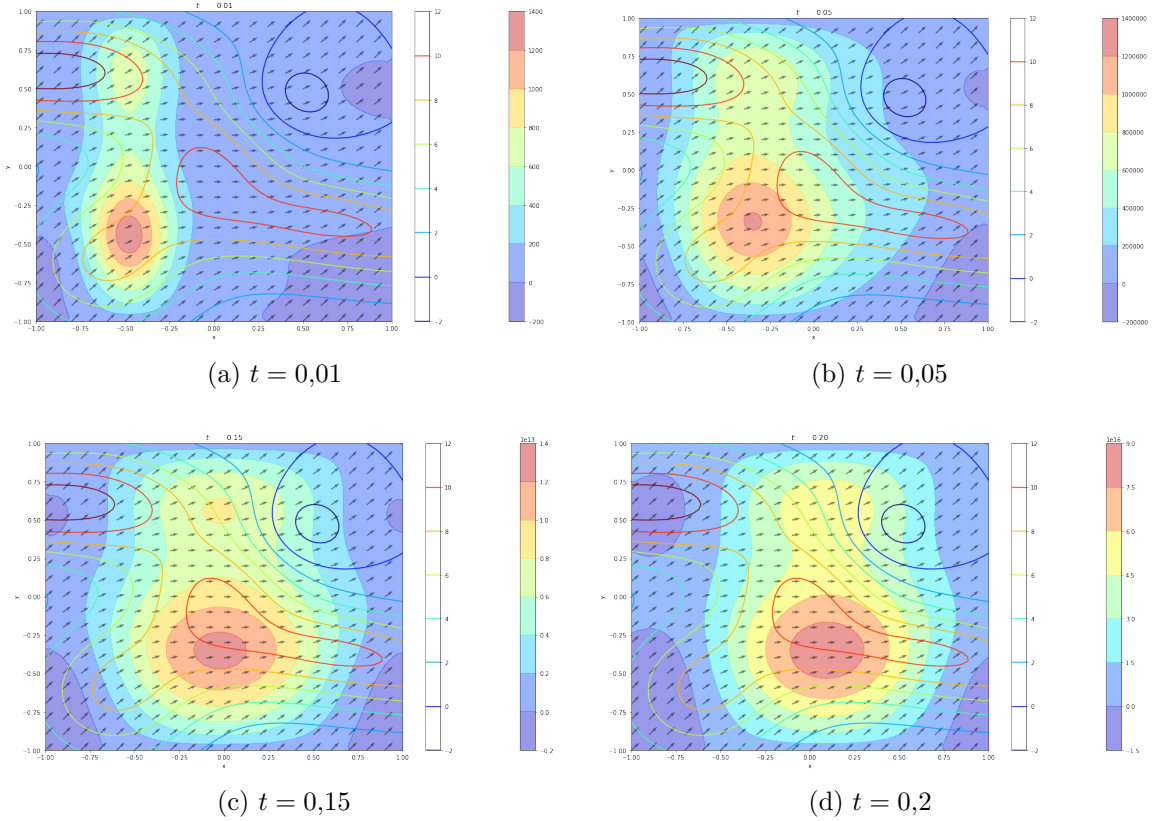


Figura 2: Resultados del experimento.

7. Comentarios y Conclusiones

De los Figura 2 podemos apreciar el efecto de la tasa de reacción, la cual pareciera reactivar el incendio al aumentar la temperatura luego de un período en el cual el calor se difunde. Además, notamos el efecto del campo vectorial el cual transfiere el calor, mediante convección, a las zonas en las cuales apunta este flujo.

Para una primera aproximación a la simulación de incendios, los resultados cualitativos parecieran tener sentido con la propagación del fuego. A nivel de complejidad computacional, no se realizaron pruebas de alta resolución, pero aún así no pareciera presentar problemas más allá de los típicos en la resolución de problemas de este tipo.

Como trabajo futuro se espera: a) profundizar el análisis de los componentes de un incendio y validar su modelamiento junto a expertos en el área y b) incluir componentes estocásticas para mejorar el alcance y realismo del modelo, una vez que la versión determinista cumpla con las expectativas mínimas establecidas por las herramientas que actualmente existen y la potencial utilidad del trabajo.

Referencias

- Ager, A. A., Finney, M. A., Kerns, B. K., & Maffei, H. (2007). Modeling wildfire risk to northern spotted owl (*strix occidentalis caurina*) habitat in central oregon, usa. *Forest Ecology and Management*, 246(1), 45–56.
- Andrews, P. L. (1986). Behave: fire behavior prediction and fuel modeling system-burn subsystem, part 1.
- Braun, W. J., Jones, B. L., Lee, J. S., Woolford, D. G., & Wotton, B. M. (2010). Forest fire risk assessment: an illustrative example from ontario, canada. *Journal of Probability and Statistics*, 2010.
- Brillinger, D. R., Preisler, H. K., & Benoit, J. W. (2003). Risk assessment: a forest fire example. *Lecture Notes-Monograph Series*, 177–196.
- Burgan, R. E. (1988). 1988 revisions to the 1978 national fire-danger rating system. Technical report, US Department of Agriculture, Forest Service, Southeastern Forest Experiment Station.
- Calkin, D. E., Ager, A. A., Thompson, M. P., Finney, M. A., Lee, D. C., Quigley, T. M., McHugh, C. W., Riley, K. L., & Gilbertson-Day, J. M. (2011). A comparative risk assessment framework for wildland fire management: the 2010 cohesive strategy science report.
- CONAF (2013). Incendios forestales en chile. <http://www.conaf.cl/incendios-forestales/incendios-forestales-en-chile/>. Online; accessed 25 November 2017.
- Demmel, J. W. (1997). *Applied numerical linear algebra*. Siam.
- Fasshauer, G. E. (2007). *Meshfree approximation methods with MATLAB*, volume 6. World Scientific.

- Finney, M. A. (1998). *FARSITE, Fire Area Simulator—model development and evaluation*, volume 3. US Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station Ogden, UT.
- Finney, M. A. (2006). An overview of flammap fire modeling capabilities.
- Finney, M. A., Grenfell, I. C., McHugh, C. W., Seli, R. C., Trethewey, D., Stratton, R. D., & Brittain, S. (2011). A method for ensemble wildland fire simulation. *Environmental Modeling & Assessment*, 16(2), 153–167.
- Finney, M. A., McHugh, C. W., Grenfell, I. C., Riley, K. L., & Short, K. C. (2011). A simulation of probabilistic wildfire risk components for the continental united states. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 25(7), 973–1000.
- Hernandez-Magallanes, I. (2010). *Integrating grouped and ungrouped data: the point process case*. PhD thesis, PhD Dissertation, Statistics Department, University of California, Berkeley.
- Larkin, N. K., O’Neill, S. M., Solomon, R., Raffuse, S., Strand, T., Sullivan, D. C., Krull, C., Rorig, M., Peterson, J., & Ferguson, S. A. (2009). The bluesky smoke modeling framework. *International Journal of Wildland Fire*, 18.
- Liu, W. (2009). *Elementary feedback stabilization of the linear reaction-convection-diffusion equation and the wave equation*, volume 66. Springer Science & Business Media.
- Logan, J. D. (2013). *Applied mathematics*. John Wiley & Sons.
- Preisler, H. K. & Ager, A. A. (2013). Forest-fire models. *Encyclopedia of Environmetrics*.
- Reinhardt, E. D. (2003). Using fofem 5.0 to estimate tree mortality, fuel consumption, smoke production and soil heating from wildland fire. In *Proceedings of the 2nd International Wildland Fire Ecology and Fire Management Congress and 5th Symposium on Fire and Forest Meteorology*, (pp. 16–20).
- Robichaud, P., Elliot, W., Pierson, F., Hall, D., & Moffet, C. (2007). Predicting postfire erosion and mitigation effectiveness with a web-based probabilistic erosion model. *Catena*, 71(2), 229–241.
- Rothermel, R. C. (1972). A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels.
- Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems*. Siam.
- Sauer, T. (2011). *Numerical Analysis* (2nd ed.). USA: Addison-Wesley Publishing Company.
- Sullivan, A. L. (2009). Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: Simulation and mathematical analogue models. *International Journal of Wildland Fire*, 18(4), 387–403.
- Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*, volume 10. Siam.
- Trefethen, L. N. & Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam.
- Van Wagner, C. (1987). Development and structure of the canadian forest fireweather index system. In *Can. For. Serv., Forestry Tech. Rep.* Citeseer.