

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 656

# **Bojanje grafova prilagodljivim metaheurističkim postupcima**

Dino Šantl

Zagreb, lipanj 2014.

*Umjesto ove stranice umetnite izvornik Vašeg rada.*  
*Da bi ste uklonili ovu stranicu obrišite naredbu \izvornik.*

*Zahvaljujem se roditeljima na podršci, bratu što je izdržao kao cimer te prijateljima na slobodnom vremenu.*

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Sažetci korištenih znanstvenih članaka . . . . .	2
<b>2. Formalni opis problema</b>	<b>4</b>
2.1. Tehnički opis problema . . . . .	4
2.1.1. Ulazni i izlazni podaci . . . . .	5
2.2. Matematički opis problema . . . . .	6
2.2.1. Definicije za klasičan problem bojanja grafova . . . . .	6
2.2.2. Bojanje težinskih grafova . . . . .	10
2.3. Analiza problema bojanja težinskih grafova . . . . .	12
2.3.1. Prostor pretrage stanja . . . . .	12
2.3.2. Pozadina problema iz perspektive računske teorije složenosti .	16
2.3.3. Posljedica " <i>No free lunch</i> " teorema . . . . .	17
<b>3. Algoritmi</b>	<b>19</b>
3.1. Uvod . . . . .	19
3.1.1. Mogući problemi . . . . .	19
3.2. Pohlepni algoritam . . . . .	20
3.2.1. Neispravnost pohlepnog algoritma . . . . .	21
3.3. Agentski algoritam . . . . .	23
3.3.1. Parametri algoritma . . . . .	23
3.3.2. Detalji algoritma . . . . .	24
3.3.3. Karakteristike algoritma . . . . .	25
3.4. Algoritam evolucijske strategije . . . . .	26
3.4.1. Genetski algoritam . . . . .	26
3.4.2. Evolucijska strategija . . . . .	27
3.4.3. Parametri algoritma . . . . .	27
3.4.4. Detalji algoritma . . . . .	28

3.4.5.	Karakteristike algoritma . . . . .	29
3.5.	Simulirano kaljenje . . . . .	29
3.5.1.	Parametri algoritma . . . . .	29
3.5.2.	Detalji algoritma . . . . .	30
3.5.3.	Karakteristike algoritma . . . . .	31
3.6.	Genetsko kaljenje . . . . .	31
3.6.1.	Parametri algoritma . . . . .	31
3.6.2.	Detalji algoritma . . . . .	32
3.6.3.	Karakteristike algoritma . . . . .	33
3.7.	Pronalaženje najpogodnijeg pohlepnog algoritma . . . . .	33
3.8.	Tuneliranje . . . . .	34
3.9.	Upravljanje postotkom promijenjenih čvorova . . . . .	35
<b>4.</b>	<b>Programsko rješenje</b>	<b>36</b>
4.0.1.	Modul <i>input</i> . . . . .	37
4.0.2.	Modul " <i>output</i> " . . . . .	37
4.0.3.	Modul " <i>algorithm</i> " . . . . .	37
4.0.4.	Modul " <i>unit</i> " . . . . .	39
<b>5.</b>	<b>Rezultati</b>	<b>40</b>
5.1.	Karakteristike računala korištenog pri ispitivanju . . . . .	40
5.2.	Metode ispitivanja algoritama . . . . .	40
5.2.1.	Ispitivanje metaheuristika . . . . .	40
5.3.	Grafovi za ispitivanje . . . . .	41
5.4.	Slučajno pretraživanje . . . . .	41
5.5.	Agentski algoritam . . . . .	42
5.6.	Evolucijska strategija . . . . .	47
5.7.	Simulirano kaljenje . . . . .	50
5.8.	Genetsko kaljenje . . . . .	52
5.9.	Usporedba metaheuristika . . . . .	52
5.10.	Minimizacija postotka promijenjenih čvorova . . . . .	54
5.11.	Metode strojnog učenja za odabir pohlepnog algoritma . . . . .	56
5.12.	Ispitivanje nad <i>DIMACS</i> bazom grafova . . . . .	60
<b>6.</b>	<b>Zaključak</b>	<b>71</b>
	<b>Literatura</b>	<b>72</b>

# 1. Uvod

U ovom radu obrađuje se jedna od inačica matematičkog problema poznatog pod nazivom bojanje grafa (engl. *graph coloring*). Motivacija za rješavanje ovog problema dolazi iz domene telekomunikacija. Problem dodjeljivanja frekvencija (kôdova) s ciljem da ne dolazi do međusobne interferencije može se lako prevesti u problem bojanja grafova. Bojanje grafova poznat je matematički problem i postoji više smjerova za njegovo rješavanje na računalu [9]. Specifičnost ovog problema su zadana ograničenja. Za razliku od klasičnog bojanja grafa, ovaj problem modeliran je pomoću težinskog grafa. Cilj je isti, obojiti graf tako da dva susjedna čvora nemaju istu boju. Ograničenja koja se pojavljuju vezana su uz dostupnost boja za svaki čvor i dodatne informacije koje svaki čvor posjeduje. U radu se prvo analizira matematički problem. Kako je problem iz perspektive računarske teorije *NP-težak* i nije poznato postoji li deterministički algoritam koji bi mogao veće instance problema rješavati u kratkom vremenskom roku, proučavaju se različiti heuristički pristupi. Osim toga analiza problema veoma je važna kako bi se dobila mjera u kojoj je problem rješiv na računalu. Nakon teorijske obrade problema, obrađuju se metaheuristički postupci koji su korišteni u radu. Za ovaj rad posebno je izrađeno okruženje za razvoj algoritama i alata za analizu problema. U radu se daje pogled na izrađenu infrastrukturu. Na kraju su obavljena mjerenja te analiza rezultata. Kako se rad temelji na metaheurističkim postupcima, važno je odrediti ponašanje parametara s različitim vrstama grafova, što daje temeljno znanje o konstrukciji samopodešavajućih metaheuristika. Nakon mjerenja donose se zaključci i smjernice za daljnji rad na problemu. U praksi potrebno je konstruirati algoritam koji zahtijeva malo vremenskih i memorijskih resursa. Grafovi koji se mogu pojaviti kao ulaz mogu biti veoma veliki i gusti, što znači da je uz samo ispitivanje ponašanja heuristika potrebno razmišljati i o konkretnim implementacijama. Neke heuristike već same po sebi zahtijevaju dosta resursa. Veoma važan dio rada je istražiti isplati li se koristiti heuristike koje su malo zahtjevnije u cilju dobivanja boljeg rješenja. Ovaj rad je uvod u dizajniranje konačnog algoritma koji bi mogao biti primjenjiv u praksi.

## 1.1. Sažetci korištenih znanstvenih članaka

### **An Efficient GA with Multipoint Guided Mutation for Graph Coloring Problems**

[16]. Rad opisuje rješavanje problema bojanja grafova pomoću genetskog algoritma. Posebna pažnja posvećena je operatoru mutacije. Jedinke su prikazane nizom cijelih brojeva. Svakom čvoru u grafu pridružen je jedinstveni cijeli broj – identifikacija. Jedinica je prikazana nizom u kojem je svakoj identifikaciji (čvoru) pridružen broj boje. Funkcija cilja je broj korištenih boja. Inicijalna populacija generira se slučajnim dodjeljivanjem boja svakom čvoru u grafu. Dodatno se koristi operator ispravaka koji popravlja jedinku tako da izabere dva susjedna čvora koji imaju istu boju i zatim jednome od njih promijeni boju. Mutacija se vrši nad jedinkom tako da se prvo reducira broj korištenih boja. To se može napraviti tako da se odaberu dva čvora i pridruži im se boja koja nije jedna od dvije odabrane. Zatim se primijeni operator ispravaka nad tom jedinkom. To se sve ponavlja sve dok se ne generira legalno pobojeni graf. Rezultati su uspoređivani s klasičnim implementacijama genetskih algoritama i dobiveni su bolji rezultati, ali u zaključku se navodi kako bi algoritam trebalo poboljšati da bi vrijeme izvođenja na većim i kompleksnijim grafovima bilo bolje. Ispitivanje se obavljalo nad nekim primjerima iz DIMACS baze.

**Efficient Graph Coloring With Parallel Genetic Algorithms** [10]. Koristi se paralelni genetski algoritam, i to migracijski model. Osim toga, definirani su i novi genetski operatori. Jedinica je prikazana pomoću particije skupa.

Ispitivanje je vršeno nad DIMACS bazom. Dobiveni su rezultati:

1. Uvijek je bolje koristiti migraciju od izolacije. Za neke se operatore može odrediti najbolji parametar, dok za većinu drugih to nije pronađeno.
2. U migraciji je bolje koristiti najbolje jedinke. Samo u nekim slučajevima kod CEX operatora bolje je koristiti slučajno odabrane jedinke.
3. First Fit je uvijek bolja mutacija od Transposition mutacije. First Fit najbolje se ponaša uz CEX i GPX operator. Transposition mutacija relativno dobro radi sa SPPX operatorom.
4. CEX i GPX operatori bili su najbolji uz korištenje First Fit mutacije. Nakon toga slijedi USIX. SPPX je jako brz operator, ali da bi bio uspješan, potrebno ga je izvršiti u više iteracija.
5. Najbrži operator križanja je CEX s First Fit mutacijom. Najsporiji je UISX.

**An ACO Algorithm for the Graph Coloring Problem [17].** Opisuje se jedna inačica ACO (engl. *Ant colony optimization*) algoritma. Ideja je u svakom koraku bojati jednom bojom (odabiru se čvorovi koji će se bojati u zadanu boju). Radi se o proširenju ANTCOL-a. Uz kemijske se tragove dodaje heuristika (npr. broj čvorova koji su iste boje kao i trenutni korak). Graf koji mravi rješavaju nije originalni graf koji je zadan, već je to graf gdje su povezana dva čvora koja u originalnom grafu nisu susjedna. Prema tome se računa vjerojatnost da se nekom čvoru pridoda neka boja.

**Breaking the Symmetry of the Graph Colouring Problem with Genetic Algorithms [12].** Razbija se simetrija u klasičnom problemu bojanja grafova. Različite jedinice mogu predstavljati isto pobojane grafove. Problem se pokušava riješiti tako da se na početku fiksiraju boje za određene čvorove. U našem problemu, članak se može koristiti kod pristupa pri pohlepnom algoritmu.

**New Graph Coloring Algorithms [1].** Članak koji opisuje heuristike koje se koriste u pohlepnim algoritmima. Članak donosi ideje koje se lako implementiraju i daju dobre rezultate. Neke vrste bojanja i neke vrste sortiranja ideje vuku iz ovog članka (npr. SDO-LDO).

**Graph Coloring Algorithms for Assignment Problems in Radio Networks [4].** Problem koji je veoma sličan praktičnoj primjeni problema koji se rješava. Koriste se različiti algoritmi i uspoređuju se rezultati. Cilj rada je istražiti problem i pokazati koji algoritmi, tj. heuristike, su efikasne.

**Evolutionary Algorithms for Real-World Instances of the Automatic Frequency Planning Problem in GSM Networks [11].** Rad koji je vrlo sličan problematiki koja se rješava u diplomskom radu. U radu je primijećeno da operator križanja mora biti vrlo napredan ili ga uopće ne koristiti, te se predlaže korištenje evolucijske strategije  $(\mu, \lambda)$

**Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation; Part II, Graph Coloring and Number Partitioning [8].** Opisuje se korištenje simuliranog kaljenja u optimizacijskim algoritmima. Pokazuje se osnovna struktura simuliranog kaljenja i predlažu se nadogradnje kako bi metaheuristika dala bolje rezultate.

**Genetic Annealing Optimization: Design and Real World Applications [5].** Jedan od rijetkih članaka koji opisuje metaheuristiku – genetsko kaljenje. Analizira se metaheuristika u kojoj su uzete dobre strane genetskog algoritma i dobre strane simuliranog kaljenja. Algoritam pokazuje dobre rezultate, ali nedostatak može predstavljati velika populacija za koju je potrebno računati funkcije cilja čija je vremenska složenost velika.



## 2. Formalni opis problema

U ovom poglavlju opisuje se problem bojanja grafova i njegova primjena u području telekomunikacija. Opisuje se konkretan problem u telekomunikacijama uz pretpostavke i ograničenja. Zatim se isti problem opisuje pomoću matematičkog modela, tj. problema bojanja grafova. Kreće se od općenitog problema bojanja grafova, a zatim se matematički model prilagođava konkretnom telekomunikacijskom problemu.

### 2.1. Tehnički opis problema

Za opis problema dovoljno je pretpostaviti da postoji korisnikova oprema (što je najčešće mobilni uređaj) i bazna stanica. Bazne stanice geografski su statične, za razliku od mobilnih uređaja koji to nisu. Ono što se u ovom radu naziva baznom stanicom je radijska pristupna mreža (engl. *Radio Access Network*) (*RAN*). *RAN* je dio telekomunikacijskog sustava i nalazi se između opreme korisnika i jezgre mreže. To je sloj u mreži koji je zaslužan za prenošenje komunikacije između mobilnog uređaja do antene i od antene do drugog mobilnog uređaja.

Za što kvalitetniji rad mreže potrebno je optimirati parametre *RAN*-a. Jedan od parametara je *scrambling* kôd. *Scrambling* kôd služi kako bi mobilni uređaj mogao razlikovati bazne stanice. Svakoj baznoj stanici potrebno je pridružiti različit kôd. Problem je u tome što je dostupno samo 512 različitih kodova. To znači da neke bazne stanice moraju imati isti kôd (ako se u sustavu nalazi više od 512 baznih stanica). Ako neke dvije bazne stanice imaju isti kôd i mobilni uređaj se nalazi u dosegu signala od obje stanice, tada uređaj ne može odrediti s kojom baznom stanicom komunicira. Tada može doći do prekida poziva, što uzrokuje pad kvalitete usluge.

Potrebno je dodijeliti *scrambling* kôdove tako da dvije bazne stanice koje mogu biti istovremeno vezane za jedan mobilni uređaj nemaju isti kôd ili ako je to nemoguće, dodijeliti kôdove tako da je negativan utjecaj na kvalitetu usluge što manji. Postoje još neka tehnička ograničenja koja je potrebno uvažiti, a bit će navedena u nastavku.

Iako postoji 512 različitih kôdova, svaka bazna stanica ima ograničen skup kôdova

koje može koristiti. Za svaku baznu stanicu zadan je skup mogućih kôdova. Za neke bazne stanice postoji svojstvo nepromjenjivosti, što znači da kôd koji je trenutno zadan za tu baznu stanicu mora ostati takav. Takve se vrste baznih stanica nazivaju **nepromjenjivima**. Početno stanje mreže definirano je kôdovima koji su pridijeljeni nekoj baznoj stanici. Osim toga, za svaku baznu stanicu poznata je njezina vrsta. Vrsta može biti označena slovima: *A*, *B* ili *C*. Bazne stanice različitih vrsta ne utječu jedna na drugu.

### 2.1.1. Ulazni i izlazni podaci

Ulaz algoritma je inicijalno stanje mreže. Za svaku baznu stanicu poznat je trenutni kôd koji koristi i sva pravila koja moraju biti zadovoljena. Izlaz algoritma je skup uređenih parova, gdje je prvi element identifikator bazne stanice, a drugi element pripadajući kôd. U navedenom popisu umjesto pojma bazne stanice koristi se čvor, a naziv će biti opravdan u nastavku.

#### Ulazni podaci

1. Popis i definicija domene boja (skupova boja)
2. Popis čvorova (baznih stanica).
  - (a) Oznaka čvora
  - (b) Vrsta čvora (grupa) – *A*, *B* ili *C*
  - (c) Oznaka domene za boju čvora (koji skup boja koristi)
  - (d) Početna boja za čvor
  - (e) Oznaka je li čvor nepromjenjiv
3. Popis bridova

#### Izlazni podaci

Kao izlaz algoritma koristi se niz parova brojeva  $(i, c)$  gdje je *i* oznaka za baznu stanicu, a *c* je kôd (boja) čvora.

## 2.2. Matematički opis problema

Potrebno je modelirati problem u kojem postoji *bazna stanica* i veze između istih. Veze predstavljaju mjeru u kojoj jedna bazna stanica utječe na drugu. Jedan od mogućih modela je graf. Čvorovi će predstavljati bazne stanice, a jakost će između dvije bazne stanice biti modelirana pomoću težine brida. U nastavku, bazna stanica nazivat će se čvorom. Nad ovako postavljenim grafom problem je dodijeliti kôdove tako da nema bridova koji na svojim krajevima imaju čvor s istim kôdom. Problem je poznat pod nazivom *bojanje grafa*. Kako je uobičajeno pričati o bojama čvora (a ne o kôdovima), od sad pa nadalje *scrambling* kôd nazivat će se bojom čvora. U nastavku će prvo biti opisan klasičan problem bojanja grafova, gdje se promatraju bestežinski grafovi (oni čiji bridovi nemaju težine). Nakon toga problem se poopćuje na težinske grafove, čime se modelira prethodno opisan problem.

### 2.2.1. Definicije za klasičan problem bojanja grafova

Najprije se definiraju matematički pojmovi. Zatim se formalno opisuje problem bojanja grafova. Uz to se nadovezuje teorija izračunljivosti.

#### Pojam grafa

**Definicija 1.** Jednostavni graf  $G$  sastoji se od nepraznog konačnog skupa  $V(G)$ , čije elemente nazivamo čvorovi grafa  $G$  i konačnog skupa  $E(G)$  različitih dvočlanih podskupova  $V(G)$  koje zovemo bridovi.

**Definicija 2.** Skup vrhova koji su susjedni vrhu  $v$  zovemo susjedstvo vrha  $v$  i označavamo oznakom  $H(v)$ .

**Definicija 3.** Stupanj vrha  $v$  grafa  $G$  jednak je broju bridova koji su vezani na  $v$ . Označavamo ga s  $d(v)$ .

**Definicija 4.** Neka je  $G$  jednostavan graf i  $\omega$  funkcija  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Par  $(G, \omega)$  naziva se težinski graf. Pri čemu funkcija  $\omega$  svakom bridu iz  $G$  dodjeljuje jedan element iz skupa realnih brojeva. Neka je  $e$  neki brid grafa  $G$ , njegova težina označena je s  $\omega(e)$ .

#### Definicija bojanja grafova

**Definicija 5.** Definiramo funkciju  $\phi : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , koja svakom čvoru  $u$  grafu pridružuje jedan prirodan broj koji  $\phi(v)$ , gdje je  $v$  čvor u grafu  $G$ . Broj  $\phi(v)$  nazivamo boja čvora, a funkciju  $\phi$  nazivamo *bojanje grafa*.

**Definicija 6.** Bojanje grafa s najviše  $k$  boja nazivamo  **$k$ -bojanje** grafa.

**Definicija 7.** Ako se graf može obojiti s najviše  $k$  boja, tada takvo bojanje nazivamo **legalno  $k$ -bojanje** grafa.

**Definicija 8.** Graf je  **$k$ -obojev** ako postoji legalno  $k$ -bojanje grafa.

**Definicija 9.** Ako je graf  $G$   $k$ -obojev, ali nije  **$(k-1)$ -obojev** tada kažemo da je  $k$  kromatski broj grafa  $G$ , gdje se koristi oznaka  $\chi(G) = k$

**Definicija 10.** Podskup skupa  $V(G)$  nazivamo **nezavisni skup** ako u njemu ne postoje dva čvora koja su susjedna.

**Definicija 11.** Brid koji spaja dva čvora iste boje nazivamo **konfliktnim bridom**.

**Definicija 12.** Dva čvora koja spaja konfliktni brid nazivamo **konfliktnim čvorovima**.

**Definicija 13.** Particiju skupa  $V(G)$  na  $k$  disjunktne neprazne podskupove  $V_1, \dots, V_k$  tako da vrijedi  $V(G) = \bigcup_{j=1}^k V_j$  zovemo  **$k$ -dioba** grafa  $G$ . Ako su podskupovi  $V_1, \dots, V_k$  ujedno i nezavisni skupovi, onda se to naziva **legalna  $k$ -dioba** grafa  $G$ .

**Teorem 1.** Graf  $G$  je  **$k$ -obojev** ako postoji **legalna  $k$ -dioba** grafa  $G$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je graf  $G$   **$k$ -obojev**. Definiramo skupove  $S_i$  tako da čvor grafa  $v$  pripada skupu  $S_i$  ako je obojen bojom  $i$ . Takvi skupovi su neprazni i disjunktne, te unija skupova  $S_i$  čini skup svih vrhova grafa  $G$ . Kako je  $G$   **$k$ -obojev** tada ne postoji boja zbog koje bi neki brid bio konfliktna pa slijedi da je podjela na skupove  $S_i$  **legalna  $k$ -dioba** grafa  $G$  jer su skupovi  $S_i$  nezavisni.

Drugi smjer dokazuje se tako što se pretpostavi da postoji **legalna  $k$ -dioba** grafa  $G$  na skupove  $S_i$ . Kako je svaki skup indeksiran s indeksom  $i$ , tada svakom čvoru koji se nalazi u skupu  $S_i$  dodijelimo boju  $i$ . Kako su skupovi  $S_i$  prema pretpostavci disjunktne, neprazni i nezavisni, ne postoje dva čvora koja bi imala istu boju.  $\square$

## Definicije računske teorije složenosti

**Definicija 14.** **Problem odluke** je problem koji uvijek ima odgovor **da** ili **ne**. Primjerice, problem je li je graf točno  **$k$ -obojev** je problem odluke. Problem traženja kromatskog broja grafa nije problem odluke, jer tražimo točan broj  $k$ .

**Definicija 15.** Problem odluke za koje postoje algoritmi koji daju odgovor, a čije vrijeme izvršavanje ovisi polinomno o veličini ulaznih podataka spadaju u **klasu  $P$** .

**Definicija 16.** *Problem odluke* spada u klasu **NP problema** ako se točnost njegovog rješenja može ispitati u polinomnom vremenu.

**Definicija 17.** *Problem odluke* spada u klasu **NP-potpunih problema** ako spada u klasu **NP problema** i koji ima svojstvo da se svaki drugi problem iz **klase NP** može polinomno reducirati na njega.

**Definicija 18.** Kažemo da je problem **NP-težak** akko postoji **NP-potpun problem** koji se može polinomno reducirati na njega.

Problem odluke za koji postoji algoritam čije trajanje ovisi polinomno o veličini ulaznih podataka je **P problem**. Ako za neki problem odluke ne možemo pronaći algoritam čije vrijeme izvođenja ovisi polinomno o veličini ulaznih podataka, ali točnost rješenja možemo provjeriti u polinomnom vremenu, tada je to **NP problem**. **NP-potpun problem** je problem odluke čiji algoritam možemo iskoristiti da bismo riješili sve **NP probleme** tako da koristimo polinomijalan broj poziva tog algoritma. Općeniti problemi (koji ne moraju biti problemi odluke) nazivaju se **NP-teški problemi** ako postoji problem u klasi **NP-potpunih problema** koji se može riješiti pomoću polinomnog broja poziva algoritma za promatrani **NP-teški problem**. Odnos **P** i **NP** klasa još je uvijek otvoren problem ( $P = NP$  ili  $P \subset NP$ ). Kada bi se moglo dokazati da je neki **NP-potpun problem** moguće riješiti u polinomnom vremenu, tada bi se svi **NP problemi** mogli riješiti u polinomnom vremenu, pa bi klase **P** i klase **NP** bile jednake. Ako se pak pokaže da za neki **NP problem** ne postoji algoritam čije izvršavanje ovisi polinomno o ulaznim podacima, tada bi klasa **P** bila pravi podskup klase **NP**.

### **No free lunch teorem za optimizacijske algoritme**

**Definicija 19.** *Optimizacija* je grana matematike koja proučava pronalaženje ekstrema funkcija.

**Definicija 20.** *Kombinatorna optimizacija* je grana optimizacije gdje je domena funkcije skup s konačnim brojem elemenata.

**Definicija 21.** *Konkretna funkcija* koja se proučava naziva se **funkcija cilja**. U radu se zbog semantike umjesto funkcije cilja često koristi pojam greške.

**Definicija 22.** *Funkcije cilja* koje se promatraju imaju diskretnu i konačnu domenu i kodomenu. Iako se kao elementi kodomene mogu pojaviti realni brojevi, zbog toga što su računala diskretni strojevi s konačno mnogo memorije, to je samo konačni podskup realnih brojeva.

**Teorem 2.** Funkcija cilja definira se kao:  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ , gdje su skupovi  $\mathbb{X}$  i  $\mathbb{Y}$  diskretni i konačni. Tada je broj svih mogućih funkcija jednak  $|\mathbb{F}| = |\mathbb{Y}|^{|\mathbb{X}|}$ .

*Dokaz.* Za svaki element domene možemo odabrati točno  $|\mathbb{Y}|$  elemenata kodomene.

$$|\mathbb{F}| = \prod_{j=1}^{|\mathbb{X}|} |\mathbb{Y}| = |\mathbb{Y}|^{|\mathbb{X}|} \quad (2.1)$$

□

**Definicija 23.** Vremenski niz  $d_m$  je niz parova domene i kodomene.

$$d_m = \{(d_m^x(1), d_m^y(1)), (d_m^x(2), d_m^y(2)), \dots, (d_m^x(m), d_m^y(m))\} \quad (2.2)$$

Iz nekog niza  $d_m$  može se izvući samo niz elemenata domene i to se označava s  $\mathbf{d}_m^x$  ili samo niz elemenata kodomene što se označava s  $\mathbf{d}_m^y$ .

**Definicija 24.** Prostor svih vremenskih nizova veličine  $m$ :  $\mathbb{D}_m = (\mathbb{X} \times \mathbb{Y})^m$ , a prostor svih vremenskih nizova maksimalne veličine  $m$  je:  $\mathbb{D} = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{D}_m$ .

**Definicija 25.** Optimizacijski algoritam  $a$  definira se kao:  $a : d \in \mathbb{D} \rightarrow \{x | x \notin d_m^x\}$

Optimizacijski algoritam preslikava neki vremenski niz (podatke iz prethodnih koraka izvođenja) u novu vrijednost domene, pod uvjetom da ta vrijednost domene ne smije biti već viđena. Ovo ograničenje koristi se u dokazu teorema, ali se u praksi često mogu javiti slučajevi gdje se više puta računa vrijednost funkcije za isti element domene.

**Definicija 26.** *Heuristikom* se naziva optimizacijski algoritam koji ne mora kao rezultat dati globalni ekstrem **funkcije cilja**, ali daje dovoljno dobre rezultate u svrhu kraćeg vremenskog izvođenja.

**Definicija 27.** *Metaheuristikom* naziva se familija optimizacijskih algoritama, čije konkretno izvođenje ovisi o njegovim parametrima.

**Definicija 28.** Skup svih dozvoljenih rješenja u optimizaciji nazivamo **prostor pretrage**.

**Teorem 3.** "No free lunch" teorem za optimizaciju - Neka su  $a_1$  i  $a_2$  dva različita heuristička algoritma koji traže ekstrem funkcije. Funkcije su predstavljene crnom kutijom. Tada vrijedi ova jednakost:

$$\sum_f P(d_m^y | f, m, a_1) = \sum_f P(d_m^y | f, m, a_2) \quad (2.3)$$

Dokaz teorema može se pronaći u [19].

Kako se ne zna ništa više o funkcijama (npr. simbolički zapis), već samo ulazni i izlazni parovi, ne može se koristiti nikakvo unutarnje znanje koje bi nekom algoritmu dalo prednost. Ako je poznat broj koraka  $m$ , tada su za bilo koji algoritam sume vjerojatnosti međusobno jednake, pri čemu se gleda vjerojatnost da se pojavio neki niz izlaznih vrijednosti funkcije  $d_m^y$ . Iz niza izlaznih vrijednosti  $d_m^y$  može se lako izvući minimalna ili maksimalna vrijednost koja je tada konačan izlaz algoritma. Dakle, ne postoji algoritam koji bi bio dominantniji za sve funkcije cilja  $f$ . Zbog toga je potrebno svaki optimizacijski problem promatrati veoma usko i koristiti dodatne informacije o samoj funkciji  $f$ .

Prethodne definicije i teoremi služe kako bi se uskladili nazivi za matematičke pojmove koji će se koristiti u radu. Sve definicije uzete su iz [6, 19, 18], gdje se među ostalim mogu naći i druge definicije i teoremi povezani s teorijom grafova, računarском teorijom složenosti i "No free lunch" teoremom.

### 2.2.2. Bojanje težinskih grafova

Za navedeni telekomunikacijski problem potrebno je odabrati prikladan matematički model. Već je spomenuto da se bazne stanice modeliraju čvorovima u grafu. Postavlja se pitanje što predstavlja brid u tome grafu. Očigledno je da jedna bazna stanica utječe na drugu baznu stanicu, tj. mobilni uređaj istovremeno vidi više baznih stanica. To znači da bi brid mogao predstavljati relaciju vidi li neka bazna stanica drugu. Problem se može razviti i korak dalje. Nije svejedno na kojoj su udaljenosti bazne stanice te koja je njihova snaga. To znači da dvije bliže (ili jače vezane) bazne stanice više utječu jedna na drugo nego što to čine dvije udaljenije. Ideja je svakom bridu dodijeliti težinu koja predstavlja neku mjeru koliko jedna bazna stanica utječe na drugu. To znači da brid između dva čvora daje mjeru međusobnog utjecaja čvorova. Ako je utjecaj premalen (tehnički nevidljiv), tada brid između ta dva čvora ne postoji.

Na tako zadanom težinskom grafu potrebno je napraviti bojanje grafa uz poštivanje svih tehničkih uvjeta. Zato se u ovom radu klasični problem bojanja grafova poopćuje:

**Definicija 29.** *Bojanje težinskog grafa je optimizacijski problem u kojem se minimizira funkcija cilja:*

$$f(\phi) = 2 \sum_{i=1}^{E(G)} \omega(e_i) \cdot R(e_i), \quad (2.4)$$

gdje je  $\omega(e_i)$  težina brida, a  $R$  funkcija koja ima vrijednost 1 ako je  $e_i$  konfliktan brid ili 0 inače. Funkcija  $f$  ovisi o bojanju grafa, tj. funkcija cilja jednaka je dvostruko

sumi težina konfliktnih bridova.

Konstanta 2 koja množi sumu, matematički je nebitna, ali navodi se zbog implementacije funkcije na računalu. Zbog tehničkih ograničenja potrebno je uvesti nekoliko matematičkih detalja koji pokrivaju te slučajeve.

**Definicija 30.** Funkcija  $\phi$  definira se kao funkcija koja svakom nenepromjenjivom čvoru  $v$  grafa  $G$  pridružuje prirodan broj iz skupa dopuštenih boja za taj čvor.

**Definicija 31.** Ako su dva **nepromjenjiva** čvora spojena bridom i imaju iste boje, tada smatramo da taj brid nije **konfliktni**.

Razlog ovakvoj definiciji je taj da se bridovi koji spajaju dva nepromjenjiva čvora različitih boja ne mogu nikada poboljšati, pa prema tome neovisni su o funkciji bojanja grafa  $\phi$ .

**Definicija 32.** Ako su dva čvora koja pripadaju u suprotne vrste spojena bridom, tada takav brid ne smatramo **konfliktnim**.

Tehnički, takva dva čvora ne utječu jedan na drugog pa nema potrebe ugrađivati u funkciju cilja te bridove.

U slučaju da je čvor obojen bojom koja nije u njegovoj domeni, tada je potrebno dodati u funkciju cilja kaznu za takav slučaj. Iako po definiciji funkcije bojanja grafa to nije moguće, zbog inicijalnog stanja boja koje algoritam primi kao ulaz, može se dogoditi da boja čvora nije u njegovoj domeni. Stoga se definira proširena funkcija cilja kao:

**Definicija 33.**

$$f(\phi) = 2 \sum_{i=1}^{E(G)} \omega(e_i) \cdot R(e_i) + \sum_{i=1}^{V(G)} C(v_i) \quad (2.5)$$

Prva suma jednaka je već definiranoj funkciji cilja. Drugi član je suma funkcije  $C$  po čvorovima, gdje funkcija  $C$  ima vrijednost  $\varepsilon$  ako je čvor  $v_i$  krivo obojen ili 0 ako je obojen bojom iz svoje domene.

Za epsilon se odabire neki veliki pozitivan broj. U konkretnoj implementaciji koja se koristi u radu  $\varepsilon = 10000000$ .

**Definicija 34.** Smatra se da je bojanje **valjano** ako postotak promjene boja inicijalnog stanja ne prelazi prag od  $\alpha$  posto.

U konkretnom problemu  $\alpha = 66\%$ .

Sažetak problema kojeg modeliramo pomoću težinskog grafa glasi:



- Svaki čvor može poprimiti jednu boju iz skupa dopuštenih boja za taj čvor.
- Svaki čvor spada u jednu grupu tj. vrstu (A, B ili C).
- Neki čvorovi su definirani kao nepromjenjivi, njima se boja nikad ne smije mijenjati.
- Dodatan uvjet je da postotak promijenjenih čvorova naprema inicijalnom stanju ne smije biti veći od 66%.
- Optimizacija se provodi nad funkcijom cilja definiranom formulom (2.5).

## 2.3. Analiza problema bojanja težinskih grafova

U ovom odjeljku analizirat će se zadani matematički problem optimizacije. U svakom koraku analize uspoređuje se klasičan problem bojanja grafova i bojanje težinskih grafova. Kreće se od analize prostora pretrage. Zatim se dokazuje u kojoj se klasi problemi nalaze. Na kraju se pokazuje da "*No free lunch*" teorem vrijedi i za bojanje grafova i kakve posljedice donosi.

### 2.3.1. Prostor pretrage stanja

Kod klasičnog problema bojanja grafova analiziraju se dva problema. Prvi je odrediti može li se graf obojiti s najviše  $k$  boja, a drugi problem je odrediti najmanji takav  $k$ . Pretpostavimo za početak da provjeravamo je li graf **k-obojev**. Pitanje je na koliko načina se graf može obojiti ako koristimo najviše  $k$  boja. Svaki čvor može poprimiti  $k$  boja. To znači da je ukupan broj bojanja  $N$  jednak:

$$N = k^{V(G)} \quad (2.6)$$

Valja primijetiti da u ovom brojanju veličine prostora stanja postoji više jednako vrijednih bojanja. U bojanju nije bitna točna boja, već je bitno da različiti skupovi čvorova imaju različite boje. Točno pitanje je na koliko načina možemo čvorove podijeliti u  $k$  skupova (Teorem 1).

$$N = \sum_{i=1}^k S(V(G), i) \quad (2.7)$$

Oznaka  $S(m, n)$  je za *Stirlingov* broj druge vrste, gdje je  $m$  broj različitih elemenata (čvorovi) koje smještamo u  $n$  istovrsnih skupova boja, tako da svaka boja ima

barem jedan čvor. Kako je dopušteno da skupovi mogu biti prazni, tada se problem pretvori u disjunktne probleme gdje se koristi samo  $i$  skupova.

Ako se zahtijeva da svaka od  $k$  boja mora biti iskorištena, ekvivalentno da nijedan od  $k$  skupova ne smije biti prazan, tada je ukupan broj stanja nešto manji:

$$N = S(V(G), k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^{V(G)} \quad (2.8)$$

Ako se čvrsto zahtijeva da svaka boja mora biti barem na jednome čvoru, tada je to *Stirlingov* broj druge vrste, gdje je  $i$  navedena formula za izračun  $S(m, n)$ .

Neka se promatra problem traženja kromatskog broja grafa  $\chi(G)$ , tj. minimalni broj boja  $k$ , a da se graf može legalno obojiti. Maksimalni broj za koji je to potrebno provjeriti je broj čvorova u grafu, jer je u tom slučaju svaki čvor povezan sa svakim drugim i svaki čvor mora imati svoju boju. Kromatski broj grafa je dakle ograničen odozgo brojem čvorova. Za svaki broj  $k$  do  $V(G)$  treba provjeriti je li je graf **k-obojev**. Ukupan broj stanja je:

$$N = B(V(G)) = \sum_{i=0}^{V(G)} S(V(G), i) \quad (2.9)$$

Broj  $B(n)$  naziva se *Bellov* broj i on predstavlja broj načina na koji se skup od  $n$  članova može podijeliti u neprazne podskupove. Za bolji uvid koliko brzo *Bellov* niz raste dane su nejednakosti (za  $n \geq 8$ ):

$$2^n \leq B(n) \leq n! \quad (2.10)$$

*Bellov* broj brže raste od eksponencijalne funkcije, ali sporije od faktoriijela. U ovom radu daje se dokaz za tu tvrdnju.

*Dokaz.* Prvo se pokazuje nejednakost:  $2^n \leq B(n), n \geq 5$ . Dokaz se provodi indukcijom. Koriste se razvoj binoma:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

i svojstvo Bellovog broja:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k)$$

$$2^n \leq B(n) \quad (2.11)$$

$$\text{Baza indukcije: } n = 5, 2^5 \leq B(5) \rightarrow 32 \leq 52 \quad (2.12)$$

$$\text{Pretpostavka: } 2^n \leq B(n) \quad (2.13)$$

$$2^{(n+1)} \leq B(n+1) \quad (2.14)$$

$$2 \cdot 2^n \leq B(n+1) \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=0}^n 2 \cdot \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k) \quad (2.16)$$

$$\sum_{k=0}^3 2 \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=4}^n 2 \cdot \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} B(k) + \sum_{k=4}^n \binom{n}{k} B(k) \quad (2.17)$$

$$\text{Prvo se dokazuje: } \sum_{k=0}^3 2 \cdot \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} B(k) \quad (2.18)$$

$$2 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} \leq \quad (2.19)$$

$$\binom{n}{0} B(0) + \binom{n}{1} B(1) + \binom{n}{2} B(2) + \binom{n}{3} B(3) \quad (2.20)$$

$$2 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} 2 + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) \leq \quad (2.21)$$

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 5 \quad (2.22)$$

$$1 + n \leq n(n-1)(n-2) \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.23)$$

$$1 + n \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \quad (2.24)$$

$$3 + 3n \leq n^3 - 3n^2 + 3n \quad (2.25)$$

$$3n^2 + 3 \leq n^3 \quad (2.26)$$

$$3 \leq n^3 - 3n^2 \quad (2.27)$$

$$3 \leq n^2(n-3), \text{ istina za } n \geq 5 \quad (2.28)$$

$$\text{Druge dvije sume: } \sum_{k=4}^n 2 \cdot \binom{n}{k} \leq \sum_{k=4}^n \binom{n}{k} B(k) \quad (2.29)$$

$$\text{Član po član sume: } \binom{n}{k} 2 \leq \binom{n}{k} B(k) \quad (2.30)$$

$$2 \leq B(k), \text{ za } k \geq 4 \quad (2.31)$$

□

*Dokaz.* Potrebno je dokazati  $B(n) \leq n!$ . Dokaz se provodi iz svojstava za Bellov broj

[3]:

$$B(n) \leq \left[ \frac{0.792n}{\ln(1+n)} \right]^n$$

i svojstva faktoriijela koje slijedi iz analize Stirlingove aproksimacije:

$$n! \geq \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

$$B(n) \leq \left[ \frac{0.792n}{\ln(1+n)} \right]^n \leq \left( \frac{n}{e} \right)^n \leq n! \quad (2.32)$$

$$\text{Dovoljno je pokazati: } \left[ \frac{0.792n}{\ln(1+n)} \right]^n \leq \left( \frac{n}{e} \right)^n \quad (2.33)$$

$$\left[ \frac{0.792n}{\ln(1+n)} \right] \leq \left( \frac{n}{e} \right) \quad (2.34)$$

$$0.792n \cdot e \leq n \cdot \ln(n+1) \quad (2.35)$$

$$0.792 \cdot e \leq \ln(n+1) \quad (2.36)$$

$$e^{0.792 \cdot e} \leq n+1 \quad (2.37)$$

$$8.61 - 1 \leq n \quad (2.38)$$

$$7.61 \leq n \quad (2.39)$$

□

Zaključak prethodne analize je da za relativno veliki graf postoji velik broj stanja koje je nemoguće pretražiti pomoću *iscrpne pretrage*. Analiza prostora stanja za zadani problem malo je drugačija. Kako svaki čvor ima konačan broj boja koje može poprimiti, ukupan broj stanja je:

$$N = \prod_{i=1}^{V(G)} K_i, \quad (2.40)$$

gdje je oznaka  $K_i$  ukupan broj boja koje može poprimiti čvor s indeksom  $i$ . Kako je moguće dodijeliti maksimalno samo 512 boja, možemo ograničiti  $K_i$ :

$$K_i \leq M = 512 \quad (2.41)$$

$$N = \prod_{i=1}^{V(G)} K_i \leq \prod_{i=1}^{V(G)} M = M^{V(G)} \quad (2.42)$$

Broj stanja eksponencijalno ovisi o broju čvorova, što je isto kao i za klasičan

problem bojanja grafa, jako velik broj stanja. I u ovom je slučaju važno primijetiti da su neka stanja ekvivalentna. Broj jedinstvenih stanja broj je particija skupa čvorova u skupove boja, ali uz ograničenje da barem jedan čvor ima neku od zadanih  $M$  boja. Tada vrijedi ova nejednakost za broj različitih stanja:

$$N \leq \sum_{i=1}^M S(V(G), i) \quad (2.43)$$

Broj stanja je manji jer se poštuje ograničenje da čvorovi mogu poprimiti neku od boja u podskupu ukupnog konstantnog broja boja  $M$ . Kada je  $k \geq M$  tada je broj stanja optimizacijskog problema manji od broja stanja u problemu gdje se traži odgovor na pitanje je li graf **k-objiv**. Ovo će razmatranje biti zanimljivo i u sljedećem poglavlju, gdje se problem svrstava u klase računske teorije složenosti.

### 2.3.2. Pozadina problema iz perspektive računske teorije složenosti

Problem odluke je li graf **k-objiv** spada u klasu **NP-potpunih** problema. Traženje kromatskog broja grafa  $\chi(G)$  spada u klasu **NP-teških** problema. Dokazi se mogu pronaći u [6]. Potrebno je pokazati da postavljen optimizacijski problem bojanja grafa spada u klasu **NP-teških** problema. Problem sigurno ne može spadati u druge spomenute (P, NP, NP-potpun) klase jer to nije problem odluke. Postupak dokazivanja da problem spada u klasu **NP-teških** problema ima nekoliko koraka. Prvi korak je pronalaženje nekog **NP-potpunog** ili **NP-teškog** problema koji će se koristiti u dokazu. Zatim se pokaže da je taj *postojeći* problem moguće polinomno reducirati na problem za koji se dokazuje da je **NP-težak**. U ovom radu provodi se dokaz.

*Dokaz.* Odaberemo **NP-potpun problem** koji ispituje je li je graf  $G$  **k-objiv**. Kako bismo riješili taj problem, koristimo zadani optimizacijski problem. Ulaz u optimizacijski algoritam između ostalog su graf  $G$  i ograničenja boja za svaki od čvorova. Svakom čvoru daje se skup  $\{1, 2, \dots, k\}$  s bojama. Svim bridovima daje se težina 1. Tada se pokreće jezgra s optimizacijskim problemom koja će riješiti taj problem. Ako je rezultat optimizacije, tj. funkcije cilja,  $f = 0$ , tada je graf **k-objiv**, inače nije. U konstantnom vremenu možemo reducirati problem, iz čega slijedi da je optimizacijski problem **NP-težak**.  $\square$

Zanimljivo je primijetiti da **NP-potpun problem** k-objivosti može imati više stanja od **NP-teškog** problema optimizacije, što znači mogućnost kraćeg vremena izvođenja od vremena provjere k-objivosti. Kako nije poznat odnos  $NP$  i  $P$  klase, za ovaj

optimizacijski problem nameće se korištenje heuristika. U ovom tehničkom problemu nije potrebno do kraja minimizirati funkciju cilja, nego dobiti dovoljno malu vrijednost  $f$  koja će uzrokovati bolju kvalitetu mobilne mreže.

### 2.3.3. Posljedica "No free lunch" teorema

U originalnom članku, gdje se dokazuje "No free lunch" teorem [19], pretpostavlja se da sve funkcije cilja imaju iste domene i kodomene. Za problem bojanja grafova to nije tako, jer funkcija cilja nema istu kodomenu za sve grafove. Funkcija cilja definirana je kao:  $f : \mathbb{X}^{V(G)} \rightarrow \mathbb{R}$ , ali kako računalo ima konačnu memoriju, tada je funkcija zapravo definirana kao:  $f : \mathbb{X}^{V(G)} \rightarrow \mathbb{Y}$ , gdje je  $\mathbb{Y}$  konačni podskup realnih brojeva koji se mogu prikazati na računalu, a  $\mathbb{X}$  skup boja. Problem za "No free lunch" teorem je taj da veličina domene funkcije cilja ovisi o broju čvorova grafa. Broj grafova je beskonačan jer možemo uzeti proizvoljan broj čvorova, što znači da postoji i beskonačan broj mogućih funkcija cilja. Teorem radi samo ako je broj funkcija cilja ograničen (Teorem 3). Kako je na nekom računalu nemoguće prikazati proizvoljno veliki graf, broj čvorova može se ograničiti s nekom granicom  $L$ . Tada je moguće prebrojati sve funkcije cilja  $f$ , što je napravljeno u nastavku rada.

*Dokaz.* Pitanje je koliko funkcija postoji, ako je broj članova domene ograničen s  $L$ . Broj funkcija koje imaju točno  $k$  elemenata u domeni ima:

$$|\mathbb{F}_k| = |\mathbb{Y}|^k \quad (2.44)$$

Ukupan broj funkcija je suma po svim  $k$  do granice  $L$  (koristi se suma za geometrijski niz):

$$|\mathbb{F}| = \sum_{k=1}^L |\mathbb{F}_k| = \sum_{k=1}^L |\mathbb{Y}|^k = \frac{|\mathbb{Y}|^{L+1} - |\mathbb{Y}|}{|\mathbb{Y}| - 1} \quad (2.45)$$

□

Ako se ograniči broj čvorova, dobije se konačan broj funkcija te je to lako ugraditi u Teorem 3. Teorem govori o tome kako ne postoji nikakvo znanje o funkciji. U ovom problemu, funkcija cilja direktno ovisi o grafu tj. strukturi i to je važna informacija koja treba biti iskorištena kako bi se dobili bolji algoritmi. Glavna je posljedica ovog teorema razvoj pohlepnih algoritama koji koriste znanje o strukturi (grafu) i primjena tih algoritama u metaheurističkim postupcima. Važno je uočiti da svaki graf posjeduje vlastitu funkciju cilja. To znači da se korištenjem algoritama na slijepo koji rade na nekim grafovima ne može jamčiti efikasnost na drugim.

U članku [15] opisuje se kako postoje slučajevi u kojima hiper-heuristike mogu imati "*Free lunch*" svojstvo. Hiper-heuristike su algoritmi koji traže najbolji algoritam koji može riješiti neki problem, tj. pronaći ekstrem funkcije cilja. Kako je gore opisano, svaki graf ima svoju funkciju cilja. Ako je skup funkcija cilja dovoljno malen, moguće je da hiper-heuristika uvijek pronađe neki algoritam koji je bolji od svih ostalih za konkretnu funkciju cilja. Ovo nije dokazano za bojanje grafova (tako ni za optimizacijski problem bojanja), ali daje motivaciju u razvoju algoritama. U zadnjem dijelu opisa algoritama u ovom radu koriste se metode strojnog učenja kako bi se izvuklo znanje za primjenu u nekim pohlepnim algoritmima, tj. kako bi se odabrao najbolji pohlepan algoritam, što je zapravo jednostavan oblik hiper-heuristike. Osim toga, u implementaciji je otvoren prostor gdje se lako mogu donositi odluke i dinamički birati algoritmi koji u trenutnoj točki u prostoru stanja daju bolje rezultate od drugih algoritama.

## 3. Algoritmi

### 3.1. Uvod

Algoritmi koji su implementirani za ovaj problem podijeljeni su u dva dijela. Prvu skupinu čine pohlepni algoritmi, a drugi su algoritmi s kojima se i rad bavi – metaheuristike. Proučavaju se četiri metaheuristike: agentski algoritam, simulirano kaljenje, genetski algoritam i genetsko kaljenje. Započinje se s konstruiranjem hiper-heuristike nad pohlepnim algoritmima, gdje se želi pokazati koji je pohlepni algoritam najbolji u raznim slučajevima. Pri ispitivanju algoritama treba biti veoma oprezan. Prethodna razmatranja upućuju na to da neki algoritam (metaheuristika s određenim parametrima) može dati bolje rezultate od drugih algoritama na nekim grafovima, dok je na nekim grafovima obrnuta situacija. To se može usporediti s pojmom *prenaučenosti* iz strojnog učenja. Zbog toga je za ovaj problem potrebno graditi algoritme koji su prilagodljivi.

#### 3.1.1. Mogući problemi

Mogući problemi mogu se podijeliti na dva dijela: problemi vezani uz ograničenja i problemi vezani uz implementaciju. Problemi vezani uz ograničenja su: velik broj čvorova i bridova koji se mogu pojaviti, velika razlika između težina bridova (razlika za više redova veličina), nepromjenjivi čvorovi koji su okruženi promjenjivim čvorovima. Velik broj čvorova i bridova uzrokuje i sporiji rad algoritma. Razlika između težina bridova može kod algoritama koji koriste tu razliku uzrokovati neočekivano ponašanje (npr. dugo zadržavanje na manjim vrijednostima funkcije cilja). Nepromjenjivi čvorovi koji za susjede imaju promjenjive čvorove mogu uzrokovati sporu konvergenciju, a često je zbog takvih čvorova minimum funkcije cilja relativno velika vrijednost, pa je teško razlikovati lokalni od globalnog minimuma.

Problemi vezani uz implementaciju su zapravo problemi dizajna algoritama i struktura podataka. S jedne je strane potrebno osigurati brze operacije nad grafom, a s druge strane grafovi mogu zauzimati velik dio memorijskog prostora. Zato je potrebno di-



zajmnirati strukturu grafa koja ne zauzima previše memorijskog prostora, a omogućuje brze operacije. Moguće probleme stvaraju i populacijski algoritmi kod kojih je potrebno čuvati više rješenja. Zbog toga se jedinice ne čuvaju kao grafovi, već je svaka jedinica funkcija bojanja grafa (za svaki čvor zna se koja je njegova boja). Sama struktura (bridovi) sadržana je u strukturi grafa, a jedinica posjeduje vezu na taj graf.

## 3.2. Pohlepni algoritam

Pojam pohlepnog algoritma u ovom radu podrazumijeva sortirati čvorove grafa po nekom svojstvu, zatim obilaziti čvorove tim redoslijedom i na svaki od njih primijeniti odabranu vrstu bojanja čvora. Vrsta bojanja čvora je način odabira boje za neki čvor. Pohlepni se algoritam koristi kao operator kod metaheuristika, tj. kao metoda koja usmjeruje pretragu. U radu se koriste sljedeće metode za sortiranje i bojanje čvorova (za svaku od metoda koristi se specijalna oznaka):

Vrste sortiranja čvorova:

- *COL* – sortiranje čvorova prema koliziji (broj susjednih čvorova koji imaju istu boju kao i promatrani čvor)
- *FIT* – sortiranje čvorova prema pogrešci koju generiraju (suma težina konfliktnih bridova iz tog čvora)
- *LDO* – sortiranje prema stupnju čvora  $H(v)$
- *RND* – slučajan raspored čvorova
- *SDO* – sortiranje prema zasićenju (broj različitih boja susjednih čvorova)
- *SDOLDO* – sortiranje prema zasićenju, a ako dva čvora imaju isto zasićenje drugi kriterij je stupanj čvorova
- *STDORD* – sortiranje prema oznaci čvora (čvorovi su numerirani)

Vrste bojanja čvorova su:

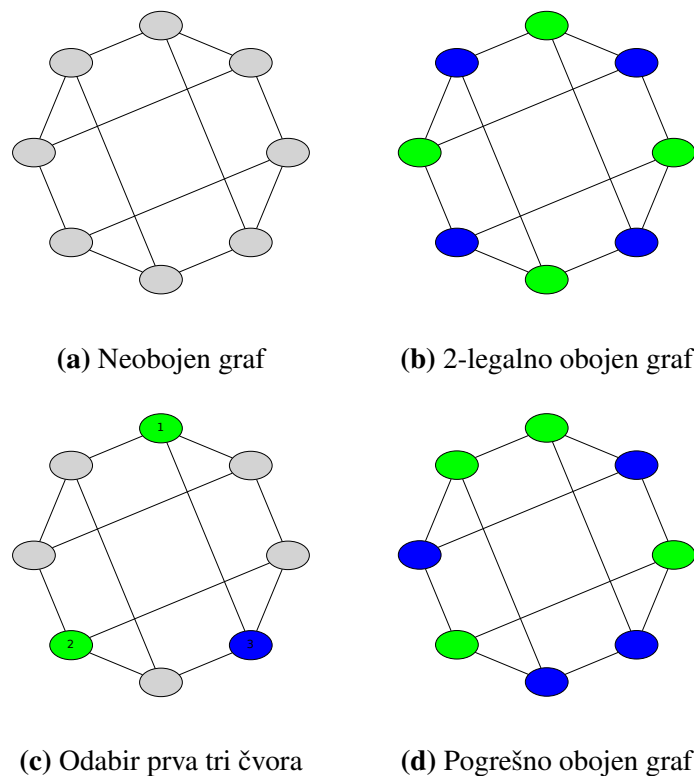
- *ABW* – susjedi čvora sortiraju se silazno prema težini brida, obilazi se svaki susjed i uzima se njegova boja. Ako je ta boja jedna od dopuštenih za promatrani čvor, ta boja više ne može biti odabrana. Kada na raspolaganju ostane samo jedna boja ili su svi susjedi posjećeni, uzima se jedna od boja koja je još uvijek na raspolaganju.
- *MC* – za svaku dopuštenu boju čvora može se izračunati vrijednost kolizije za promatrani čvor. Boja koja minimizira koliziju za neki čvor odabire se kao nova boja za taj čvor.

- *MF* – isto kao i *MC*, samo što se umjesto kolizije računa greška promatranog čvora (suma težina konfliktnih bridova vezanih za taj čvor)
- *RND* – daje se slučajna dopuštena boja
- *START* – čvoru se daje početna boja (ako je dopuštena) ili se boja ne mijenja ako u inicijalnom bojanju boja nije bila dopuštena
- *SWAP* – čvoru se daje neka boja gdje apsolutno odstupanje od greške (sume konfliktnih bridova) naspram trenutne greške nije veće od nekog praga
- *TRG* – čvoru se daje neka boja čija nova greška (suma konfliktnih bridova) ne prelazi neku fiksnu vrijednost.

Način na koji se vrši lokalna pretraga, odnosno donosi odluka o bojanju čvora važan je dio rješavanja problema bojanja grafova. Jedan od takvih načina opisan je u radu [2], što daje motivaciju za proučavanje postupaka bojanja. Za svaki čvor može se reći da ima određen stupanj slobode. Stupanj slobode može se definirati kao mogućnost odabira boja za neki čvor. Svaki čvor ako odabire boju nekom heuristikom, npr. želi minimizirati svoj doprinos greške, odabire boju koja odgovara minimalnoj lokalnoj grešci. Ako čvor ima npr. velik broj susjeda tada je njegov stupanj slobode manji, jer može odabrati manji broj boja kako bi minimizirao lokalnu grešku. Zato se sortiranjem čvorova po svojstvu (svojstvo koje opisuje koliko je čvor slobodan) daje prednost prvenstva bojanja čvorovima koje je teže obojiti tj. imaju manji stupanj slobode. Time se pokušava usrednjiti vrijednost stupnjeva slobode, jer čvorovi koji kasnije odabiru boju mogu odabrati veći skup boja i time bolje se prilagoditi odluci susjeda koji imaju manji stupanj slobode. Takve analize mogu se pronaći u [12, 11].

### 3.2.1. Neispravnost pohlepnog algoritma

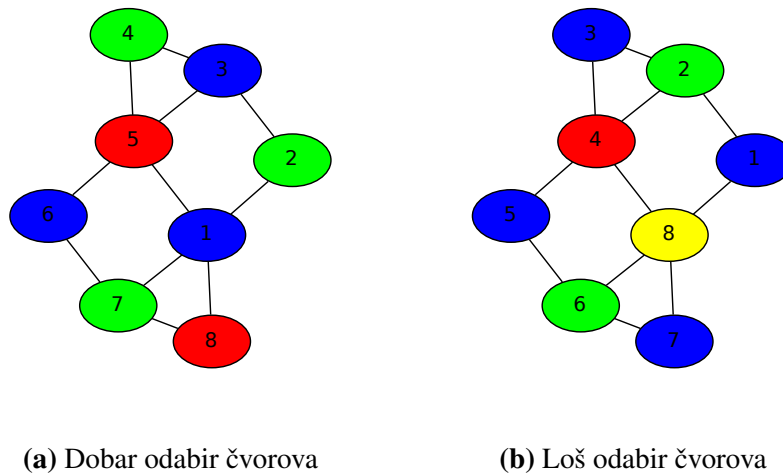
Važno je pokazati kako pohlepni algoritam neće uvijek pronaći globalni minimum funkcije cilja. Neka je zadan graf na slici 3.1. Slika 3.1a prikazuje graf koji je potrebno bojati korištenjem samo dvije boje. Neka su težine svih bridova jednake 1. Slika 3.1b prikazuje 2-legalno obojen graf čija je vrijednost funkcije cilja u optimizaciji jednaka 0. Neka pohlepni algoritam poreda prva tri čvora kako je to označeno na slici 3.1c. Tim poretком čvorovi biraju svoje boje. Čvor 1 može odabrati proizvoljnu boju, čvor 2 odabire istu boju kao i čvor 1, a treći čvor koji je vezan na čvor 1 odabire neku novu boju. Ostali čvorovi mogu proizvoljnim redoslijedom birati svoje boje, ali više ne postoji način na koji bi čvorovi odabrali boje, a da graf bude 2-legalno obojen. Greška se dogodila pri odabiru boje za čvor 2, jer ni jedan susjed nije bio obojen i čvor



**Slika 3.1:** Prikaz pravilno obojenog grafa i primjer pohlepnog algoritma

2 imao je mogućnost odabira iste boje kao i čvor 1.

Moguće bi rješenje navedenog problema moglo biti u pretraživanju susjednih čvorova. Neka su boje označene brojevima, gdje je prva boja označena s 1. Prvi čvor odabere se slučajno. Za odabrani se čvor odabere boja s minimalnom oznakom, a nema je u susjednim čvorovima. Sljedeći će čvor biti neki od susjeda trenutnog čvora. Ako čvor nema susjeda za odabir, onda se traži čvor koji nije obojen, ali ima obojenog susjeda (pretpostavka je da je graf povezan). Ovako opisan algoritam uvijek će dobro bojati graf na slici 3.1a. Potrebno je, ako ima, pronaći graf na kojem ovakav pohlepni algoritam koji se još i naziva *uspinjanje na vrh*, ne radi dobro. Primjer takvog grafa i odabir čvorova može se vidjeti na slici 3.2. Brojevi u čvorovima predstavljaju poredak obilaženja grafa. Na slici 3.2a odabir čvorova je takav da je ukupan broj boja, a da funkcija cilja bude 0, jednak 3. To je ujedno i minimalni broj boja, jer u grafu postoje tri čvora koja su međusobno povezana, što bi značilo da s manjim brojem boja nije moguće legalno bojati graf. Na slici 3.2b odabir čvorova je bio takav da u zadnjem posjećenom čvoru 8 bilo potrebno odabrati novu boju da bi graf bio legalno obojen. Kako se pokazalo da je graf moguće bojati s 3 boje, zaključak je da algoritam ne daje uvijek točan rezultat.



**Slika 3.2:** Isti algoritam uz drugačiji odabir čvorova daje različita k-legalna bojanja

### 3.3. Agentski algoritam

Agentski algoritam inspiriran je dobrim rezultatima pohlepnog algoritma. Glavna jedinica algoritma je agent. Agenti se raspoređuju po grafu, gdje se neki agent postavlja na neki čvor grafa. *Globalna iteracija* je jedna iteracija algoritma u kojoj svaki agent svome čvoru pridruži neku boju. Agenti se boduju i to tako da na početku svi imaju 0 bodova, a nakon globalne iteracije broj bodova je za nekog agenta jednak maksimalnoj pogrešci nekog susjednog čvora, na koji se i agent pomakne. Zatim se agenti sortiraju prema bodovima i u sljedećoj globalnoj iteraciji pravo na bojanje prvo dobiva agent s najviše bodova. Slično kao i kod pohlepnog algoritma, prvo se obrađuju *teški čvorovi*, a to je u ovom algoritmu modelirano pomoću bodovanja. Agenti se, osim akcije pomaka na *najbolji* čvor, mogu pomaknuti na slučajan susjedni čvor ili pak ostati na čvoru na kojem jesu. Tada bodovi za agenta ostaju isti. Algoritam podsjeća na mravlje algoritme (engl. *ant colony optimization*) [7], ali kako algoritam daje lošije rezultate za klasični problem bojanja grafova u radu je odlučeno koristiti agentski algoritam.

#### 3.3.1. Parametri algoritma

1. Broj agenata –  $N$
2. Broj globalnih iteracija –  $G$
3. Način na koji agenti bojaju čvorove (vrsta bojanja) –  $CS$
4. Vjerojatnost ostajanja agenta na trenutnom čvoru –  $PR\_NO\_MOVE$

## 5. Vjerojatnost pomaka agenta na slučajni čvor u susjedstvu – *PR\_RND\_MOVE*

### 3.3.2. Detalji algoritma

Koristi se pseudokôd kako bi se algoritam opisao formalno. U sustavu se nalazi  $N$  agenata koje je prvo potrebno inicijalizirati, odnosno postaviti svakog agenta na neki od čvorova grafa. U svakoj se od  $G$  globalnih iteracija, prolazi kroz populaciju agenata i svaki od njih prvo pridruži svome čvoru boju, a nakon toga radi funkciju pomaka. Nakon što se to obavi za svakog agenta, agenti se sortiraju prema bodovima koje su dobili u funkciji pomaka "*MOVE*". U sljedećoj se iteraciji agenti obilaze po bodovima, od onog agenta koji ima najviše bodova do onog s najmanje bodova.

---

#### Algoritam 3.1: Pseudokôd agentskog algoritma

---

```
1  ALGORITHM(N, G, CS, PR_NO_MOVE, PR_RND_MOVE) :
2    AGENT[N]
3    FOR i = 1 TO N:
4      init(AGENT[i])
5    END FOR
6    FOR j = 1 TO G:
7      FOR i = 1 TO N:
8        SETCOLOR(AGENT[i], CS)
9        MOVE(AGENT[i], PR_NO_MOVE, PR_RND_MOVE)
10     END FOR
11     SORT(AGENT[N])
12   END FOR
13 END ALGORITHM
```

---

Funkcija pomaka ovisi o promatranom agentu i parametrima tj. vjerojatnostima "*PR\_NO\_MOVE*" i "*PR\_RND\_MOVE*". Prvo se radi odabir ostaje li agent na istom čvoru ili ne. Ako ne ostaje, opet se stohastički određuje akcija ide li agent na čvor koji u susjedstvu radi najveću grešku ili ide na slučajnog susjeda. Ako agent odabire pomak prema najboljem susjedu, sljedeći čvor ne može biti isti onaj s kojeg je agent došao na trenutno promatrani, čime se sprječava titranje agenta.

---

#### Algoritam 3.2: Detalji funkcije pomaka - *MOVE*

---

```
1  MOVE(AGENT, PR_NO_MOVE, PR_RND_MOVE) :
2    IF random() < PR_NO_MOVE THEN
3      RETURN
4    END IF
5    NEXT_NODE = AGENT.NODE
6    IF random() < PR_RND_MOVE THEN
7      NEXT_NODE = AGENT.NODE.NEIGHBOUR[random()]
8    ELSE
```

```

9      FOR k = 1 TO AGENT.NODE.DEGREE:
10         IF AGENT.NODE.NEIGHBOUR[k] = AGENT.BLOCK_NODE THEN
11             CONTINUE
12         ERROR = AGENT.NODE.NEIGHBOUR[k].ERROR
13         IF ERROR > MAX_ERROR THEN
14             MAX_ERROR = ERROR
15             NEXT_NODE = AGENT.NODE.NEIGHBOUR[k]
16         END IF
17     END FOR
18     AGENT.SCORE = MAX_ERROR
19 END IF
20 AGENT.BLOCK_NODE = AGENT.NODE
21 AGENT.NODE = NEXT_NODE
22 END MOVE

```

---

### 3.3.3. Karakteristike algoritma

Kako je algoritam temeljen na pohlepnom algoritmu, ima nedostatak što lako zapinje u lokalnom minimumu. Dobra je strana algoritma što jedna globalna iteracija može vremenski trajati kraće od jedne iteracije pohlepnog algoritma, jer može posjedovati broj agenata manji od broja čvorova. Algoritam ima ugrađeno određeno znanje, tj. agent cilja na čvorove koje mora popraviti. Prednost dobivaju agenti koji moraju popraviti čvorove s većim greškama. Da bi se izbjegla brza konvergencija u legalni minimum, stohastički način odabira pomicanja omogućuje da agenti šetnjom dođu u područje koje bi trebalo popraviti. Ako je broj agenata veći od broja čvorova, to omogućuje fino traženje minimuma. U tom će slučaju jedan čvor biti više puta obojen (minimiziran), a to znači da mu se prvo može dati neka boja, zatim se bojaju susjedi i onda opet taj isti čvor dolazi na red. Taj efekt propitkivanja starog poteza (koji se u ovom slučaju implicitno događa) omogućuje bolju odluku za pridruživanje boje. Nedostatak je produljenje vremena trajanja globalne iteracije.

Vremenska složenost algoritma ovisi o broju agenata i broju globalnih iteracija. Vremenska složenost je:  $O(G \cdot (N + N \log(N))) = O(G \cdot N + G \cdot N \log(N)) = O(G \cdot N \log(N))$ . Kao što je vidljivo, algoritam polinomno ovisi o  $G$  i  $N$ . U ovoj analizi složenosti, kao i ostalim koje slijede zanemarena je složenost izračuna funkcije cilja. Svaki algoritam za svako rješenje koje pamti dodatno koristi broj koraka koji je proporcionalan broju bridova u grafu, jer je vremenska složenost funkcije cilja  $O(E(G))$ .

### 3.4. Algoritam evolucijske strategije

Skupina evolucijskih algoritama veoma je popularna u rješavanju optimizacijskih problema. Takvi algoritmi spadaju u još veću skupinu algoritama koji se nazivaju *metaheuristike*, što znači da konkretno ponašanje algoritma ovisi o postavljenim parametrima. Svim evolucijskim algoritmima zajedničko je što posjeduju populaciju rješenja, te iz koraka u korak evoluiraju rješenje, što nužno ne mora značiti dobivanje boljeg rješenja, već algoritmi provode usmjereno pretraživanje prostora stanja. Evolucijska strategija vrsta je evolucijskog algoritma kod kojeg je dominantan operator mutacije. Genetski algoritam je poopćenje evolucijskih strategija jer se koristi operator selekcije, te se operator križanja koristi češće od operatora mutacije. Operator selekcije koristi se za odabir roditelja. Operator križanja je operator koji kombinira roditelje (rješenja) i njihovom kombinacijom (nije definirano kako) generira djecu (nova rješenja). Križanje se koristi kako bi se prostor stanja finije pretraživao, tj. kako bi se vršila lokalna pretraga. Operator mutacije djeluje nad jednim djetetom i mijenja izgled te jedinke. Mutacija se koristi kako bi se pretraga pomaknula u neki drugi dio prostora stanja i zadužena je za sprječavanje konvergencije u lokalne ekstreme.

#### 3.4.1. Genetski algoritam

Kao preliminarni dio ovog rada, isprobano je nekoliko vrsta genetskih algoritama. Jednostavni genetski algoritam koristi turnirsku selekciju, operator križanja s jednom točkom prekida te mutaciju koja slučajno promjeni nekoliko gena u zapisu rješenja. Algoritam se pokazao veoma lošim na problemu optimizacijskog problema bojanja grafova. Ako se kao rješenje koristi niz brojeva, gdje svaki element predstavlja jedan čvor u grafu, a vrijednost elementa boju, tada operator križanja nema previše smisla zbog toga što su čvorovi povezani u određenu strukturu, a križanje s jednom točkom prekida nema znanje o tome. Drugi je problem slučajna mutacija, koja može rješenje staviti u neki drugi dio prostora stanja, ali je teško odrediti njezin utjecaj i jako ovisi o konkretnom grafu. Drugi je korak bilo korištenje hibridnog genetskog algoritma u kojem je za operator mutacije korišten pohlepni algoritam. Rezultati u ovom slučaju također nisu bili dobri, tj. algoritam se ponašao kao slučajna pretraga prostora. Najveći je problem podešavanje parametara i njihova osjetljivost. Jedno od mogućih pristupa je kreiranje operatora križanja koji je usko povezan uz domenu problema, jedan od primjera naveden je u [13]. Drugi pristup je izbacivanje operatora križanja, čime se efektivno dobiva evolucijska strategija. Takav se pristup koristi u članku [11], gdje je

zamijećeno loše ponašanje genetskog algoritma tj. jednostavnih operatora križanja. U ovom radu koristi se evolucijska strategija. Takav je izbor načinjen zbog očekivanog manjeg vremena izvođenja evolucijske strategije, jer se koristi jedan operator manje, za razliku od genetskog algoritma. Mutacija u tom slučaju poprima dvojaku ulogu, tj. potrebno je implementirati više vrsta mutacija – one koje će obavljati lokalnu pretragu i one koje će obavljati globalnu pretragu.

### 3.4.2. Evolucijska strategija

Odabrana je evolucijska strategija koja se koristi u članku [13]. Koristi se  $(\mu, \lambda)$  evolucijska strategija. Oznake  $\mu$  i  $\lambda$  služe za oznake skupova jedinki (rješenja). Skup  $\mu$  je skup roditeljskih jedinki iz kojih se stvara skup djece  $\lambda$ . Iz toga proizlazi da broj elemenata u skupu  $\lambda$  mora biti veći ili jednak broju elemenata u skupu  $\mu$ . Jedinka je predstavljena kao niz brojeva, gdje svaki element predstavlja neki čvor, a vrijednost elementa je boja čvora. U svakoj iteraciji, algoritam uniformno bira  $|\lambda|$  jedinki iz skupa roditelja. Može se dogoditi da je neka jedinka više puta odabrana. Za svaku odabranu jedinku koristi se operator mutacije. Slučajnim se odabirom bira između mutacije koja ima lokalni karakter, tj. trenutno rješenje nastoji poboljšati lokalnom pretragom prostora stanja, i mutacije koja skače iz okoline trenutne točke prostora stanja. Mutacija se implementira pomoću vrsta bojanja. Sve se takve mutirane jedinke stavljaju u skup  $\lambda$ . Na kraju postupka najboljih  $|\mu|$  jedinki kopira se u  $\mu$  skup. Poželjno je koristiti elitizam kako se najbolje rješenje kroz iteracije ne bi izgubilo.

### 3.4.3. Parametri algoritma

1. Veličina skupa  $\mu$  – *MI\_SIZE*
2. Veličina skupa  $\lambda$  – *LAMBDA\_SIZE*
3. Ukupan broj iteracija – *N*
4. Broj mutacija nad jednom jedinkom – *M*
5. Vjerojatnost mutacije gena pomoću lokalne pretrage – *PROP*
6. Način bojanja za globalnu pretragu – *CS\_GLOBAL*
7. Način bojanja za lokalnu pretragu – *CS\_LOCAL*



### 3.4.4. Detalji algoritma

Kostur algoritma izgleda veoma jednostavno. Kao što je opisano, iz skupa  $\mu$  bira se jedinka koja se mutira i stavlja u  $\lambda$  skup. Najbolji se kopiraju u skup  $\mu$  i brišu se sve stare jedinke.

**Algoritam 3.3:** Pseudokôd evolucijske strategije

---

```
1  ALGORITHM(MI_SIZE, LAMBDA_SIZE, N, M, PROP, CS_GLOBAL,
    CS_LOCAL) :
2  MI[MI_SIZE]
3  LAMBDA[LAMBDA_SIZE]
4  FOR i = 1 TO MI_SIZE:
5      init(MI(i))
6  END FOR
7  FOR j = 1 TO N:
8      LAMBDA.clear()
9      FOR i = 1 TO LAMBDA_SIZE:
10         unit = SELECT(MI)
11         MUTATION(unit, M, PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL)
12         LAMBDA.insert(unit)
13     END FOR
14     SORT(LAMBDA)
15     MI.clear()
16     FOR i = 1 TO MI_SIZE:
17         MI.insert(LAMBDA[i])
18     END FOR
19 END FOR
20 END ALGORITHM
```

---

Najvažnija je stvar u algoritmu operator mutacije. Operator mutacije kao argumente prima jedinku koja će se promijeniti, broj gena koji se mijenjaju (čvorova), vjerojatnost lokalne pretrage, vrstu bojanja za lokalnu pretragu i vrstu bojanja za globalnu pretragu.

**Algoritam 3.4:** Pseudokôd mutacije evolucijske strategije

---

```
1  MUTATION(unit, M, PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL) :
2      choice = random()
3      FOR i = 1 TO M:
4          index = random()
5          IF choice < PROP THEN
6              SETCOLOR(unit[i], CS_LOCAL)
7          ELSE
8              SETCOLOR(unit[i], CS_GLOBAL)
9          END IF
10 END MUTATION
```

---

### 3.4.5. Karakteristike algoritma

Algoritam ima relativno velik broj parametara, što ga čini teškim za prilagodbu konkretnom problemu (grafu). Veličine skupova za roditelje i djecu trebale bi biti relativno male zbog vremena izvođenja. Većina je parametara vezana za mutaciju i to je najosjetljiviji dio algoritma. Potrebno je osigurati čestu lokalnu pretragu, ali i s druge strane, osigurati skakanje iz lokalnih minimuma. Algoritam često zapinje na platoima. Iako konvergencija može biti brža od agentskog algoritma, vrijeme izvođenja je duže. Vremenska složenost algoritma je ( $LS$  je skraćeno za  $LAMBDA\_SIZE$ ):  $O(N \cdot (LS \cdot M + LS \cdot \log(LS))) = O(N \cdot LS \cdot M + N \cdot LS \cdot \log(LS))$ . U praksi je čest slučaj:  $LS \leq M$ , pa je vremenska složenost:  $O(N \cdot LS \cdot M)$ . Algoritam polinomno ovisi o tri parametra, što predstavlja problem ako su oni relativno veliki. S jedne je strane potrebno osigurati dovoljan broj koraka algoritma kako bi se došlo do željene vrijednosti funkcije cilja, broj djece  $LS$  ne smije biti premalen – kako bi se zadržao genetski kod, a veličina mutacije  $M$  ne smije biti prevelika zbog velikog odstupanja, a s druge strane ne smije biti premala zbog spore konvergencije.

## 3.5. Simulirano kaljenje

Simulirano kaljenje također spada u skupinu evolucijskih algoritama. Njegova specifičnost je da se koristi samo jedna jedinka koja iz koraka u korak evoluira. Algoritam je inspiriran kaljenjem metala. Rješenje se nužno ne poboljšava iz koraka u korak, ali je vjerojatnost pogoršanja rješenja kako algoritam napreduje sve manja. Dopuštanjem lošijih rješenja nastoji se izbjeći lokalni optimum. Pretpostavka je da s vremenom algoritam dolazi u željeno područje globalnog optimuma. Na početku algoritam vrši globalnu pretragu, da bi s vremenom prostor stanja počeo pretraživati na finiji način. Simulirano kaljenje se često koristi kao alat u rješavanju problema bojanja grafova kao što se to prikazuje u radu [8].

### 3.5.1. Parametri algoritma

1. Početna temperatura –  $T\_START$
2. Globalni broj koraka algoritma –  $G$
3. Broj iteracija s istom temperaturom –  $E$
4. Faktor smanjenja temperature –  $\alpha$

5. Vjerojatnost lokalne vrste bojanja – *PROP*
6. Način bojanja za globalnu pretragu – *CS\_GLOBAL*
7. Način bojanja za lokalnu pretragu – *CS\_LOCAL*

### 3.5.2. Detalji algoritma

Algoritam kreće od početnog rješenja (jedinke) koja se označava s  $X$ . Prikaz rješenja je klasičan, svaki čvor je element u nizu, a vrijednost elementa je boja čvora. Susjedno rješenje od  $X$  u oznaci  $S$  je rješenje koje ima sve elemente niza jednake kao i  $X$  osim točno jednog elementa. U svakom se koraku algoritma iz rješenja  $X$  generira susjedno rješenje  $S$ . Ako rješenje  $S$  ima vrijednost funkcije cilja manju od  $X$ , tada se  $X$  zamjenjuje s  $S$ . U slučaju da je vrijednost funkcije cilja veća, tada se rješenje prihvaća s vjerojatnošću (ovisi o trenutnoj temperaturi  $T$ ):

$$P(X = S) = e^{-\frac{f(S)-f(X)}{T}} \quad (3.1)$$

Kako temperatura  $T$  pada, vjerojatnost prihvaćanja pada u 0, uz pretpostavku  $f(S) \geq f(X)$ :

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{-\frac{f(S)-f(X)}{T}} = 0 \quad (3.2)$$

U ovoj implementaciji simuliranog kaljenja koriste se dvije petlje. Vanjska, koja služi za smanjivanje temperature i unutarnja koja traži rješenja u susjedstvu s istom temperaturom  $T$ . Koriste se dvije vrste traženja susjeda: lokalna i globalna. Prvo služi kako bi se našlo bolje rješenje, a druga vrsta traženja služi kako bi se rješenje pogoršalo u svrhu prelaska u novo područje prostora stanja.

---

#### Algoritam 3.5: Pseudokôd simuliranog kaljenja

---

```

1  ALGORITHM(T_START, G, E, ALFA, PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL) :
2    init(X)
3    FOR i = 1 TO G:
4      FOR j = 1 TO E:
5        S = X
6        IF random() < PROP THEN
7          SETCOLOR(X[random()], CS_LOCAL)
8        ELSE
9          SETCOLOR(X[random()], CS_GLOBAL)
10       END IF
11       dE = f(S) - f(X)
12       IF ( dE < 0 OR random() < EXP(-dE/T) ) THEN

```

```

13         X = S
14     END IF
15 END FOR
16     T = T * ALFA
17 END FOR
18 END ALGORITHM

```

---

### 3.5.3. Karakteristike algoritma

Algoritam je relativno jednostavan za implementaciju. Dobra je strana što za razliku od drugih promatranih algoritama ima manju memorijsku složenost, zbog toga što koristi samo dvije jedinke ( $X$  i  $S$ ). Za parametar početne temperature  $T$  nije potrebno ispitivati najbolju vrijednost, već se može izračunati kao: za prvi korak u algoritmu potrebno je uzeti lošije rješenje s 50% vjerojatnosti. Prvi se korak greške procijeni prema problemu i ponašanju algoritma:  $\tilde{dE} \sim f(S_1) - f(X_1)$ .

$$T_{\text{start}} = -\frac{dE}{\ln(P)} = 1.443 \cdot dE \quad (3.3)$$

Parametar  $\alpha$  potrebno je namjestiti kako temperatura ne bi padala prebrzo – zapijanje u lokalnim optimumima, ili kako ne bi padala presporo – slaba konvergencija. Vremenska složenost algoritma je:  $O(G \cdot E)$ , što je veoma dobro svojstvo jer samo dva parametra utječu na vrijeme izvođenja, i to polinomno.

## 3.6. Genetsko kaljenje

Genetsko kaljenje [5] je algoritam koji kombinira dvije ideje: genetski algoritam i simulirano kaljenje. Ideja je ista kao i kod simuliranog kaljenja, samo što se u sustavu nalazi više jedinki (rješenja). Rješenja međudjeluju preko parametra slobodne energije. Na početku je zadana početna energija, koja se ravnomjerno raspoređuje po svim jedinkama. Za svaku se jedinku u sustavu napravi mutacija i dobiva se susjedno stanje. Nova jedinka ima neku vlastitu energiju (funkcija cilja) te se prihvaća kao novo rješenje ako je vlastita energija nove jedinke manja od zbroja stare jedinke i djela slobodne energije koju je stara čestica dobila. Tako slobodna energija utječe na odabir lošijih jedinki.

### 3.6.1. Parametri algoritma

1. Ukupan broj iteracija –  $G$

2. Broj jedinki –  $N$
3. Početna energija –  $E$
4. Faktor hlađenja –  $\alpha$
5. Vjerojatnost lokalne vrste bojanja –  $PROP$
6. Način bojanja za globalnu pretragu –  $CS\_GLOBAL$
7. Način bojanja za lokalnu pretragu –  $CS\_LOCAL$

### 3.6.2. Detalji algoritma

Na početku se inicijaliziraju jedinke. Slobodna energija postavi se na početnu energiju i algoritam kreće u rad. Svaka jedinka dobije dio slobodne energije u obliku praga  $T$ . To znači da jedinka može odstupati od svog roditelja za najviše prag  $T$  da bude prihvaćena kao nova jedinka. Ako je prihvaćena, energija koja nije iskorištena, a to je razlika energije stare jedinke i nove jedinke (gdje se prag  $T$  nadodaje staroj jedinki), dodaje se u slobodnu energiju za tu iteraciju. Na kraju, da se ne bi dogodila divergencija, slobodna energija množi se faktorom  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Algoritam 3.6:** Pseudokôd genetskog kaljenja

---

```

1  ALGORITHM(G, N, E, ALFA, PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL) :
2    UNITS[N]
3    FOR i = 1 TO N:
4      init(UNIT[i])
5    END FOR
6    FREE_ENERGY = E
7    FOR j = 1 TO G:
8      T = FREE_ENERGY / N
9      FREE_ENERGY = 0
10     FOR i = 1 TO N:
11       new_unit = MUTATION(UNIT[i], PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL)
12       IF f(new_unit) < f(UNIT[i]) + T THEN
13         D = f(UNIT[i]) + T - f(new_unit)
14         FREE_ENERGY = FREE_ENERGY + D
15         UNIT[i] = new_unit
16       ELSE
17         FREE_ENERGY = FREE_ENERGY + f(UNIT[i]) + T
18       END IF
19     END FOR
20     FREE_ENERGY = FREE_ENERGY * ALFA
21   END FOR
22 END ALGORITHM

```

---

---

**Algoritam 3.7:** Pseudokôd mutacije genetskog kaljenja

---

```
1  MUTATION(unit, PROP, CS_GLOBAL, CS_LOCAL) :  
2    IF random() < PROP THEN  
3      SETCOLOR(unit[random()], CS_LOCAL)  
4    ELSE  
5      SETCOLOR(unit[random()], CS_GLOBAL)  
6    END IF  
7  END MUTATION
```

---

### 3.6.3. Karakteristike algoritma

Algoritam izgleda veoma slično kao i simulirano kaljenje, samo što se odluka za prihvatanje novog rješenja donosi na temelju praga, tj. odstupanja funkcije cilja od stare jedinke. Međudjelovanje jedinki temelji se na slobodnoj energiji, koja se u svakoj iteraciji skuplja kao dodatak koji nije potrošen. Ako se nova jedinka ne prihvća tada slobodna energija ostaje neiskorištena i ostaje u sustavu, što omogućuje veću netoleranciju u idućem koraku. To je mehanizam algoritma za izbjegavanje lokalnih optimuma. Za rješavanje optimizacijskog problema bojanja grafova koriste se dvije vrste dobivanja susjednog rješenja (mutacije). Kao i za neke prethodne algoritme, koriste se lokalna i globalna vrsta bojanja. Vremenska složenost algoritma je:  $O(G \cdot N)$ , s time da je to nešto veća vremenska složenost od simuliranog kaljenja ako se u obzir uzme računanje funkcije cilja za  $N$  jedinki.

## 3.7. Pronalaženje najpogodnijeg pohlepnog algoritma

Pohlepni se algoritam u ovom radu koristi na dva načina. Prvo se koristi kao metoda koja dovodi rješenje u dovoljno dobro početno rješenje, nakon čega minimizaciju funkcije preuzima neka metaheuristika. Drugi način korištenja je kao dio metaheuristike u obliku operatora (npr. mutacija kod genetskog algoritma), metoda za izbjegavanje lokalnog minimuma (tuneliranje) ili pak metoda koja osigurava da postotak promjene boja naspram inicijalnog grafa ne prođe zadani prag. Kod korištenja pohlepnih algoritama u praksi se često koriste *ad-hoc* metode konfiguriranja istog. Prednost je ovakvih metoda što u relativno kratkom vremenu mogu isprobati različite konfiguracije i zatim odabrati najbolju. Nedostatak metode je u tome što ta konfiguracija ne jamči dobar rad nad svim grafovima (*No free lunch* teorem). Kao uvod u hiper-heuristike i postavljanje temelja za budući rad, iz grafova se želi izvući znanje o utjecaju vrsta sortiranja čvorova. Ovaj dio rada ima dva cilja. Prvi je pronaći optimalni operator usporedbe

čvorova koji kombinira sve dostupne operatore tj. vrste sortiranja. Drugi cilj je dovesti u vezu vrstu sortiranja i način bojanja tj. empirijski pokazati koja vrsta sortiranja je najbolja za koju vrstu bojanja. Rezultati bi mogli pokazati određenu vezu između svojstava grafova i vrste sortiranja, što bi se moglo koristiti kao uvod u istraživanje hiper-heuristika. Metoda pronalaženja pogodnog pohlepnog algoritma sastoji se od koraka:

1. Generiranje grafa.
2. Odabir vrste bojanja za pohlepni algoritam.
3. Pokretanje pohlepnog algoritma s vrstom sortiranja *RND*.
4. Iz svih pokretanja pohlepnog algoritma uzeti određen postotak najboljih rezultata.
5. Za svaki čvor izračunati relativnu poziciju kao  $\frac{x+1}{N}$  gdje je  $x$  indeks u slučajno sortiranom nizu čvorova, a  $N$  ukupan broj čvorova u grafu.
6. Za svaku relativnu poziciju izračunati svojstva tog čvora (stupanj, zasićenje, koliziju, grešku).
7. Nekom od metoda regresije pronaći funkciju čiji su argumenti svojstva čvora, a rezultat je relativna pozicija.

Tako dobivena funkcija može se koristiti kao vrsta sortiranja. Za neke se vrste regresija veoma lako interpretiraju rezultati, pa je lako odrediti u kojoj mjeri svojstva čvora utječu na dobar rezultat. Za različite vrste bojanja moguće je uspoređivati funkcije i uočiti ovisnosti. Za različite grafove usporedbom funkcija može se izvući znanje o pogodnom algoritmu za pojedine vrste grafova. Ovaj rezultat može se koristiti kao temeljno znanje za proučavanje automatskog odabira algoritama [14].

### 3.8. Tuneliranje

*Tuneliranje* je tehnika koja se može ugraditi u bilo koji optimizacijski algoritam i služi za izlazak iz lokalnog minimuma. Tehnika je vrlo slična *mutacijama* kod evolucijskih algoritama. Razlika je u tome što ova tehnika ne odabire slučajno novu točku iz prostora pretraživanja stanja, već nastoji odabrati točku koja ima približnu vrijednost funkcije cilja kao i trenutna točka koja se promatra (npr. relativna razlika funkcija cilja mora biti manja od nekog praga). Kako nova točka u prostoru pretrage ima sličnu

vrijednost funkcije cilja, algoritam nastoji pronaći minimum u toj okolini, a to teorijski znači da funkcija cilja može samo padati. U praksi se može dogoditi da i poraste jer se za novu točku ne zahtijeva da vrijednosti budu identične, već približno jednake. Nova se točka traži tako što se po redu pretražuje dimenzija po dimenzija linearno. U problemu optimizacije bojanja grafa to znači da se po redu za svaki čvor ispituju boje, i ako za trenutni čvor nova boja za čvor ne utječe na vrijednost greške, tada se ta boja ostavlja tome čvoru. Ako se u pohlepnom algoritmu kao vrsta bojanja koristi "SWAP" metoda, dobije se očekivani efekt.

U navedenom pseudokôdu nova se točka postavlja u trenutnu. Zatim se vanjska petlja vrti po dimenzijama i za svaku se ispituju svi elementi (npr. boje). Element koji za apsolutno odstupanje daje vrijednost manju od praga  $T$ , postavlja se kao element za tu dimenziju i potraga kreće na sljedeću dimenziju.

---

**Algoritam 3.8:** Metoda tuneliranja - implementacija

---

```

1  TUNNELING (f, X)
2  NEW_X = X
3  FOR i = 1 TO X.length()
4    FOR EACH element in DIMENSION(i):
5      NEW_X.dimension(i) = element
6      IF |f(NEW_X) - f(X)| < f(X) * T:
7        BREAK
8      NEW_X.dimension(i) = X.dimension(i)
9    END FOR
10  END FOR
11  RETURN NEW_X
12  END TUNNELING

```

---

### 3.9. Upravljanje postotkom promijenjenih čvorova

Kako je sekundarni kriterij optimizacije da postotak promijenjenih čvorova naspram inicijalnog stanja ne prođe neku granicu (konkretno 66%), potrebno je ostvariti mehanizam koji to omogućuje. U ovom se radu koristi pristup težnje boje da postane početna. U vrste bojanja implementira se mehanizam biranja boja za koji vrijedi da ako je početna boja jedna od mogućih, ona se iskorištava za bojanje čvora.



## 4. Programsko rješenje

Za rješavanje zadanog optimizacijskog problema bojanja grafova i ispitivanja navedenih algoritama, odlučeno je da će se izgraditi infrastruktura koja omogućuje brzi razvoj i ispitivanje algoritama. Ideja je izgraditi radnu okolinu u kojoj korisnik može iskoristiti već napisane module za standardne operacije koje se koriste i jednostavno ih uvesti u svoj algoritam. Koristi se jezik *Java* zbog relativno visoke apstrakcije, mogućnosti objektnog oblikovanja aplikacije i prenosivosti. Veoma važan cilj koji se nastoji ostvariti je infrastruktura koja je lako nadopunjiva novim modulima za buduću upotrebu. Moduli aplikacije koji su razvijeni za ovaj rad:

1. *main* – glavna metoda za pokretanje algoritama
2. *common* – generičke strukture podataka
3. *input* – implementacije različitih ulaznih formata
4. *output* – implementacija različitih izlaznih formata
5. *algorithm* - apstrakcija algoritma bojanja grafova
6. *unit* – jedinka (prikaz rješenja) koja se koristi u populacijskim algoritmima
7. *algorithmset* – modul za spremanje implementacija algoritama
8. *greedy* – implementacija pohlepnog algoritma
9. *color\_selector* – implementacije vrsta bojanja
10. *order* – implementacija različitih vrsta sortiranja čvorova
11. *agents* – implementacija agentskog algoritma
12. *genetic* – implementacija genetskog algoritma (strategije)
13. *simulated\_annealing* – implementacija simuliranog kaljenja

14. *structure* – najviša apstrakcija grafa – jednostavni graf
15. *weight\_graph* – apstrakcija težinskog grafa
16. *ericsson\_graph* – graf koji posjeduje strukture pogodne za rješavanje optimizacijskog problema
17. *stat* – generičke (statičke) metode koje se koriste za računanje statistika ili svojstava koja ne spadaju u druge strukture
18. *machine\_learning* – modul za izvlačenje značajki iz grafa i pripremu podataka za strojno učenje

U nastavku slijedi detaljni opis nekih modula koji su najvažniji za rad infrastrukture. Detaljne upute o korištenju infrastrukture priložene su u digitalnom obliku uz ovaj rad.

#### **4.0.1. Modul *input***

Funkcija ovog modula je osigurati učitavanja raznih formata zapisa grafa u datotekama. Graf u datoteci može biti zapisan proizvoljnim formatom, pa je cilj modula da obuhvati što više formata. Jedan od formata specifičan je za optimizacijski problem. Implementirani su i neki jednostavni formati.

#### **4.0.2. Modul "*output*"**

Kao što je funkcija prethodnog modula učitavanje, tako je funkcija ovog modula zapis grafa u datoteku. Podržan je jednostavan format koji zapisuje identifikator čvora i njegovu boju. Podržan je zapis koji graf pretvara u format potpun za optimizacijski problem, ali je veličina datoteke koja nastaje duplo manja od originalnog ulaznog formata. Osim zapisa grafa, ovaj modul omogućuje i ispis statistika u drugim formatima koji se mogu koristiti u drugim alatima, primjerice alatima za strojno učenje.

#### **4.0.3. Modul "*algorithm*"**

Modul implementira strategiju kao oblikovni obrazac. Korisnik pri pokretanju algoritma stvara kontekst u kojem navodi konkretan algoritam. Nakon toga, sučelje prema korisniku je samo kontekst. Svi algoritmi moraju imati implementirano isto sučelje. Kao što se može vidjeti u programskom odsječku 4.1 klasa *GraphAlgorithmContext*

ima privatni atribut tj. referencu koja pokazuje na konkretan algoritam. Algoritam se zadaje preko konstruktora. Implementirane su dvije metode istog naziva: *startAlgorithm*, koje kao parametar primaju strukturu podataka graf (*Graph*). Metode se razlikuju u drugom parametru, gdje se kao argument može dati skup identifikatora čvorova koje algoritam smije bojati. One koje ne smije bojati nisu jednaki nepromjenjivim čvorovima (jer to algoritam rješava interno), već se tu čvorovi koji su možda prije obojeni i s pokretanjem novog algoritma korisnik ih ne želi mijenjati, pa zadaje samo skup čvorova koji smiju mijenjati boju.

---

**Algoritam 4.1:** Definicija klase i metoda za oblikovni obrazac strategija

---

```

1
2  public class GraphAlgorithmContext {
3
4      private GraphColoringAlgorithm algorithm;
5
6      public GraphAlgorithmContext(GraphColoringAlgorithm
          algorithm){
7          this.algorithm = algorithm;
8      }
9
10     public void startAlgorithm(Graph graph) {
11         algorithm.startAlgorithm(graph);
12     }
13
14     public void startAlgorithm(Graph graph, Set<Integer>
          touchableNodes) {
15         algorithm.startAlgorithm(graph, touchableNodes);
16     }
17
18 }

```

---

U programskom odsječku 4.2 pokazana je implementacija klase *GraphColoringAlgorithm*. Klasa je apstrakcija algoritma za bojanje grafova. Pri stvaranju novog konkretnog algoritma, korisnik je obavezan implementirati metodu *algorithm*, koja je središte implementacije svakog algoritma. Uz to, korisnik ima mogućnost ispitivanja smije li pobožati čvor ili ne – *checkNode*. Parametre algoritma korisnik zadaje pri pozivu konstruktora za konkretni algoritam.

---

**Algoritam 4.2:** Apstraktna klasa algoritma

---

```

1
2  public abstract class GraphColoringAlgorithm {
3
4      private Set<Integer> touchableNodes = null;

```

```

5     protected Graph graph;
6
7     protected Set<Integer> getTouchableNodes() {
8         return this.touchableNodes;
9     }
10
11    protected boolean checkNode(int index) {
12        int id = graph.getNodeId(index);
13        if (touchableNodes == null)
14            return true;
15        return touchableNodes.contains(id);
16    }
17
18    protected abstract void algorithm();
19
20    public void startAlgorithm(Graph graph) {
21        touchableNodes = null;
22        this.graph = graph;
23        this.algorithm();
24    }
25
26
27    public void startAlgorithm(Graph graph, Set<Integer>
28        touchableNodes) {
29        touchableNodes = touchableNodes;
30        this.graph = graph;
31        this.algorithm();
32    }

```

---

#### 4.0.4. Modul "*unit*"

Modul "*unit*" je generička klasa koja se koristi kao prikaz rješenja u populacijskim algoritmima. Zbog prirode problema koja donosi grafove s velikim brojem čvorova i brojem bridova, neučinkovito je pamtit i više instanci grafa zbog nedostatka memorije. Zbog toga se pamte samo parovi čvor-boja, a struktura grafa zadana je referencom. Klasa *GeneralUnit* pruža operacije:

- brzo dohvaćanje funkcije cilja – *getError()* –  $O(1)$
- dohvaćanje broja čvorova – *getSize()* –  $O(1)$
- postavljanje boje čvoru – *setColor(id, color)* –  $O(|H(v)|)$
- postavljanje strukture grafa u boje jedinice – *updateGraph()* –  $O(|V(G)|)$

## 5. Rezultati

### 5.1. Karakteristike računala korištenog pri ispitivanju

**Tablica 5.1:** Karakteristike računala

Model	Aspire 5755G
Operacijski sustav	Linux 3.2.0-23-generic #36-Ubuntu SMP x86_64
Procesor	Intel(R) Core(TM) i5-2410M CPU 2.30GHz
Memorija	8GiB – 4GiB SODIMM DDR3 Synchronous 1333 MHz (0.8 ns)
Priručna memorija L1 2x	32KiB
Priručna memorija L2	256KiB
Priručna memorija L3	3MiB
Pomoćna memorija	976MiB Linux swap
Tvrđi disk	640GB TOSHIBA MK6465GS

### 5.2. Metode ispitivanja algoritama

#### 5.2.1. Ispitivanje metaheuristika

Nekoliko je rezultata za metaheuristike bitno kako bi se mogle uspoređivati. Dva svojstva koja najviše utječu na dobrotu metaheuristike su najmanja postignuta vrijednost funkcije cilja i stvarno vrijeme izvođenja. Osim toga, veoma je bitan dio pronalaženje optimalnih parametara metaheuristika. Zbog toga se na skupu ispitnih grafova jedna metaheuristika ispituje s drugačijim parametrima te se najbolji dobiveni rezultat neke metaheuristike uspoređuje s ostalim najboljim rezultatima drugih metaheuristika. Rad metaheuristika proučava se kroz iteracije. Pronalazi se ovisnost broja korištenih iteracija i vrijednosti funkcije cilja, ovisnost broja korištenih iteracija i postotka promjene inicijalnih boja te ovisnost promjene inicijalnih boja o vrijednosti funkcije cilja. Takve ovisnosti mogu pokazati neke karakteristike algoritma, kao što su brzina konvergencije, vrijeme zadržavanja u lokalnim minimumima, te dati smjer za korištenje vrsta

odabira boja pri nekoj metaheuristici.

Metaheuristike se ispituju tako da se početno stanje grafa dovede pomoću pohlepnog algoritma u neku točku čija funkcija cilja ima puno manju vrijednost od početnog grafa. Cilj je pohlepnog algoritma da osigura valjano bojenje za svaki čvor, te da se greška dovede do manje vrijednosti. Koristi se pohlepni algoritam u pet koraka. Iz iteracije u iteraciju pohlepni algoritam nastoji bojiti graf pomoću *SDO* sortiranja i *ABW* odabira boja. Ako algoritam zastane u lokalnom minimumu, pomoću *FIT* sortiranja i *MF* odabira boja nastoji se iskočiti iz tog minimuma. Odabrano je pet koraka, jer se eksperimentiranjem to pokazalo kao najbolja opcija, a da bi algoritmi i grafovi bili usporedivi, tj. da pohlepni algoritam ne bi utjecao na brzinu konvergencije, za sve slučajeve ispitivanja ostavljena je ta ista inačica.

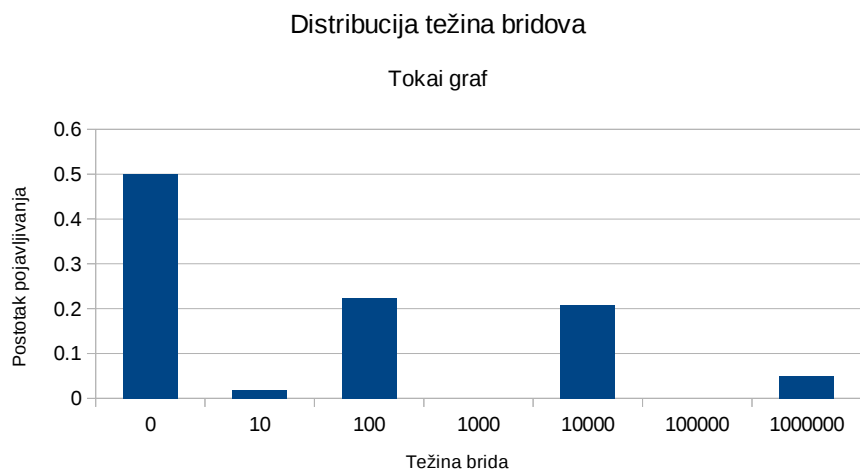
### 5.3. Grafovi za ispitivanje

Za ispitivanje koriste se dvije vrste grafova. Prva vrsta su grafovi koji su generirani iz realnih situacija. Druga vrsta su umjetni grafovi koji su generirani kako bi se moglo proučavati ponašanje algoritama i kako bi se mogli donositi općeniti zaključci. Sintetički primjeri generirani su tako što se promatraju različit broj čvorova i različita gustoća povezanosti istih. Za težine između čvorova uzima se distribucija iz grafova koji su generirani iz realnih situacija kako bi rezultati bili što bliži mogućim primjerima iz stvarnoga svijeta. Na slikama 5.1 i 5.2 vide se distribucije težina (po redu veličine) na dva grafa iz realnog svijeta. Vidljivo je da oko pola težina ima malu vrijednost oko 0, a ostale težine pripadaju većim vrijednostima.

### 5.4. Slučajno pretraživanje

Kako bi se opravdalo traženje optimizacijskog algoritma za ovaj problem, potrebno je pokazati kako uniformna raspodjela boja po grafu ne daje zadovoljavajuće rezultate. U ovu je svrhu korišten pohlepni algoritam koji za sortiranje čvorova koristi *RND* metodu i također *RND* vrstu bojanja. Efekt je isti kao da se obilaze čvorovi i svakom se dodijeli slučajna boja iz njegove domene. Nad svakim se grafom pokreće pohlepni algoritam deset puta, nakon čega se rezultat usrednjuje i uspoređuje s početnom pogreškom grafa.

Rezultati su prikazani u tablici 5.2. Kako je očekivana greška u svim grafovima reda veličine  $10^3$  ili manje, vidljivo je da slučajno bojanje ne daje dobre rezultate, već rezultati imaju jedan do dva reda veličine manje vrijednosti od inicijalnog boja-



**Slika 5.1:** Tokai graf – distribucija težina

nja. Razlika bi bila još manja kada bi inicijalna bojanja bila validna, ali kako se takvi čvorovi dodatno kažnjavaju (prema funkciji cilja 2.5), inicijalna pogreška je veća.

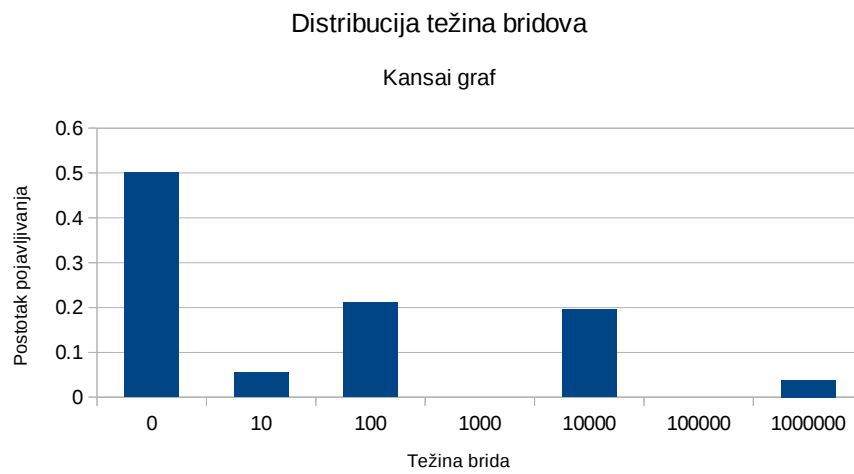
## 5.5. Agentski algoritam

Različite vrste bojanja različito utječu na sam rad agentskog algoritma. Vrsta bojenja *ABW* ima malo vrijeme izvršavanja i daje najbolje rezultate (jedan primjer prikazan je u tablici 5.3). Vrsta bojenja *MC* daje najlošije rezultate i koristi puno vremena. Pokazuje se da algoritam ne konvergira kada se koristi *MC* vrsta bojenja. Metoda *MF* također daje malu vrijednost funkcije cilja, ali koristi puno više vremena.

**Broj agenata** važan je i kritičan parameter u smislu korištenja vremena. Ako ima više agenata konvergencija algoritma je bolja. Za praktične svrhe preporučuje se da broj agenata bude između jedne četvrtine broja čvorova i jedne polovine broja čvorova.

**Vjerojatnost ostajanja agenta na trenutnom čvoru** mora biti veoma mala. Što je vjerojatnost veća, to algoritam sporije konvergira. Ne preporučuje se premala vrijednost (tj. 0), jer tada se gubi svojstvo preispitivanja odluke, što daje lošije rezultate. Na slici 5.3 prikazan je rad algoritma. Što je vjerojatnost manja to je i razlika u radu algoritma manja.

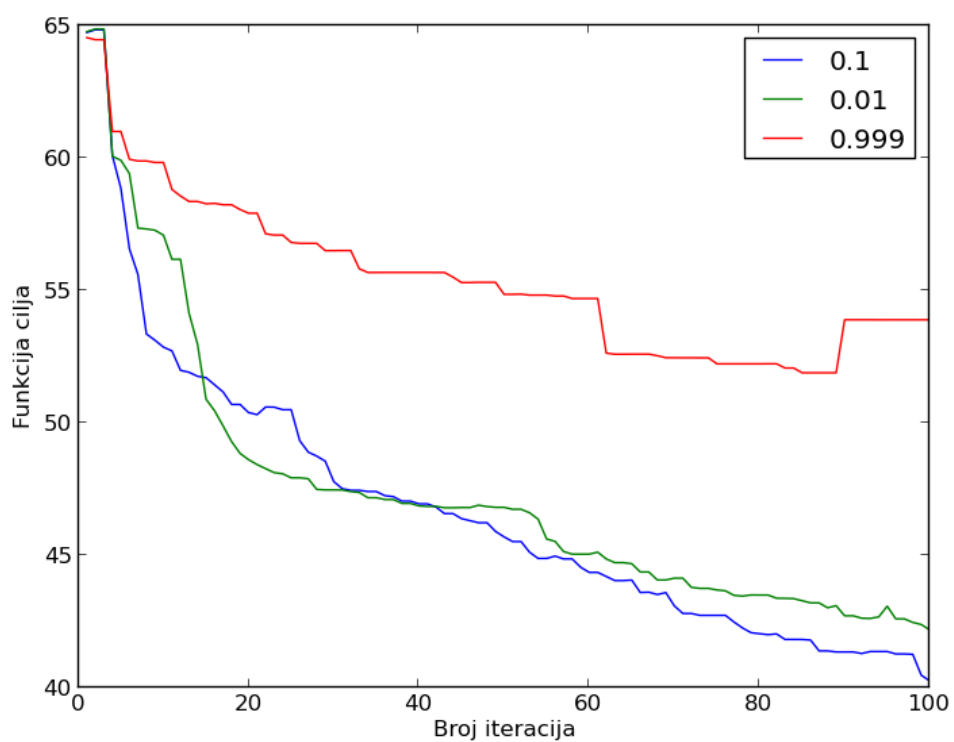
**Vjerojatnost pomaka agenta na slučajni čvor u susjedstvu** mora biti dovoljno



**Slika 5.2:** Kansai graf – distribucija težina

velika da bi se agenti mogli slučajno raspršiti po grafu, ali ne prevelika kako bi se moglo popravljati susjedstvo. Preporučena vrijednost parametra je oko 0.5. Na slici 5.4 vidi se da pomak na *najbolji* čvor nije dobar izbor, ali ako se bodovanje koristi u nekom postotku (pomak nije slučajan) tada se mogu dobiti bolji rezultati.





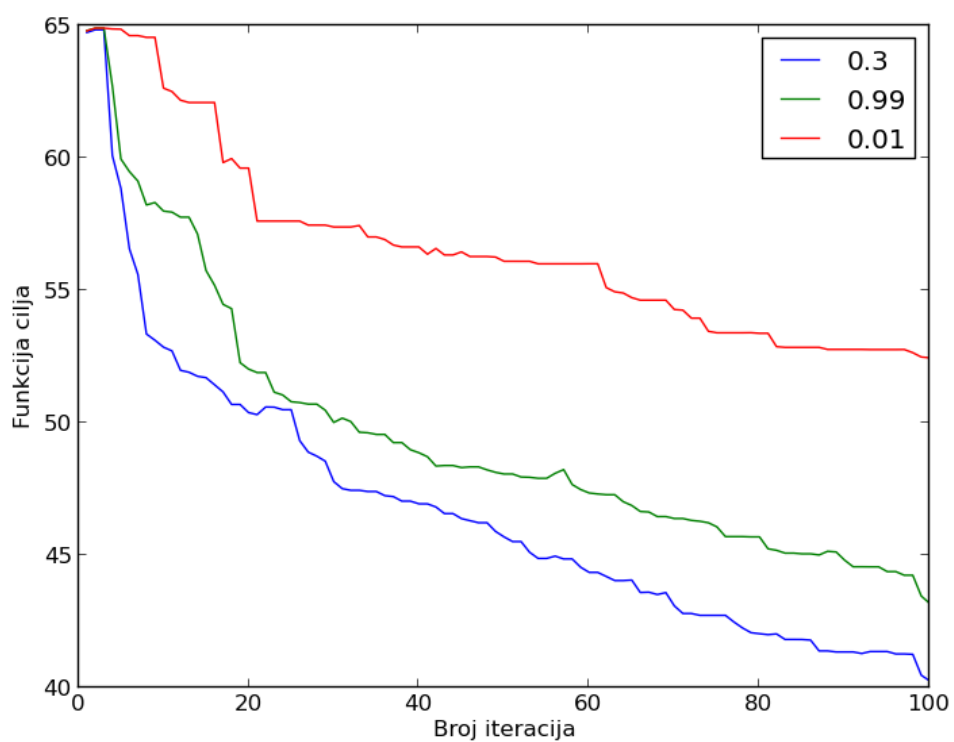
**Slika 5.3:** Agentski algoritam – ovisnost o parametru ostajanja na čvoru – Kansai-C

**Tablica 5.2:** Popis grafova za ispitivanje

Naziv grafa	Broj čvorova	Broj bridova	Inicijalna pogreška	Slučajno bojanje
graph_700_0.1	700	30102	$1.95 \cdot 10^9$	$1.25 \cdot 10^6$
graph_700_0.7	700	194684	$1.93 \cdot 10^9$	$7.26 \cdot 10^6$
graph_700_0.3	700	89719	$2.28 \cdot 10^9$	$3.30 \cdot 10^6$
graph_700_0.9	700	234311	$1.92 \cdot 10^9$	$9.22 \cdot 10^6$
graph_700_0.5	700	144970	$2.07 \cdot 10^9$	$5.80 \cdot 10^6$
graph_500_0.1	500	15160	$1.38 \cdot 10^9$	$6.61 \cdot 10^5$
graph_500_0.7	500	99316	$1.66 \cdot 10^9$	$3.70 \cdot 10^6$
graph_500_0.3	500	45927	$1.50 \cdot 10^9$	$1.88 \cdot 10^6$
graph_500_0.9	500	119310	$1.46 \cdot 10^9$	$4.83 \cdot 10^6$
graph_500_0.5	500	73894	$1.46 \cdot 10^9$	$2.74 \cdot 10^6$
graph_900_0.1	900	50221	$2.81 \cdot 10^9$	$1.99 \cdot 10^6$
graph_900_0.7	900	321598	$2.63 \cdot 10^9$	$1.23 \cdot 10^7$
graph_900_0.3	900	147898	$2.82 \cdot 10^9$	$5.44 \cdot 10^6$
graph_900_0.9	900	386559	$2.58 \cdot 10^9$	$1.64 \cdot 10^7$
graph_900_0.5	900	239189	$2.91 \cdot 10^9$	$9.90 \cdot 10^6$
graph_4000_0.1	4000	1008042	$1.16 \cdot 10^{10}$	$3.79 \cdot 10^7$
graph_4000_0.7	4000	6346676	$1.30 \cdot 10^{10}$	$2.41 \cdot 10^8$
graph_4000_0.3	4000	2924613	$1.22 \cdot 10^{10}$	$1.12 \cdot 10^8$
graph_4000_0.5	4000	4733505	$1.22 \cdot 10^{10}$	$1.80 \cdot 10^8$
graph_3000_0.7	3000	3571396	$9.51 \cdot 10^9$	$1.39 \cdot 10^8$
graph_3000_0.6	3000	3131418	$9.48 \cdot 10^9$	$1.20 \cdot 10^8$
graph_3000_0.9	3000	4297423	$9.18 \cdot 10^9$	$1.63 \cdot 10^8$
graph_3000_0.5	3000	2666916	$9.15 \cdot 10^9$	$1.03 \cdot 10^8$
graph_3000_0.8	3000	3970760	$9.37 \cdot 10^9$	$1.52 \cdot 10^8$
graph_2000_0.7	2000	1589268	$6.21 \cdot 10^9$	$6.13 \cdot 10^7$
graph_2000_0.6	2000	1392574	$6.02 \cdot 10^9$	$5.41 \cdot 10^7$
graph_2000_0.9	2000	1910979	$6.22 \cdot 10^9$	$7.36 \cdot 10^7$
graph_2000_0.5	2000	1181788	$6.61 \cdot 10^9$	$4.74 \cdot 10^7$
graph_2000_0.8	2000	1764223	$6.31 \cdot 10^9$	$6.62 \cdot 10^7$
Kansai-C	8937	2259249	$1.89 \cdot 10^7$	$7.40 \cdot 10^8$
Tokai-B	4244	915283	$1.29 \cdot 10^9$	$2.38 \cdot 10^8$
Tokai-A	17066	5298396	$1.83 \cdot 10^{10}$	$9.52 \cdot 10^8$
Kansai-B	4925	1283991	$7.53 \cdot 10^7$	$3.15 \cdot 10^8$
Tokai-C	10518	2557187	$5.74 \cdot 10^9$	$5.43 \cdot 10^8$
Kansai-A	18807	7359859	$4.69 \cdot 10^9$	$1.38 \cdot 10^9$

**Tablica 5.3:** Vrijeme izvođenja agentskog algoritma uz razne vrste bojanja – Kansai-C

Vrsta bojanja	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	40.24	893.84
MC	66681857.46	1109.15
MF	40.46	1287.86



**Slika 5.4:** Agentski algoritam – ovisnost o parametru pomaka na slučajni čvor – Kansai-C

## 5.6. Evolucijska strategija

Problem evolucijske strategije je sporo izvođenje zbog toga što koristi populaciju. Za svaku jedinku iz populacije potrebno je računati funkciju cilja, što dovodi do sporijeg izvršavanja. Jedan od razloga je implementacija algoritma. Zbog veličine problema i nedostatka memorije na razvojnom računalu, smanjuje se memorijska složenost, ali gubi se na vremenskoj složenosti. Evolucijska strategija ima puno više mogućnosti, ali za to je potrebno i puno više procesorske snage.

U tablici 5.4 prikazano je tipično ponašanje algoritma s različitim vrstama bojenja. Korištenjem *RND* načina bojenja algoritam brže radi, ali su i rješenja lošija. Najbolji izbor je kombinacija *ABW-SWAP* jer za korištenje malo vremena dobivaju se dobri rezultati. Korištenje *MC* lokalnog načina bojenja se ne preporučuje zbog loših rezultata i vremenske neučinkovitosti.

**Veličina skupa  $\mu$**  mora biti dovoljno velika kako bi se stvorilo dovoljno jedinki koje mogu evoluirati. Premali skup  $\mu$  dovodi rješenje u lokalni minimum iz kojeg je teško izaći. Skup ne smije biti prevelik zbog toga što se vremensko izvođenje povećava. Velik skup zbog uniformne selekcije može dovesti do spore konvergencije, jer se očekuje da se svaka jedinka posjeti jednak broj puta u nekom vremenu.

**Veličina skupa  $\lambda$**  svakako mora biti veća od skupa  $\mu$ . Preporučuje se da skup  $\lambda$  bude veličine od 1.5 do 2 puta veći od skupa  $\mu$ . Prevelik skup sporo se obrađuje, ali skup ne smije biti premalen jer može uzrokovati sporu konvergenciju – mali selekcijski pritisak.

**Ukupan broj iteracija** ovisi o kompleksnosti grafa, tj. ovisi o tome koliko dobro rješenje se želi dobiti.

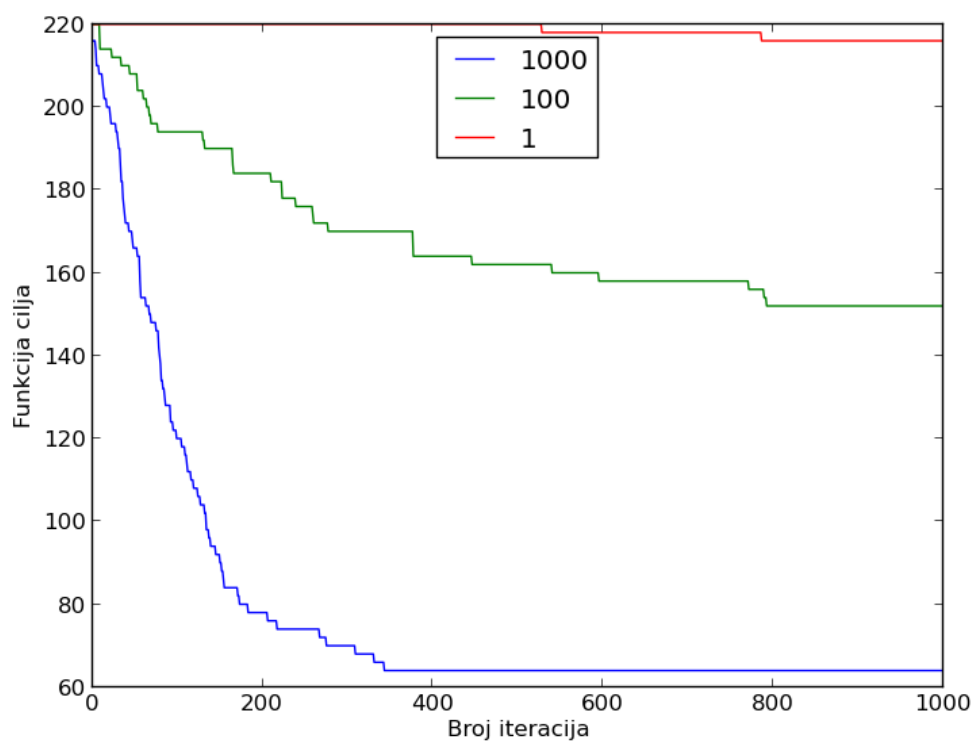
**Broj mutacija nad jednom jedinkom** parametar je koji omogućava nešto bržu konvergenciju. Za grafove s više od 10000 čvorova, preporuka je koristiti vrijednost parametra reda veličine  $10^2$ . Ako je parametar prevelik, pretraga algoritma postaje pregruba, tj. algoritam previše skače u prostoru stanja. Na slici 5.5 pokazan je rad algoritma s različitim brojem mutacija nad jedinkom. Kao što se vidi na slici ako je mutacija relativno velika, algoritam brzo konvergira na početku, ali je problem što zastane u lokalnom minimumu, tj. algoritam je pregrub. Ako je parametar premalen, tada je konvergencija spora.

**Vjerojatnost mutacije gena pomoću lokalne pretrage** parametar je koji određuje učestalost korištenja lokalne vrste bojenja. Ponašanje je slično kao i kod drugih algoritama. Parametar bi trebao biti veći od 0.5 kako bi se naglasak stavio na minimizaciju, ali s druge strane treba osigurati dovoljno veliko skakanje u prostoru stanja. Rezultati

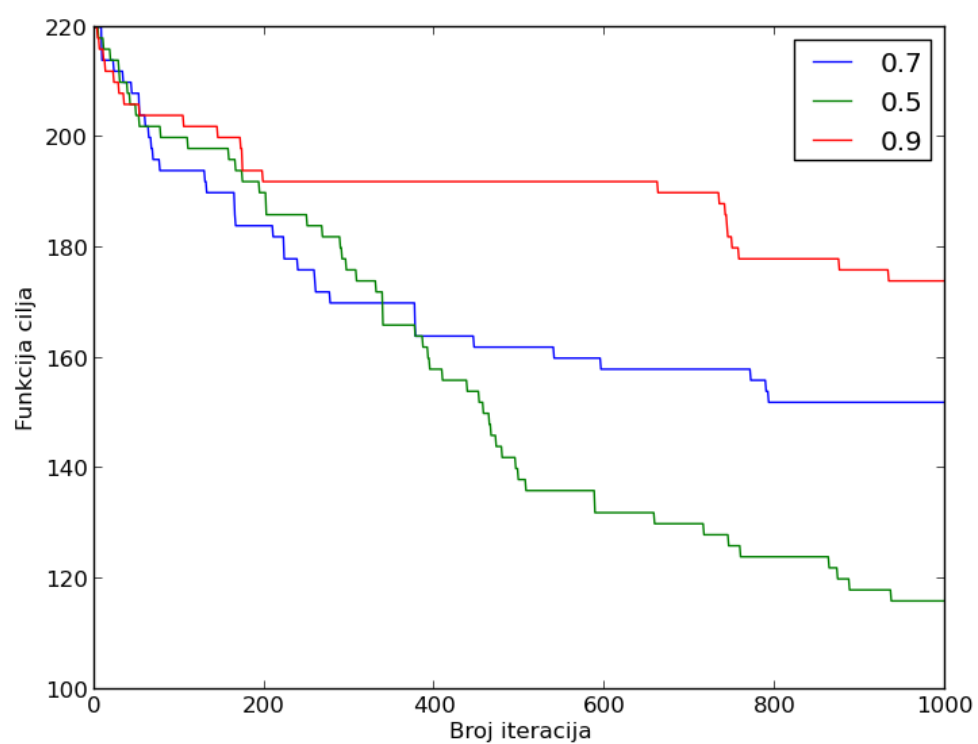
su prikazani na slici 5.6.

**Tablica 5.4:** Vrijeme izvođenja evolucijske strategije uz razne vrste bojanja – Kansai-C

Lokalno bojanje	Globalno bojanje	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	RND	63.8	37.168
ABW	SWAP	51.79	115.04
MC	RND	276.35	187.2
MC	SWAP	63.56	302.1
MF	RND	64.43	218.4
MF	SWAP	51.34	306.39



**Slika 5.5:** Evolucijska strategija – ovisnost o broju mutacija nad jedinkom – Tokai-C



**Slika 5.6:** Evolucijska strategija – ovisnost o vjerojatnosti lokalnog bojanja – Tokai-C

## 5.7. Simulirano kaljenje

Tablice 5.5, 5.6, 5.7 i 5.8 prikazuju kako različita bojanja utječu na krajnji rezultat (drugi parametri su konstantni). Najmanje vremena troši kombinacija *ABW-RND*, ali isto tako daje najlošije rezultate. Najduže vrijeme izvođenja imaju kombinacije *MC-SWAP* i *MF-SWAP* što je i očekivano zbog implementacije. Gotovo nikad se ne isplati koristiti kao lokalno bojanje *MC*, jer koristi dosta vremena, ali ne daje bolje rezultate. Kombinacija *MF-SWAP* ima dobar učinak, ali troši i puno vremena. Globalna vrsta bojenja *SWAP* daje bolje rezultate od *RND* vrste bojenja, što pokazuje da se isplati provoditi *tuneliranje*. Vrsta bojenja *ABW* troši manje vremena od ostalih vrsta bojenja i daje relativno dobre rezultate. Kao optimalna kombinacija preporučuje se *ABW-SWAP* jer vrijeme izvođenja je relativno malo, a dobivaju se dobri rezultati optimizacije.

**Početna temperatura** parametar je algoritma koji najviše ovisi o veličini i gustoći grafa. Što je graf kompleksniji, parametar mora biti veći. Osim toga parametar ovisi o konkretnim vrijednostima težina u grafu. Ovaj parametar teorijski se može izračunati, samo u ovoj optimizaciji problem su neuravnotežene težine bridova. Zato je teško odrediti pravu početnu vrijednost. Rezultati pokazuju da vrijednost početne temperature može biti manja od 1 (za ispitne grafove). Važno je ne staviti preveliku vrijednost, jer tada algoritam može divergirati. Ako se koristi vrsta bojenja *RND* tada je poželjno da taj parametar ima nešto manju vrijednost kako algoritam ne bi divergirao. Ovaj parametar je najvažniji za simulirano kaljenje, jer prevelika vrijednost može dovesti do divergencije kako je to prikazano na slici 5.8. Na slici 5.9 prikazan je rad algoritma u ovisnosti različitih vrijednosti početne temperature. Iako se razlike teško vide, u prosjeku postoji parametar koji daje bolje rezultate od ostalih. Najveći problem kod korištenja simuliranog kaljenja je uskladiti velike promijene u funkciji cilja (širok spektar vrijednosti bridova) i sprječavanje divergencije (velika početna temperatura). Posljedica ovog problema je što se simulirano kaljenje ponaša više kao slučajno pretraživanje (iako se može uočiti tipično ponašanje simuliranog kaljenja). Na kraju sama vrsta bojanja čvora utječe na poboljšavanje rješenja, a simulirano kaljenje omogućuje dodatnu dimenziju u prolasku kroz prostor stanja.

**Broj iteracija s istom temperaturom** je parametar koji određuje koliko susjednih rješenja će biti generirano s istom temperaturom. Algoritam nije jako osjetljiv na ovaj parametar, ali ne preporučuje se korištenje velike vrijednosti ( $> 500$ ) jer se povećanjem ovog parametra linearno povećava i vrijeme izvođenja algoritma. Preporučena vrijednost je  $\sim 100$ .

**Faktor smanjenja temperature** treba imati relativno veliku vrijednost u intervalu

$\in [0, 1]$ . Potrebno je smanjivati temperaturu, ali istovremeno paziti da temperatura ne padne prebrzo. Parametar je vezan za ukupan broj iteracija. Parametar nema velik utjecaj ako se koristi kombinacija *ABW-SWAP*, ali ako je parametar premalen gubi se glavno svojstvo simuliranog kaljenja.

**Vjerojatnost lokalne vrste bojanja** je parametar koji treba postaviti tako da se osigura dovoljan broj minimizacija, ali istovremeno da se omogući pretraživanje lošijih rješenja. Pokazuje se da parametar mora biti veći od 0.5 i preporučuje se da bude manji od 0.9. Slika 5.7 prikazuje ponašanje algoritma za različite vjerojatnosti odabira vrste bojanja. Ako je parametar prevelik ili premali tada dolazi do brze konvergencije na početku i do zapinjanja u lokalnom minimumu.

**Tablica 5.5:** Vrijeme izvođenja simuliranog kaljenja uz razne vrste bojanja – Tokai-A

Lokalno bojanje	Globalno bojanje	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	RND	2194.437	7.58
ABW	SWAP	1945.341	34.4
MC	RND	2213.458	67.48
MC	SWAP	2004.668	226.281
MF	RND	1923.029	93.192
MF	SWAP	1823.024	134.927

**Tablica 5.6:** Vrijeme izvođenja simuliranog kaljenja uz razne vrste bojanja – Tokai-C

Lokalno bojanje	Globalno bojanje	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	RND	150.75	6.2
ABW	SWAP	90.0	24.6
MC	RND	160.0	74.9
MC	SWAP	90.0	107.278
MF	RND	112.26	91.6
MF	SWAP	78.0	149.82

**Tablica 5.7:** Vrijeme izvođenja simuliranog kaljenja uz razne vrste bojanja – Kansai-A

Lokalno bojanje	Globalno bojanje	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	RND	6506.88	7.7
ABW	SWAP	5915.60	47.0
MC	RND	6570.84	39.4
MC	SWAP	5988.07	134.35
MF	RND	5579.18	70.1
MF	SWAP	5082.61	117.24



**Tablica 5.8:** Vrijeme izvođenja simuliranog kaljenja uz razne vrste bojanja – Kansai-C

Lokalno bojanje	Globalno bojanje	Funkcija cilja	Vrijeme izvođenja (s)
ABW	RND	67.0	5.68
ABW	SWAP	50.81	36.2
MC	RND	66.46	60.1
MC	SWAP	58.99	90.15
MF	RND	60.34	79.07
MF	SWAP	50.33	115.04

## 5.8. Genetsko kaljenje

Genetsko kaljenje pokazalo je veoma loše rezultate. Često zapinje u lokalnim minimumima i potrebno je dosta iteracija da se rješenje izbaci iz te okoline. Iako se koristi i *SWAP* vrsta bojanja (tuneliranje), algoritam pokazuje lošu konvergenciju naspram drugih algoritama. Genetsko kaljenje je populacijski algoritam i ima sličnih problema kao i evolucijska strategija s vremenom izvođenja. Ponašanje genetskog kaljenja prikazano je na slici 5.10. Vidljivo je da se algoritam dugo zadržava u lokalnim minimumima i treba iskoristiti puno iteracija kako bi se iz njih izvukao.

**Ukupan broj iteracija** je parametar o kojem ovisi kvaliteta rješenja, isto kao i kod drugih algoritama.

**Broj jedinki** je parametar koji se teško određuje za velike probleme. Preporučuje se korištenje do vrijednosti 20, jer veće vrijednosti ovog parametra jako utječu na vrijeme izvođenja algoritma.

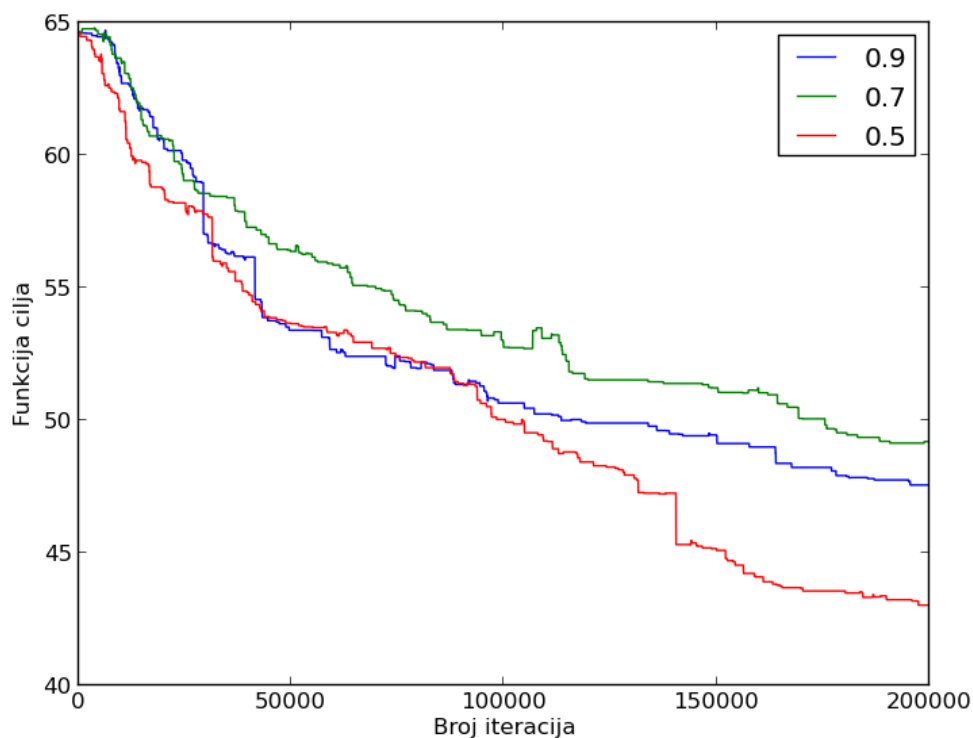
**Početna energija** je kritičan parametar algoritma i ovisi o broju čvorova i gustoći grafa. Idealna vrijednost za ovaj parametar nije utvrđena, ali za veće vrijednosti, algoritam divergira.

**Faktor hlađenja** je parametar koji smanjuje energiju sustava i tako algoritam s vremenom teži k boljim rješenjima. Parametar treba imati veliku vrijednost kako energija sustava ne bi prebrzo pala na 0.

**Vjerojatnost lokalne vrste bojanja** ponaša se slično kao i kod drugih algoritama. Treba težiti k lokalnoj vrsti bojanja, što znači da je idealan parametar veći od 0.5.

## 5.9. Usporedba metaheuristika

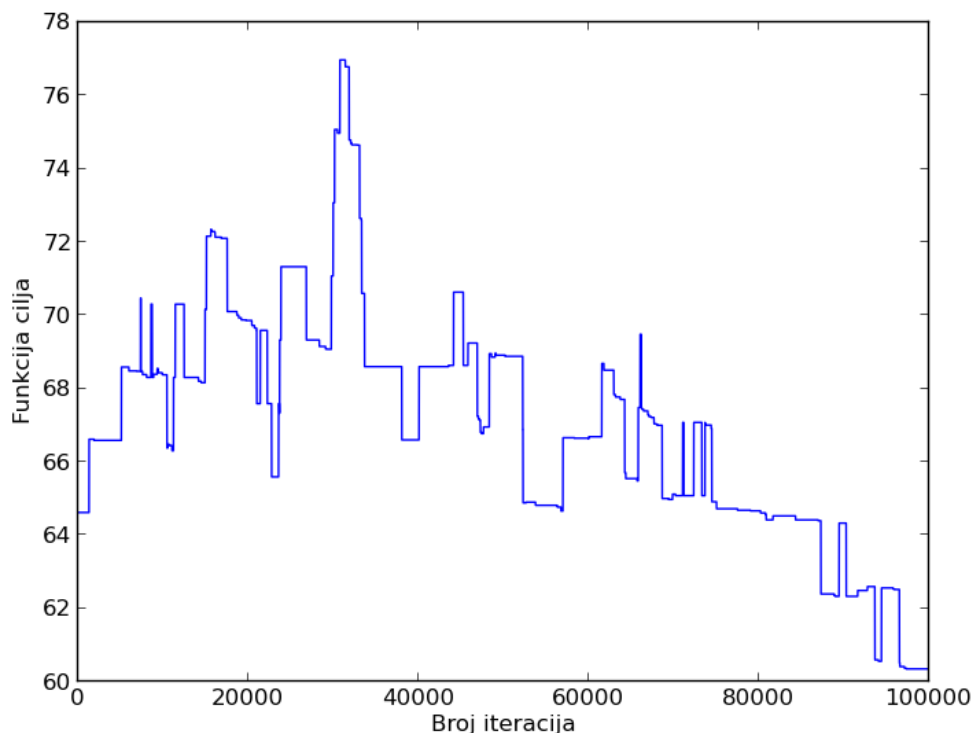
Svaki algoritam pokreće se u trajanju 10 min. Parametri algoritama empirijski su pronađeni, gdje se tražio najbolji rezultat funkcije cilja. Nakon što algoritam završi, proučavaju se dva podatka. Najvažniji je vrijednost funkcije cilja koje algoritam postiže, a



**Slika 5.7:** Simulirano kaljenje – ponašanje simuliranog kaljenja u ovisnosti vjerojatnosti bojanja – Kansai-C

drugi je broj utrošenih iteracija. Jedna iteracija je ovisna o tipu algoritma. Kod agent-skog algoritma je to nakon što se svi agenti obrade. Kod simuliranog kaljenja to je generiranje novog rješenja, kod evolucijske strategije to je trenutak kada se u populaciji traži najbolje rješenje, što je isto kao i kod genetskog kaljenja.

Na slikama 5.11, 5.12, 5.13 i 5.14 nalaze se vrijednosti funkcije cilja za svaki algoritam. Simulirano kaljenje se pokazalo najbolje na ispitnim grafovima. Vidljivo je da ako je graf manji (relativno mali broj čvorova i bridova) tada su rezultati za algoritme podjednaki. Lošiji rezultati ostalih algoritama mogu se objasniti tablicom 5.9. Kao što se vidi, agentski algoritam i evolucijska strategija koriste manji broj iteracija (vremenski zahtjevniji). Genetsko kaljenje koristi velik broj iteracija, ali kao što sve vidi, parametre je teško postaviti. Genetsko kaljenje ponekad pokazuje i bolje rezultate od nekih algoritama, kao što je to prikazano na slici 5.12, ali to se događa samo na manjim grafovima. Evolucijska strategija bi mogla dati bolje rezultate, samo što pri korištenju populacije, vrijeme izvršavanja se naglo povećava (broj iteracija pada).



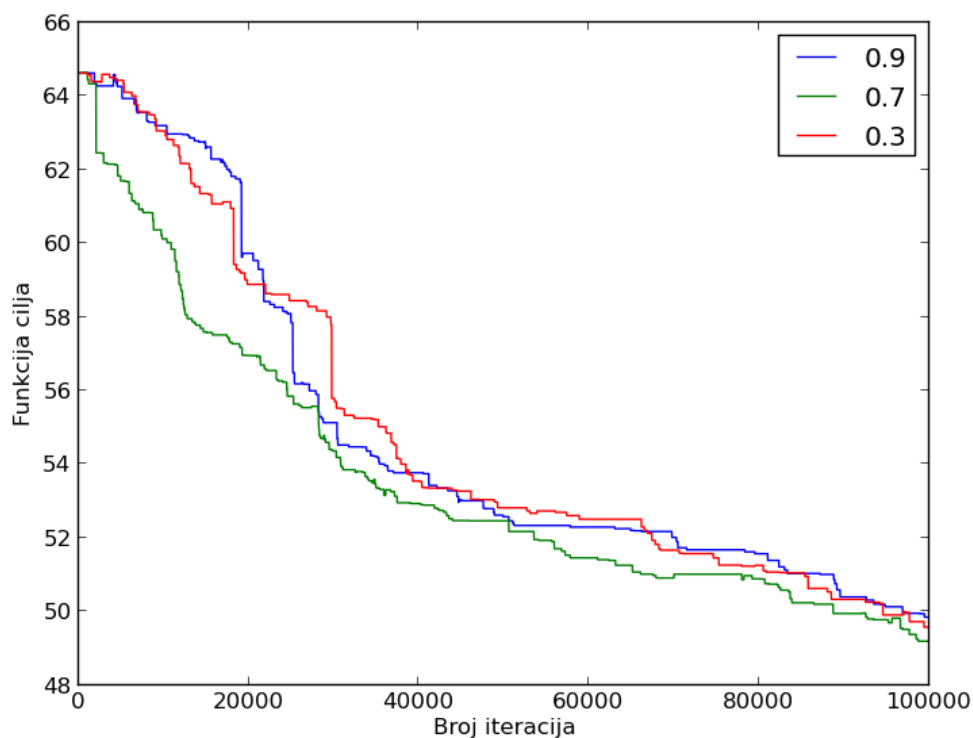
**Slika 5.8:** Simulirano kaljenje – početna temperatura prevelika – Kansai-C

**Tablica 5.9:** Broj iteracija algoritama

	Tokai-A	Tokai-C	Kansai-A	Kansai-C
Agentski algoritam	65	82	25	54
Simulirano kaljenje	613872	873840	1039262	1149619
Evolucijska strategija	715	1209	739	1249
Genetsko kaljenje	20055	34388	20064	42320

## 5.10. Minimizacija postotka promijenjenih čvorova

Umjesto korištenja višekriterijske optimizacije (sume težina konfliktnih bridova i postotka promjene početne boje) koristi se kombinacija algoritama. Prvo se pokreće algoritam koji koristi agresivne metode, tj. metode bojenja koje uopće ne paze na postotak promjene početne boje. Nakon toga za vrstu bojenja postavljaju se iste metode, ali koje preferiraju početnu boju. U ispitivanju koje je prikazano slikama 5.15, 5.16 i 5.17, korišteno je simulirano kaljenje s vrstama bojenja *ABW* kao lokalno i *SWAP* kao globalno bojenje. Ukupno je izvršeno 100000 iteracija nad *Tokai-C* grafom. Nakon izvršenja pola iteracija tj. 50000 pokrenuto je simulirano kaljenje s metodama koje preferiraju početnu boju. Rezultat je veoma zanimljiv, jer iz grafa koji prikazuje ovis-

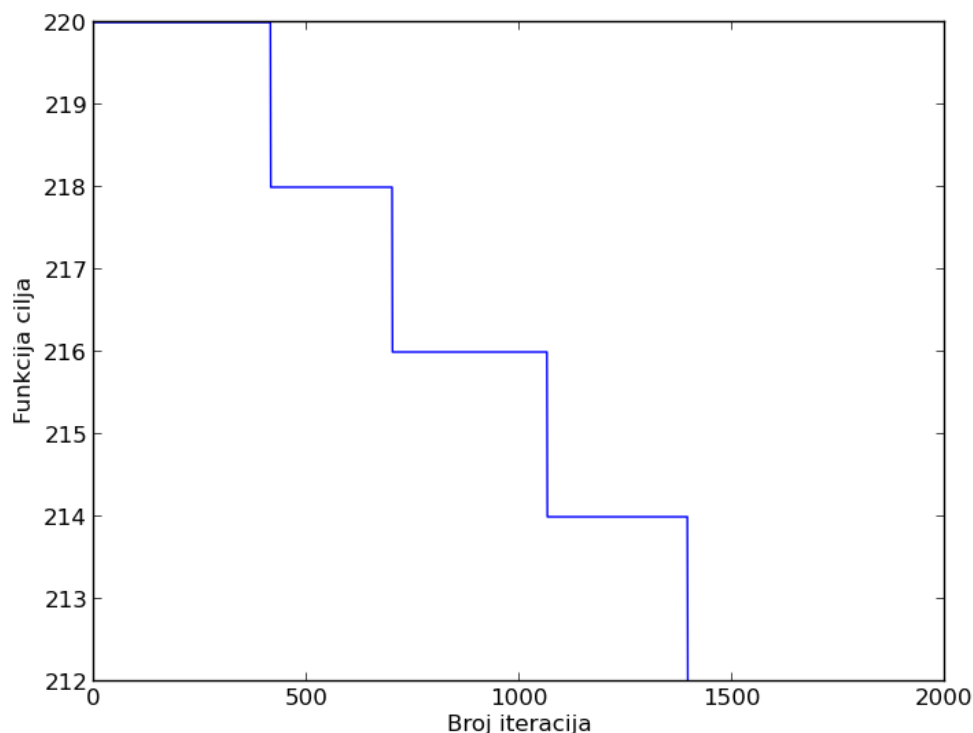


**Slika 5.9:** Simulirano kaljenje – ovisnost algoritma o početnoj temperaturi – Kansai-C

nost funkcije cilja o broju iteracija nije moguće vizualno odrediti u kojem trenutku je pokrenut drugi algoritam. Ako se promatra ovisnost postotka promjene početne boje i funkcije cilja, može se uočiti veliki pad postotka pri vrijednosti oko 120. Algoritam je došao do te vrijednosti baš pri promjeni algoritama. Posebno je zanimljiv graf koji prikazuje ovisnost postotka o broju iteracija. Prvi agresivni algoritam prvo postupno povećava postotak promjena do neke vrijednosti s time da asimptota prolazi kroz vrijednost 100%. Nakon što se pokrene drugi algoritam, postotak promjena počinje naglo padati, ali što je još važnije funkcija cilja također pada. Ovakav pristup pokazao se vrlo dobrom strategijom upravljanja postotkom promjene početne boje.

U praksi, pri implementaciji algoritma, preporučuje se korištenje agresivnih metoda do nekog kritičnog trenutka. Kritičan trenutak može se odrediti kao trenutak u kojem je vrijednost funkcije cilja dovoljno mala, a preostalo vrijeme koje algoritam može koristiti je dovoljno veliko da algoritam spusti vrijednost postotka promijenjenih čvorova. Kako postotak veoma brzo pada, preporučuje se korištenje blagih metoda na tri četvrtine vremena izvođenja agresivnih metoda.

Na slikama 5.15, 5.16 i 5.17 nalazi se ispitivanje kombinacije algoritma koji koristi obične vrste bojanja (agresivne metode) i metode koje pokušavaju sačuvati početnu

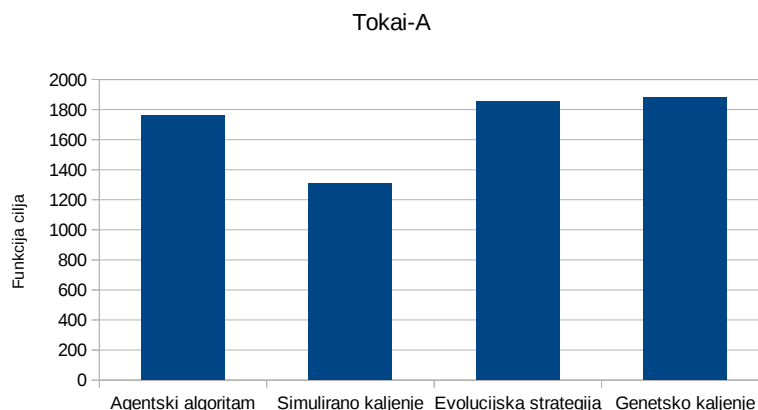


**Slika 5.10:** Ponašanje genetskog kaljenja

boju čvora. Ova metoda ne jamči sa sigurnošću da će postotak biti manji od 66% (kako to definicija problema zahtijeva), ali kako pokazuje dobre rezultate u minimizaciji, na kraju je potrebno provjeriti da li je postotak zadovoljen. Ako postotak nije zadovoljen, tada je potrebno prisilno na čvorove koji daju najmanju grešku postaviti početnu boju.

## 5.11. Metode strojnog učenja za odabir pohlepnog algoritma

U poglavlju 3.7 opisan je način generiranja značajki iz različitih grafova. Za generiranje rezultata koriste se dva programska alata: *RapidMiner* i *Eureqa*. *RapidMiner* je programski alat koji nudi mnogobrojne metode strojnog učenja uz dodatne mogućnosti parsiranja datoteka i sl. U ovom poglavlju taj alat se koristi kako bi se nad podacima iz grafa provela regresija i kako bi se iz generiranih izraza moglo iščitati znanje o tim podacima. Alat *Eureqa* je alat koji koristi metode simboličke regresije. Simbolička regresija vrsta je regresije gdje model nije unaprijed zadan, već se pomoću genetskog programiranja i sl. metoda generiraju funkcije. U ovom poglavlju alat *Eureqa* prika-



**Slika 5.11:** Tokai-A graf – usporedba algoritama

zuje se kao moguća metoda za dobivanje znanja i pokazuje se primjer izvođenja.

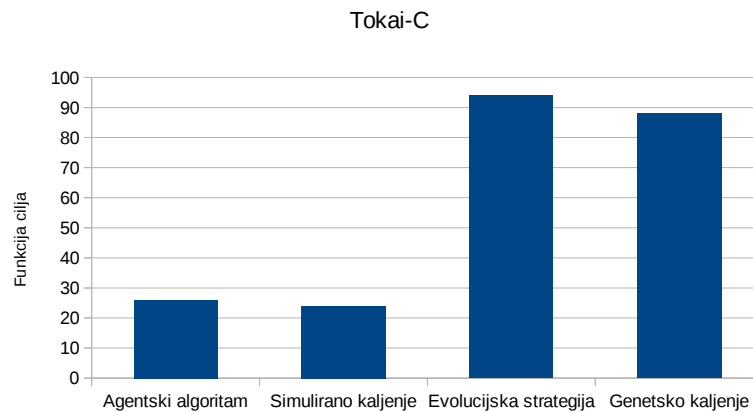
Kao obična regresija koristi se model polinoma drugog stupnja. Ovakav model izabran je iz nekoliko razloga. Kada bi se koristio linearan model, tada bi se informacije iz dobivenog polinoma mogle iščitati samo iz koeficijenata. Polinomi višeg stupnja unose previše parametara i previše mogućnosti za interpretaciju podataka. Polinom drugog stupnja nudi mogućnost potiskivanja parametara jer ako parametar koji je u intervalu od 0 do 1 ima potenciju 2, a neki drugi parametar potenciju 1, tada veći utjecaj ima parametar s manjom potencijom. Ako pak postoje parametri s istom potencijom, tada koeficijenti određuju koji parametar ima veći utjecaj.

Kako je u središtu ovog istraživanja čvor, tada nije bitno koliko graf sadrži čvorova, već koliko je graf gust (koliko ima bridova). Zbog toga se koriste grafovi s manjim brojem čvorova (kako bi generiranja rezultata oduzelo manje vremena). Za svaki graf i svako bojanje pohlepni algoritam pokreće se 2000 puta. Od 2000 rezultata uzima se 10% najboljih. Iz takvih podataka uzimaju se svi čvorovi koji su obojivi sa svojim parametrima – jedan čvor u jednom pohlepnom algoritmu predstavlja jedan uzorak.

Model regresije:

$$f(\text{COL}, \text{FIT}, \text{LDO}, \text{SDO}) = a \cdot \text{COL}^{k_1} + b \cdot \text{FIT}^{k_2} + c \cdot \text{LDO}^{k_3} + d \cdot \text{SDO}^{k_4} + e \quad (5.1)$$

Velikim troslovnim oznakama označene su metode sortiranja, malim slovima označeni su koeficijenti koje je potrebno naučiti, te oznakama  $k_i$  označene su potencije, gdje je  $k_i \in \{1, 2\}$ . Dobiveni rezultati prikazani su u tablicama 5.10, 5.11 i 5.12. Za



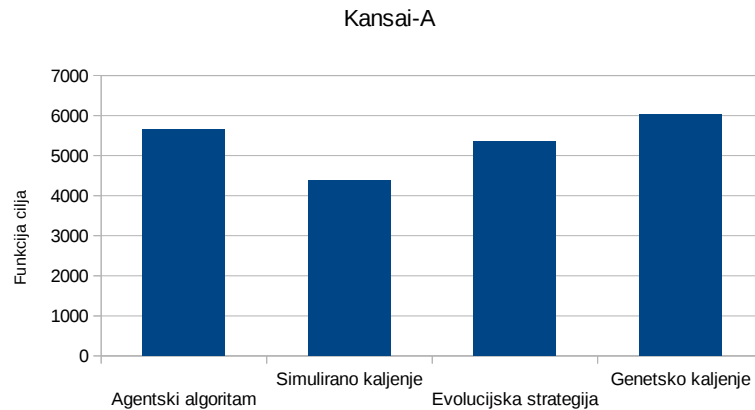
**Slika 5.12:** Tokai-C graf – usporedba algoritama

svaki parametar prikazana su dva broja. Broj koji je u zagradi je potencija za parametar, a broj desno od njega je vrijednost koeficijenta.

Može se očekivati da funkcija usporedbe pri sortiranju čvorova nije jednostavna tj. da nije polinom. Zato se ideja proširuje na simboličku regresiju. Ovo ispitivanje je ilustrativno i prikazuje dodatnu mogućnost pri istraživanju sortiranja čvorova. Graf za ispitivanje je "*graph\_700\_0.5*". Odabrana je vrsta bojanja *ABW*. Skup elementarnih operatora i funkcija:

- $c$  konstanta
- $+$  operator zbrajanja
- $-$  operator oduzimanja
- $\cdot$  operator množenja
- $/$  operator dijeljenja
- $\sin$
- $\cos$
- $e^x$
- $\ln$
- logistička funkcija

U tablici 5.13 su prikazana dva rješenja koja su se pojavila. Prvo rješenje je jednostavnije, ali ima veću empirijsku pogrešku. Za drugo rješenje vrijedi obrnuto.



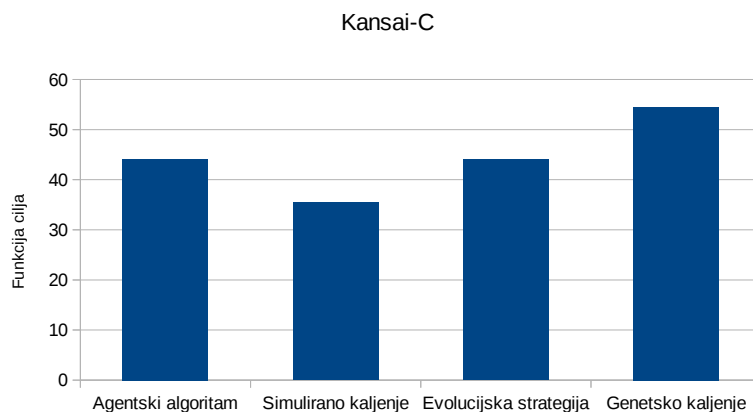
**Slika 5.13:** Kansai-A graf – usporedba algoritama

Pri interpretaciji ovog rezultata treba biti veoma oprezan. Podaci sigurno pokazuju određeno ponašanje algoritama, ali njihov krajnji cilj, a to je dobivanje metode za sortiranje, ne treba uzimati kao gotovo rješenje. Kvaliteta rješenja ovisi o broju pokretanja algoritma i broju čvorova za učenje. Teorijski broj pokretanja algoritama bi trebao biti  $V(G)!$  tako da se pokriju sva moguća sortiranja i onda iz najboljih izvući čvorove. Ovo je u praksi nemoguće jer je broj čvorova relativno velik broj. Drugi problem vezan je za broj čvorova tj. broj uzoraka. U tablicama 5.10, 5.11 i 5.12 prikazani su dobiveni rezultati za neke grafove. Za *ABW* vrstu bojenja vidljivo je da najveći utjecaj ima *SDO* vrsta sortiranja, jer su sve potencije u stupcu *SDO* jednake 1 (za razliku od drugih stupaca). Kod nekih grafova usporedno se pojavljuje i relativno velik koeficijent, što znači da i *LDO* utječe na krajnji rezultat pohlepnog algoritma. Ostala svojstva, kao što je vidljivo u tablici 5.10, mogu se zanemariti. Ovo je veoma sličan rezultat kao u članku [1], gdje je isproban algoritam koji kao prvo svojstvo sortiranja koristi *SDO*, a kao drugo *LDO*.

Za *MC* vrstu bojenja, *SDO* način sortiranja je također dominantan, *LDO* ima malo veći utjecaj, a moguće je da za neke grafove i *FIT* daje dodatan doprinos (za graf "graph\_700\_0.1"). Za *MF* vrstu bojenja rezultati su nešto zanimljivi. Za manje gušće grafove kao dominantno svojstvo pojavljuje se *FIT* sortiranje. U drugim slučajevima *SDO* ostaje kao dominantno svojstvo.

U većini slučajeva (za sve vrste bojenja) *SDO* i *LDO* su dominantna svojstva. Razlog može biti u tome što su kolizija (*COL*) i greška čvora (*FIT*) parametri koji se minimiziraju, pa su te vrijednosti često jednake 0 i zbog toga gube utjecaj u provođenju





**Slika 5.14:** Kansai-C graf – usporedba algoritama

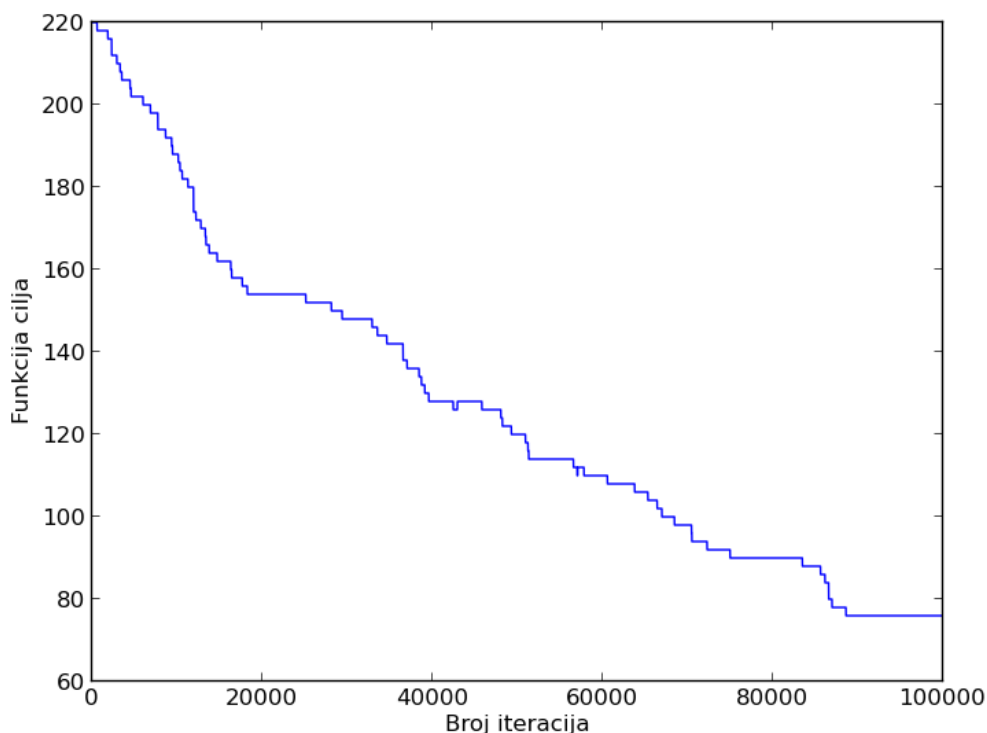
regresije.

U tablici 5.13 prikazana su dva rezultata provođenja simboličke regresije. Pri korištenju simboličke regresije treba biti oprezan jer rezultati na kraju ponekad mogu biti teški za tumačenje. Ako promatramo prvi red u tablici, vidimo jednostavan zapis formule koji se može donekle tumačiti. U drugom redu nalazi se malo kompliciranija funkcija koja i nema previše smisla. Na primjer, teško je protumačiti što točno znači funkcija kosinus. Što je funkcija kompliciranija to se dobiva manja empirijska pogreška. Zbog toga se može dogoditi da se funkcija generirala na temelju šuma što nije dobro za generalizaciju. Ovim rezultatima želi se pokazati kako je istraživanje ovog područja moguće ostvariti na relativno jednostavan način pomoću dostupnih alata.

## 5.12. Ispitivanje nad *DIMACS* bazom grafova

Za klasičan problem bojanja grafova, kao referenca pri ispitivanju učinkovitosti algoritma koriste se poznati grafovi, najčešće iz *DIMACS* baze. Kako u ovom radu već postoji programsko prilagodljivo rješenje, ispituju se neki grafovi iz navedene baze. U klasičnom problemu grafovi nisu težinski, pa sve metode pohlepnog pristupa nije moguće koristiti. Odlučeno je da se ispitivanje provodi nad simuliranim kaljenjem jer je algoritam pokazao najbolje rezultate za težinske grafove. Naziv grafova nalazi se u tablici 5.14.

Za svaki graf pokreće se simulirano kaljenje u kombinaciji s pohlepni algoritmom. Prvo se pokreće pohlepni algoritam s parametrima *SDO* za sortiranje i *MC* za



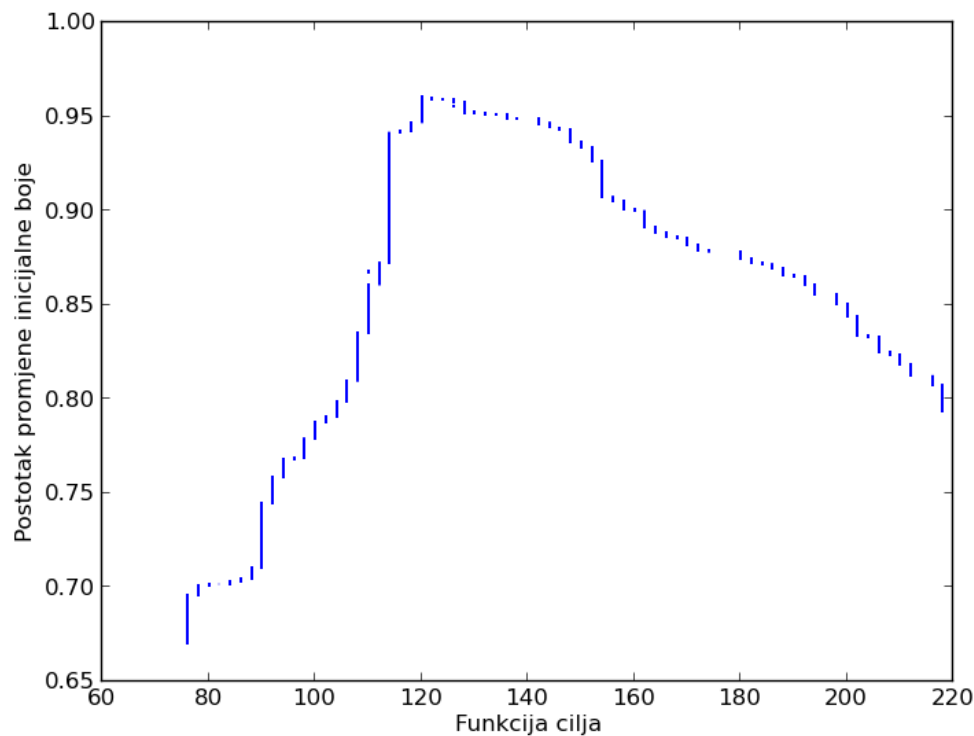
**Slika 5.15:** Ovisnost funkcije cilja o iteracijama

bojanje grafova. Zatim se pokreće simulirano kaljenje, nakon čega se provodi *tuneliranje* i zatim opet simulirano kaljenje. Traži se prvi broj boja  $k$  s kojima se graf može legalno obojiti. Kako je poznati kromatski broj, može se utvrditi efikasnost algoritma. Na kraju se za svaki graf pokreće simulirano kaljenje koje koristi najviše  $\chi$  boja i utvrđuje se razlika. U tablici 5.15 prikazani su grafovi, njihovi kromatski brojevi i minimalni kromatski broj pronađen pomoću simuliranog kaljenja. Uz to nalazi se broj konfliktnih bridova nakon optimizacije koja koristi točno kromatski broj za ispitivanje  $k$ -legalnog bojanja (uzima se median).

U tablici 5.16 prikazana su vremena izvođenja simuliranog kaljenja s istim parametrima za različite grafove. Uzima se srednje vrijeme izvođenja.

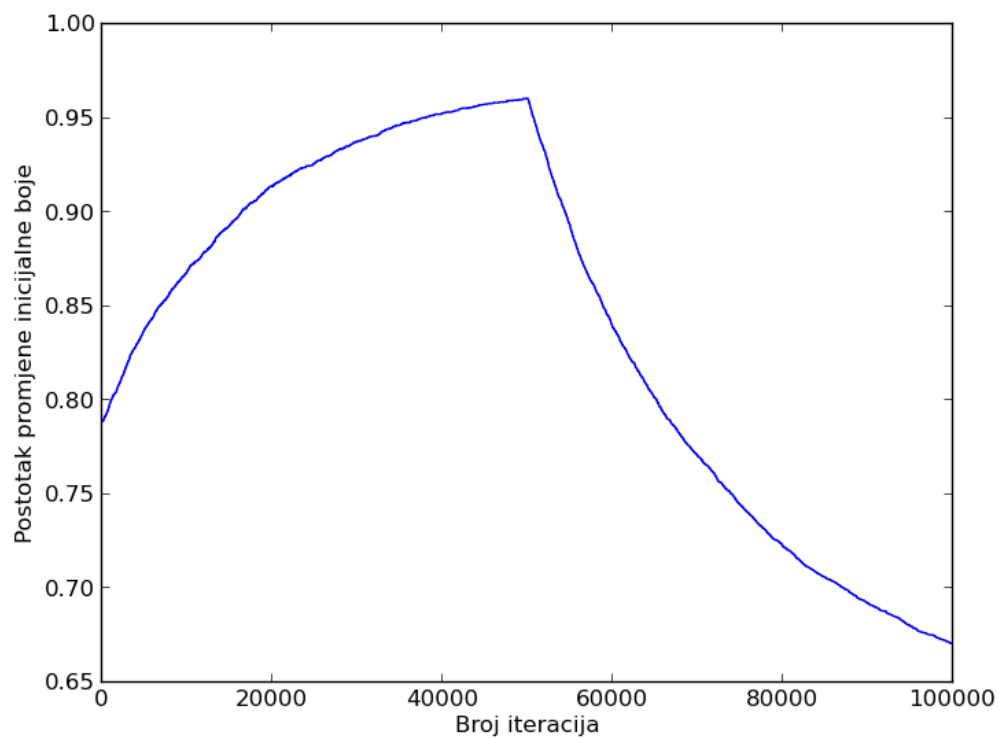
Na slikama 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 i 5.22 prikazana su ponašanja algoritma za neke grafove.

Cilj je ispitivanja algoritma nad *DIMACS* bazom pokazati kako se algoritmi mogu koristiti i za rješavanje klasičnog problema bojenja grafova. Rezultati pokazuju kako je mali postotak bridova na kraju konfliktan (ako se koristi minimalan broj boja). Rezultati heuristika koje se koriste za klasičan problem daju bolje rezultate nego pokazani algoritam u ovom radu, ali to je i očekivano, jer nije puno vremena utrošeno na do-



**Slika 5.16:** Ovisnost postotka promjene početne boje o funkciji cilja

bivanje idealnih parametara za klasičan problem. Slike 5.18 i 5.18 prikazuje kako je simulirano kaljenje u kombinaciji s pohlepnim algoritmom vrlo agresivna metoda za postizanje minimalne kolizije na samom početku. U sredini izvršavanja algoritma radi se metoda *tuneliranja*, što se može zamijetiti na rezultatima jer se često nakon toga kolizija smanji. Da bi se rezultati poboljšali potrebno je za svaki graf namjestiti idealne parametre. Osim toga bilo bi poželjno razviti determinističke metode koje rješavaju konfliktne bridove na kraju izvršavanja metaheuristika, jer kao što se iz rezultata vidi takvih bridova na kraju izvršavanja nema puno. Vremena izvršavanja ovise o veličini grafa, tj. o njegovoj gustoći. Vidljivo je da kada se koristi više boja, vrijeme izvršavanja je veće, što se može objasniti implementacijom metoda za odabir boja.



**Slika 5.17:** Ovisnost postotka promjene o broju iteracija

**Tablica 5.10:** Regresija nad grafovima – ABW vrsta bojanja

Naziv grafa	COL	FIT	LDO	SDO	$e$
graph_500_0.1	-0.196 (2)	0.005 (2)	-0.279 (2)	0.230 (1)	0.478
graph_500_0.3	0.078 (2)	-0.099 (2)	0.526 (1)	-0.851 (1)	0.764
graph_500_0.5	0.009 (1)	0.126 (2)	0.205 (2)	-0.246 (1)	0.570
graph_500_0.7	0.031 (2)	0.103 (1)	2.205 (1)	-3.077 (1)	1.381
graph_500_0.9	0.206 (2)	0.100 (2)	16.834 (1)	-28.285 (1)	11.872
graph_700_0.1	0.036 (2)	0.041 (2)	0.441 (2)	-0.656 (1)	0.737
graph_700_0.3	0.221 (2)	0.148 (2)	0.204 (2)	-0.261 (1)	0.574
graph_700_0.5	0.135 (2)	-0.238 (2)	0.688 (1)	-1.102 (1)	0.882
graph_700_0.7	0.030 (2)	-0.239 (1)	2.803 (2)	-8.294 (1)	6.011
graph_700_0.9	0.218 (2)	0.004 (2)	16.080 (1)	-31.888 (1)	16.203
graph_900_0.1	0.043 (2)	0.120 (2)	0.632 (2)	-0.825 (1)	0.757
graph_900_0.3	-0.027 (1)	0.032 (2)	-0.376 (2)	0.795 (1)	0.079
graph_900_0.5	0.012 (2)	-0.047 (2)	0.766 (2)	-1.964 (1)	1.713
graph_900_0.7	0.030 (2)	-0.239 (1)	2.803 (2)	-8.294 (1)	6.011
graph_900_0.9	0.143 (2)	-0.126 (2)	18.861 (1)	-49.868 (1)	31.369

**Tablica 5.11:** Regresija nad grafovima – MC vrsta bojanja

Naziv grafa	COL	FIT	LDO	SDO	$e$
graph_500_0.1	0.104 (2)	−0.105 (2)	0.307 (2)	−0.460 (1)	0.653
graph_500_0.3	0.234 (2)	0.086 (2)	−1.001 (1)	1.036 (1)	0.435
graph_500_0.5	0.039 (1)	0.018 (2)	1.177 (1)	−1.547 (1)	0.857
graph_500_0.7	−0.047 (1)	0.283 (2)	2.597 (1)	−3.913 (1)	1.811
graph_500_0.9	0.319 (2)	0.013 (2)	17.227 (1)	−28.663 (1)	11.839
graph_700_0.1	−0.069 (2)	0.439 (1)	−0.385 (2)	0.497 (1)	0.343
graph_700_0.3	−0.010 (1)	−0.188 (2)	−0.219 (2)	0.536 (1)	0.213
graph_700_0.5	−0.084 (1)	0.125 (2)	0.634 (1)	−0.935 (1)	0.801
graph_700_0.7	−0.269 (2)	0.091 (1)	2.175 (2)	−6.504 (1)	4.853
graph_700_0.9	0.074 (2)	−0.071 (2)	16.715 (1)	−32.657 (1)	16.363
graph_900_0.1	0.079 (2)	−0.246 (2)	−0.525 (2)	0.593 (1)	0.337
graph_900_0.3	−0.055 (2)	−0.158 (2)	−0.097 (2)	0.191 (1)	0.412
graph_900_0.5	0.046 (2)	0.114 (2)	0.172 (2)	−0.452 (1)	0.772
graph_900_0.7	0.010 (2)	0.144 (2)	3.253 (2)	−11.790 (1)	8.905
graph_900_0.9	0.032 (2)	−0.060 (2)	19.066 (1)	−50.029 (1)	31.339

**Tablica 5.12:** Regresija nad grafovima – MF vrsta bojanja

Naziv grafa	COL	FIT	LDO	SDO	$e$
graph_500_0.1	0.023 (1)	0.347 (2)	−0.201 (2)	0.118 (1)	0.504
graph_500_0.3	−0.188 (2)	−0.154 (1)	0.025 (1)	0.001 (1)	0.487
graph_500_0.5	−0.009 (1)	0.044 (2)	0.125 (1)	−0.257 (1)	0.619
graph_500_0.7	0.037 (2)	−0.222 (2)	1.631 (1)	−2.488 (1)	1.352
graph_500_0.9	0.111 (2)	0.451 (2)	16.637 (1)	−28.226 (1)	12.003
graph_700_0.1	0.039 (2)	−0.256 (1)	−0.071 (2)	0.031 (1)	0.511
graph_700_0.3	0.041 (1)	0.165 (2)	−0.136 (1)	−0.060 (1)	0.638
graph_700_0.5	−0.017 (1)	−0.108 (1)	0.256 (2)	−0.574 (1)	0.829
graph_700_0.7	−0.062 (2)	0.070 (2)	2.352 (2)	−6.515 (1)	4.711
graph_700_0.9	0.186 (2)	0.272 (2)	15.036 (1)	−31.817 (1)	17.135
graph_900_0.1	−0.039 (2)	0.146 (2)	0.180 (2)	−0.242 (1)	0.580
graph_900_0.3	0.067 (1)	0.103 (2)	−0.164 (2)	0.524 (1)	0.180
graph_900_0.5	−0.007 (2)	0.004 (2)	0.436 (2)	−1.157 (1)	1.223
graph_900_0.7	0.032 (1)	−0.018 (2)	5.044 (1)	−10.473 (1)	5.769
graph_900_0.9	0.190 (2)	−0.093 (2)	18.498 (1)	−49.369 (1)	31.216

**Tablica 5.13:** Simbolička regresija nad grafom

Izraz	Empirijska pogreška (MSE)
$f = 0.348/SDO + 4.756 \cdot COL \cdot SDO - 4.178 \cdot COL$	0.085474763
$f = \text{logistic}(0.637 \cdot \cos(112.588/SDO) - 0.057 - FIT)$	0.07911826

**Tablica 5.14:** Popis DIMACS grafova

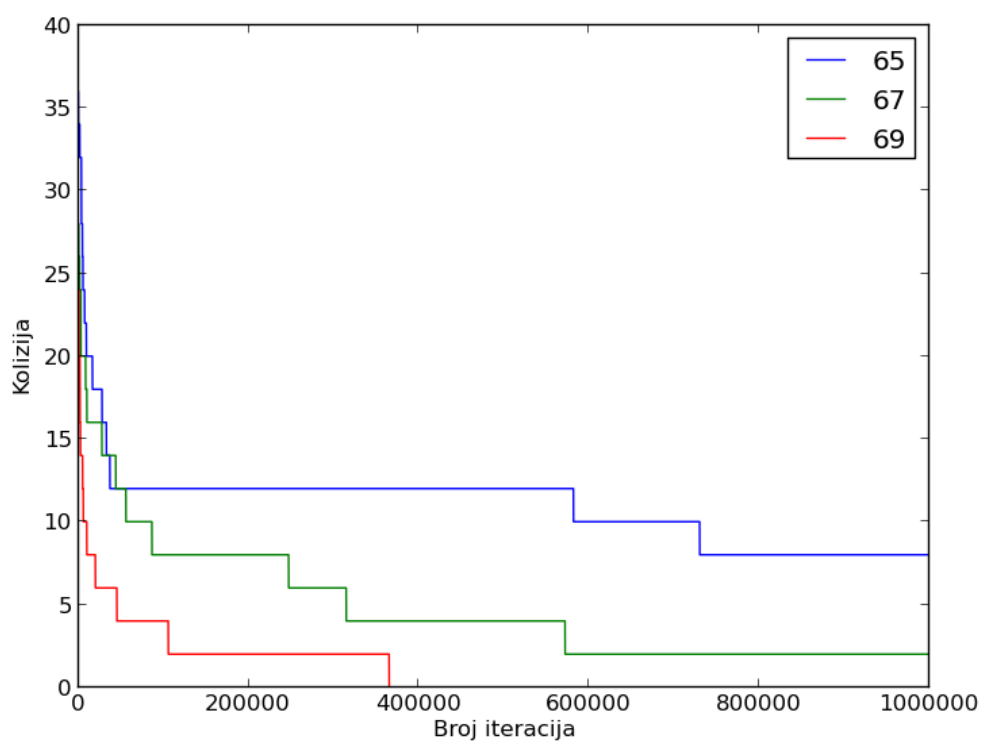
Naziv grafa	$\chi$ - kromatski broj	Broj čvorova	Broj bridova
dsjr500.1c.col	84	500	121275
le450_25c.col	25	450	17343
r1000.5.col	234	1000	238267
dsjr500.5.col	122	500	58862
le450_25d.col	25	450	17425
r250.5.col	65	250	14849

**Tablica 5.15:** Bojenje DIMACS grafova pomoću simuliranog kaljenja

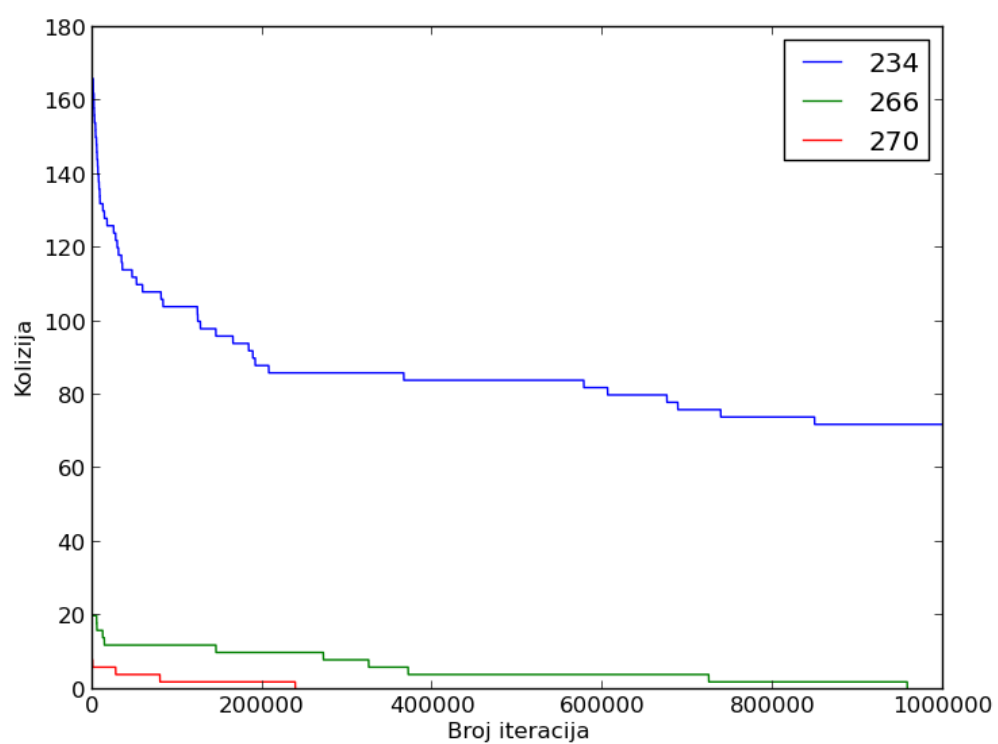
Naziv grafa	$\chi$ - kromatski broj	Minimalno $k$ -bojanje	Broj konfliktnih bridova
dsjr500.1c.col	84	87	3
le450_25c.col	25	28	20
r1000.5.col	234	266	36
dsjr500.5.col	122	133	11
le450_25d.col	25	28	20
r250.5.col	65	69	4

**Tablica 5.16:** Bojenje DIMACS – vremena izvođenja za kromatski broj i minimalno  $k$ -legalno bojenje

Naziv grafa	Vrijeme za kromatski broj (s)	Vrijeme za $k$ -legalno bojanje (s)
dsjr500.1c.col	74.0916	75.811
le450_25c.col	8.187	8.9182
r1000.5.col	181.67	206.095
dsjr500.5.col	44.239	47.276
le450_25d.col	8.187	8.422
r250.5.col	17.3896	17.6512

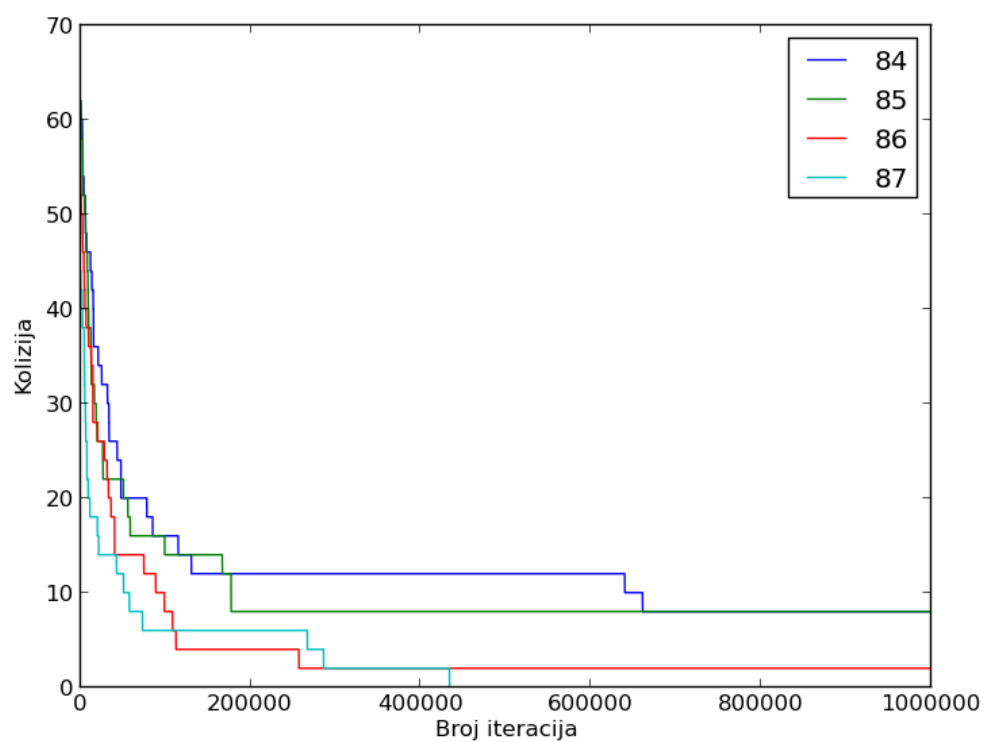


**Slika 5.18:** Graf r250.5 – korištenje 65, 67 i 69 boja sa simuliranim kaljenjem

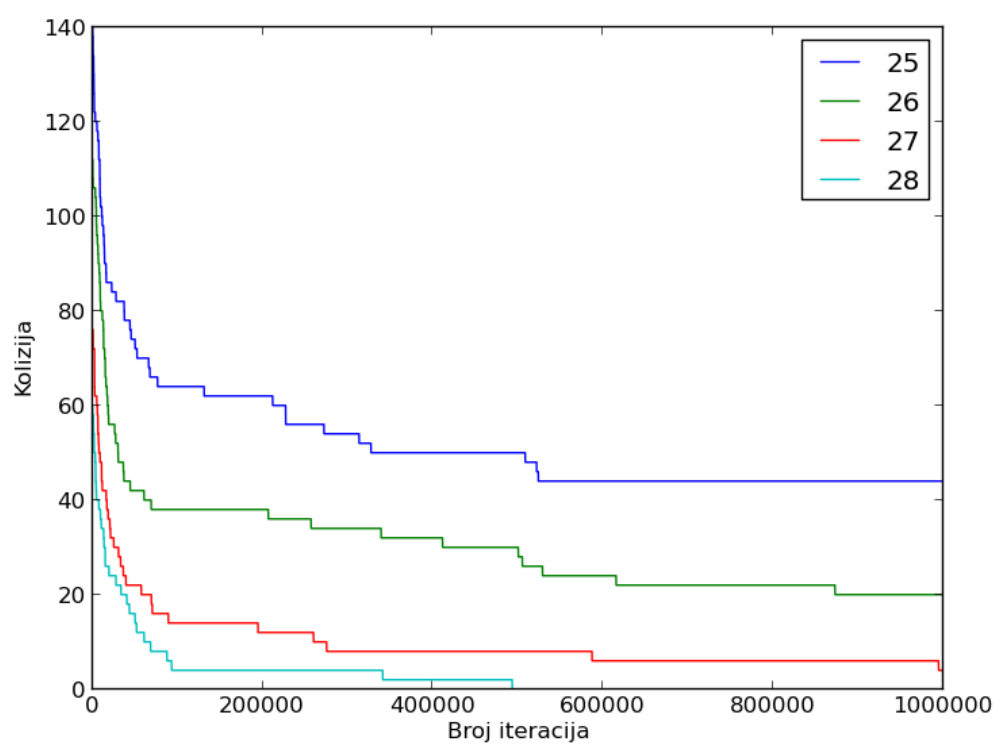


**Slika 5.19:** Graf r1000.5 – korištenje 234, 266 i 270 boja sa simuliranim kaljenjem

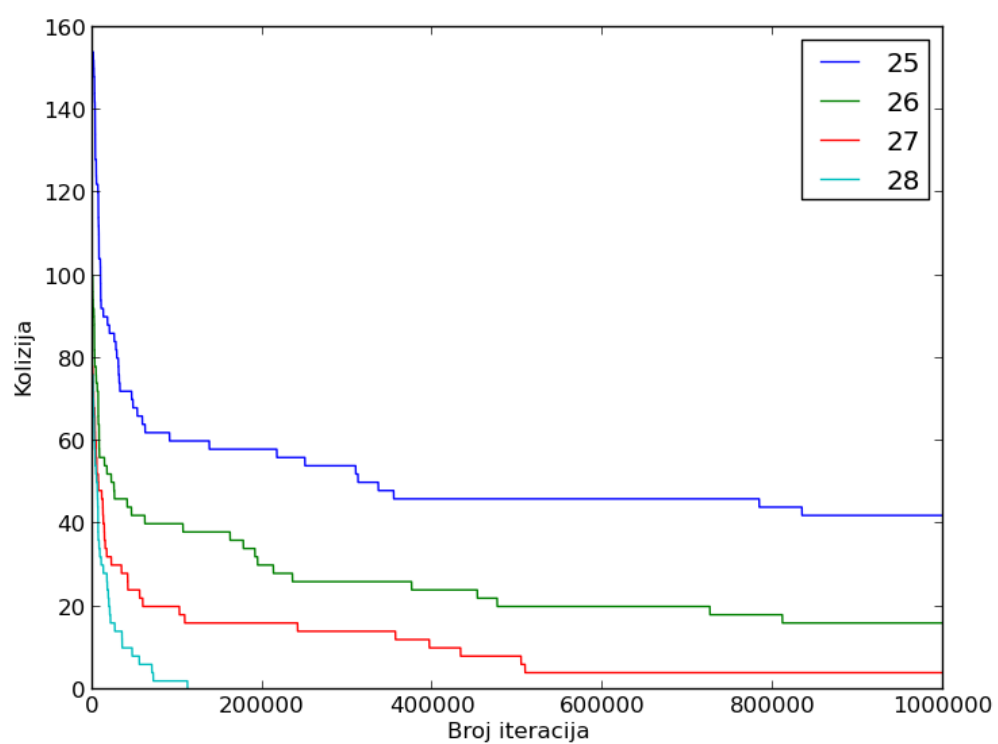




**Slika 5.20:** Graf dsjr500.1c – korištenje 84, 85 i 86 i 87 boja sa simuliranim kaljenjem



**Slika 5.21:** Graf le450\_25c – korištenje 25, 26, 27 i 28 boja sa simuliranim kaljenjem



**Slika 5.22:** Graf le450\_25d – korištenje 25, 26, 27 i 28 boja sa simuliranim kaljenjem

## 6. Zaključak

U ovom radu prikazana je mogućnost rješavanja optimizacijskog problema bojanja težinskih grafova pomoću metaheurističkih postupaka. Pokazalo se da metaheuristike mogu efikasno rješavati zadani problem. Najvažnije svojstvo je korištenje kombinacije pohlepnog algoritma i metaheuristika. Pohlepni algoritmi mogu dovesti rješenje u dovoljno dobro, ali zato metaheuristike mogu takvo rješenje poboljšati. Nakon izvršavanja metaheuristika ostaje mali broj konfliktnih bridova. Metode pokazuju da mogu rješavati i klasičan problem bojanja grafova, što daje dodatnu motivaciju za nastavak istraživanja problema.

Glavna stavka rada s metaheuristikama je pogađanje dobrih parametara. Pokazuje se da su ključni samo neki parametri u radu metaheuristika. Najveća ovisnost parametara je s gustoćom grafa. Važno je koristiti vrste bojanja koje minimiziraju lokalnu pogrešku i koje mogu pretraživati veći prostor stanja. Ako postoje dvije vrste bojanja čvorova čiji se rezultati ne razlikuju za red veličine, tada treba koristiti onu koja koristi manje vremena.

Kako pohlepni algoritam ima važnu ulogu, važno je istražiti da li postoji neko sortiranje čvorova koje koristi kombinaciju svojstava čvorova. Rezultati su pokazali kako je dominantno svojstvo *SDO* i u većini slučajeva potiskuje druga svojstva. Istraživanje ovog područja ne bi trebalo završiti na tome, već bi trebalo probati povećati skup za učenje i izvršiti isprobane metode na boljim procesorskim sustavima. Kao nastavak rada na ovom problemu, predlaže se paralelno korištenje računala, gdje svako računalo izvršava po jedan algoritam (s različitim parametrima), te kombinirati dobivena rješenja.

# LITERATURA

- [1] Dr. Hussein Al-Omari i Khair Eddin Sabri. New graph coloring algorithms, 2006. ISSN 1549. URL [thescipub.com/pdf/10.3844/jmssp.2006.439.441](http://thescipub.com/pdf/10.3844/jmssp.2006.439.441).
- [2] Cédric Avanthay, Alain Hertz, i Nicolas Zufferey. A variable neighborhood search for graph coloring. *European Journal of Operational Research*, 151(2):379 – 388, 2003. ISSN 0377-2217. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(02\)00832-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00832-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702008329>. Meta-heuristics in combinatorial optimization.
- [3] D. Berend i T. Tassa. Improved bounds on bell numbers and on moments of sums of random variables. *Probability and Mathematical Statistics*, 30: 185–205, 2010. URL [http://www.openu.ac.il/Personal\\_sites/tamirtassa/Download/Journals/lp\\_moments.pdf](http://www.openu.ac.il/Personal_sites/tamirtassa/Download/Journals/lp_moments.pdf).
- [4] Francesc Comellas i Javier Ozon. Graph coloring algorithms for assignment problems in radio networks. U *in Radio Networks”, Applications of Neural Networks to Telecommunications*, stranice 49–56. Inc. Pub, 1995.
- [5] Mostafa A. El-Hosseini, Aboul Ella Hassanien, Ajith Abraham, i Hameed Al-Qaheri. Genetic annealing optimization: Design and real world applications. U Jeng-Shyang Pan, Ajith Abraham, i Chin-Chen Chang, urednici, *ISDA (I)*, stranice 183–188. IEEE Computer Society, 2008. ISBN 978-0-7695-3382-7. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/isda/isda2008-1.html#El-HosseiniHAA08>.
- [6] M. R. Garey, D. S. Johnson, i L. Stockmeyer. Some simplified np-complete problems. U *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '74, stranice 47–63, New York, NY, USA, 1974. ACM.

- doi: 10.1145/800119.803884. URL <http://doi.acm.org/10.1145/800119.803884>.
- [7] Alain Hertz i Nicolas Zufferey. A new ant algorithm for graph coloring, 2006. URL [www.gerad.ca/~alainh/Ants.pdf](http://www.gerad.ca/~alainh/Ants.pdf).
- [8] David S. Johnson, Cecilia R. Aragon, Lyle A. McGeoch, i Catherine Schevon. Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part ii, graph coloring and number partitioning. *Oper. Res.*, 39(3):378–406, Svi-banj 1991. ISSN 0030-364X. doi: 10.1287/opre.39.3.378. URL <http://dx.doi.org/10.1287/opre.39.3.378>.
- [9] Walter Klotz. Graph coloring algorithms, 2002. URL <http://www.math.tu-clausthal.de/Arbeitsgruppen/Diskrete-Optimierung/publications/2002/gca.pdf>.
- [10] Zbigniew Kokosinski, Krzysztof Kwarciany, i Marcin Kolodziej. Efficient graph coloring with parallel genetic algorithms. *Computers and Artificial Intelligence*, 24(2):123–147, 2005. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/cai/cai24.html#KokosinskiKK05>.
- [11] Francisco Luna, Enrique Alba, Antonio J. Nebro, i Salvador Pedraza. Evolutionary algorithms for real-world instances of the automatic frequency planning problem in gsm networks. U Carlos Cotta i Jano I. van Hemert, urednici, *EvoCOP*, svezak 4446 od *Lecture Notes in Computer Science*, stranice 108–120. Springer, 2007. ISBN 978-3-540-71614-3. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/evoW/evocop2007.html#LunaANP07>.
- [12] Anna Marino i Robert I. Damper. Breaking the symmetry of the graph colouring problem with genetic algorithms. U Darrell Whitley, urednik, *Late Breaking Papers at the 2000 Genetic and Evolutionary Computation Conference*, stranice 240–245, Las Vegas, Nevada, USA, 8 2000. ISBN 1-58133-109-7. URL <http://citeseer.nj.nec.com/374201.html>.
- [13] Christine L. Mumford. New order-based crossovers for the graph coloring problem. U Thomas Philip Runarsson, Hans-Georg Beyer, Edmund K. Burke, Juan J. Merelo Guervós, L. Darrell Whitley, i Xin Yao, urednici, *PPSN*, svezak 4193 od *Lecture Notes in Computer Science*, stranice 880–889. Springer, 2006. ISBN 3-540-38990-3. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/ppsn/ppsn2006.html#Mumford06>.

- [14] Nysret Musliu i Martin Schwengerer. Algorithm selection for the graph coloring problem. U Giuseppe Nicosia i Panos M. Pardalos, urednici, *LION*, svezak 7997 od *Lecture Notes in Computer Science*, stranice 389–403. Springer, 2013. ISBN 978-3-642-44972-7. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/lion/lion2013.html#MusliuS13>.
- [15] Riccardo Poli i Mario Graff. There is a free lunch for hyper-heuristics, genetic programming and computer scientists. U Leonardo Vanneschi, Steven Gustafson, Alberto Moraglio, Ivanoe De Falco, i Marc Ebner, urednici, *EuroGP*, svezak 5481 od *Lecture Notes in Computer Science*, stranice 195–207. Springer, 2009. ISBN 978-3-642-01180-1. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/eurogp/eurogp2009.html#PoliG09>.
- [16] Biman Ray, Anindya J Pal, Debnath Bhattacharyya, i Tai hoon Kim. An efficient ga with multipoint guided mutation for graph coloring problems. 2010.
- [17] Ehsan Salari i Kourosh Eshghi. An aco algorithm for the graph coloring problem, 2008. URL <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=01662331>.
- [18] R.J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Longman Scientific & technical. Longman, 1985. URL <http://books.google.hr/books?id=1-nuAAAAMAAJ>.
- [19] D. H. Wolpert i W. G. Macready. No free lunch theorems for optimization. *Trans. Evol. Comp*, 1(1):67–82, Travanj 1997. ISSN 1089-778X. doi: 10.1109/4235.585893. URL <http://dx.doi.org/10.1109/4235.585893>.

## **Bojanje grafova prilagodljivim metaheurističkim postupcima**

### **Sažetak**

U radu se proučava inačica problema bojanja težinskih grafova, gdje je cilj minimizirati sumu težina konfliktnih bridova. Problem je primjenjiv u domeni telekomunikacija gdje se žele raspodijeliti kôdovi po mobilnoj mreži. Problem se obrađuje teorijski i praktično. U teorijskom dijelu detaljno se analizira problem i određuju granice njegove rješivosti na računalu. U radu se primjenjuju različiti metaheuristički postupci. Pomoću metoda regresija pokušavaju se pronaći optimalna svojstva grafova, kako bi konvergencija bila što bolja. Na kraju su prikazani rezultati i zaključci.

**Ključne riječi:** bojanje grafova, metaheuristika, strojno učenje, regresija, simulirano kaljenje, evolucijska strategija, genetsko kaljenje, agentski algoritam

## **Graph coloring with adaptive metaheuristics**

### **Abstract**

In this work we study one instance of the weight graph coloring problem. The goal is to minimize the weighted sum of conflict edges. Problem can be applied in telecommunication domain, where the goal is to set codes in a mobile network. Problem can be observed as a theoretical problem and also as a practical problem. We study the problem in detail in the theoretical part and we determine the borders of the problem in computability theory. In this work we apply different metaheuristics algorithms. With regression methods we try to find the optimal graph properties for better convergence of algorithms. On the end of this work we show results and give a conclusions.

**Keywords:** graph coloring, metaheuristics, machine learning, regression, simulated annealing, evolution strategy, genetic annealing, agent algorithm