4) $B(\alpha) = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*$, $\alpha > 0$

Док-ем существование $B(\alpha)$, для это достаточно показать,
что $\alpha I + A^*A$ - обратима

$\det(\underbrace{\alpha I + A^*A}_{U(...)U^* \text{ по т. спектр.}}) = \det U \cdot \det \Lambda \cdot \det U^{-1} = \det \Lambda$
$\underbrace{\qquad}_{\text{т.к. след. слаг.}} \quad \underbrace{(\det U)^{-1}}_{}$

Хоч. чтобы $\det \Lambda \neq 0$, т.е. чтобы у матрицы не было
нулевых с.з. Это эквивалентно тому, что мат-ца пол. опред., ассоциир.
с матрицей положительно определенной

$\forall x \neq 0, \ x^*(\alpha I + A^*A) x = \alpha x^* x + \underbrace{x^* A^* A x}_{\geq 0} \geq 0$
$\qquad \underbrace{\alpha \|x\|^2 > 0}_{\alpha > 0}$ - т.к. Грам
по опр. скаляр. прел.

$\Rightarrow \alpha I + A^*A$ - полож. опр. и соответственно обратима

Устремим $\alpha \to 0+$

$\lim_{\alpha \to 0+} (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* = \lim_{\alpha \to 0+} \left(\alpha I + V \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right)^{-1} V \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* =$

$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[V \left(\alpha I + \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) V^* \right]^{-1} V \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* =$

$= \lim_{\alpha \to 0+} V \left(\alpha I + \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \underbrace{V^* V}_{I} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* =$

$= \lim_{\alpha \to 0+} V \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 + \alpha I_r & 0 \\ 0 & \alpha I_{n-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* =$

$= \lim_{\alpha \to 0+} V \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_r}{\Sigma_r^2 + \alpha} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + 1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* =$

$= \lim_{\alpha \to 0+} V \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_r}{\Sigma_r^2 + \alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\Sigma_r}{\Sigma_r^2 + \alpha} \end{pmatrix} U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} \\ & & & 0 \end{pmatrix} U^* = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = A^+$

Т.к. все корни опред., можно
воспользоваться след. из теор., как
называемся сходимся

5) x-минимиз. $\|Ax - b\|_2 \to \min_x$
$b \notin \mathrm{Im}(A)$

$\|Ax - b\|_2 \overset{?}{<} \|b\|_2$

Все решения МНК имеют вид:
$x = A^+ b + (I - A^+A) y$, $\forall y \in \mathbb{C}^n$

$\|Ax - b\|_2 = \|A(A^+ b + (I - A^+A)y) - b\|_2 =$
$= \|AA^+ b + A y - \underbrace{AA^+ Ay}_{A} - b\|_2 =$
$= \|AA^+ b - b\|_2 = \|(AA^* - I)b\|_2 =$
$= \|(I - AA^+)b\|_2 < \|b\|_2$ т.к. удаляет не нулев. норму)
а в ней нет ненормир.

AA^+ - ортопроек. на $\mathrm{Im} A$ (с лекции)
$\Rightarrow I - AA^+$ - ортопроек. на $(\mathrm{Im} A)^\perp$
но $b \notin (\mathrm{Im} A)^\perp$

---

2) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$

а) $H(\nu) = I - 2\nu\nu^*$
$H(\nu)x = x - 2\nu\nu^* x$
$\nu^* x$ - скаляр.
x - скаляр и т.п.
чис-л операц. на умнож. одно наборе

$\Rightarrow H \cdot A \quad n(4n-1)$

$A \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}_{1-1, 1-1}$

Последовательно раскм. образ раскрыв. на 1 меньше
на каждом шаге, запишет сложн.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{*}{0} & \frac{*}{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{* & *}{0 & H_1 A} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ число операций $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(4(n-k)-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 \cdot 4 - n + k + 4nk + k^2 + k =$
$= 4n^2 - 4n \cdot \frac{(n-1)n}{2} - n^2 + \frac{4nn(n-1)n}{2} + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} =$
$= 4n^2 \cdot n - \frac{2(n^2-n)}{} \cdot n^2 - \frac{2(n^2-nn)}{} + \frac{2}{3}(2n^3 - n^2 + n) + \frac{(n-1)}{2} n =$
$= 2n^3 \cdot n - \frac{2}{3} n^3 + O(nn)$

1) $A = S \Lambda S^{-1}$
$B = A \otimes I + I \otimes A = S\Lambda S^{-1} \otimes SS^{-1} + SS^{-1} \otimes S\Lambda S^{-1} =$
$= S(\Lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) + S(S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1}) =$
$= S(\Lambda S^{-1} \otimes S^{-1} + S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1}) =$
$= S(\underbrace{\Lambda \otimes I + I \otimes \Lambda}_{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}}) S^{-1}$ — это собств. разлож.

$\Lambda_i = \lambda_i I$

3) $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$
$P = I - A^+ A$ - ортопр. на $\ker A$!

$A^+ = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$

$I - V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{U^* U}_{I} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* =$
$= I - V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = I - V_r V_r^*$

Доказывали в прошлом дз: $\ker A = \mathrm{Im}(V_2)$

V, V_r - унивр. ка V_r
$\Rightarrow I \cdot V_r V_r$ унив. ка $V_r^\perp$
$(I - V_r V_r^*) V_r^\perp = V_r^\perp - V_r \underbrace{(V_r^* V_r^\perp)}_{0} = V_r^\perp$

2б) $H_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-1} & \\ & H_n \end{bmatrix}$

$\frac{nn \cdot (m-n) + (m-1)(n-1)(n-1) + \ldots}{} =$
$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 (m-k-1) =$
$= \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - 2nk + k^2)(m-k-1) =$
$= \sum n^2 - n^2 k - nm^2 - 2n^2 k + \underline{2nk^2} + 2nk + k^2 m - \underline{k^3} - k^2 =$
$= O(m^2)$