(3) $L_k = K_k(A, f)$ $\quad L_k = \{f, Af, \ldots, A^{k-1}f\}$

Соотнош. Арнольди

$$AQ_k = Q_{k+1}\hat{H}_k = Q_k H_k + \underbrace{h_{k+1,k}}_{0} q_{k+1} e_k^t = Q_k H_k$$

$q_1, \ldots, q_k$ – ортонорм. базис $K_k(A, f)$, q_{k+1} дополняет до ортон. базиса $K_{k+1}(A, f)$

$\Rightarrow AQ_k$ раскладывается через базис $q_1, \ldots, q_k$ с коэф из H_k,

а, т.е находится в том же пространстве

а $\langle f, Af, \ldots, A^{k-1}f \rangle = \operatorname{Im} Q_k$

$\Rightarrow AL_k$ тоже будет лежать в пространстве, образов. столбцами $q_1, \ldots, q_k$, чьи линейные комбинации совпадают с лин. оболочкой $f, \ldots, A^{k-1}f$, т.е

$\underline{AL_k \subseteq L_k}$

Знаем, что $K_i(A, f) = \{f, Af, \ldots, A^{k-1}f, \ldots, A^{i-1}f\}$ д.ля $i > k$

Но $A^{i-1}Q_k = A^{i-2}AQ_k = A^{i-2}Q_k H_k = \ldots = Q_k H_k^{i-1}$

т.е когда мы хотим расширить Крыловское подпространство мы все равно остаемся в образе Q_k

$\Rightarrow K_i(A, f) = K_k(A, f)$

(4) $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \mathcal{A}^t$, $Av = \lambda v$ $\quad R(x) = \dfrac{x^t A x}{x^t x}$ $\quad x \to v$, т.е $\|x - v\|_2 \to 0$
(норм. эквив.)

$\boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}}$ ...
C

Воспользуемся ф-ой Тейлора для $R(x)$
в точке v : $\|x - v\|_2 = \|h\|_2 \to 0$ $\quad v + h = x$

$$|\lambda - R(x)| = \left|\lambda - \frac{(v+h)^t \mathcal{A}(v+h)}{(v+h)^t(v+h)}\right| = \left|\lambda - \frac{v^t \overset{\lambda v}{Av} + h^t \overset{\lambda v}{Av} + v^t Ah + h^t Ah}{v^t v + \underbrace{h^t v + v^t h}_{2h^t v} + h^t h}\right| =$$

$v^t A h = (v^t A h)^t = h^t A^t v = h^t A v = h^t \lambda v$

$$\to \quad = \frac{|\lambda(v^t v + 2h^t v + h^t h) - \lambda v^t v - 2\lambda h^t v - h^t A h|}{|v^t v + 2h^t v + h^t h|} =$$

~~$A = A^t \Rightarrow$ диагон. в ортонорм. базисе, без огр. общ. $\|v\|_2 = 1$~~

$$= \frac{|\lambda h^t h - h^t A h|}{|v^t v + 2h^t v + h^t h|} \le C \cdot |h^t(\lambda I - A)h| = C|((\lambda I - A)h, h)| \le$$

нер-во К-Б

$\|h\|_2 \to 0 \Rightarrow$ каждая комп. $\to 0$ $\quad$ минус вынесли и свели нормой

$2h^t v + h^t h = \bar{o}(1)$ $\quad \le C \cdot \|(A - \lambda I)h\|_2 \cdot \|h\|_2 \le C \cdot \|A - \lambda I\|_2 \|h\|_2^2 =$

$v^t v = \text{const}$ $\quad = \tilde{C}\|h\|_2^2 = \hat{C}\|x - v\|_2^2 = O(\|x - v\|_2^2)$

Бонус 2

$\mathcal{A}_k = Q_k^t \mathcal{A} Q_k$ $\quad$ Пусть $A_k v = \lambda v$ $\quad Q_k^t = Q_k^{-1}$

$(Q_k^t \mathcal{A} Q_k - \lambda \underset{Q_k^t Q_k}{\underset{\parallel}{I}})v = 0$

$Q_k^t(\mathcal{A} - \lambda I)Q_k v = 0$ $\quad v$ - нетривиальное решение системы

$\Rightarrow \det(Q_k^t(A - \lambda I)Q_k) = 0$

$\det Q_k^t \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det Q_k$

$(\det Q_k)^{-1}$ $\quad \det(A - \lambda I)$ $\quad \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

т.е λ - с.з. A

(5) QR итерация: A – верхнехессенберг.

$A_k = Q_k R_k$, $R_k = Q_k^t A_k$

$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^t A_k Q_k$

$$A = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & ** \end{bmatrix}$$

Воспользуемся вращениями Гивенса, чтобы ортогонализовать A_k

$\underbrace{(G_{n-1} \ldots G_2 G_1)}_{= Q^t} A = R$ – верхнетреуг. G_j – м-ца вращ Гивенса ~~[illegible]~~

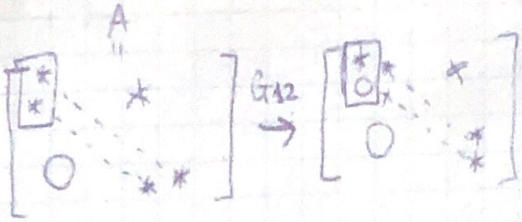
т не из размера м-цы A

Теперь нужно применить те же преобразов., (транспон) что под верхнетреугол м-ей

$$G_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cos\varphi & & -\sin\varphi \\ & & & 1 & \\ & & \sin\varphi & & \cos\varphi \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

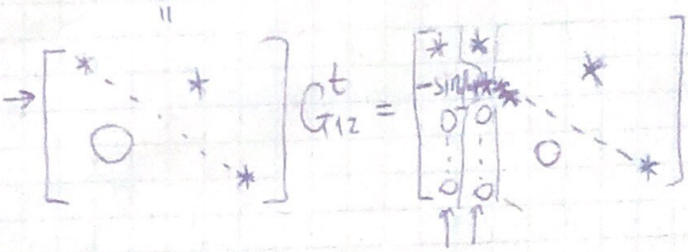
и проверить, что сохраняется верхнехес структура

$(G_{n-1} \ldots G_1) A (G_{n-1} \ldots G_1)^t = R (G_{n-1} \ldots G_1)^t = R G_1^t \ldots G_{n-1}^t$



$$G_{12} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_{12}^t = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & & & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$



последние $n-2$ точно не трогаем из-за „1" в G_{12}^t, нас интер. элем $(2,1)$

в том месте, где мы занулили элемент появился $-*\cdot\sin\varphi$.

Аналогично будет происходить и для последующих умножений на G_{ij}^t, а точнее на G_{23}^t, G_{34}^t, ...

предыдущие столбцы не ломаются, потому что в Гивенсе там стоят „1", мы работаем последов. с $G_{j,j+1}^t$

У нас будет вылезать $-\sin\varphi\cdot *$ каждый раз на диагонали ниже главной при умножении справа на $G_{j,j+1}^t$

В итоге получится верхнехессенбергова м-ца. $R G_1^t \dots G_m^t$ после 1-ой итерации. Аналогично, по индукции для следующих

1) $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-2} > \lambda_{n-1} > \lambda_n \qquad A = A^t > 0 \qquad n > 5$

$$\|e_k\|_A \le \min_{p_k:\, p_k(0)=1} \max_j |p_k(\lambda_j)| \cdot \|e_0\|_A \le \min_{p_k:\, p_k(0)=1} \max_{t\in[\lambda_n,\lambda_1]} |p_k(t)| \cdot \|e_0\|_A$$

~~Минимум~~ будет достигаться при $p_k(t) = \dfrac{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n-2t}{\lambda_n-\lambda_1}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_1}\right)}$ - корни в с.д

На отрезке $[\lambda_{n-2}, \lambda_1]$ рассмотрим

T_k - полином Чебышева

$$p_k(t) = \underbrace{\frac{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_{n-2}-2t}{\lambda_{n-2}-\lambda_1}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-2}-\lambda_1}\right)}}_{\text{миниму. на } [\lambda_{n-2},\lambda_1]} \left(1-\frac{t}{\lambda_{n-1}}\right)\left(1-\frac{t}{\lambda_n}\right)$$

и добавим корни в с.д λ_{n-1} и λ_n

С лекции оценка $\|e_k\|_A \le 2\left(\dfrac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}}+1}\right)^{k-2} \cdot \left(1-\dfrac{t}{\lambda_{n-1}}\right)\left(1-\dfrac{t}{\lambda_n}\right)\cdot\|e_0\|_A$

Оценим $\underbrace{\left(1-\frac{t}{\lambda_{n-1}}\right)\left(1-\frac{t}{\lambda_n}\right)}_{g(t)} = 1-\dfrac{t}{\lambda_{n-1}}-\dfrac{t}{\lambda_n}+\dfrac{t^2}{\lambda_{n-1}\lambda_n} = 1-\dfrac{\lambda_{n-1}+\lambda_n}{\lambda_{n-1}\lambda_n}t+\dfrac{t^2}{\lambda_{n-1}\lambda_n}$

границы $|g(0)| = 1 < \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2$

$|g(\lambda_1)| = \left|\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)\right|\cdot\left|\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)\right| \le \left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 \le \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2$

вершина параболы: $t_0 = \dfrac{\lambda_{n-1}+\lambda_n}{2}$

$|g(t_0)| = \left|1-\dfrac{(\lambda_{n-1}+\lambda_n)^2}{2\lambda_{n-1}\lambda_n}+\dfrac{(\lambda_{n-1}+\lambda_n)^2}{4\lambda_{n-1}\lambda_n}\right| = \left|\dfrac{4\lambda_{n-1}\lambda_n-(\lambda_{n-1}+\lambda_n)^2}{4\lambda_{n-1}\lambda_n}\right| = \left|\dfrac{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)^2}{4\lambda_{n-1}\lambda_n}\right|$

$\le \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 \Rightarrow$ по модулю $g(t)$ не превосходит $\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2$

и оценка получена.