① a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = LU$, где L $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ - нижне унитреуг.
(нижне-Δ с 1 на диагонали)

U $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ - верхне-Δ.

Существование
b) LU-разложения

Пусть $\det A \neq 0$

сущ. $A = LU$ <=> A - строго регул.

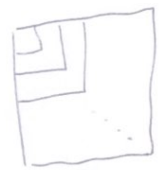
т.е если $\det A = 0$, это не значит, что LU-разлож. не сущ,

в частности у $O = \underbrace{I}_{\text{нижне унитреуг.}} \cdot \overbrace{O}^{\text{верхнетреуг.}}$ - LU разложение

Ответ: может

c) A наз. строго регулярной, если

$\det \underbrace{A[:k, :k]}_{\text{главные подматрицы}} \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$



d) Пусть $\det A \neq 0$ и A - строго регулор.
(это по сути тут уже заложено)

Тогда LU существует, то оно единственно.

т.е сущ. 2 разложения м-цы A.

□ $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

$\underbrace{L_2^{-1} L_1}_{\text{нижне унитреуг.}} = \underbrace{U_2 U_1^{-1}}_{\text{верхнетреуг.}}$ произведение нижне-Δ тоже нижне-Δ, верхне-Δ верхне-Δ
обратная —//— тоже —//—

такое может быть, когда это $I = L_2^{-1} L_1 \Rightarrow L_1 = L_2$
" $U_2 U_1^{-1} \Rightarrow U_1 = U_2$

т.е факторы LU-разлож. совпадают

$\det L = 1$ как произв. элементов глав. диаг.
$\det U \neq 0$ из-за строгой регулярности A.
$\Rightarrow \exists L^{-1}, \exists U^{-1}$

(e) $A = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & F & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & F & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ верхне-Δ

$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ явная ф-ма для заполнения

(2) a) Ванильная версия QR-алгоритма

$A_1 = A$, preprocess A в верхнехессенберг.

for k in $\{1 \dots n\}$

$A_k = Q_k R_k$

$A_{k+1} = R_k Q_k$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Предпосчитаем приведем ортогонал. преобразованиями A к верхнехессенберг. $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = H$

Знаем, что QR-итерация не портит свойства верхнехессенб. Разложим в QR через Хаусхолдера или вращениями Гивенса. Т.к верхнехессенб. почти верхнетреуг. это очень просто сделать за $O(n^2)$ - слож. 1 итерации.

(2d) $A = A^t$ $\quad \lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$ $\quad A = LU$ $\quad u_{kk} > 0 \ \forall k$

Св-ва QR-алгоритма:

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^t A_k Q_k = \ldots = Q_k^t \cdot \ldots \cdot Q_1 A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k =$$
$$= (Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)^t A \cdot (Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)$$

а $A_k = Q_k R_k$

$R_k = Q_k^t A_k$

$$A^k = (Q_1 R_1)^k = Q_1 (R_1 \cdot (\ldots) \cdot Q_1) R_1 = Q_1 (A_2)^k R_1 = \ldots = (Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)(R_k \cdot \ldots \cdot R_1)$$

т.к $A = A^t \Rightarrow$ она диагон. в ортон. базисе

$Q^t = Q^{-1}$ $\quad$ Q - м-ца собств. векторов

(♡) $A = Q \Lambda Q^t$ $\quad$ $Q = LU$ - известно

$$A^k = (Q \Lambda Q^t)^k = Q \Lambda^k Q^t = (Q_1 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_1)$$

$$Q \Lambda^k U^t L^t = Q_1 \ldots Q_k R_k \ldots R_1$$

$Q^t = (LU)^t = U^t L^t$

$$\Lambda^k U^t = \underbrace{Q^t Q_1 \ldots Q_k}_{\text{ортогон. как произв. ортогон.}} \underbrace{R_k \ldots R_1 (L^t)^{-1}}_{\text{верхнетреуг.}}$$

L - нижне-$\overset{\text{уни}}{\Delta}$

$\Rightarrow L^t$ - верхне-$\overset{\text{уни}}{\Delta}$

Λ^{-1} валид, т.к все с.ч > 0 и Λ - невырожд.

$$\underbrace{\Lambda^k U^t \Lambda^{-k}}_{\shortparallel} = (Q^t Q_1 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_1 (L^t)^{-1} \Lambda^{-k}) \quad (*)$$

умножение справа на диаг. не портит верхне-Δ.

$$\left[u_{ji} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^k \right]_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ u_{ji} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k & \ddots \end{bmatrix}$$

при $i < j$ там 0

U - верхне-Δ $\Rightarrow U^t$ - нижне-Δ

$\Rightarrow$ при $i > j$ $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k \to 0$, т.к $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$

на диагонали стоят u_{ii}, можно ещё домножить равенство (*) на $(\mathrm{diag}\, U)^{-1}$, чтобы слева мы сходились к I и справа верхне-Δ не нарушит

по условию тогда $Q^t Q_1 \ldots Q_k \to I$, т.е $Q_1 \ldots Q_k \to Q$

$\Rightarrow A_{k+1} = Q^t A Q = \Lambda$ по (♡) и утвержд. доказано.

③ (a) $\text{cond}_p A = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$

$\det A \neq 0$
$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(b) $\text{cond}_2(AA^t) = (\text{cond}_2 A)^2$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad A = U\Sigma V^t$ $\quad U^{-1} = U^t$ в U и V ортонорм. столбцы

$V^{-1} = V^t$ $\quad \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\|AA^t\|_2 = \|U\Sigma \underbrace{V^tV}_{I} \underset{\Sigma}{\Sigma^t} U^t\|_2 = \|U\Sigma^2U^t\|_2 = \|\Sigma^2\|_2 = \sigma_1^2$

унит. инвар.

$$\Sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad \|(AA^t)^{-1}\|_2 = \ldots = \|(\Sigma^2)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n^2}$$

$$(\Sigma^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

это будет максим.

$\Rightarrow \text{cond}_2(AA^t) = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2} = \left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^2 = \left(\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2\right)^2 = (\text{cond}_2 A)^2$

④ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a) $\quad x_{k+1} = \dfrac{Ax_k}{\|Ax_k\|_2}$ $\quad$ x_0 пришло у природы или выбрали случайно

степенной метод $\quad x_k \xrightarrow{k\to+\infty} v^{(1)}$ – старший собств. вектор соответ. $\lambda^{(1)}$

$R(x_k) \to \lambda^{(1)} = \max_i \lambda_i$

b) $x_{k} = \dfrac{\cancel{A x_{k-1}}}{\|Ax_{k}\|_2} = \ldots = \dfrac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}$

$$A^k = (S\Lambda S^{-1})^k = S\Lambda^k S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & & \\ & (-2)^k & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

столбцы S - ортогональны

$\Rightarrow$ осталось их нормировать, чтобы получить $S^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^t = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^k x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & & \\ & (-2)^k & \\ & & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^k & (-2)^k & 1 \\ -2^k & 2(-2)^k & 0 \\ 2^k & (-2)^k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\cdot 2^k + (-2)^k + 3 & \cdots \\ -2\cdot 2^k + 2(-2)^k & \cdots \\ 2\cdot 2^k + (-2)^k - 3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$(-2)^k$ будет дергать элементы и при больших k предела не будет

Отношение Релея: $R(x_k) = \dfrac{x_k^t A x_k}{x_k^t x_k}$

В оценке получали, что степенной метод $x_k = v^{(1)} + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$, но у нас $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2 \Rightarrow$ сходимости нет к старшему с. в., а отношение Релея на с. в. дает с. з. $\Rightarrow \{R(x_k)\}$ не сход к нек. с. з.

(5c продолж.)

$$(Ap_i, Ap_j) = (p_i, A^2 p_j) = (p_i, Ap_j)_A = \Big(p_i, \sum_{k=1}^{j+1} \delta_k p_k\Big)_A = \begin{cases} 0, & \text{если } i > j+1 \\ \delta_k (p_i, p_i) \end{cases}$$

$A = A^t \quad Ap_j \in K_{j+1} \quad Ap_j = \sum_{k=1}^{j+1} \delta_k p_k$

$$(Ap_i, r_{j-1}) = \Big(\sum_{k=1}^{i+1} \delta_k p_k, r_{j-1}\Big) = \sum_{k=j}^{i+1} \delta_k (p_k, r_{j-1})$$

$$(Ap_j, r_{i-1}) = \Big(\sum_{k=1}^{j+1} \delta_k p_k, r_{i-1}\Big) = 0$$

$r_{i-1} \perp K_{i-1} \Rightarrow r_{i-1} \perp K_l \quad l \in \{1, \dots, i-1\}$

т. к A-ортог. базис расширяется 1 век. остальные не меняются

$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k \; | \cdot (\,, r_l) \quad \forall l < k$

$(r_k, r_l) = \underbrace{(r_{k-1}, r_l)}_{\text{по индукции}} - \alpha_k \underbrace{(Ap_k, r_l)}_{0 \text{ по соображ. слева}}$

и так для $\forall k$ можем перебрав все пары.

⑤ (a) $J(x) = \frac{1}{2} x^t A x - x^t b$

он получается из задачи минимизации $\|x_* - x\|_A = 2J(x) + const$

const не зависит от x и не влияет на минимизацию

где $\|\cdot\|_A$ – A-норма, порожд. A-скал. произв. $(x, y)_A = x^t A y$

(b) $\frac{\partial J}{\partial x}$: $J(x+h) = \frac{1}{2}(x+h)^t A (x+h) - (x+h)^t b =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}[x^t A x}_{} + \underbrace{x^t A h + h^t A x}_{= 2x^t A h} + h^t A h] - \underbrace{x^t b}_{} - \underbrace{h^t b}_{= b^t h} =$

$= J(x) + \underbrace{(x^t A - b^t)}_{= (Ax - b)^t} h + \frac{1}{2} h^t A h$

$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x} = Ax - b$, т.е градиент функ. энергии связан с невязкой
по определению в частности $-\nabla J(x_k) = r_k$

(c) $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$ $\quad |\cdot A$ и вычтем ур-ие из b $\quad p_k$ – вектор из ортог. базиса крыловского пр-ва $K_k(A, r_0)$ невязка $b - Ax_0$

~~$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$~~

$\underbrace{b - Ax_k}_{= r_k} = b - Ax_{k-1} - \alpha_k A p_k$

$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$

$\frac{\partial J}{\partial x}(x_k) = Ax_k - b = -r_k$ $\quad$ Т.е стоит вопрос почему невязки попарно ортогональны.

$i > j$ (для определ.)

$(r_i, r_j) = (r_{i-1} - \alpha_i A p_i, r_{j-1} - \alpha_j A p_j) =$

$= \underbrace{(r_{i-1}, r_{j-1})}_{\text{по индукции}} - \alpha_i (A p_i, r_{j-1}) - \alpha_j \underbrace{(r_{i-1}, A p_j)}_{= 0} + \alpha_i \alpha_j (A p_i, A p_j)$

(продолжение следует!)