Semestre 2019-1 Mat. Andrés Merino

1. Aplicaciones

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Proposición 1. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, se tiene que el área delimitada por la gráfica de las funciones f y g entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ puede ser aproximada por

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x,$$

por lo tanto

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Se pueden tener ejemplos del cálculo de área entre curvas en la página 379 del libro de Thomas.

Ejercicio 1. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{arc\,sen}(x) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arccos(x). \end{aligned}$$

Sea S la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g y entre las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1/\sqrt{2}$.

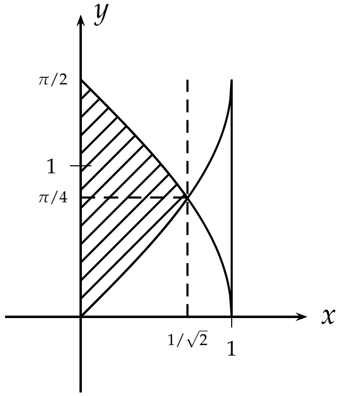
1. Elabore un boceto de la región S.

2. Plantee dos integrales que calculen el área de la región S. Luego

> elija la integral más simple de calcular.
>
> 3. Calcule el valor del área.

Solución.

1. La región es:



2. Al utilizar una partición en el eje x, se tiene que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{1/\sqrt{2}} |f(x) - g(x)| dx \\
&= \int_0^{1/\sqrt{2}} |\operatorname{arc\,sen}(x) - \arccos(x)| dx \\
&= \int_0^{1/\sqrt{2}} \arccos(x) - \operatorname{arc\,sen}(x) dx.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, dado que f y g tienen inversa, al realizar una partición en el eje y, se tiene que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(y) dy \\
&= 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y) dy,
\end{aligned}
$$

donde se utilizó la simetría de la región. Es claro que la segunda integral es más simple de calcular.

3. Utilizando el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y)dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, el área pedida es

$$A = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59. \qquad \square$$

2. Volúmenes por secciones transversales

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Teorema 2: Sección transversal

Supongamos que $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, una función continua, modela el área de la sección transversal de un sólido. Se tiene que el volumen del sólido puede ser aproximada por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(c_k)\Delta x,$$

por lo tanto

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(c_k)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes por secciones transversales a partir de la página 396 del libro de Thomas. Además se pueden visualizar algunos ejemplos de estos sólidos en

- `https://www.geogebra.org/m/nVnKDrvy` o
- `https://www.geogebra.org/m/RFHTZ4kt`.

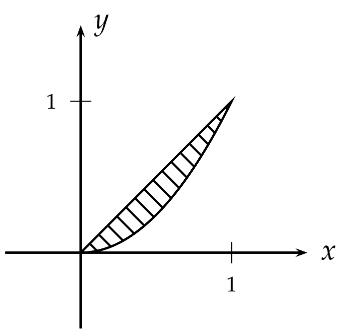
Ejercicio 2. Calcular el volumen de un cono de radio R y altura H.

> **EJERCICIO 3.** Calcular el volumen de una pirámide cuadrada de lado de la base L y altura H.

> **EJERCICIO 4.** La base de un sólido está delimitada por las funciones
>
> $$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$
>
> además, sus secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Se desea calcular el volumen de este sólido, para esto, siga el siguiente proceso:
>
> 1. Elabore un boceto de la base del sólido.
> 2. Plantee la función de área de la sección transversal perpendicular al eje x.
> 3. Plantee una integral que calcule el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que la longitud de la base de la sección transversal a la altura $x \in [0,1]$ es
$$f(x) - g(x) = x - x^2$$
y la base de la sección transversal es la base del cuadrado, tenemos que

su área está dada por

$$A(x) = (f(x) - g(x))^2 = (x - x^2)^2.$$

3. Si llamamos V al volumen del sólido, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2)^2 dx. \end{aligned}$$ □

EJERCICIO 5. La base de un sólido está delimitada por las funciones

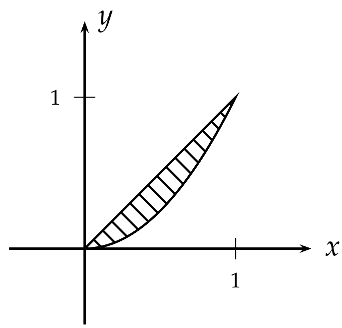
$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

además, sus secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos. Se desea calcular el volumen de este sólido, para esto, siga el siguiente proceso:

1. Elabore un boceto de la base del sólido.
2. Plantee la función de área de la sección transversal perpendicular al eje x.
3. Plantee una integral que calcule el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que la longitud de la base de la sección transversal a la altura $x \in [0, 1]$ es
$$f(x) - g(x) = x - x^2$$
y la base de la sección transversal es el diámetro del semicírculo, tenemos que su área está dada por
$$A(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(x) - g(x)}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x - x^2}{2}\right)^2.$$

3. Si llamamos V al volumen del sólido, tenemos que
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(x) - g(x)}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2}\left(\frac{x - x^2}{2}\right)^2 dx. \end{aligned}$$ $\square$

3. Volúmenes de revolución

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Además, dados un eje cualquiera y una función continua $R\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de la función R y el eje, al rededor de dicho eje.

TEOREMA 3: Método de los discos

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi(R(c_k))^2 \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi(R(c_k))^2 \Delta x \\ &= \int_a^b \pi(R(x))^2 \, dx. \end{aligned}$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes de revolución, por el método de discos, a partir de la página 399 del libro de Thomas. Además se pueden visualizar algunos ejemplos de estos sólidos en

- `https://www.geogebra.org/m/vjmke8bn` o
- `https://www.geogebra.org/m/hhRJQyz9`.

EJERCICIO 6. Calcular, utilizando el método de discos, el volumen de un cono de radio R y altura H.

EJERCICIO 7. Calcular, utilizando el método de discos, el volumen de una esfera de radio R.

Ahora, dados un eje cualquiera y dos funciones continuas $R_1, R_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de las funciones R_1 y R_2, al rededor de dicho eje.

TEOREMA 4: Método de las arandelas

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi|(R_1(c_k))^2 - (R_2(c_k))^2|\Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi |(R_1(c_k))^2 - (R_2(c_k))^2| \Delta x \\ &= \int_a^b \pi |(R_1(x))^2 - (R_2(x))^2| \, dx. \end{aligned}$$

EJERCICIO 8. Calcular, utilizando el método de arandelas, el volumen de un tronco de cono radio mayor R, radio menor r y altura h.

Ahora, dados un eje cualquiera y una función continua $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de la función h y el eje, alrededor del eje perpendicular a dicho eje.

TEOREMA 5: Capas Cilíndricas

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k h(c_k) \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k h(c_k) \Delta x \\ &= \int_a^b \pi x h(x) \, dx. \end{aligned}$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes de revolución, por el método de discos, a partir de la página 409 del libro de Thomas.

EJERCICIO 9. Calcular, utilizando el método de capas cilíndricas, el volumen de una esfera de radio R.

EJERCICIO 10. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

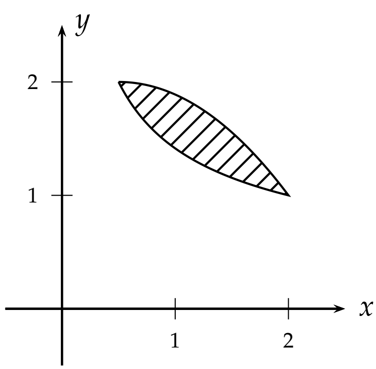
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje x.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una arandela de radio mayor $g(x_k)$, radio menor $f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(x_k))^2 - (f(x_k))^2\right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x_k}} \right)^2 \right) \Delta x. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_{1/2}^{2} \pi \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx \\ &= \int_{1/2}^{2} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x}} \right)^2 \right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$

EJERCICIO 11. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

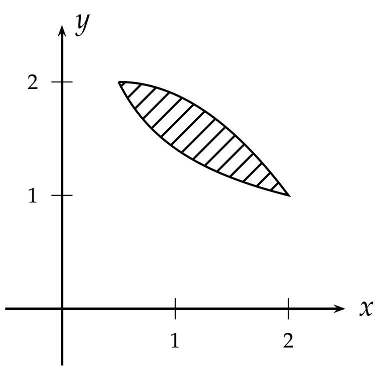
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17 + 4x - 4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una capa cilíndrica de radio x_k, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(g(x_k) - f(x_k)\right) \Delta x \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9} - \sqrt{\frac{2}{x_k}}\right) \Delta x.
\end{aligned}
$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{1/2}^{2} 2\pi x \left(g(x) - f(x)\right) dx \\
&= \int_{1/2}^{2} 2\pi x \left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9} - \sqrt{\frac{2}{x}}\right) dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 12. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

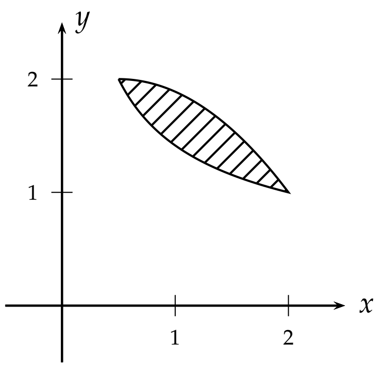
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje x.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una capa cilíndrica de radio y_k, altura $g(y_k) - f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi y_k \left(g(y_k) - f(y_k)\right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi y_k \left(\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2-y_k}) - \frac{2}{y_k^2}\right) \Delta y. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 2\pi y \left(g(y) - f(y)\right) dy \\ &= \int_1^2 2\pi y \left(\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2-y}) - \frac{2}{y^2}\right) dx. \end{aligned}$$ □

EJERCICIO 13. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

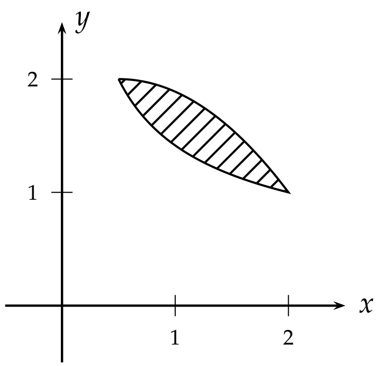
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una arandela de radio mayor $g(y_k)$, radio menor $f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(y_k))^2 - (f(y_k))^2 \right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k}) \right)^2 - \left(\frac{2}{y_k^2} \right)^2 \right) \Delta y. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi \left((g(y))^2 - (f(y))^2 \right) dy \\ &= \int_1^2 \pi \left(\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y}) \right)^2 - \left(\frac{2}{y^2} \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$ $\square$

EJERCICIO 14. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

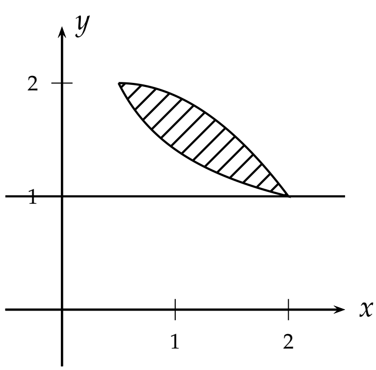
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $y = 1$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una capa cilíndrica de radio $y_k - 1$, altura $g(y_k) - f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(y_k - 1)\left(g(y_k) - f(y_k)\right)\Delta y \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(y_k - 1)\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k}) - \frac{2}{y_k^2}\right)\Delta y.
\end{aligned}
$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 2\pi(y - 1)\left(g(y) - f(y)\right)dy \\
&= \int_1^2 2\pi(y - 1)\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y}) - \frac{2}{y^2}\right)dx.
\end{aligned}
$$

□

EJERCICIO 15. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

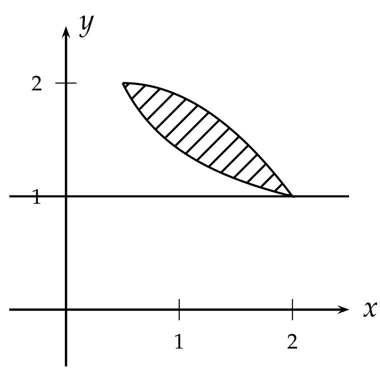
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $y = 1$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una arandela de radio mayor $g(x_k) - 1$, radio menor $f(x_k) - 1$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(x_k) - 1)^2 - (f(x_k) - 1)^2 \right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9} - 1 \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x_k}} - 1 \right)^2 \right) \Delta x. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_{1/2}^{2} \pi \left((f(x) - 1)^2 - (g(x) - 1)^2 \right) dx \\ &= \int_{1/2}^{2} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9} - 1 \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x}} - 1 \right)^2 \right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$

EJERCICIO 16. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

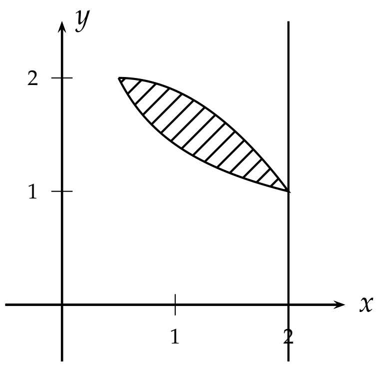
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $x = 2$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una capa cilíndrica de radio $2 - x_k$, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(2-x_k)\left(g(x_k)-f(x_k)\right)\Delta x \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(2-x_k)\left(\frac{17+4x_k-4x_k^2}{9}-\sqrt{\frac{2}{x_k}}\right)\Delta x.
\end{aligned}
$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{1/2}^{2} 2\pi(2-x)\left(g(x)-f(x)\right)dx \\
&= \int_{1/2}^{2} 2\pi(2-x)\left(\frac{17+4x-4x^2}{9}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 17. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

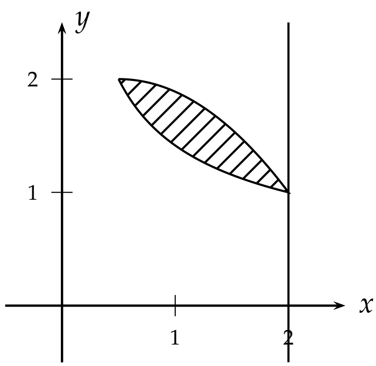
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $x = 2$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una arandela de radio mayor $2 - f(y_k)$, radio menor $2 - g(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((2 - g(y_k))^2 - (2 - f(y_k))^2\right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(2 - \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k})\right)^2 - \left(2 - \frac{2}{y_k^2}\right)^2 \right) \Delta y. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi \left((2 - g(y))^2 - (2 - f(y))^2\right) dy \\ &= \int_1^2 \pi \left(\left(2 - \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y})\right)^2 - \left(2 - \frac{2}{y^2}\right)^2 \right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$