Matematika Teknik Pertambangan

Bakti Siregar, M.Sc

2024-07-09

Contents

Kata Pengantar

Dengan mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, saya sangat senang dapat mempersembahkan eBook "Matematika Tambang" kepada para pembaca yang budiman. Buku ini merupakan hasil dari proses panjang, penelitian mendalam, serta dedikasi yang tiada henti. Harapan saya, eBook ini dapat memberikan manfaat yang signifikan bagi para pembaca, baik itu akademisi, praktisi, maupun masyarakat umum yang memiliki minat pada bidang ini.

Buku ini disusun dengan tujuan memberikan wawasan dan pengetahuan yang komprehensif mengenai konsep-konsep matematika yang relevan dan aplikatif dalam bidang pertambangan. Melalui buku ini, pembaca diharapkan dapat memahami konsep dasar kalkulus, aljabar linear, statistik, dan probabilitas yang diterapkan dalam pemodelan dan analisis data pertambangan.

Ringkasan Materi

Adapun isi pembelajaran dalam modul ini adalah sebagai berikut:

- Kalkulus
  - Pengantar Matematika Tambang
  - Bilangan Real
  - Konsep Fungsi
  - Konsep Limit Fungsi
  - Konsep Turunan Fungsi
  - Penggunaan Turunan
  - Konsep Integral Fungsi
  - Penggunaan Integral
  - Konsep Fungsi Transenden
- Aljabar Linear
  - Matriks
  - Determinan
  - Sistem Persamaan Linear

Penulis

- **Bakti Siregar, M.Sc., CDS** bekerja sebagai Dosen di Prodi Sains Data Institut Teknologi Sains Bandung. Beliau adalah meraih gelar Magister-nya dari Departemen Matematika Terapan (Applied Mathematics) National Sun Yat Sen University, Taiwan. Selain mengajar beliau juga pernah bekerja sebagai **Data Scientist Freelance** di perusahaan-perusahaan ternama seperti JNE, Samora Group, Pertamina, dan PT. Green City Traffic. Beliau memiliki antusiasme khusus dalam mengerjakan proyek (mengajar) Big Data Analytics, Machine Learning, Optimisasi, dan Analisis Time Series di bidang keuangan dan investasi. Keahlian utama yang dimilikinya adalah bahasa pemrograman Statistik seperti R Studio dan Python. Beliau juga sudah terbiasa dalam mengaplikasikan sistem basis data MySQL/NoSQL untuk manajemen data, serta mahir dalam menggunakan tools Big Data seperti Spark dan Hadoop. Beberapa project beliau dapat dilihat di link berikut: Rpubs, Github, Website, dan Kaggle.

Ucapan Terima Kasih

Proses penulisan eBook ini tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak. Saya ingin mengucapkan terima kasih kepada:

- **Keluarga** yang selalu memberikan dukungan moral dan semangat tanpa henti.
- **Rekan-rekan dan Kolaborator** yang telah memberikan masukan, saran, dan kritik yang konstruktif.

- Institusi dan Organisasi, Khususnya **ITSB** yang telah menyediakan sumber daya dan fasilitas yang diperlukan selama proses penelitian dan penulisan.

Saya berharap eBook ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat dan memberikan inspirasi serta pengetahuan baru bagi pembaca. Semoga Ebook ini dapat memenuhi ekspektasi dan kebutuhan para pembaca dan semoga ilmu yang disampaikan dapat bermanfaat bagi semua.

Masukan & Saran

Semua masukan dan tanggapan Anda sangat berarti bagi kami untuk memperbaiki Ebook Matematika Tambang ini kedepannya. Bagi para pembaca/pengguna yang ingin menyampaikan masukan dan tanggapan, dipersilahkan melalui kontak dibawah ini!

Email: dsciencelabs@outlook.com

Chapter 1

Pengantar

Matematika Teknik Pertambangan adalah bidang studi yang memadukan konsep-konsep terapan ilmu matematika dalam berbagai ruang lingkup teknik pertambangan. Pada konteks ini, matematika digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah yang terkait dengan eksplorasi, ekstraksi, dan pengolahan mineral.

1.1 Konsep Matematika

Matematika memainkan peran penting dalam berbagai aspek teknik pertambangan. Berikut adalah beberapa konsep matematika yang sangat penting dalam bidang ini:

1.1.1 Kalkulus (Diferensial dan Integral)

Kalkulus digunakan dalam perhitungan volume, optimasi, dan analisis kestabilan.

- **Perhitungan Volume**: Menggunakan integral untuk menghitung volume cadangan mineral.
- **Optimasi Rute Penambangan**: Menggunakan derivatif untuk menemukan titik maksimum atau minimum fungsi biaya atau keuntungan.
- **Analisis Kestabilan Lereng**: Persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan kestabilan lereng tambang.

Adapun teori Diferensial dan Integral yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Integral Ganda**: Digunakan dalam perhitungan volume.

- **Persamaan Diferensial**: Digunakan untuk model transportasi panas dan aliran fluida.

1.1.2 Aljabar Linier

Aljabar linier sangat penting dalam pemodelan data geologi dan analisis seismik.

- **Analisis Data Seismik**: Menggunakan matriks untuk memproses data gelombang seismik.
- **Pengolahan Citra Geologi**: Transformasi linear untuk memanipulasi citra geologi.
- **Model Geostatistik**: Matriks kovarians digunakan dalam pemodelan distribusi mineral.

Adapun Aljabar Linier yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Matriks dan Vektor**: Digunakan dalam pemodelan data multidimensi.
- **Dekomposisi Nilai Singular (SVD)**: Digunakan untuk mengurangi dimensi data.

1.1.3 Teori Optimasi

Optimasi digunakan untuk perencanaan dan operasi tambang yang efisien.

- **Rencana Penambangan Optimal**: Menentukan jadwal produksi yang memaksimalkan keuntungan.
- **Alokasi Sumber Daya**: Optimasi penggunaan mesin dan tenaga kerja.
- **Jadwal Produksi**: Menggunakan algoritma optimasi untuk merencanakan produksi yang efisien.

Adapun metode Optimasi yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Pemrograman Linier**: Untuk masalah optimasi dengan kendala linier.
- **Pemrograman Non-Linier**: Untuk masalah dengan fungsi objektif nonlinier.
- **Algoritma Genetika**: Metode heuristik untuk menemukan solusi mendekati optimal.

1.1.4 Geometri dan Trigonometri

Geometri dan trigonometri digunakan dalam survei tambang dan perencanaan desain.

- **Survei Tambang**: Pengukuran dan pemetaan wilayah tambang.
- **Perencanaan Desain Tambang**: Merancang struktur tambang yang aman dan efisien.
- **Analisis Struktur Geologi**: Menggunakan geometri untuk memahami bentuk dan orientasi struktur geologi.

Adapun ilmu Geometri dan Trigonometri yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Pengukuran Sudut dan Panjang**: Trigonometri digunakan untuk menentukan jarak dan sudut dalam survei.
- **Transformasi Koordinat**: Mengubah data dari satu sistem koordinat ke sistem lain.

1.2 Terapan Matematika

1.2.1 Kalkulus (Diferensial dan Integral)

Integral

Integral tak tentu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

di mana $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$ dan C adalah konstanta integrasi.

Integral tertentu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

di mana $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$.

Menghitung volume mineral dalam sebuah tambang dengan bentuk paraboloid:

$$V = \int_0^h \pi r^2\,dz = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} z\right)^2 dz$$

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \, dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Jadi, volume mineral adalah $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial linear orde pertama:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Menentukan laju perubahan konsentrasi gas dalam sebuah tambang. Misalkan persamaan diferensialnya adalah:

$$\frac{dC}{dt} + 0.1C = 2$$

Ini adalah persamaan diferensial linier dengan $P(t) = 0.1$ dan $Q(t) = 2$. Solusinya adalah:

$$C(t) = e^{-0.1t} \left(\int 2e^{0.1t} \, dt \right) = e^{-0.1t} \left(\frac{2}{0.1} e^{0.1t} + C_1 \right) = 20 + C_1 e^{-0.1t}$$

di mana C_1 adalah konstanta integrasi.

Derivatif

Turunan fungsi:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Menentukan laju perubahan kedalaman tambang dengan waktu. Misalkan kedalaman tambang $d(t)$ diberikan oleh:

$$d(t) = 5t^2 + 3t + 10$$

Maka, laju perubahan kedalaman adalah:

$$\frac{dd}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 3t + 10) = 10t + 3$$

Jadi, laju perubahan kedalaman pada waktu $t = 2$ adalah:

$$\left.\frac{dd}{dt}\right|_{t=2} = 10(2) + 3 = 23$$

Jadi, laju perubahan kedalaman pada waktu 2 adalah 23 meter per satuan waktu.

1.2.2 Aljabar Linier

Matriks

Dalam teknik pertambangan, matriks memiliki berbagai aplikasi yang penting dalam analisis data geologis dan perencanaan tambang. Misalkan kita memiliki data sederhana tentang kadar mineral (M) dan densitas batuan (D) di suatu area tambang yang direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} M_1 & D_1 \\ M_2 & D_2 \\ M_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

Kita ingin menghitung matriks variansi-kovariansi untuk menentukan keterkaitan antara kadar mineral dan densitas batuan. Matriks variansi-kovariansi Σ dapat dihitung dengan rumus:

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$$

di mana $\mathbf{x}_i$ adalah vektor observasi ke-i, $\bar{\mathbf{x}}$ adalah vektor rata-rata dari data, dan n adalah jumlah sampel.

Langkah-langkah Perhitungan:

- **Hitung Rata-Rata**: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i$
- **Hitung Variansi-Kovariansi**:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(M) & \mathrm{Cov}(M, D) \\ \mathrm{Cov}(M, D) & \mathrm{Var}(D) \end{bmatrix}$$

Misalnya, jika data yang diamati adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka:

- Rata-rata $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$
- Variansi-Kovariansi $\Sigma = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ini menunjukkan bahwa ada keterkaitan positif antara kadar mineral dan densitas batuan dalam data sederhana ini.

Dalam contoh sederhana ini, kita melihat bagaimana matriks variansi-kovariansi digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel geologis dalam teknik pertambangan. Penggunaan matriks seperti ini membantu dalam pemahaman lebih dalam tentang struktur data geologis yang dapat digunakan untuk pengambilan keputusan lebih lanjut dalam manajemen tambang.

Vektor

Dalam teknik pertambangan, vektor digunakan untuk merepresentasikan dan menganalisis berbagai informasi penting seperti koordinat geografis dan orientasi struktur geologi. Berikut adalah contoh penghitungan manual norma vektor (magnitude) dan dot product (produk titik) dari dua vektor:

Misalkan kita memiliki dua vektor dalam ruang tiga dimensi:

$$\mathbf{v}_1 = (3, -2, 1)$$
$$\mathbf{v}_2 = (1, 1, 2)$$

Hitung Norma vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Untuk $\mathbf{v}_1$:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}$$
$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{9 + 4 + 1}$$
$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{14} \approx 3.74$$

Untuk $\mathbf{v}_2$:

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1 + 1 + 4}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{6} \approx 2.45$$

Hitung Dot product dari dua vektor $\mathbf{v}_1 = (a, b, c)$ dan $\mathbf{v}_2 = (d, e, f)$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = ad + be + cf$$

Untuk $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 3 - 2 + 2$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 3$$

1.2.3 Teori Optimasi

Pemrograman Linier

Fungsi objektif:

$$\text{Maksimalkan} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

di bawah kendala:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Misalkan kita ingin memaksimalkan produksi dua jenis mineral M_1 dan M_2 dengan kendala biaya dan waktu. Fungsi objektif dan kendalanya adalah:

$$\text{Maksimalkan} \quad Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 60 & \text{(biaya)} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 & \text{(waktu)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode Simplex, kita bisa menemukan solusi optimal $x_1 = 10$ dan $x_2 = 0$, dengan nilai objektif $Z = 400$.

Pemrograman Non-Linier

Fungsi objektif:

$$\text{Maksimalkan} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

di bawah kendala:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, & i = 1, 2, \ldots, m \\ h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & j = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

Optimasi produksi tambang dengan fungsi objektif:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$$

di bawah kendala:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Menggunakan metode optimasi non-linier seperti Lagrange atau metode numerik, kita bisa menemukan solusi optimal.

1.2.4 Geometri dan Trigonometri

Trigonometri

Identitas dasar:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Dalam menentukan sudut elevasi sebuah lereng tambang:

$$\sin\theta = \frac{\text{tinggi}}{\text{panjang miring}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - 0.6^2} = \sqrt{1 - 0.36} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

Pengukuran Sudut

Panjang busur s:

$$s = r\theta$$

di mana r adalah jari-jari lingkaran dan θ adalah sudut dalam radian.

Mengukur panjang busur dari sebuah tambang berbentuk lingkaran dengan jari-jari 50 meter dan sudut 30 derajat ($\frac{\pi}{6}$ radian):

$$s = 50 \times \frac{\pi}{6} \approx 50 \times 0.5236 = 26.18 \text{ meter}$$

Transformasi Koordinat

Transformasi dari koordinat kartesian ke koordinat polar:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Menentukan koordinat polar dari titik tambang dengan koordinat kartesian $(3, 4)$:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.927 \text{ radian}$$

1.2.5 Simulasi dan Pemodelan

Persamaan Aliran Air Bawah Tanah

Persamaan Darcy:

$$Q = -KA\frac{dh}{dl}$$

di mana Q adalah laju aliran, K adalah koefisien permeabilitas, A adalah luas penampang, dh adalah perubahan tinggi hidrolik, dan dl adalah jarak aliran.

Menghitung aliran air bawah tanah dengan $K = 0.01$ m/s, $A = 100$ m^2, $dh = 10$ m, dan $dl = 50$ m:

$$Q = -0.01 \times 100 \times \frac{10}{50} = -0.01 \times 100 \times 0.2 = -0.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

1.2.5.1 Persamaan Transportasi Panas

Persamaan konduksi panas satu dimensi (Persamaan Fourier):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

di mana T adalah suhu, t adalah waktu, x adalah posisi, dan α adalah difusivitas termal.

Misalkan suhu di tambang berubah dengan waktu sesuai persamaan konduksi panas, dengan $\alpha = 1$ m^2/s, suhu awal $T(x, 0) = 100$°C di seluruh tambang. Menggunakan metode numerik, kita bisa memodelkan distribusi suhu di tambang setelah beberapa waktu.

Chapter 2

Bilangan Real

Chapter 3

Konsep Fungsi

3.1 Praktikum

Chapter 4

Konsep Limit Fungsi

4.1 Praktikum

Chapter 5

Konsep Turunan

5.1 Praktikum

Chapter 6

Penggunaan Turunan Fungsi

6.1 Praktikum

Chapter 7

Konsep Integral Fungsi

7.1 Praktikum

Chapter 8

Konsep Transenden Fungsi

8.1 Praktikum

Chapter 9

Penggunaan Transenden Fungsi

9.1 Praktikum

Chapter 10

Referensi