Complexity problems in enumerative combinatorics

Natalia Durlik

02.12.2021

Plan

Przykłady

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - (-\phi)^{-n} \right), \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = (A^n)_{2,2}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady cd.

$$D_n = [[n!/e]]$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$T_n = (n-1)![t^n]z(t), \quad z(t) = te^{te^{te^{\cdots}}}$$

$$T_n = n^{n-2}$$

Wilfian formulas

Definicja

Mówimy, że formuła jest typu:

- (W1) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $poly(n)$
- (W2) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $o(a_n)$

Wilfian formulas

Definicja

Mówimy, że formuła jest typu:

- (W1) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $poly(n)$
- (W2) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $o(a_n)$
- (W3) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $poly(log(n))$
- (W4) jeśli istnieje algorytm obliczający a_n w czasie $n^{o(1)}$

Przykłady cd.

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\left\lfloor \frac{(k-1)!+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(k-1)!}{k} \right\rfloor \right)$$

Przykłady cd.

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\left\lfloor \frac{(k-1)! + 1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(k-1)!}{k} \right\rfloor \right)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{log(x)}$$

Przykłady cd.

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\left\lfloor \frac{(k-1)!+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(k-1)!}{k} \right\rfloor \right)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{log(x)}$$

Istnieje algorytm obliczający $\pi(x)$ w czasie $O(\frac{x^{2/3}}{log^2 x})$ i pamięci $O(x^{1/3} log^3 x log log x)$.

Przykłady cd.

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\left\lfloor \frac{(k-1)!+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(k-1)!}{k} \right\rfloor \right)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{log(x)}$$

Istnieje algorytm obliczający $\pi(x)$ w czasie $O(\frac{x^{2/3}}{log^2 x})$ i pamięci $O(x^{1/3} log^3 x log log x)$.

Pytanie

Czy istnieje formuła typu (W4) dla $\{\pi(n)\}$?

Domino tilings

Niech a_n oznacza liczbę możliwych pokryć kwadratu $[2n \times 2n]$ przez domina, tj. prostokąty 2×1 lub 1×2.

Domino tilings

Niech a_n oznacza liczbę możliwych pokryć kwadratu $[2n \times 2n]$ przez domina, tj. prostokąty 2×1 lub 1×2.

Problem pokrycia przez domina jest równoważny ze znalezieniem skojarzenia doskonałego w dualnym grafie kratowym G.

Domino tilings

Niech a_n oznacza liczbę możliwych pokryć kwadratu $[2n \times 2n]$ przez domina, tj. prostokąty 2×1 lub 1×2.

Problem pokrycia przez domina jest równoważny ze znalezieniem skojarzenia doskonałego w dualnym grafie kratowym G.

Twierdzenie [Kasteleyn, 1961]

Liczba możliwych pokryć regionu R przez domina wynosi $\sqrt{|detK|}$, gdzie K to ważona macierz sąsiedztwa grafu G, z poziomymi krawędziami z wagą 1 i pionowymi $i = \sqrt{-1}$.

Domino tilings

Niech a_n oznacza liczbę możliwych pokryć kwadratu $[2n \times 2n]$ przez domina, tj. prostokąty 2×1 lub 1×2.

Problem pokrycia przez domina jest równoważny ze znalezieniem skojarzenia doskonałego w dualnym grafie kratowym G.

Twierdzenie [Kasteleyn, 1961]

Liczba możliwych pokryć regionu R przez domina wynosi $\sqrt{|detK|}$, gdzie K to ważona macierz sąsiedztwa grafu G, z poziomymi krawędziami z wagą 1 i pionowymi $i = \sqrt{-1}$.

Algorytm FKT - Fisher, Kasteleyn, Temperley

Algorytm obliczający liczbę skojarzeń doskonałych w grafie planarnym w czasie $poly(n)$.

3D domino tilings

Ilość pokryć sześcianu $[2n \times 2n \times 2n]$ przez prostopadłościany $1 \times 1 \times 2$?

3D domino tilings

Ilość pokryć sześcianu $[2n \times 2n \times 2n]$ przez prostopadłościany $1 \times 1 \times 2$?

Ilość pokryć $[2 \times n \times n]$?

3D domino tilings

Ilość pokryć sześcianu $[2n \times 2n \times 2n]$ przez prostopadłościany $1 \times 1 \times 2$?

Ilość pokryć $[2 \times n \times n]$?

Twierdzenie

Problem zliczania pokryć 3-wymiarowego obszaru 3-wymiarowymi dominami jest $\#P$-zupełny.

Polyomino tilings

$\mathbf{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, gdzie $\tau_i \in \mathbb{Z}^2$ utworzone z kwadratów 1×1 przystających do siebie krawędziami. Rozważamy pokrycia regionu R kopiami elementów z $\mathbf{T}$, bez odbijania, bez rotacji, bez nachodzenia elementów na siebie.

Polyomino tilings

$\mathbf{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, gdzie $\tau_i \in \mathbb{Z}^2$ utworzone z kwadratów 1×1 przystających do siebie krawędziami. Rozważamy pokrycia regionu R kopiami elementów z $\mathbf{T}$, bez odbijania, bez rotacji, bez nachodzenia elementów na siebie.

Problem pokrycia skończonego regionu przez skończony zbiór $\mathbf{T}$ jest NP-zupełny.

Polyomino tilings

$\mathbf{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, gdzie $\tau_i \in \mathbb{Z}^2$ utworzone z kwadratów 1×1 przystających do siebie krawędziami. Rozważamy pokrycia regionu R kopiami elementów z $\mathbf{T}$, bez odbijania, bez rotacji, bez nachodzenia elementów na siebie.

Problem pokrycia skończonego regionu przez skończony zbiór $\mathbf{T}$ jest NP-zupełny.

Rectangular Tileability

Czy dla podanego skończonego zbioru **T** istniej $n, m \in \mathbb{N}$, takie że **T** pokrywa region $n \times m$?

Rectangular Tileability

Czy dla podanego skończonego zbioru $\mathbf{T}$ istniej $n, m \in \mathbb{N}$, takie że $\mathbf{T}$ pokrywa region $n \times m$?

Twierdzenie

Rectangular Tileability jest problemem nierozstrzygalnym.

Polyomino tilings

Rectangular Tileability

Czy dla podanego skończonego zbioru **T** istniej $n, m \in \mathbb{N}$, takie że **T** pokrywa region $n \times m$?

Twierdzenie

Rectangular Tileability jest problemem nierozstrzygalnym.

Twierdzenie

Mając dany **T**, problem istnienia pokrycia dla regionu $[n \times m]$ można rozstrzygnąć w czasie $O(log(n) + log(m))$.

Interpretacja kombinatoryczna

Definicja

Niech $\mathcal{A}_n$ oznacza zbiór pewnych *obiektów kombinatorycznych* o rozmiarze n, co oznacza, że możemy zweryfikować przynależność elementu do zbioru $\mathcal{A}_n$ w czasie $poly(n)$.

Interpretacja kombinatoryczna

Definicja

Niech $\mathcal{A}_n$ oznacza zbiór pewnych *obiektów kombinatorycznych* o rozmiarze n, co oznacza, że możemy zweryfikować przynależność elementu do zbioru $\mathcal{A}_n$ w czasie $poly(n)$.

Definicja

Oznaczmy $\mathcal{A} = \cup_n \mathcal{A}_n$.
Niech $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ funkcja obliczalna, $f(X) \leq e^{Cn^a}$, $X \in \mathcal{A}_n$, $C, a > 0$.
Niech

$$\mathcal{P} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}_n} \mathcal{P}_X$$

będzie rodziną kombinatorycznych obiektów sparametryzowaną przez $\mathcal{A}$ taką, że $|\mathcal{P}_X| = f(X)$. Wtedy mówimy, że $\mathcal{P}$ jest *kombinatoryczną interpretacją* $f(X)$.

Cykle Hamiltona w grafach 3-regularnych

Twierdzenie

Niech e-krawędź w grafie 3-regularnym G. Wtedy liczba $N_e(G)$ cyklów Hamiltona w G zawierająca krawędź e jest parzysta.

Cykle Hamiltona w grafach 3-regularnych

Twierdzenie

Niech e-krawędź w grafie 3-regularnym G. Wtedy liczba $N_e(G)$ cyklów Hamiltona w G zawierająca krawędź e jest parzysta.

Problem otwarty

Interpretacja kombinatoryczna dla $N_e(G)/2$.

Cykle Hamiltona w grafach 3-regularnych

Twierdzenie

Niech e-krawędź w grafie 3-regularnym G. Wtedy liczba $N_e(G)$ cyklów Hamiltona w G zawierająca krawędź e jest parzysta.

Problem otwarty

Interpretacja kombinatoryczna dla $N_e(G)/2$.

Kombinatoryczna interpretacja dla ciągów

Obserwacja

Niech $\{a_n\}$ ma wzór typu (W1), tzn. można obliczyć elementy ciągu w czasie $poly(n)$. Wtedy a_n ma trywialną interpretację - liczby $\{1, \ldots, a_n\}$.

Obserwacja

Niech $\{a_n\}$ ma wzór typu (W1), tzn. można obliczyć elementy ciągu w czasie $poly(n)$. Wtedy a_n ma trywialną interpretację - liczby $\{1, \ldots, a_n\}$.

Definicja

Niech $\mathcal{P} = \cup \mathcal{P}_n$ taki że $|\mathcal{P}_n| = a_n$.
Mówimy, że $\mathcal{P}$ jest interpretacją kombinatoryczną dla a_n typu:

(C1) jeśli przynależność obiektu do $\mathcal{P}_n$ można sprawdzić ze złożonością pamięciową $O(logn)$.

Kombinatoryczna interpretacja dla ciągów

Obserwacja

Niech $\{a_n\}$ ma wzór typu (W1), tzn. można obliczyć elementy ciągu w czasie $poly(n)$. Wtedy a_n ma trywialną interpretację - liczby $\{1, \ldots, a_n\}$.

Definicja

Niech $\mathcal{P} = \cup \mathcal{P}_n$ taki że $|\mathcal{P}_n| = a_n$.
Mówimy, że $\mathcal{P}$ jest interpretacją kombinatoryczną dla a_n typu:

(C1) jeśli przynależność obiektu do $\mathcal{P}_n$ można sprawdzić ze złożonością pamięciową $O(logn)$.

Przykład

- liczby Catalana
- permutacje

Super Catalan numbers

Definicja

$$S(m, n) := \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

Super Catalan numbers

Definicja

$$S(m,n) := \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

$$S(m,n) = \sum_k (-1)^k \binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n+k}$$

Twierdzenie

Liczby $S(m,n)$ mają kombinatoryczną interpretacje typu (C1).

$$S(m,m+l) = \sum_k 2^{l-2k}\binom{l}{2k} S(m,k)$$

Super Catalan numbers

Definicja

$$S(m,n) := \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

$$S(m,n) = \sum_k (-1)^k \binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n+k}$$

Twierdzenie

Liczby $S(m,n)$ mają kombinatoryczną interpretacje typu (C1).

$$S(m,m+l) = \sum_k 2^{l-2k}\binom{l}{2k} S(m,k)$$