

Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός

Άσκηση 3

Σεϊτανίδου Δήμητρα

7 Ιουνίου 2020

Η μέθοδος Total-field/Scattered-field

Σε αυτή την άσκηση θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Total-field/Scattered-field (TF/SF) για να μελετήσουμε την επίδραση της συχνότητας του κύματος και της αγωγιμότητας ενός αγωγού στο επιδερμικό βάθος.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση της μία διάστασης και θα θεωρήσουμε ότι η διάδοση γίνεται κατά τον άξονα x , επομένως η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι η E_z και η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου η H_y .

Η μέθοδος TF/SF βασίζεται στο ότι μπορούμε να γράψουμε το ολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο σαν άθροισμα του προσπίπτον και σκεδαζόμενου πεδίου αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\bar{E}^{total} = \bar{E}^{inc} + \bar{E}^{scat} \quad \bar{H}^{total} = \bar{H}^{inc} + \bar{H}^{scat} \quad (1)$$

Ο μονοδιάστατος χώρος στον οποίον διαδίδεται το κύμα χωρίζεται σε δυο περιοχές, στην περιοχή 1 όπου το πεδίο είναι το ολικό πεδίο και στην περιοχή 2 όπου το πεδίο είναι το σκεδαζόμενο.

Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Yee για να υπολογίσουμε τις τιμές του ολικού πεδίου:

$$E_{z,tot_i}^{n+1} = C_a * E_{z,tot_i}^n + C_b * \left(H_{y,tot_{i+1/2}}^{n+1/2} - H_{y,tot_{i-1/2}}^{n+1/2} \right) \quad (2)$$

$$H_{y,tot_{i-1/2}}^{n+1/2} = H_{y,tot_{i-1/2}}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left(E_{z,tot_i}^n - E_{z,tot_{i-1}}^n \right) \quad (3)$$

όπου οι συντελεστές C_a και C_b δίνονται από τις σχέσεις:

$$C_a = \frac{1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}}$$
$$C_b = \frac{\frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_r \Delta x}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για το σκεδαζόμενο πεδίο. Το πρόβλημα ανέρχεται όταν περνάμε από την περιοχή 1 στην περιοχή 2. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται:

$$E_{z,tot_i}^{n+1} = C_a * E_{z,tot_i}^n + C_b * \left(H_{y,tot_{i+1/2}}^{n+1/2} - H_{y,scat_{i-1/2}}^{n+1/2} \right)$$

Όπως βλέπουμε στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται το σκεδαζόμενο πεδίο ενώ θέλουμε να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο. Η σχέση αυτή δεν είναι ορθή καθώς αφαιρούμε ανόμοιες

ποσότητες. Η λύση στο πρόβλημα αυτό έρχεται πολύ εύκολα από την σχέση (1). Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (1) στην παραπάνω σχέση τότε έχουμε:

$$E_{z,tot_i}^{n+1} = C_a * E_{z,tot_i}^n + C_b * \left(H_{y,tot_{i+1/2}}^{n+1/2} - H_{y,tot_{i-1/2}}^{n+1/2} \right) - C_b * H_{y,inc_{i-1/2}}^{n+1/2} \quad (4)$$

Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο ισχύει η σχέση:

$$H_{y,tot_{i-1/2}}^{n+1/2} = H_{y,tot_{i-1/2}}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left(E_{z,tot_i}^n - E_{z,tot_{i-1}}^n \right) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} E_{z,inc_{i-1}}^n \quad (5)$$

Τα $E_{z,inc}$ και $H_{y,inc}$ θεωρούνται γνωστά και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} E_{z,inc_i} &= E_{z0} \cos(\omega n \Delta t - \beta(i \Delta x)) \\ H_{y,inc_{i-1/2}} &= -E_{z0} \cos(\omega(n + 1/2) \Delta t - \beta(i + 1/2 \Delta x)/\eta) \end{aligned}$$

όπου $\beta = 2\pi/\lambda$ ο κυματάρθρωτος και $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon}$ η αντίσταση του κύματος.

Mur's Absorbing Boundary Conditions

Στα όρια του μονοδιάστατου χώρου στον οποίο γίνεται η διάδοση πρέπει να ορίσουμε κάποιες οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση μας θεωρούμε απορροφητικές οριακές συνθήκες (ABCs), δηλαδή το κύμα δεν ανακλάται όταν φτάσει στα όρια του χώρου αλλά απορροφάται πλήρως. Μια από τις πιο γνωστές ABCs είναι του Mur και δίνονται από την σχέση:

$$E_{z1}^{n+1} = -E_{z1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_{z2}^{n+1} + E_{z1}^{n-1}) + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_{z1}^n + E_{z2}^n) \quad (6)$$

όπου ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στο αριστερό όριο και ο δείκτης 2 στο αμέσως διπλανό του σημείο. Εφαρμόζουμε τη σχέση (6) στο αριστερό όριο και μια αντίστοιχη σχέση για το μαγνητικό πεδίο στο δεξιό όριο. Στο τελευταίο κεφάλαιο δίνεται ο κώδικας που πραγματοποιεί τα παραπάνω βήματα.

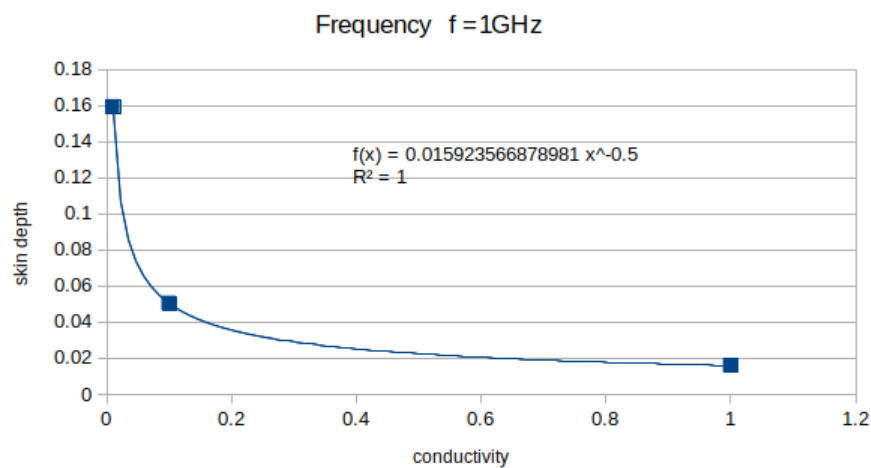
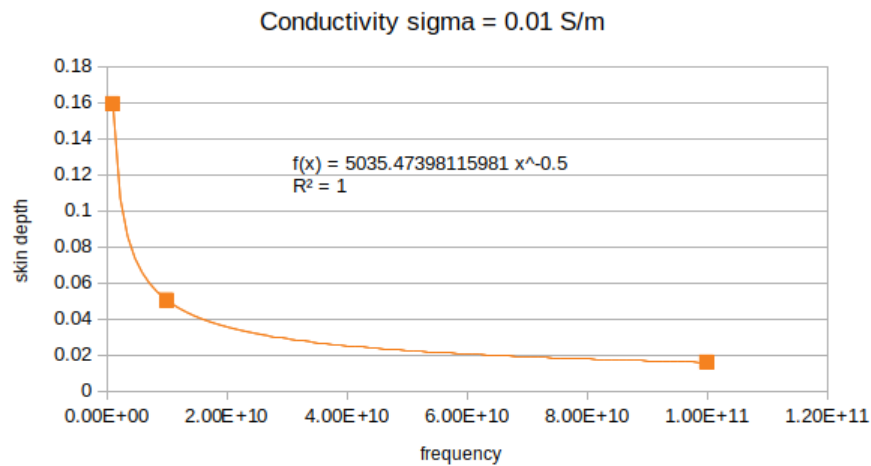
Επιδερμικό βάθος

Το επιδερμικό βάθος (skin depth) για συχνότητες κοντά στα μικροκύματα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \mu_0 \sigma}} \quad (7)$$

όπου f η συχνότητα, μ_0 η διαπερατότητα του κενού και σ η αγωγιμότητα.

Η επιρροή που έχουν η αγωγιμότητα και η συχνότητα στο επιδερμικό βάθος φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.



Βλέπουμε λοιπόν ότι το επιδερμικό βάθος είναι αντιστρόφως ανάλογο τόσο της αγωγιμότητας όσο και της συχνότητας.

Κώδικας

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 Nx = 200 #space values
6 Nt = 100 #time values
7
8 c = 2.99*10**8 #light speed
9 f = 1*10**9 #frequency=1GHz
10 l = c/f #wave length
11 dx = l/20.0
12 dt = dx/c
13 mu0 = 4.0*np.pi*10**(-7) #permeability of free space
14 epsilon0 = 1.0/(c**2*mu0) #permittivity of free space
15 E0 = 10.0 #amplitude of electric field

```

```

16
17
18 #define incident fields
19 def Hyinc(n,eta):
20     return E0*np.cos(2*np.pi*f*n*dt - 2*(np.pi/l)*49*dx)/eta
21
22 def Ezinc(n):
23     return E0*np.cos(2*np.pi*f*n*dt - 2*(np.pi/l)*49*dx)
24
25 #Yee algorithm coefficients for electric field
26 def Ca(s,e):
27     return (1.0 - (dt*s)/(2.0*epsilon0*e))/(1.0 + (dt*s)/(2.0*epsilon0*e))
28
29 def Cb(s,e):
30     return (dt/(epsilon0*e*dx))/(1.0 + (dt*s)/(2.0*epsilon0*e))
31
32 sigma = np.zeros(Nx)           #conductivity
33 epsilon = np.ones(Nx)         #relative permittivity
34
35 for i in range(50,Nx):
36     epsilon[i] = 9
37     sigma[i] = 0.01
38
39 eta = np.sqrt(mu0/epsilon)    #wave impedance
40
41 #initial values
42 Ez = np.zeros(Nx)
43 Hy = np.zeros(Nx)
44
45
46 for n in range(Nt):
47
48     #past values for ABC
49     Hy0 = Hy[-1]
50     Ez0 = Ez[0]
51
52     #update magnetic field
53     for i in range(Nx-1):
54         Hy[i] = Hy[i] - dt/(mu0*dx)*(Ez[i+1] - Ez[i])
55
56     #TFSF correction
57     Hy[49] = Hy[49] - dt/(mu0*dx)*(Ez[50] - Ez[49]) - dt/(mu0*dx)*Ezinc(n)
58
59     #Mur's ABC for right side
60     Hy[-1] = -Hy0 + (c*dt - dx)/(c*dt + dx)*(Hy[-2] + Hy0) + 2*dx/(c*dt + dx)*(Hy[-1] + Hy[-2])
61     Hy0 = Hy[-1]
62
63     #update electric field
64     for i in range(1,Nx):
65         Ez[i] = Ca(sigma[i],epsilon[i])*Ez[i] - Cb(sigma[i],epsilon[i])*(Hy[i] - Hy[i-1])
66
67     #TFSF correction
68     Ez[50] = Ca(sigma[50],epsilon[50])*Ez[50] - Cb(sigma[50],epsilon[50])*(Hy[50] - Hy[49] - Hyinc(n,eta[49]))
69
70     #Mur's ABC for left side
71     Ez[0] = -Ez0 + (c*dt - dx)/(c*dt + dx)*(Ez[1] + Ez0) + 2*dx/(c*dt + dx)*(Ez[0] + Ez[1])
72     Ez0 = Ez[0]

```