Entraînement pour le DS 4, corrigé.

Exercice 1

1°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : u_n existe et $u_n > 0$.

★ H_0 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Alors $n+1+u_n$ existe et $n+1+u_n > 0$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ existe et $u_{n+1} > 0$.
Ainsi H_{n+1} est vraie.

★ Conclusion : on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, u_n \text{ existe et } u_n > 0}$.

2°) C'est vrai pour $n = 0$. Pour $n \geq 1$, $n + u_{n-1} \geq n$ car $u_{n-1} > 0$. Donc $\boxed{u_n \geq \sqrt{n}}$.

3°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1-\sqrt{x})^2 \geq 0$ i.e. $1 + x - 2\sqrt{x} \geq 0$, ce qui donne l'inégalité voulue.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

★ H_0 est vraie car $0 + \dfrac{u_0}{2^0} = u_0 \geq u_0$.

★ On suppose H_{n-1} vraie pour un rang n fixé ≥ 1. Par la question précédente,

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \frac{1}{2}\left(n + u_{n-1} + 1\right)$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \leq \frac{1}{2}\left(n + 1 + (n-1) + \frac{u_0}{2^{n-1}}\right)$$

Ce qui donne exactement $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$: H_n est vraie.

★ Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}}$.

c) ★ Divisons l'inégalité que l'on vient de montrer par n^2 lorsque $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{u_0}{n^2.2^n}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{u_0}{n^2.2^n} = 0$, par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2}$ <u>existe et vaut 0</u>.

★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{n} &= \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{(n-1)^2}.\frac{(n-1)^2}{n^2}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n-1}}{(n-1)^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n^2}=1$. Par opérations sur les limites, il vient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=0}$.

4°) a) Soit $n\geq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{w_n}{\sqrt{n}}=\frac{u_n}{\sqrt{n}}-1&=\sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n}}-1\\&=\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1\end{aligned}$$

Or $\dfrac{u_{n-1}}{n}=\dfrac{u_{n-1}}{n-1}\dfrac{n-1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}-1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ i.e. $\dfrac{w_n}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Ainsi $\boxed{w_n=o(\sqrt{n})}$.

On a donc aussi $\dfrac{w_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on en tire :

$$\frac{w_{n-1}}{\sqrt{n}}=\frac{w_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=\frac{w_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

D'où $\boxed{w_{n-1}=o(\sqrt{n}).}$

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}w_n\left(w_n+2\sqrt{n}\right)&=w_n^2+2\sqrt{n}w_n\\&=u_n^2-2u_n\sqrt{n}+n+2\sqrt{n}u_n-2n\\&=u_n^2-n\\&=n+u_{n-1}-n\\&=u_{n-1}\\&=w_{n-1}+\sqrt{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{w_n\left(w_n+2\sqrt{n}\right)=w_{n-1}+\sqrt{n-1}}$.

c) Soit $n\geq 1$. Par ce qui précède,

$$\begin{aligned}w_n(o(\sqrt{n})+2\sqrt{n})&=o(\sqrt{n})+\sqrt{n-1}\\w_n&=\frac{\sqrt{n-1}+o(\sqrt{n})}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+o(1)\right)}{\sqrt{n}(2+o(1))}\\&=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+o(1)}{2+o(1)}\end{aligned}$$

Ainsi par opérations sur les limites, $\boxed{w_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}}$.

5°) Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - u_n^2 &= n+1+u_n-(n+u_{n-1}) \\
&= \boxed{1+u_n-u_{n-1}} \\
&= \boxed{1+\sqrt{n}+w_n-\sqrt{n-1}-w_{n-1}} \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+w_n-w_{n-1} \quad \text{en utilisant la quantité conjuguée}
\end{aligned}$$

Or (w_n) et (w_{n-1}) convergent vers $\dfrac{1}{2}$ donc $w_n - w_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par somme de limites, $\boxed{u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

On choisit, dans la définition de la convergence, $\varepsilon = 1$.

Alors, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1}^2 - u_n^2 \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] = [0,2]$.

En particulier, pour $n \geq N, u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0$.

Or $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)$.

Comme on a $u_{n+1}+u_n > 0$ pour tout n, on en déduit qu'à partir du rang N, $u_{n+1}-u_n \geq 0$.

Finalement, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est croissante à partir d'un certain rang}}$.

Exercice 2

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2 \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(x^2 \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x^2 \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right)\right)\right) \text{ car } \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x^2 \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x^2 \ln\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

car $\operatorname{ch}(u) \underset{u\to0}{=} 1+\dfrac{1}{2}u^2+o(u^2)$ et car avec $u = \frac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et un $o(u^2) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)^{x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x^2 \ln\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x^2\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)++o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

car $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u+o(u)$ et car avec $u = \dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et un $o(u) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$$\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

Donc par composition de limites, $\boxed{\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{2}}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x} &\underset{x\to0}{=} \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) - 1}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 - x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to0}{=} \frac{-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)}{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to0}{=} \frac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{2}} \frac{-1 + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)} \\
&\underset{x\to0}{=} \left(-1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \frac{1}{1 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)}
\end{aligned}$$

Posons $u = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$, on a $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et comme $u \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2x}{3}$, un $o(u^2)$ est un $o(x^2)$ (et un $o(u)$ n'aurait été qu'un $o(x)$...).

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x} &\underset{x\to0}{=} \left(-1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) + \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to0}{=} \left(-1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{12} + \frac{4x^2}{9} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to0}{=} \left(-1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{13x^2}{36} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to0}{=} -1 + \frac{2x}{3} - \frac{13x^2}{36} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \\
&\underset{x\to0}{=} -1 + \frac{2x}{3} - \frac{10x^2}{36} + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x} \underset{x\to0}{=} -1 + \frac{2x}{3} - \frac{5x^2}{18} + o(x^2)}$$