Devoir maison 13.

Exercice 1

1°) X_N prend nécessairement des valeurs entières positives ; il est possible d'avoir $X_N = 0$ si on commence par N piles par exemple. Au maximum, le résultat change à chaque lancer, ce qui fait $N-1$ changements entre les N premiers lancers.
Ainsi $\boxed{X_N \text{ est à valeurs dans } \{0, \dots, N-1\}.}$

2°)
- X_2 est donc à valeurs dans $\{0, 1\}$. C'est donc une variable de Bernoulli. Trouvons son paramètre.
  $(X_2 = 1)$ est l'événement « les deux premiers résultats sont différents ». On a :
  $$(X_2 = 1) = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$$
  Or $(A_1 \cap \overline{A_2})$ et $(\overline{A_1} \cap A_2)$ sont incompatibles donc :
  $$P(X_2 = 1) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2).$$
  Or les événements A_1 et $\overline{A_2}$ sont indépendants, ainsi que $\overline{A_1}$ et A_2 ; on obtient :
  $$P(X_2 = 1) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$
  Donc $\boxed{X_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 2p(1-p)}$.
  Ainsi, $\boxed{E(X_2) = 2p(1-p)}$.
- X_3 est donc à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
  $(X_3 = 0)$ est l'événement « les trois premiers résultats sont identiques ». De même que pour X_2, on a :
  $$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})\right) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \\ &\qquad \text{car } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \text{ et } \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \text{ sont incompatibles} \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &\qquad \text{par indépendance de } A_1,\ A_2,\ A_3 \text{ (et donc aussi de } \overline{A_1},\ \overline{A_2},\ \overline{A_3}) \\ &= p^3 + (1-p)^3 \end{aligned}$$
  $$\boxed{P(X_3 = 0) = 1 - 3p + 3p^2} = 1 - 3p(1-p)$$
  On a $(X_3 = 2) = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3})$; par un calcul similaire,
  $$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= p(1-p)p + (1-p)p(1-p) \\ &= p(1-p)(p + 1 - p) \end{aligned}$$
  $$\boxed{P(X_3 = 2) = p(1-p)}$$
  Pour finir,
  $$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) \\ &= 1 - 1 + 3p(1-p) - p(1-p) \end{aligned}$$
  $$\boxed{P(X_3 = 1) = 2p(1-p)}.$$

3°) De manière générale, $(X_N = 0)$ est l'événement « les N premiers résultats sont identiques », on a donc

$$(X_N = 0) = \left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{A_i}\right)$$

Comme il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles, et que les $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(X_N = 0\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{A_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{N} P(A_i) + \prod_{i=1}^{N} P(\overline{A_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{N} p + \prod_{i=1}^{N} (1-p) \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(X_N = 0\right) = p^N + (1-p)^N}$$

4°) a) Soit $k \geq 3$. Y_k est la différence entre le nombre de changements jusqu'au lancer k et le nombre de changements jusqu'au lancer $k-1$, c'est donc le nombre de changement entre deux lancers successifs, $k-1$ et k.

C'est encore valable pour $k = 2$: X_2 est le nombre de changement entre les deux lancers 1 et 2.

Comme les lancers sont toujours réalisés dans les mêmes conditions, $\boxed{Y_k \text{ a même loi que } X_2.}$

b) Pour tout $N \in \{3, \ldots, 100\}$, $X_N = \sum_{k=3}^{N}(X_k - X_{k-1}) + X_2 = \sum_{k=3}^{N} Y_k \ + Y_2 = \sum_{k=2}^{N} Y_k$.

C'est encore valable si $N = 2$. Donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X_N) &= \sum_{k=2}^{N} E(Y_k) \\ &= (N-1)E(X_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_N) = (N-1)2p(1-p)}$$

5°) a) L'événement $(Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)$ est réalisé si et seulement si les résultats aux lancers $k-1$ et $k+1$ sont identiques, et différent du résultat au lancer k.

C'est donc $(A_{k-1} \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1}) \cup (\overline{A_{k-1}} \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}})$.

Par un raisonnement similaire à celui des premières questions, on trouve :

$$\begin{aligned} P\left((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)\right) &= p(1-p)p + (1-p)p(1-p) \\ &= p(1-p)\left(p + 1 - p\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)\right) = p(1-p)}$$

Par ailleurs, $P(Y_k = 1)P(Y_{k+1} = 1) = 2p(1-p) \times 2p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$.

Résolvons :

$$\begin{aligned} p(1-p) = 4p^2(1-p)^2 &\iff 1 = 4p(1-p) \quad \text{car } p \neq 0 \text{ et } 1-p \neq 0 \\ &\iff 1 - 4p + 4p^2 = 0 \\ &\iff (2p-1)^2 = 0 \\ &\iff p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, $P\left((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)\right) \neq P(Y_k = 1)P(Y_{k+1} = 1)$, donc $\boxed{Y_k \text{ et } Y_{k+1} \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

b) Supposons $p = \frac{1}{2}$. Alors, d'après l'énoncé, $Y_2, \ldots, Y_N$ forment une suite de $N-1$ variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $2p(1-p) = \frac{1}{2}$.

On sait alors que $X_N = \sum_{k=2}^{N} Y_k$ est une $\boxed{\text{variable binomiale de paramètres } N-1 \text{ et } \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

1°) Il est clair que $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, \ldots, n\}.}$

Ainsi, $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

2°) $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et $Y(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$; prenons $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, n\}$.

- Si $j > i$ alors $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$.
- Supposons maintenant $j \leq i$. Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P_{(X=i)}(Y = j) = \frac{1}{n}P_{(X=i)}(Y = j).$$

Sachant $(X = i)$, on lance i fois la pièce. Y est donc le nombre de piles lorsqu'on répète i fois, de façon indépendante, un lancer de pièce où la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{1}{2}$, donc, sachant $(X = i)$, Y suit une loi binomiale de paramètres i et $\frac{1}{2}$.

Ainsi, $P_{(X=i)}(Y = j) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2^{i-j}} = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i}$.

Finalement, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, n\}$,

$$\boxed{P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} 0 \text{ si } j > i \\ \dfrac{1}{n}\dbinom{i}{j}\dfrac{1}{2^i} \text{ si } j \leq i \end{cases}}$$

3°) On peut récupérer la loi de Y via la formule suivante, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ (qui revient à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X = i))_{1 \leq i \leq n}$) :

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y = j) = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}}$$

4°) Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $i \in \{j, \ldots, n\}$.

$$j\binom{i}{j} = j\frac{i!}{j!(i-j)!} = i\frac{(i-1)!}{(j-1)!((i-1)-(j-1))!} = \boxed{i\binom{i-1}{j-1}}.$$

5°)

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{n} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) \quad \text{car le terme est nul pour } j=0$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} j\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} i\binom{i-1}{j-1}\frac{1}{2^i}\right) \text{ à l'aide de la question précédente}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i\binom{i-1}{j-1}\frac{1}{2^i}\right) \text{ en échangeant les } \sum$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i-1}{j-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}\right) \text{ en posant } k=j-1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}1^k 1^{i-1-k}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}(1+1)^{i-1} \text{ par la formule du binôme}$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{n+1}{4}}$$