

### Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 3.

1°)  $f_1(x) = \exp(\cos x \ln(1 + \sin x))$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 + \sin x \geq 0$ , et  $1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ .

Donc  $f_1$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Par composition et somme de fonctions dérivables là où elles sont définies,  $f_1$  est dérivable sur  $D$ , et pour tout  $x \in D$ ,

$$f_1'(x) = \left( -\sin x \ln(1 + \sin x) + \cos x \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \exp(\cos x \ln(1 + \sin x))$$

2°)  $f_2$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , et pour tout  $x$  dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(3x^2 \sin(5x - 1) + x^3 \cdot 5 \cos(5x - 1)) \ln x - x^3 \sin(5x - 1) \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{x^2 \sin(5x - 1) (3 \ln x - 1) + 5x^3 \cos(5x - 1) \ln(x)}{(\ln x)^2} \end{aligned}$$

3°)  $f_3$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_3'(x) = \cos x [(-\sin)(\sin x)] - (-\sin x) [\cos(\cos x)] = \sin x (\cos(\cos x)) - \cos x (\sin(\sin x))$$

4°) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 + x^2 \geq 1$  donc  $\sqrt{1 + x^2} \geq \sqrt{1} > 0$  donc  $0 < \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq 1$ . Comme  $\text{Arccos}$  est définie sur  $[-1, 1]$ ,  $f_4$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto 1 + x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc par composition,  $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , ainsi que  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$  par quotient.

$\text{Arccos}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ .

Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \neq -1$ , et  $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 \iff 1 + x^2 = 1 \iff x = 0$ .

Par composition,  $\boxed{f_4 \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}} = \boxed{\frac{x}{|x|(1+x^2)}} \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f_4'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $f_4'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ .

5°) Soit  $D$  le domaine de définition de  $f_5$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \in D \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$

Le plus simple est de faire un tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	$0$	$-$	$+$

Donc  $\boxed{D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[}$ .

Par quotient,  $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$  est dérivable sur  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  sur cet ensemble, d'après le tableau de signe. Or  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc, par composition, puis produit avec  $x \mapsto x$ ,  $\boxed{f_5 \text{ est dérivable sur } ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, \quad f_5'(x) &= 1 \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{\frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2x}{(1+x)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ &= \boxed{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \end{aligned}$$

*Remarque* : Attention pour les simplifications !

Si  $x < -1$ ,  $x+1$  et  $x-1$  sont strictement négatifs, donc écrire  $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$  est faux.

Mieux vaut écrire, lorsque  $\frac{a}{b}$  est positif,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|} = \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$ .  
 Pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned}
 f'_5(x) &= \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|^2} \frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}} \\
 &= \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \\
 &= \frac{\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2 |1+x| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}\sqrt{|x-1|}} \\
 &= \frac{|x-1| \cdot |x+1| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}|x-1|} \\
 &= \frac{x^2 - 1 + x}{|1+x|\sqrt{x^2 - 1}} \text{ car } x^2 - 1 > 0 \text{ sur } ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[
 \end{aligned}$$

**Étude en 1 :** Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $\frac{f_5(x) - f_5(1)}{x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - 0}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$   
 Donc  $\boxed{f_5 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$ .