TD 1. Équations trigonométriques supplémentaires : réponses.

⚠ L'ensemble des solutions peut parfois s'écrire sous une forme différente sans que ce soit faux.

1°) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$:
$\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2°) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$:
$\left\{\dfrac{2k\pi}{3}, \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3°) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$:
$\left\{k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4°) $\sin(2x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$:
$\left\{-\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2k\pi}{5}, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5°) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$:
$\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6°) $3\tan(x) = 2\cos(x)$:
$\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7°) $2\cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$:
$\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8°) $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$:
$\{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

TD 1. Équations trigonométriques supplémentaires : éléments de correction.

⚠ L'ensemble des solutions peut parfois s'écrire sous une forme différente sans que ce soit faux.

1°) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$:
Définie sur $\mathbb{R}$.
Équivalente à : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Réponse : $\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2°) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$:
Définie sur $\mathbb{R}$.
On peut factoriser... On peut diviser par $\sqrt{2}$ pour reconnaître une formule d'addition... ou encore : équivalente à : $\sin(2x) = \sin(-x)$, facile à traiter avec le cours !
Réponse : $\left\{\dfrac{2k\pi}{3}, \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3°) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$:
Définie sur $\mathbb{R}$.
On peut poser $X = \cos(2x)$ et faire apparaître une équation du second degré...
Réponse : $\left\{k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4°) $\sin(2x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$:
Définie sur $\mathbb{R}$.
On peut factoriser... On peut diviser par $\sqrt{2}$ pour reconnaître une formule d'addition... ou encore : équivalente à : $\sin(2x) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3} - 3x\right)$, facile à traiter avec le cours !
Réponse : $\left\{-\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2k\pi}{5}, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5°) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$:
Définie sur $\mathbb{R}$.
On peut diviser par $\sqrt{2}$ pour reconnaître une formule d'addition... ou encore, passer $\sin(x)$ de l'autre côté, écrire $-\sin(x)$ comme un cosinus à l'aide des formules avec du $\frac{\pi}{2}$...
Réponse : $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6°) $3\tan(x) = 2\cos(x)$:
Définie sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.
Remplacer tan par son expression avec sin et cos ; multiplier l'équation par $\cos(x)$. Ensuite, on peut remplacer le cosinus au carré par une expression avec sinus, cela permet de se ramener à un trinôme du second degré en $\sin(x)$ (poser un X).
Réponse : $\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7°) $2\cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$:

Définie sur $\mathbb{R}$.

On peut passer $\sin(x)$ dans le membre de droite et tout diviser par 2... Repérer une formule d'addition avec cos pour se ramener à la situation de cours $\cos(X) = \cos(Y)$.

Réponse : $\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8°) $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$:

Définie sur $\mathbb{R}$.

Remplacer $3x$ par $2x + x$ et utiliser la formule d'addition. Utiliser ensuite la formule pour $\sin(2x)$: cela permet de mettre $\sin(x)$ en facteur. Remplacer le $\cos(2x)$ par une formule bien choisie afin de simplifier beaucoup ce qu'il y a dans la parenthèse...

Réponse : $\{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.