Devoir maison 8.

À rendre le lundi 20 février 2023

Exercice

On considère l'équation suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E)\ :\ 1 - 5x = 2x^2 \ln x.$$

1°) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2\ln x$.

Dresser le tableau de variations de φ.

2°) En déduire que (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.
Justifier que $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

3°) On pose, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln x}{4}.$$

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

b) On continue à noter f la fonction prolongée.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
Préciser $f'(0)$.

c) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

d) Étudier les variations de f' sur $[0, 1]$, et prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.
Indication : on pourra utiliser le fait (sans le prouver) que $e^{-\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{4}$.

e) Étudier les variations de f sur $[0, 1]$, et prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

4°) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $[0, 1]$.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.