Devoir maison 7.

À rendre le jeudi 19 janvier 2023

Exercice 1

Le but de l'exercice est la recherche et l'étude des solutions de l'équation :

$$(E)\ :\ \tan x = x$$

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation (E) possède une unique solution u_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
Préciser u_0.

2°) **a)** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\pi < u_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{n\pi}\right)$.

3°) **a)** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - n\pi = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

b) En déduire :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

4°) **a)** Montrer qu'il existe des réels α et β, que l'on déterminera, tels que :

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) Rappeler et redémontrer la relation entre $\operatorname{Arctan} x$ et $\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

c) En déduire le développement asymptotique suivant de (u_n) :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x+3\sqrt{x}-4}$.

2°) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$.

3°) On définit la fonction f par $f : x \mapsto (x-1)\exp\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)$.
Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera.
Étudier les positions relatives.