

---

**TD 12. Dérivation.**


---

**Exercice 1.** Étudier la dérivabilité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**Exercice 2.** Pour les fonctions  $f$  suivantes, justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son domaine de définition, et calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$  :

$$\text{a) } f(x) = (3x^2 + x - 5) \sin(x) \quad \text{b) } f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1} \quad \text{c) } f(x) = e^x \cos(x)$$

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

a) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$$

b) Vérifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(1 + x^2)f'(x) = -2xf(x)$ .

c) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_{n+1}(x) + (2n + 2)xP_n(x) + (n^2 + n)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

**Exercice 4.** On pose  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ .

a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1, 1[$  sur un intervalle à déterminer, et qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

b) Justifier que sa réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Calculer la valeur de  $(f^{-1})'(0)$ , et déterminer  $(f^{-1})''$  en fonction de  $f^{-1}$  et des dérivées de  $f$ .

**Exercice 5.** Soit  $a > 0$ , et  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  continue qui vérifie :  $f(0) = 0$ ,  $f$  dérivable sur  $]0, a[$  et  $f(a)f'(a) < 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]0, a[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 6.** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est  $n$  fois dérivable et qu'elle admet  $n + 1$  valeurs d'annulation distinctes.

a) Montrer que  $f'$  admet au moins  $n$  valeurs d'annulation distinctes.

b) Montrer que  $f^{(n)}$  admet au moins une valeur d'annulation.

2) Application : Soit  $P$  une fonction polynomiale de degré  $k \in \mathbb{N}$ .

Que dire du polynôme  $P^{(k+1)}$  ?

À l'aide 1), montrer que l'équation  $P(x) = e^x$  admet au plus  $k + 1$  solutions distinctes sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  intervalle.

a) On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

Montrer que si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f$  est strictement monotone sur  $I$ . En déduire qu'elle est injective.

b) On suppose  $f$  dérivable sur  $I$ .

Montrer que si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f$  est injective.

*Indication : raisonner par contraposée.*

**Exercice 8.** Soit  $a > 0$  et  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, telle que :  $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ .

a) On pose, pour  $x \in ]0, a]$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en 0.

Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0, a]$ , et calculer  $g'(x)$  pour  $x \in ]0, a]$ .

b) Montrer qu'il existe  $c \in ]0, a[$  tel que la tangente en  $c$  à la courbe représentative de  $f$  passe par l'origine.

**Exercice 9.** a) Montrer que pour tout  $x$  positif,  $\text{Arctan } x \leq x$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $\text{Arcsin } x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Exercice 10.** On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par 
$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3u_n + 5}. \end{cases}$$

a) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.

b) Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, quelle est la seule valeur possible pour sa limite ? On notera  $\varphi$  cette valeur.

c) Déterminer un réel  $k \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \varphi| \leq k|u_n - \varphi|$ .

d) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\varphi$ .

**Exercice 11.** 1) Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}.$$

Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soit  $f : x \rightarrow \text{Arctan} \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$ .

Quel est le domaine de définition de  $f$  ?

Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en un certain point, et déterminer si le prolongement est de classe  $\mathcal{C}^1$  ou non.

Question bonus : simplifier l'expression de  $f(x)$ .