
Devoir maison 2.

À rendre le lundi 6 octobre 2025

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1°) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) + \cos(x) = a \sin(x + b)$.
- 2°) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 3°) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $I =] - \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} [$.
Comment obtient-on \mathcal{C} à partir de la courbe représentative de f sur I , notée \mathcal{C}_1 ?
- 4°) Étudier les variations de f sur I , et dresser son tableau de variation, sans oublier les limites.
- 5°) Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) \geq \frac{1}{2}$.
- 6°) Déterminer les abscisses des points de \mathcal{C}_1 en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
- 7°) Calculer, pour tout $x \in I$, $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x)$.
En déduire un centre de symétrie de \mathcal{C}_1 .
- 8°) Représenter l'allure de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{C} sur une même figure.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$(*) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) + f(x + f(y)) = y + f[f(x) + f(f(y))].$$

- 1°) On suppose dans cette question que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété (*).
 - a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$.
 - b) On pose $a = f(0) + f(f(0))$. Comparer a et $f(a)$.
 - c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2°) Conclure.