# Devoir maison 5.

*À rendre le jeudi 24 novembre 2022*

## Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} \, \mathrm{d}x.$$

**1°)** Justifier que $I_n$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2°)** Calculer $I_0$ et $I_2$.

**3°)** En effectuant le changement de variables $u = \sin(x)$, calculer et simplifier $I_1$.

**4°)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n.$$

## Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t.$$

**1°)** Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+2}$.

**2°)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_n + u_{n+2}$.
En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)$.

**3°)** En effectuant un changement de variables, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

**4°)** En déduire, à l'aide de la propriété de croissance de l'intégrale, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n.$$