# AP Rédaction / Raisonnement.

## Exercice 1

Les phrases suivantes ne sont pas correctes mathématiquement : réécrivez-les de la bonne manière.

**1°)** « La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $e^x \sin x + e^x \cos x$. »

**2°)** « La fonction exp est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

**3°)** « $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$ »

**4°)** « L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$. »

**5°)** « $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x_1 = 1$ ou $x_2 = 2$ »

**6°)** On souhaite résoudre l'équation $(E) : x^2 + 3x - 2 = 0$.
« $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. »

**7°)** Dans notre raisonnement on dispose d'un réel $x$ positif, précédemment défini.
Puis vient la phrase : « On pose $x = y^2$. »

**8°)** On dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, dont on vient de calculer la dérivée.
« $f'(x) = 0$ donc $f(x) = C$ constante »

**9°)** On désigne par $(*)$ la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) + f(2x)$, que l'on suppose vérifiée.
« Soit $x = 0$ : $(*) \iff f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$ »

**10°)** « Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1$. »

## Exercice 2 : le jeu des 5 erreurs dans la récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases}$.

Trouvez les 5 erreurs de raisonnement ou rédaction dans cette récurrence :

« On pose $\mathcal{P}(n)$ : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

- $u_0 = 1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n} + 1}{2} \text{ par HR} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie. »

## Exercice 3

Les raisonnements ci-dessous sont incorrects : problème de rédaction, justifications mauvaises ou insuffisantes... Complétez-les ou réécrivez-les pour qu'ils deviennent corrects.

**1°)** Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.
Complétez le raisonnement :
$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$
$$2x \leq 1 + x^2$$
$$1 + x^2 - 2x \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 0$$
$$\text{Donc } \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

**2°)** Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$.
Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 &\Longleftrightarrow x+1-2\sqrt{x} \geq 0\\ &\Longleftrightarrow x+1 \geq 2\sqrt{x}\\ &\Longleftrightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$

**3°)** Énoncé de l'exercice : *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par* $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$.
*Étudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ (on se servira du résultat précédent).*
Réécrivez le raisonnement :

Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ ; $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; $x \mapsto 2\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 ; et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1 &\Longleftrightarrow 2\sqrt{x} = x+1\\ &\Longleftrightarrow (\sqrt{x})^2+1-2\sqrt{x} = 0\\ &\Longleftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

Donc, par quotient et composition, $f$ n'est pas dérivable en 0 et en 1.

**4°)** Énoncé de l'exercice : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines nièmes de $i$.*
Réécrivez le raisonnement :

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine $n$ième de $i$.

$$\begin{aligned}z^n = i &\Longleftrightarrow z^n = e^{i\frac{\pi}{2}}\\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^n = 1\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}$ est une racine $n$ième de l'unité,
donc $\exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

$$z^n = i \Longleftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

L'ensemble des racines $n$ièmes de $i$ sont donc $\left\{e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}} \ / \ k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$.

**5°)** Énoncé de l'exercice : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Réécrivez le raisonnement :

$$
\begin{aligned}
& k \leq 2n \\
\iff & \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \\
\iff & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\
\iff & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

**6°)** Énoncé de l'exercice : *Résoudre le système suivant :* $(S) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\quad = 0 \\ -x+3y \quad = 2 \end{cases}$

Réécrivez le raisonnement :

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \\ -x+3y=2 \end{cases}$$

Donc $-y+3y=2 \iff 2y=2 \iff y=1$.

On a donc $x=1$ et $1+1+z=1 \iff z=-1$.

Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

L'unique solution est donc $(1,1,-1)$.