
Devoir surveillé 7.

Samedi 17 mai 2025, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*

Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Dans tout l'exercice, $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ est noté id , et la base canonique de \mathbb{R}^n est notée \mathcal{B} .

Commençons par quelques définitions, pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

- On dit qu'un réel λ est *valeur propre* de f lorsqu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^n , non nul tel que

$$f(u) = \lambda u.$$

Dans ce cas, u est appelé *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ .

- On dit que f est *diagonalisable* lorsqu'il existe une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^n telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale.

Partie 1 : Quelques résultats en dimension n

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

On note A la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n .

- 1°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de \mathbb{R}^n .

Justifier que : u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si u appartient au noyau d'un certain endomorphisme de \mathbb{R}^n que l'on explicitera.

- 2°) Soit λ et μ des réels distincts. Montrer que $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \mu \text{id}) = \{0\}$.

- 3°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(f - \lambda \text{id}) = 0$.

- 4°) On suppose que f est diagonalisable.

On sait donc qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{R}^n telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale.

On note D la matrice de f dans \mathcal{C} : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Justifier que les coefficients diagonaux de D sont exactement les valeurs propres de f .

- 5°) Soit λ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé. Que vaut $f^k(u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?

- 6°) Montrer que si un réel λ est valeur propre d'une projection p de \mathbb{R}^n , alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

- 7°) On se donne deux sous-espaces vectoriels F et G non réduits à $\{0\}$ et supplémentaires dans \mathbb{R}^n .

On note p la projection sur F parallèlement à G .

À l'aide d'une base adaptée, justifier que p est diagonalisable.

Partie 2 : Un endomorphisme diagonalisable en dimension 3

Dans cette partie, on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

- 8°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

- 9°) Déterminer $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f + 2 \text{id})$; on en donnera une base pour chacun.

- 10°) Justifier que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

- 11°) En déduire une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 telle que la matrice de f dans \mathcal{C} soit diagonale.

Partie 3 : Cas de 3 valeurs propres distinctes en dimension 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que f admet 3 valeurs propres distinctes 2 à 2 : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

On note $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On rappelle qu'un vecteur propre est non nul par définition.

- 12°) a) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre (on pensera à utiliser un résultat de la partie 1).
b) Montrer en raisonnant par l'absurde que ε_3 n'est pas combinaison linéaire de ε_1 et ε_2 .
Qu'en déduire concernant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
- 13°) Montrer que f est diagonalisable.

Partie 4 : Un endomorphisme de \mathbb{R}^3 non diagonalisable

Dans cette partie, f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui n'est pas l'application nulle et tel que

$$f^3 = -f$$

- 14°) Montrer que $\det(f) = 0$. Qu'en déduire sur f ?
- 15°) Montrer que f n'est pas diagonalisable.
Indication : On raisonne par l'absurde.
- 16°) Dans cette question, on cherche une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est simple (mais pas diagonale). Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) \neq 0$.
a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
b) Montrer que $(f(u), f^2(u))$ est libre.
c) Justifier que $(f(u), f^2(u))$ est une base de $\text{Im}(f)$.
d) Montrer qu'il existe une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 telle que la matrice de f dans \mathcal{C} est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

À l'entrée d'un immeuble, on trouve le digicode ci-contre. Pour ouvrir la porte, il faut composer un code de 6 symboles, composé d'une série de chiffres suivie d'une série de lettres.

Toute réponse où l'on se contente d'énumérer les possibilités ne sera pas prise en compte.

On ne demande pas de simplification ou d'évaluation numérique des résultats.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
A	B	C

- 1°) Dans cette question, on suppose qu'un code est composé de quatre chiffres (avec répétitions autorisées), suivis de deux lettres distinctes.
a) Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1 des codes possibles.
b) Déterminer le nombre de codes où le chiffre 1 est utilisé au moins une fois.
c) Déterminer le nombre de codes où 3 chiffres exactement sont utilisés (par exemple : 1219BC).
- 2°) Dans cette question, on suppose qu'un code est composé de trois chiffres deux à deux distincts, suivis de trois lettres (les répétitions des lettres sont autorisées).
a) Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2 des codes possibles.
b) Déterminer le nombre de codes pour lesquels les trois chiffres sont de même parité.
c) Déterminer le nombre de codes pour lesquels les trois chiffres sont dans l'ordre décroissant.
- 3°) Dans cette question, on considère que les répétitions sont autorisées pour les chiffres et pour les lettres, et qu'un code est composé de 6 symboles : une série de chiffres (au moins un chiffre) suivis d'une série de lettres (au moins une lettre).
a) Exprimer à l'aide d'une somme le nombre total de codes possibles.
b) Simplifier cette somme.

Exercice 3

Partie 1 : Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

- 1°) Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
- 2°) Montrer que φ est linéaire.
- 3°) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
- 4°) L'application f est-elle bijective ?
- 5°) Déterminer une base de $\text{Ker} \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker} \varphi$?
- 6°) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Partie 2 : Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note \mathcal{B}' la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3) \text{ où } P_1 = 1, P_2 = -2X + 1, P_3 = 6X^2 - 6X + 1.$$

- 7°) Justifier que la famille \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 8°) Écrire la matrice D de f dans la base \mathcal{B}' .
- 9°) Écrire la matrice de passage Q de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et calculer l'inverse de Q .
- 10°) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
- 11°) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
- 12°) En déduire que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$