TD 16. Dimension finie.

Exercice 1. a) $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (0,1,4)$, $u_3 = (1,0,-2)$, $u_4 = (-5,16,24)$ forment-ils une famille libre ?

b) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,4)$, $v_3 = (1,0,-2)$ forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

c) Soient $a = (-3,1,4,-3)$, $b = (-1,7,-8,7)$, et $c = (11,-7,-10,7)$. Existe-il un vecteur d de $\mathbb{R}^4$ tel que (a,b,c,d) soit une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2. (Quelques méthodes pour étudier l'indépendance linéaire d'une famille de fonctions) Montrer, dans chaque cas, que la famille est libre. On précisera, pour chaque exemple, dans quel espace de fonctions on se place.

1°) Valeur en un point : Etudier la famille $(\cos, \sin, x \mapsto \sin(2x))$.

2°) Etude asymptotique : Etudier $(\exp, \ln, \mathrm{id})$.

3°) Utilisation d'un DL : Etudier $(\sin, \cos, \exp)$.

4°) Utilisation d'un polynôme : Etudier $(f_0, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto e^{kx}$ pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$.

Déduire de la dernière question que $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 3. Montrer que les ensembles F suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie, et déterminer leur dimension :

1°) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+2z+t = 0\}$.

2°) $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = 0\}$.

3°) $\mathrm{Vect}(f,g,h,k)$ où $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto e^x$, $h : x \mapsto e^{x+1}$ et $k : x \mapsto x$.

4°) $\mathrm{Vect}(u,v,w)$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$, $w_n = 4^n$.

5°) $\{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \ / \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$ où $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto x \ln x$, $f_4 : x \mapsto x^2 \ln x$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Déterminer si les familles suivantes forment une base de E :

a) $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+e_{n-1}, e_1+e_n)$.

b) $\mathcal{F}_2 = (e_1+e_2, e_2+e_3, \cdots, e_{n-1}+e_n)$.

c) $\mathcal{F}_3 = (e_1+e_2, e_2+e_3, \cdots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1)$.

Exercice 5. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que $B = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (Indication : pour montrer qu'elle est libre, on fera une récurrence pour montrer que les λ_i sont nuls).

Exercice 6. On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z = 0\}$ et $G = \{(2a-b, a+b, -b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$, en donner des bases. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

b) Soit $D = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Compléter D en un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Soit E un ev de dimension finie n, et H, H' deux hyperplans de E distincts.

a) Montrer que $\dim(H+H') \geq n-1$, puis que $\dim(H+H') = n$.

b) En déduire que $\dim(H \cap H') = n-2$.

Exercice 8. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ par : $f(e_1) = e_1 + 2e_3$; $f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3$; $f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3$.

a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ (on en donnera des bases).

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$ (on dit que f est nilpotent d'indice 3). Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E.

Exercice 10. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 + 1)P' - (2X - \alpha)P$.

a) Calculer $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$.

b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) On suppose $\alpha = 0$. Donner une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ et une base de $\operatorname{Im} \varphi$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11. Soit $n \geq 2$ et f_n l'application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par :
$\forall\, P \in \mathbb{C}_n[X],\ f_n(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) a) Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, déterminer le degré de $f_n(X^k)$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f_n = \mathbb{C}_{n-2}[X]$, puis en déduire $\operatorname{Ker} f_n$.

3) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X). \end{array}$

C'est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Justifier que f est surjectif mais non injectif.

4) Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant $f_n(P) = Q$ et $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XP' + P = Q$ (Indication : introduire un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$).

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \iff f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$.
Montrer que : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 15. (Quelques résultats sur les hyperplans)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, avec $n \geq 2$.

1) Soit H un hyperplan de E et $a \in E$ tel que $a \notin H$. Montrer que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$.

2) Soit H un sev de E. Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

3) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ si et seulement si f et g sont proportionnelles.