TD 3. Nouvelles fonctions usuelles.

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2. Soient a et x deux réels.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kx)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kx)$.

Exercice 3. Résoudre $\operatorname{ch}(x) = 2$.

Exercice 4. 1) (Une formule de trigonométrie hyperbolique) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$.
2) (Application) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 5. Sans les dériver, étudier les fonctions suivantes, et tracer leurs courbes représentatives :
$f \ : \ x \longmapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$; $\quad g \ : \ x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$; $\quad h \ : \ x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan(x))$.

Exercice 6. On s'intéresse à la fonction f définie par : $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

- **1°)** Déterminer le domaine de définition D de f.
- **2°)** Soit $x \in D$. Comment poser θ pour avoir $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$?
  Exprimer alors $f(x)$ en fonction de θ.
- **3°)** À l'aide de l'expression trouvée précédemment, simplifier f.

Exercice 7. On s'intéresse à la fonction f définie par : $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, et son domaine de dérivabilité.
- b) Calculer f'.
- c) En déduire une expression simple de f.
- d) Retrouver ce résultat par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $2\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} x$.
b) $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$.

Exercice 10. On considère l'équation : (E) : $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$.

- **1°)** Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.
- **2°)** La déterminer.

Exercice 11. Donner les domaines de définition, de dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions :
$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.
Que peut-on en déduire ?