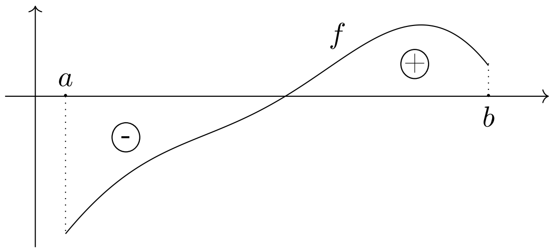
Chapitre 5. Primitives.

Prérequis de Terminale sur la notion d'intégrale

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, f $\boxed{\text{continue}}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a et b des éléments de I, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est "définie" provisoirement de la manière suivante :

- Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique sous la courbe représentative de f :



- Si $a = b$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le nom de la variable d'intégration est muet : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = ...$

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'intégrale est définie en passant par les parties réelle et imaginaire : c.f. ch 4.

Il y a quatre propriétés de base pour l'intégrale :

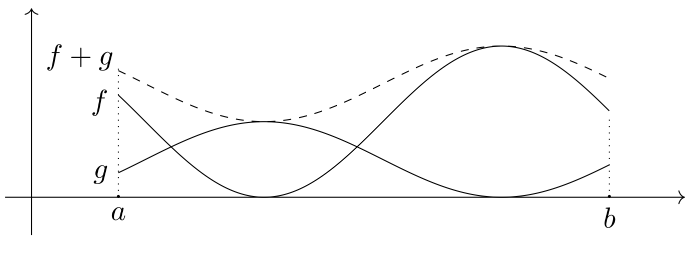
Proposition :

Linéarité

Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et des fonctions f et g continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x \ = \ \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ + \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Encore valable pour $a > b$ et des fonctions continues sur $[b, a]$.



Proposition :

Positivité
Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et une fonction f continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.}$$

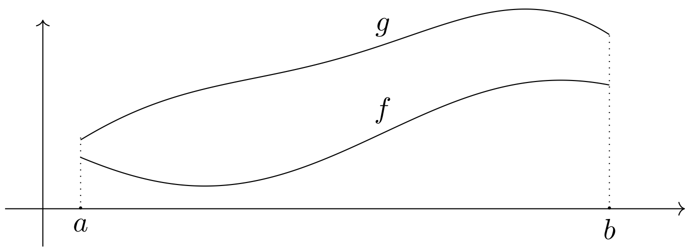
⚠ faux si $a > b$!

Proposition :

Croissance
Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et des fonctions f et g continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

⚠ faux si $a > b$!



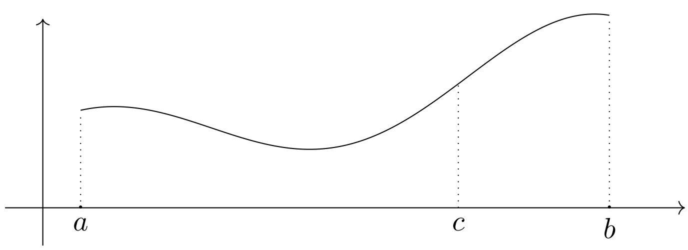
Proposition :

- **Relation de Chasles**

Soient a, b et c des réels tels que $a \leq c \leq b$, et une fonction f continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

C'est encore valable dès que les trois intégrales existent, i.e. f continue sur le segment formé par a et b, sur le segment formé par a et c et par le segment formé par c et b.



Nouvel outil pour montrer des inégalités

Avec la propriété de croissance de l'intégrale ; par exemple, partons du fait que : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$:

Remarque : justification de l'existence d'une intégrale

Parfois, on vous demandera de justifier qu'une intégrale existe. Il y a deux points fréquemment oubliés :

- Bien dire que la fonction sous l'intégrale est continue...
- et ce, sur tout le segment formé par les deux bornes !

Par exemple, justifions que pour tout $x \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ existe :

1 Généralités sur les primitives, lien primitive-intégrale

1.a Définition des primitives

Définition :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f\,:\,D \to \mathbb{K}$.

On dit que $F\,:\,D \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur D si

Exemples :

- La fonction $-\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\sin$, donc une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ est $-\cos$.
- Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est
- **À connaître** : $f : x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

  Autrement dit,

  Démonstration 1

Proposition :

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors :

- L'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto F(x)+C$, avec $C \in \mathbb{K}$ constante.
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$,
  il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration 2

En particulier, losqu'on fixe $x_0 \in I$ et qu'on sait que f a des primitives sur I, alors on peut affirmer qu'il y en a une et une seule qui s'annule en x_0.

⚠ Il peut ne pas y avoir de primitives : certaines fonctions définies sur $\mathbb{R}$ n'admettent pas de primitives.
⚠ On ne dit jamais "la" primitive mais "une" primitive. En effet, sur un intervalle : s'il existe une primitive, alors il en existe une infinité et toutes les primitives sont égales à une constante près.
⚠ La proposition n'est plus valable si on n'est pas sur un intervalle.
Par exemple, voici deux primitives de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

- $F : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- $G : x \mapsto$

Pourtant, F et G ne sont pas égales à une constante près : $G(x) - F(x) =$

Méthode : "primitiver une égalité"
Complétons : pour une fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dérivable,

$$\forall x \in]-1, 1[, \ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff$$

$$\iff$$

1.b Primitives usuelles

À partir des dérivées "usuelles", on tire des primitives "usuelles", à parfaitement connaître : c.f. fiche.
Exemples :

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{5 + 3\cos x}}$.

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de tan.

1.c Existence de primitives pour les fonctions continues

Théorème :

(Théorème fondamental de l'analyse)
Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $a \in I$.

Autrement dit,

Conséquence : $\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ continue sur un intervalle } I \text{ admet des primitives sur } I}$

Exemples :

- Nous avions défini la fonction ln comme $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}$

  autrement dit :

- Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Méthode
Lorsqu'on vous demande de calculer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle :

- Ou bien c'est direct (c.f. fiches primitives usuelles)
- Ou bien on fixe une constante a dans I, et on calcule une intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$.
  Le choix du $a \in I$ importe peu : si on prend un $a \in I$ différent, on aura simplement une constante différente à la fin du calcul. Pour cette raison, on trouve parfois l'écriture $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
  On trouve aussi $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, à éviter.

2 Outils pour calculer une intégrale

2.a Calcul direct à l'aide d'une primitive

En conséquence du théorème fondamental de l'analyse :
Corollaire :

Soit f une fonction continue sur I et a, b des éléments de I.
Alors, en notant F une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f(t)dt =$$

Démonstration 3

Exemples :

$$I_1 = \int_a^b e^{2x}\,\mathrm{d}x \text{ où } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad I_2 = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathrm{d}v \quad I_6 = \int_0^3 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad I_7 = \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

✎ **Démonstration** 4

Retenir la "technique de l'apparition-disparition" dans les derniers exemples qui permet de simplifier beaucoup de situations (cela peut être $-1+1$, $-2+2$, $-x+x$...).

2.b Intégration Par Parties (IPP)

Définition :

Soir $f : D \to \mathbb{K}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si f est dérivable sur D et si f' est continue sur D.

Exemples :

Remarque : Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors toute primitive de f sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En effet :

Théorème :

Soit I un intervalle, et a, b des éléments de I. Soient f, g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

✎ **Démonstration** 5

Exemples :

- Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t$.
- Les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

✎ **Démonstration** 6

⚠ Les phrases suivantes n'ont pas le même sens et sont insuffisantes :
"Les primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $x \mapsto x\ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$"
"Les fonctions de la forme $x \mapsto x\ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$ sont des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$"

Autres manières de le dire :
L'ensemble des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\{x \mapsto x\ln x - x + C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$
⚠ Ne pas écrire : $\{x\ln x - x + C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$

F primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^* \iff \exists\, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = x\ln(x) - x + C$
⚠ Ne pas écrire : F primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^* \iff F(x) = x\ln(x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}$

2.c Changement de variable

Théorème :

Soient I et J des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$, et α, β des éléments de J.

Démonstration 7

Cette formule complète est à connaître, elle sert dans certains exercices.
Sur les calculs d'intégrale ou de primitive, on a des moyens "simples" pour l'appliquer. Pour calculer une intégrale I, on l'identifie soit au membre de gauche de l'égalité, soit au membre de droite de l'égalité.

Exemples :

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t}{1+4t^4}\,\mathrm{d}t \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Démonstration 8

Ainsi, retenir qu'on écrit formellement :

- On pose $x = \varphi(t)$; la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
- On a $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$.
- Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$;
  Si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$.

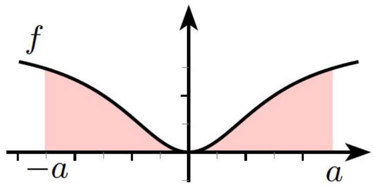
2.d Conséquences du changement de variable

Proposition :

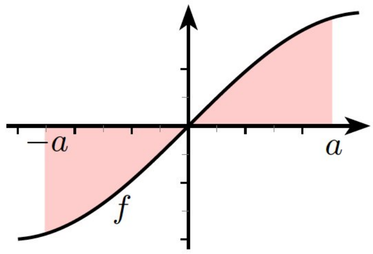
Pour f continue et $a \in \mathbb{R}$:

- Si f est paire,

  $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x =$



- Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x =$

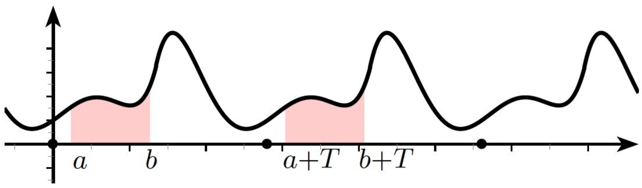


Démonstration 9

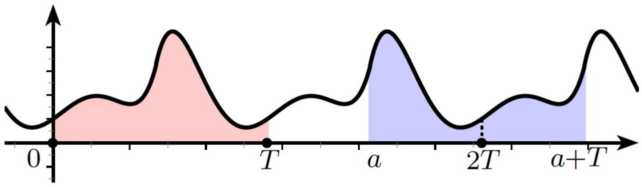
Proposition :

Si f est périodique de période $T > 0$,

- $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x =$



- $\underbrace{\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{intégrale de } f \text{ sur...}} =$



Démonstration 10

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(3t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

3 Des exemples à savoir traiter

3.a $\boxed{\int_a^b e^{\alpha x}\cos(\omega x),\ \int_a^b e^{\alpha x}\sin(\omega x)}$

Il y a deux méthodes, à connaître : double intégration par parties ou passage par les complexes (plus rapide).

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{3t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration 11

3.b $\boxed{\int_a^b P(x)\cos(\omega x),\ \int_a^b P(x)\sin(\omega x),\ \int_a^b P(x)e^{\omega x}}$ ... avec P polynôme

On effectue des intégrations par parties successives pour se ramener à un polynôme de degré de plus en plus petit, jusqu'à une constante.

Exemple : Déterminer les primitives de $x \mapsto x^2\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 12

3.c Primitives de quelques fractions rationnelles particulières

Une fraction rationnelle est une expression de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec P et Q des polynômes.

Cherchons une primitive F de f (sur I intervalle à préciser), dans quelques cas particuliers :

3.c.i $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x-a}}$ avec $a \in \mathbb{R}$

3.c.ii $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 1$

Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$:

$f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^3}$:

Plus généralement, si $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$ avec $n \neq 1$:

3.c.iii $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}}$ **avec** $a \neq 0$**,** a**,** b**,** c **réels**

Méthode : il faut déterminer si le polynôme ax^2+bx+c a des racines réelles ou non. On peut par exemple calculer son discriminant.

- Si $\Delta = 0$, on a une unique racine x_0, et $f(x) = \dfrac{cste}{(x-x_0)^2}$, on est ramené au cas précédent.
- Si $\Delta > 0$, on a des racines réelles distinctes x_1 et x_2, et on est ramené à $\boxed{f(x) = \dfrac{cste}{(x-x_1)(x-x_2)}}$

  On "décompose en éléments simples", i.e. on trouve des constantes a et b telles que :

  $$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2} \qquad \text{pour tout } x \text{ différent de } x_1 \text{ et } x_2.$$

  Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$; $g(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

  Démonstration 13

- Si $\Delta < 0$:
  — Un cas particulier : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}}$ avec $\alpha > 0$

  — Si on n'est pas dans ce cas particulier, on s'y ramène en mettant $\boxed{ax^2+bx+c \text{ sous forme canonique}}$.
  Méthode :
  Factoriser par a, puis de voir les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début d'une identité remarquable ;
  On obtient la forme $a\left(X^2 + cste^2\right)$, factoriser encore pour avoir $\lambda\left(Y^2+1\right)$ avec λ cste.

  Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+8}$.

  Démonstration 14

3.d Des pistes pour trouver un changement de variable "qui marche"

On souhaite calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
À maîtriser :

- Si $f(x)$ est un $\boxed{\text{polynôme en cos, sin}}$: on peut $\boxed{\text{linéariser}}$.
  Exemples : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$; $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
  Démonstration 15

- Cependant, de façon plus générale avec un $\boxed{\text{polynôme ou une fraction rationnelle en cos, sin, tan}}$, il y a souvent un $\boxed{\text{changement de variable naturel}}$ parmi :

$$\begin{array}{ccc}
u = \cos(x) & u = \sin(x) & u = \tan x \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x
\end{array}$$

  Par exemple, dans l'intégrale I_2 précédente :

  Démonstration 16

  Exemple : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$.
  Démonstration 17

Pour aller plus loin :

- Si $f(x)$ ne fait intervenir que des e^x, e^{-x}, e^{2x}... (pas de x seul ou d'autres fonctions), poser $u = e^x$ (ou $u = e^{-x}$...)

- Si $f(x)$ ne fait intervenir que x et $\sqrt{ax+b}$, poser $u = \sqrt{ax+b}$

- Si $f(x)$ ne fait intervenir que x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$:
  Exemple vu : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
  — On met ax^2+bx+c sous forme canonique, en voyant ax^2+bx comme le début d'un carré $a(x+cste)^2$.
  On trouvera toujours l'une des trois formes canoniques suivantes :

$$\lambda(1-X^2) \quad ; \quad \lambda(1+X^2) \quad ; \quad \lambda(X^2-1) \qquad \text{avec } \lambda > 0$$

  — Selon le cas, on pose $X = \cos u$ ou $X = \sin u$ ou $X = \operatorname{sh} u$ ou $X = \operatorname{ch} u$...
  Le but étant d'utiliser la relation $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ou $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ pour obtenir $\sqrt{(truc)^2}$ qui se simplifie...

Plan du cours