

Chapitre 1.B. Premières fonctions usuelles.

1 Fonctions polynomiales

Par exemple, $x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 7$ est une fonction polynomiale¹.

Plus généralement, on appelle fonction polynomiale réelle toute fonction de la forme

où $n \in \mathbb{N}$ et où les a_i sont des réels, appelés coefficients.

On admet² que "deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients", c'est-à-dire :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \iff$$

On dit qu'un réel λ est racine de $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ si $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n = 0$.

C'est équivalent à la possibilité de mettre $(x - \lambda)$ en facteur dans $f(x)$, i.e. à :

À savoir faire : factorisation d'un polynôme de degré 3 à l'aide d'une racine évidente

Factoriser $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

 **Démonstration 1**

Lorsque f est de la forme $x \mapsto a_1x + a_0$, il s'agit plus précisément d'une fonction affine.

2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissances

2.a Fonction logarithme népérien

Définition :

On appelle logarithme népérien la fonction suivante :

Proposition :

- \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.
- \ln est strictement croissante.
- $\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0 ; \quad \forall x \in]1, +\infty[, \ln(x) > 0$.

 **Démonstration 2**

1. notion différente de celle de polynôme, qui est plus générale ; c.f. second semestre.
2. provisoirement !

Proposition : Propriété fondamentale

⚠ Démonstration 3

⚠ Avant de transformer $\ln(ab)$, assurez-vous que a et b sont strictement positifs (ils pourraient être tous les deux strictement négatifs, et alors la propriété est grossièrement fausse).

Corollaire :

- $\forall a > 0, \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

⚠ Démonstration 4

Proposition : Limites

- | | | |
|--|--|---|
| • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$ | • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} =$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x =$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x =$ | • $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} =$ |

Graphe de \ln :



Définition :

On appelle logarithme décimal et on note \log_{10} la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

On appelle logarithme en base 2 et on note \log_2 la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

De manière générale, on peut définir le logarithme en base t (avec $t > 0$), il s'agit de la fonction \ln multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(t)}$. On a donc des propriétés similaires à celles de \ln , en particulier $\log_2(1) = \log_{10}(1) = 0$, $\log_t(ab) = \log_t(a) + \log_t(b)$, pour a, b dans \mathbb{R}_+^* ...

Par construction, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_2(2) = 1$, et, mieux : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^n) = n$, $\log_2(2^n) = n$.

2.b Fonction exponentielle

Définition :

La fonction \ln est continue et strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $\ln(\mathbb{R}_+^*)$, i.e. de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

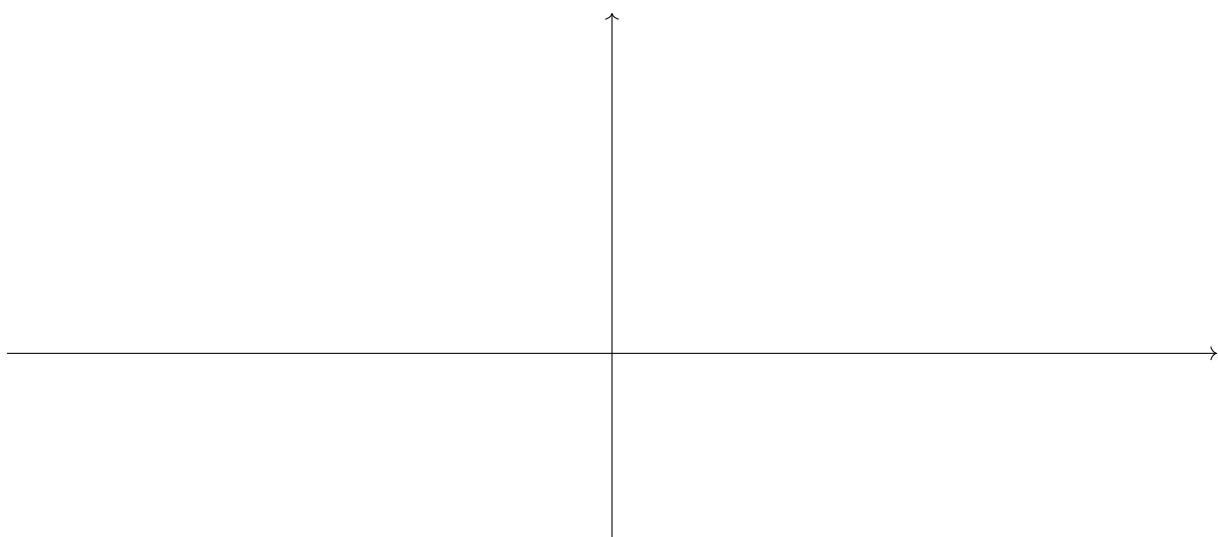
Sa réciproque est appelée exponentielle et notée \exp .

On a donc $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Conséquence fondamentale :

$$\forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \ln x \iff x = \exp(y).$$

Les graphes de \exp et \ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



Proposition :

- \exp est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.
- \exp est strictement croissante.
- $\forall x \in]-\infty, 0[, \exp(x) < 1$; $\forall x \in]0, +\infty[, \exp(x) > 1$.



Démonstration 5

Proposition :

(Propriété fondamentale)



Démonstration 6

Corollaire :

- $\forall a \in \mathbb{R}, \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(na) = (\exp(a))^n$.



Démonstration 7

Proposition : Limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} =$

2.c Fonctions puissances

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la puissance α pour un réel strictement positif de la façon suivante :

Remarques :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve la notion de puissance connue.
- De même si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$:
- Avec cette définition, la propriété de \ln vis-à-vis de la puissance se généralise au cas $\alpha \in \mathbb{R}$: Pour tout $x > 0$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Proposition :

Soient x et y des réels strictement positifs, α, β des réels.

- $x^0 = 1, x^1 = x$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$



Démonstration 8

Proposition :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha: x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$



Démonstration 9

Allure des graphes :



Puissance $\frac{1}{n}$:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$.

Comme pour tout $x > 0$, $(x^{\frac{1}{n}})^n = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est en fait la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$ (qui réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^*).

Exemples : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x}$, noté \sqrt{x} .

$$\sqrt[3]{8} =$$

Prolongement de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

- Par convention, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[0]{0} = 0$.
- Pour n impair (uniquement), la fonction $f : x \mapsto x^n$ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (exo!). La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ peut donc être définie sur \mathbb{R} comme réciproque de $f : x \mapsto x^n$. Par exemple, $\sqrt[3]{-8} =$

Remarque : notation e^x pour $\exp(x)$

On pose $e = \exp(1)$ (environ 2,72), de sorte que

Alors, par définition de la puissance,

2.d Croissances comparées

Proposition :

Soient α et β deux réels tels que

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x ^\beta = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\beta e^{\alpha x} = 0$ |
|--|--|

3 Fonctions trigonométriques

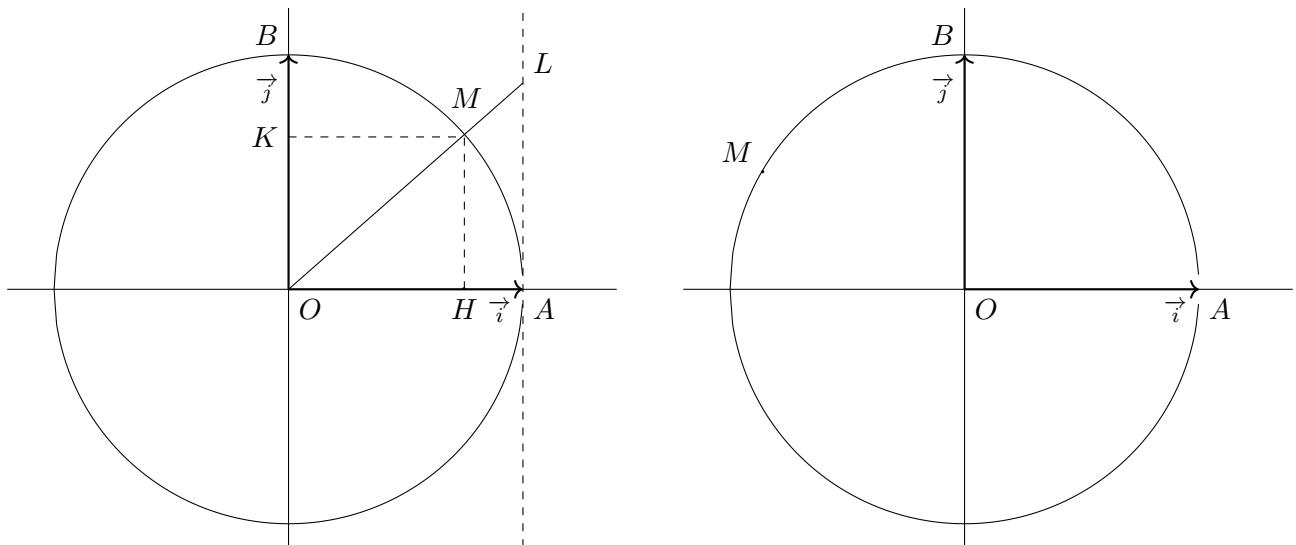
3.a Définitions, propriétés de base

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ vaut x .

On a (en mesure algébrique) : $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$, $\tan(x) = \overline{AL}$ (si $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$)



Proposition :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
-
-

**Démonstration 10**

Les angles x et $x + 2\pi$ correspondent au même point M donc : sin, cos et tan sont

3.b Valeurs d'annulation, conditions d'égalité

Rappel : $y = x[Q]$ signifie :

- Valeurs d'annulation de cos :

$$\cos(x) = 0 \iff$$
$$\iff$$

Version plus concise : $\cos(x) = 0 \iff$

- Valeurs d'annulation de sin :

$$\sin(x) = 0 \iff$$
$$\iff$$

Version plus concise : $\sin(x) = 0 \iff$

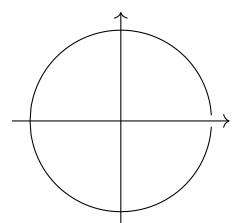
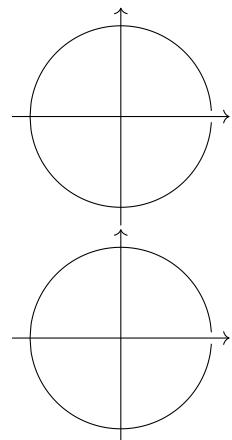
- Valeurs d'annulation de tan :

- Conditions d'égalité :

$$\cos x = \cos y \iff$$

$$\tan x = \tan y \iff$$

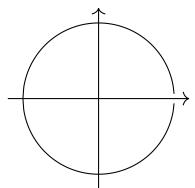
$$\sin x = \sin y \iff$$



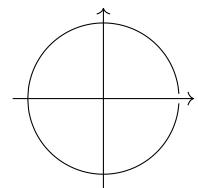
3.c Relations élémentaires

Sous réserve de définition :

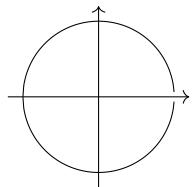
$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \\ \sin(-x) &= \\ \tan(-x) &= \end{aligned}$$



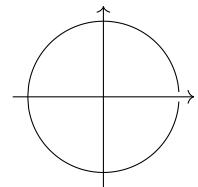
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \end{aligned}$$



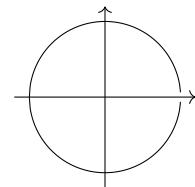
$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= \\ \sin(\pi - x) &= \\ \tan(\pi - x) &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \end{aligned}$$

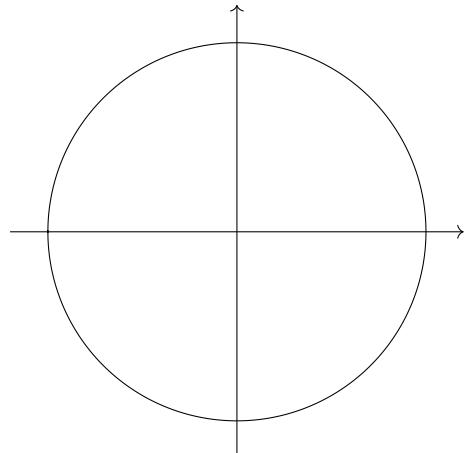


$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= \\ \sin(\pi + x) &= \\ \tan(\pi + x) &= \end{aligned}$$



3.d Valeurs particulières à connaître

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					



3.e Dérivées et graphes

Proposition :

$$(\text{Une limite de référence}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Démonstration 11

Proposition :

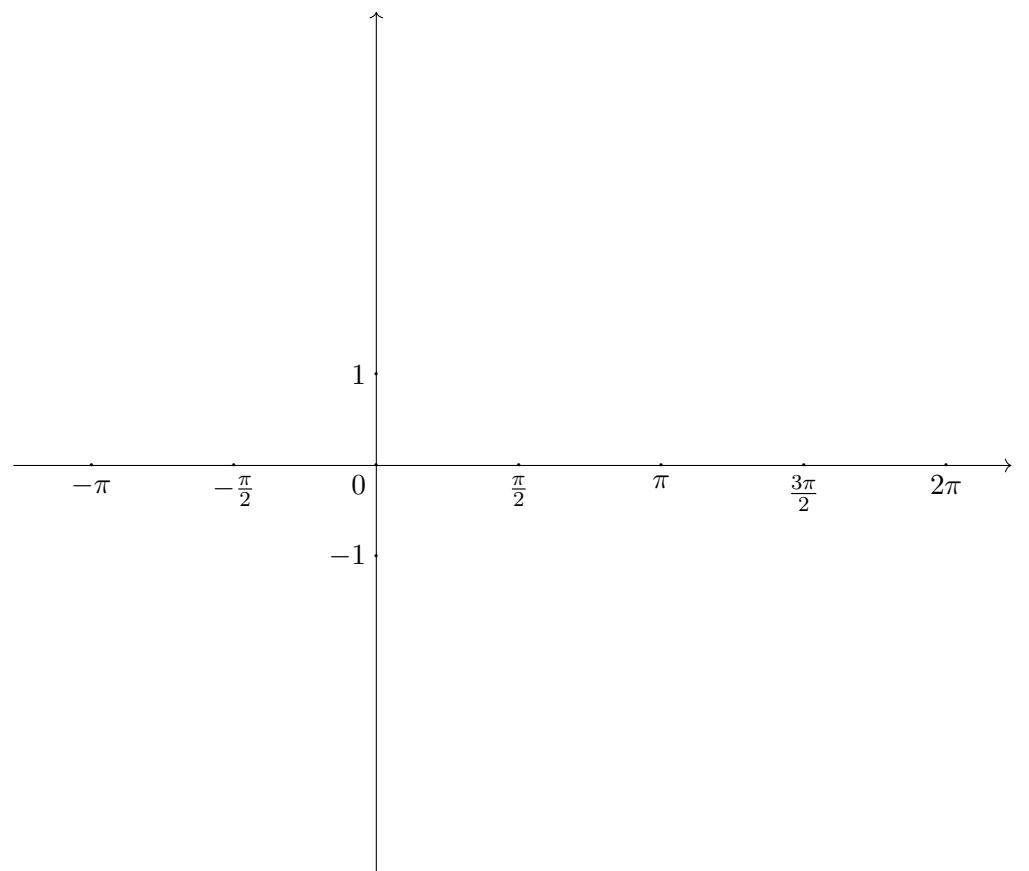
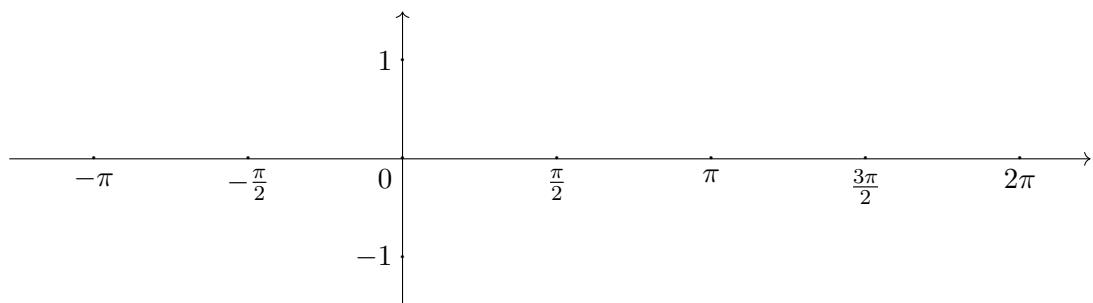
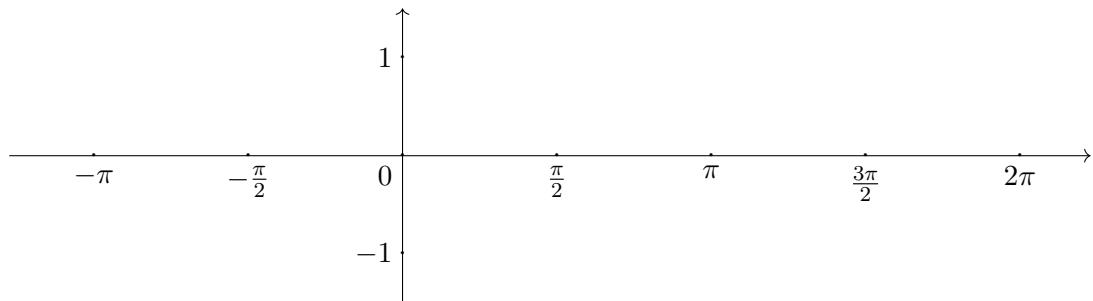
cos, sin, tan sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et :



Démonstration 12

Proposition :

(Parités et périodicités)



3.f Formules trigonométriques

(Sous réserve de définition - attention aux tangentes !)

Celles à connaître par cœur

Formules d'addition

$$\cos(a + b) =$$

$$\cos(a - b) =$$

$$\tan(a + b) =$$

$$\sin(a + b) =$$

$$\sin(a - b) =$$

$$\tan(a - b) =$$

Formules de duplication

$$\cos(2x) =$$

$$=$$

$$=$$

$$\sin(2x) =$$

$$\tan(2x) =$$

On tire des formules de $\cos(2x)$ les importantes formules de linéarisation suivantes :

$$\cos^2(x) =$$

$$\sin^2(x) =$$



Démonstration 13

Celles à savoir retrouver

Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))\end{aligned}$$

Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$



Démonstration 14

Celles hors programme

Expressions en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, sous réserve de définition,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$



Démonstration 15

Plan du cours

1	Fonctions polynomiales	1
2	Fonctions logarithme, exponentielle, puissances	1
2.a	Fonction logarithme népérien	1
2.b	Fonction exponentielle	4
2.c	Fonctions puissances	5
2.d	Croissances comparées	7
3	Fonctions trigonométriques	7
3.a	Définitions, propriétés de base	7
3.b	Valeurs d'annulation, conditions d'égalité	8
3.c	Relations élémentaires	9
3.d	Valeurs particulières à connaître	9
3.e	Dérivées et graphes	9
3.f	Formules trigonométriques	11