Ch 25 - Séries numériques - démonstrations non faites en classe.

Proposition :

> On ne modifie pas la <u>nature</u> (convergente/divergente) d'une série $\sum u_n$ lorsqu'on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n).

Soit (u_n) une suite, et soit (v_n) une suite obtenue à partir de (u_n) en modifiant seulement un nombre fini de termes. Nécessairement, il existe un rang n_0 à partir duquel les suites coïncident :

$$\forall\, k \geq n_0,\ u_k = v_k$$

On peut supposer $n_0 > 0$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n la somme partielle d'indice n associée à $\sum u_n$, et T_n la somme partielle d'indice n associée à $\sum v_n$.
Pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{array}{rcl} S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k & + & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k \\ & & || \\ T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k & + & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k \end{array}$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, $T_n - S_n = M$ où $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ est une constante.
Ainsi (T_n) et (S_n) sont égales à une constante près à partir du rang n_0, donc (T_n) converge si et seulement si (S_n) converge.
Autrement dit, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

□

Théorème :

> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $\boxed{\text{positives}}$, et si $\boxed{u_n = o(v_n)}$ ou $\boxed{u_n = O(v_n)}$, alors :
> - $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge
> - $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites positives, et que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$.
Ainse, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente vers 0 ou bornée ; dans tous les cas, elle est majorée. Il existe un réel M qu'on peut supposer strictement positif tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

Comme (v_n) est positive, ainsi que (u_n), on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq M v_n$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum M v_n$ aussi, donc, par le 1er théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum M v_n$ diverge ; comme $M \neq 0$, on en tire que $\sum v_n$ diverge aussi.

$\square$

Théorème :

(Théorème d'équivalence)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $\boxed{\text{positives}}$, et si $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, autrement dit :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$
$$\sum u_n \text{ diverge} \iff \sum v_n \text{ diverge}$$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient des suites positives et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1, donc elle est bornée. Donc $u_n = O(v_n)$. Par le théorème précédent :

$\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge (et $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge).

Mais on a également $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, donc on a, en inversant les rôles :

$\sum u_n$ converge $\implies \sum v_n$ converge (et $\sum v_n$ diverge $\implies \sum u_n$ diverge).

Ainsi on a bien :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

(et $\sum u_n$ diverge $\iff \sum v_n$ diverge, mais cela s'obtient aussi comme conséquence).

$\square$

Théorème :

On s'intéresse à la série $\sum f(n)$ où :

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \quad \boxed{\text{positive, continue, décroissante}}$$

Alors :

$$\text{la série } \sum f(n) \text{ converge} \iff \text{la suite } \left(\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

  $$f(k) \geq f(t) \geq f(k+1) \text{ car } f \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Par croissance de l'intégrale sur le segment $[k, k+1]$:

  $$\int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t$$

  Comme $f(k)$ et $f(k+1)$ sont des constantes vis-à-vis de t et qu'on intègre par rapport à t :

  $$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \geq f(k+1)$$

- Prenons maintenant $n \geq 1$, on va sommer les inégalités obtenues :
  de $k = 0$ à n pour la première et de $k = 0$ à $n - 1$ pour la deuxième :

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \quad \geq \quad \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \quad \geq \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

  $*$ Tout à gauche, c'est S_n ;

  $*$ Tout à droite, par le changement d'indice $j = k + 1$, c'est
  $$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{j=1}^{n} f(j) = S_n - f(0)\,;$$

  $*$ Et les sommes d'intégrales se simplifient grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} f(t)\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{et de même } \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$

  Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \;\geq\; \displaystyle\int_{0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \;+\; f(0) \;\geq\; S_n$.
  D'où, en rassemblant :

$$\boxed{\int_{0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \quad \leq \quad S_n \quad \leq \quad \int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t + f(0)}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + f(0)}$.
Comme (S_n) est la suite des sommes partielles associée à une série à termes positifs (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq 0$), la suite (S_n) est croissante.
Par ailleurs, grâce à la relation de Chasles, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$, et cette quantité est positive puisque f est positive et que $n \leq n + 1$. Ainsi la suite (I_n) est croissante également.

- Supposons que $\sum f(n)$ converge, i.e. que (S_n) converge. Donc (S_n) est majorée :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n \leq M.$$

  Avec l'après l'encadrement ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $I_n \leq S_{n-1} \leq M$.
  Puisque (I_n) est croissante, l'inégalité $I_n \leq M$ valable pour $n \geq 2$ est même valable pour $n \geq 0$. La suite (I_n) est croissante et majorée, donc elle converge !

- Supposons maintenant que (I_n) converge. Elle est donc majorée :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \leq M.$$

  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq M + f(0)$. De même, puisque (S_n) est croissante, l'inégalité $S_n \leq M + f(0)$ valable pour $n \geq 1$ est même valable pour $n \geq 0$. La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge, ce qui signifie que la série $\sum f(n)$ converge.

$\square$

Théorème :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

- Cas réel
  On suppose que (u_n) est une suite réelle et que $\sum |u_n|$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition :
  — $|u_n|$ vaut u_n quand $u_n \geq 0$, autrement dit quand $\max(u_n, 0) = u_n$.
  Remarquons qu'on a alors, comme $-u_n \leq 0$, $\max(-u_n, 0) = 0$.
  — $|u_n|$ vaut $-u_n$ quand $u_n \leq 0$, autrement dit quand $\max(-u_n, 0) = -u_n$.
  Remarquons qu'on a alors, comme $u_n \leq 0$, $\max(u_n, 0) = 0$.
  Ainsi, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- \max(-u_n, 0)$, on a :
  $$|u_n| = u_n^+ + u_n^-$$
  Donc, comme (u_n^+) et (u_n^-) sont positives, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.
  Comme $\sum |u_n|$ converge, par théorème de majoration, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
  Or, on peut également constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (il suffit de faire à nouveau les cas $u_n \leq 0$ et $u_n \geq 0$).
  Comme $\sum u_n^+$ et $\sum -u_n^-$ convergent, on a donc $\sum u_n$ convergente.
- Cas complexe
  On suppose que (u_n) est une suite complexe et que $\sum |u_n|$ converge.
  D'après une inégalité vue au chapitre 4 (au moment de l'inégalité triangulaire) :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq |\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$$
  Par le théorème de majoration, on obtient que les séries $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$ convergent.
  Comme $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont des suites réelles, on peut se servir du cas réel et conclure que les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.
  Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}(u_n) \ + \ i\mathrm{Im}(u_n)$, on peut conclure que $\sum u_n$ converge.

$\square$