TD 2. Logique, raisonnements, calculs algébriques.

Exercice 1. 1) Dans chaque cas, préciser si la proposition est vraie ou fausse, et donner sa négation.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in [1, +\infty[\Longrightarrow x^2 \geq x$

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y \Longleftrightarrow x^2 = y^2$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0)$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*,\quad x = 0$.

e) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy > 0$.

f) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0$.

2) Donner la négation des phrases suivantes :

a) S'il pleut alors je prends mon parapluie.

b) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.

c) Un été, il a plu tous les jours en Bretagne.

Exercice 2. Traduire formellement les propositions suivantes, et dire si elles sont vraies ou fausses :

a) Pour être multiple de 6, il est nécessaire d'être multiple de 3.

b) Pour être multiple de 6, il est suffisant d'être multiple de 3.

c) Pour que $x + 2 \geq 3$, il faut que x soit positif ou nul.

d) Pour que $x + 2 \geq 3$, il suffit que $x \geq 2$.

e) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

f) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

g) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

Exercice 3. Écrire en langage formel les propositions suivantes (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

a) f n'est pas la fonction nulle

b) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

c) f est décroissante

d) f n'est pas croissante

e) f présente un minimum

f) f n'est pas majorée

Exercice 4. Soit E un ensemble non vide, et f fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Exprimer en français la signification des assertions suivantes :

a) $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C$

b) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

c) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x \neq y$

d) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (x = y \text{ ou } y = z \text{ ou } z = x)$

Exercice 5. Soient A et B des réels. Montrer :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ A \leq B + \varepsilon) \Longrightarrow A \leq B.$$

Exercice 6. Soit I et J des intervalles, et $f : I \to J$ une fonction bijective. Montrer que si f est strictement croissante, alors f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(*)\ :\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

a) Soit f une fonction vérifiant $(*)$. Montrer que $f(0) = 1$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Conclure.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n!$

Exercice 9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que cette suite est strictement croissante.

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 \in]0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(u_k)^k}{n^n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1]$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Simplifier : $A = (n+2)! - 2(n!)$; $B = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!}$; $C = \dfrac{n!}{(n+4)!}$.

b) Écrire à l'aide de factorielles :
$A = 2n(2n-2)(2n-4)\dots 4\times 2$; $B = 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n+1)$.

Exercice 12. 1) Calculer les sommes suivantes (avec x, q réels, et $1 \leq p \leq n$) :

$$A = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \quad ; \quad B = \sum_{k=p}^{n} q^k \quad ; \quad C = \sum_{j=p}^{n}(2j+1) \quad ; \quad D = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad ; \quad E = \sum_{k=1}^{n} k(k!)$$

2) Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera tels que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
En déduire $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 13.

a) Développer $(k+1)^3 - k^3$ pour tout entier k. Retrouver $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sous forme factorisée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Faire un raisonnement similaire pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{3^i 4^j}{5^{i+j}} \quad ; \quad B = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1} \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}\right) ; \quad D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
(Indication : télescopage...)

Exercice 16. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}$.

b) On pose $S_p = \displaystyle\sum_{\substack{k \text{ entier tel que} \\ 0\leq 2k\leq n}} \binom{n}{2k}$ et $S_i = \displaystyle\sum_{\substack{k \text{ entier tel que} \\ 0\leq 2k+1\leq n}} \binom{n}{2k+1}$.

Calculer $S_p + S_i$ et $S_p - S_i$, en déduire la valeur de ces sommes.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$ par deux méthodes différentes.

1) Démontrer que pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$. En déduire S.

2) On note $f : x \mapsto (1+x)^n$. Retrouver l'expression de S à l'aide de la fonction f (on calculera $f'(x)$ de deux façons différentes).