Chapitre 2. Logique, raisonnements, calculs algébriques.

1 Logique

1.a Propositions mathématiques

- En mathématiques, on travaille sur des "propositions", c'est-à-dire des énoncés que l'on déclare vrais ou faux, ou que l'on cherche à déclarer vrais ou faux.
  Par exemple :
  "4 est un entier pair"
  "Bonjour, ça va ?"
  "$\exists\, x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 2$"

- On crée des propositions plus élaborées à l'aide des connecteurs logiques :

- Certaines propositions mathématiques sont déclarées vraies a priori ; on les appelle alors des <u>axiomes</u>.
  Exemple : Les axiomes d'Euclide, 300ans avant JC, fondent la géométrie dite "euclidienne" (la géométrie habituelle).
  Le plus célèbre axiome se reformule ainsi :
  "Étant donné une droite D et un point A, on peut mener une et une seule droite parallèle à D et passant par A."

  Autre exemple d'axiome dont vous vous servez tous les jours :

- Toutes les autres propositions mathématiques qui ne sont pas des axiomes doivent résulter d'une démonstration.

1.b Conjonction (et), disjonction (ou), négation (non)

Soient P et Q des propositions.
On définit la proposition non(P) de la façon suivante : non(P) est vraie si P est fausse, et elle est fausse si P est vraie.
Cela se résume par une "table de vérité" :

P	non(P)

On définit aussi "ou" et "et" par une table de vérité :

P	Q	P et Q	P ou Q

⚠ P ou Q est vraie si

Exercice : Exprimer "P ou exclusif Q" :

Théorème :

- non(non(P)) équivaut à

  .

- Lois de Morgan :
  non(P et Q) équivaut à
  non(P ou Q) équivaut à

Illustration des lois de Morgan :

- négation de "ce chat est gentil et mignon" :
- "Aimes-tu la glace à la vanille ou la glace au chocolat ?"
  "– Non,

⚠ Dans une phrase comportant un "ou" et un "et", les parenthèses sont indispensables !
Par exemple, soit $x \in \mathbb{R}$.
La proposition "($x < 0$ ou $x > 1$) et $x > \frac{1}{2}$" signifie
La proposition "$x < 0$ ou ($x > 1$ et $x > \frac{1}{2}$)" signifie
Ainsi, un énoncé de la forme "P ou Q et R" sans parenthèses n'a aucun sens.

1.c Implication

Commençons par un exemple ; nous sommes d'accord pour dire que la proposition suivante est vraie :

$$x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$$

Cela signifie que :
Par contre, lorsque l'affirmation $P : x \geq 2$ est fausse, on ne peut rien dire de l'affirmation $Q : x^2 \geq 4$, qui est par exemple vraie pour $x = -3$ mais fausse pour $x = 0$.
Autrement dit, lorsque P est fausse, que Q soit vraie ou fausse ne contredit pas le fait que $P \Longrightarrow Q$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$

Le seul cas où "$P \Longrightarrow Q$" est faux est lorsque .
"$P \Longrightarrow Q$" se lit aussi "Si P alors Q".

⚠ Lorsqu'on écrit "$P \Longrightarrow Q$", on ne dit pas que P est vraie, et encore moins que Q est vraie. Cela signifie "Si P alors Q" ; on n'est pas en train de d'affirmer que la condition P est vraie.
Constater la différence de sens entre les phrases (1) et (2) dans les exemples suivants :

- Alice tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
  Bob peut dire à Alice : "Si ta carte n'est pas rouge, alors c'est un pique ou un trèfle".
  Autrement dit, en notant P : "la carte n'est pas rouge" et Q : "la carte est un pique ou un trèfle", il est vrai de dire :

  $$(1)\ P \Longrightarrow Q$$

  Ce qui est différent de (2) : "P donc Q", qui signifierait :

  (2) Ta carte n'est pas rouge donc c'est un pique ou un trèfle

- Imaginons que dans un exercice, on considère une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

  $$(1) \quad f' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ décroissante}$$

  $$(2) \quad \text{On a } f' \leq 0, \text{ donc } f \text{ est décroissante.}$$

  Écrire (2) pour la fonction exp est faux, mais (1) : "$\exp' \leq 0 \Longrightarrow \exp$ décroissante" est vrai !

Exemples :
Que pensez-vous des implications suivantes ?
6 est impair $\Longrightarrow \pi$ est un entier
6 est impair $\Longrightarrow \sin(0) = 0$
Moralité :

⚠ Ne pas se tromper dans les liens de causalité.

Exemple : notons P : " il y a des nuages " et Q : " il pleut ".

Ainsi, pour nier une proposition de la forme $P \Longrightarrow Q$,

Théorème :

non($P \Longrightarrow Q$) équivaut à

Définition :

- La <u>réciproque</u> de $P \Longrightarrow Q$ est
- La <u>contraposée</u> de $P \Longrightarrow Q$ est

Exemple : la contraposée de " il pleut $\Longrightarrow$ il y a des nuages " est :

Théorème :

Une implication équivaut à sa contraposée :
$P \Longrightarrow Q$ équivaut à $non(Q) \Longrightarrow non(P)$.

✎ **Démonstration 1**

⚠ Par contre, une implication n'équivaut pas à sa réciproque !

Reprenons l'implication "$x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$, qui est vraie.

Sa réciproque est

Méthode pour montrer $P \Longrightarrow Q$:

- Soit on y arrive "directement" en écrivant une série de $\Longrightarrow$:
  Par exemple, montrons que $x \geq 1 \Longrightarrow 1 + x^2 \geq 2$.

- Soit on doit faire un raisonnement plus subtil (le plus souvent) ; on rédige ainsi :
  —
  —
  —
  —

Par exemple, montrons que, pour k entier, k impair $\Longrightarrow k^3$ impair.

Vocabulaire :

Lorsque $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on dit que :

- est une condition suffisante de
- est une condition nécessaire de
- Pour que soit vraie, il faut que soit vraie
- Pour que soit vraie, il suffit que soit vraie

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer le lien d'implication entre la proposition "$\sin\theta > 0$" et la proposition "$\theta \in]0, \pi[$" de plusieurs manières :

1.d Équivalence

On définit la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ comme $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$:

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$

Ainsi " $P \Longleftrightarrow Q$ " est vraie est lorsque .

" $P \Longleftrightarrow Q$ " se lit aussi " P si et seulement si Q ", ou encore " P est une condition nécessaire et suffisante de Q "

1.e Quantificateurs

On travaille très souvent avec des propositions qui dépendent d'une variable x élément d'un certain ensemble E. On écrit alors $P(x)$ et on parle de prédicat. Il peut aussi y avoir plusieurs variables.

C'est avec des prédicats qu'on utilise les quantificateurs :

Exemple :

La proposition " $\forall x \in E,\ P(x)$ " est vraie si pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie.

La proposition " $\exists x \in E,\ P(x)$ " est vraie si il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie.

La proposition " $\exists !\, x \in E,\ P(x)$ " est vraie s'il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ est vraie.

Exemple :

Méthode pour montrer une proposition de la forme " $\forall\, x \in E,\ P(x)$ "

—

—

—

—

Méthode pour montrer une proposition de la forme " $\exists\, x \in E,\ P(x)$ "

C'est moins "balisé". On doit prouver l'existence d'un x qui marche.

Le plus souvent, au cours du raisonnement, on "trouve" ou on "construit" un x qui marche.

On écrira donc, au propre :

—

—

—

Mais parfois, on prouve l'existence d'un x qui marche sans le trouver (preuves non constructives). Par exemple, le théorème de la bijection permet de montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x^6 + x^4 + x^2 = 1$, mais cela ne donne pas sa valeur.

Exemples :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$.

Montrer (1) : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ puis (2) : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

2) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \exists\, p \in \mathbb{N},\quad p$ pair et $p > n$.

Démonstration 2

3) (décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle) Montrer que :

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\},\quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

Démonstration 3

Utilisation d'une proposition commençant par $\forall$ ou $\exists$

- Lorsqu'on sait que " $\forall\, x \in E,\quad P(x)$ " est vraie, on peut alors utiliser $P(x)$ avec n'importe quel x ; et souvent, on choisit judicieusement un x particulier en fonction du but que l'on veut atteindre.

  Exemple : Soient deux réels a et b donnés. On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2+b. \end{array}$

  On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Montrer que : $a = b = 0$.

  Démonstration 4

- Lorsqu'on sait que " $\exists\, x \in E,\quad P(x)$ " est vraie, on écrit une phrase du type " Prenons x dans E tel que $P(x)$ est vraie " pour introduire un x qui marche. A priori, on ne sait rien d'autre sur cet x.

Exemple : Soient a et b deux entiers naturels. On suppose :

$$(\exists x \in \mathbb{N}, a = bx) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, b = ax)$$

Montrer que $a = b$.

Démonstration 5

Permutation des quantificateurs

Si on échange l'ordre des $\forall$ et des $\exists$, cela change souvent complètement le sens de la proposition !

Exemples :

On a montré que " $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad p$ pair et $p > n$. ".

Échangeons : $\exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p$ pair et $p > n$.".

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \leq M$.

Échangeons : $\forall x \in A, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad x \leq M$.

Par contre, on peut toujours échanger deux $\forall$ successifs ou deux $\exists$ successifs :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}^-, \quad x \geq y \quad \text{équivaut à} \quad \forall y \in \mathbb{R}^-, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x \geq y.$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad (x + iy)^2 = -1 \quad \text{équivaut à} \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad (x + iy)^2 = -1.$$

⚠ dans le même ordre d'idée :

" $\forall x \in E,\ P(x)$ ou $Q(x)$ " n'équivaut pas à " $(\forall x \in E,\ P(x))$ ou $(\forall x \in E,\ Q(x))$ ".

Donnons une illustration :

Négation d'une proposition avec $\forall$ ou $\exists$

- Quelle est la négation de "Tous les chemins mènent à Rome" ?

  Autrement dit, non($\forall\, x \in E,\ P(x)$) équivaut à

  Exemple : La proposition "$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ " est-elle vraie ?

- Quelle est la négation de "$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$" ?

  Autrement dit, non($\exists\, x \in E,\ P(x)$) équivaut à

- Conséquence : pour obtenir la négation d'une proposition avec des $\forall$ et/ou des $\exists$,

Exemples :

- Négation de $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon)$:

- On dit que f est la fonction nulle sur D si

  Comment s'écrit "f n'est pas la fonction nulle sur D" ?
  Comparons avec "f ne s'annule pas sur D" :

2 Quelques méthodes de raisonnement

2.a Démontrer une implication par contraposée

On rappelle qu'une implication $P \Longrightarrow Q$ équivaut à sa contraposée non(Q) $\Longrightarrow$ non(P).

Exemple : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair.

Démonstration 6

2.b Raisonnement par l'absurde

On souhaite montrer P.
Pour cela, on suppose non(P) et on aboutit à quelque chose de faux (d'absurde) pour pouvoir conclure que non(P) est faux. Par le principe du tiers exclu, P est donc vraie.
L'absurdité sera quelque chose de faux dans l'absolu (on peut tomber sur $0 = 1$ par exemple), ou bien une contradiction des hypothèses de départ. Il arrive qu'on contredise l'hypothèse non(P) par exemple !

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration 7

2.c Démontrer une équivalence $P \iff Q$

Soit on raisonne par équivalence, soit on raisonne par double implication (on montre $P \implies Q$ et $Q \implies P$).

Exemple : Soit m un réel. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = mx + 1$.
Montrer que : f garde un signe constant $\iff m = 0$.

✎ **Démonstration 8**

2.d Montrer une existence-unicité : $\exists !\ x \in E,\ P(x)$

Il y a deux principales méthodes à connaître :

- **Méthode classique**
  — On montre à part l'existence : $\exists x \in E,\ P(x)$.
  — Pour avoir l'unicité, on suppose que l'on a deux éléments x et y de E tels que $P(x)$ et $P(y)$ soient vrais.
  Par un raisonnement, on aboutit à $x = y$.

  Exemple : montrons par cette méthode que $\exists !\ x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x^2 = 4$.

  ✎ **Démonstration 9**

- **Méthode par analyse-synthèse**
  — **Étape 1 (Analyse)**
  On $\boxed{\text{suppose}}$ qu'il existe un x vérifiant $P(x)$, et on considère un tel x.
  ... raisonnement...
  On obtient une expression précise de x, unique.
  Cette étape donne l'unicité de x sous condition d'existence

  Image : Une personne est retrouvée morte. Dans l'étape 1, on suppose que c'est un assassinat et on prouve qu'il n'y a alors qu'un seul suspect.

  — **Étape 2 (Synthèse)**
  (On ne suppose plus rien, les hypothèses faites lors de l'étape 1 ne tiennent plus).
  On $\boxed{\text{pose}}$ x tel qu'on vient de le trouver.
  On vérifie que $P(x)$ est vraie pour ce x.
  On obtient une expression précise de x, unique.
  Cette étape donne l'existence de x.

  Image : Dans l'étape 2, on étudie l'unique suspect trouvé à l'étape précédente et on prouve qu'il a tué la personne[1].

  Exemple 1 Prouver que l'équation (E) : $x = \sqrt{2-x}$ a une unique solution, que l'on déterminera.

  ✎ **Démonstration 10**

1. C'était donc bien un meurtre !

Exemple 2 (très classique, à connaître et à savoir montrer)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Il existe un unique couple (g, h) de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$$

Démonstration 11

Remarque : En vérité, les raisonnements par analyse-synthèse servent dans des situations plus générales que les existence-unicité :

- Parfois, dans l'analyse, on trouvera plus d'une seule expression pour le x recherché (deux, trois, une infinité...). [2] Il suffit alors, dans la synthèse, de faire la vérification pour tous ces candidats. Certains seront peut-être éliminés, mais il se peut qu'il y ait plusieurs solutions [3].
- Parfois, dans la synthèse, on constatera que le x obtenu à l'analyse n'est pas solution [4]. La conclusion est alors qu'il n'existe pas de solution.

2.e Raisonnements par récurrence

- **Récurrence simple**

Image : Dans une rue "infinie", des voitures sont garées sur des places numérotées 0, 1, 2, ... *jusqu'à l'infini. Si on montre que la première voiture est rouge, et que chaque éventuelle voiture rouge est nécessairement suivie d'une voiture rouge, alors on peut conclure que toutes les voitures sont rouges.*
Traduction mathématique :

Principe de récurrence :
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier n.
Si on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$,
alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Avec l'image de l'enquête criminelle, cela correspond au cas où on a plusieurs suspects.
3. c'est-à-dire plusieurs coupables.
4. Autrement dit, il ne s'agissait pas d'un meurtre, il n'y a aucun tueur.

Rédaction d'une récurrence

- Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " ... ".
- **Initialisation** :
  ... *Raisonnement* ...
  Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** :
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$ fixé.
  ... *Raisonnement* ...
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$.

✎ **Démonstration 12**

⚠

— *Bien définir la propriété $\mathcal{P}(n)$.*
D'une part, parfois, ce n'est pas si facile ! (c.f. plus tard dans l'année)
D'autre part, il y a l'erreur classique d'écrire : Soit $\mathcal{P}(n)$: "$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = q^n u_0$".
Cela n'a pas de sens car alors $\mathcal{P}(n)$ ne dépend pas de n .

— *Ne pas oublier l'initialisation, même si c'est simple.*
Par exemple, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $n = n+1$ est hériditaire, mais on ne peut pas l'initialiser.

— *Ne pas écrire que l'on suppose $\mathcal{P}(n)$ pour tout n dans l'hérédité.*
Il n'y aurait plus rien à montrer !

— *Dans l'hérédité, ne pas supposer ce qu'on veut montrer, $\mathcal{P}(n+1)$.*

— *Ne pas oublier la conclusion.*
C'est une étape bien distincte de l'hérédité !

- <u>**Récurrence double**</u>

Image : Si on montre que les voitures n° 0 et n° 1 sont rouges et que, si l'on a deux voitures rouges successives, alors celle qui les suit est également rouge, alors on peut conclure que toutes les voitures sont rouges.

Rédaction d'une récurrence double

- Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " ... ".
- **Initialisation** :

  ... *Raisonnement* ...

  Donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.

  ... *Raisonnement* ...

  Donc $\boxed{\mathcal{P}(1) \text{ est vraie}}$.
- **Hérédité** :

  $\boxed{\text{On suppose } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraies pour un } n \in \mathbb{N} \text{ fixé.}}$

  ... *Raisonnement* ...

  Donc $\boxed{\mathcal{P}(n+2) \text{ est vraie}}$.
- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Démonstration 13

- **Récurrence forte**

Image : Si on montre que la voiture n° 0 est rouge et que, si toutes les voitures qui précèdent une voiture donnée sont rouges, alors la voiture considérée est également rouge, alors on peut conclure que toutes les voitures sont rouges.

Rédaction d'une récurrence forte

- Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " ... ".
- **Initialisation** :

  ... *Raisonnement* ...

  Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** :

  $\boxed{\text{Soit } n \geq n_0, \text{ on suppose } \mathcal{P}(k) \text{ vraie pour tout } n_0 \leq k \leq n.}$

  ... *Raisonnement* ...

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple :

Rappel : un nombre premier est un entier naturel supérieur à 2, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Démontrer que tout entier supérieur ou égal à 2 possède au moins un diviseur premier.

✎ **Démonstration 14**

3 Factorielles et coefficients binomiaux

3.a Factorielles

Définition :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! =$

Par convention, on pose $0! =$

En particulier : $(n+1)! =$

3.b Coefficients binomiaux

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on pose

$$\binom{n}{k} =$$

Pour les autres couples (n, k) d'entiers (si $k < 0$ ou $k > n$, ou si $n < 0$), on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$.

Proposition :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} =$
- Pour tout $n \geq 2$, $\dbinom{n}{2} =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\dbinom{n}{n-p} =$
- Pour tout $n \geq 2$ et $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $\dbinom{n}{p} =$

✎ **Démonstration 15**

Remarque : Dans un ensemble E à n éléments, $\dbinom{n}{k}$ est le nombre de parties de E à k éléments.

4 Sommes

4.a Définition

Plutôt que d'écrire $1+2+\cdots+n$ et $u_0+u_1+\cdots+u_N$, on écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} u_j$.

Définition :

Soient p, n des entiers tels que $p \leq n$, et (u_k) une suite de nombres.
$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k$ désigne la somme $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n$.

Vocabulaire. u_k est le terme général, et k est l'indice, p et n sont les bornes.

Important. L'indice est "muet", c'est-à-dire que son nom n'a pas d'importance [5]. Autrement dit :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{i=p}^{n} u_i = \sum_{j=p}^{n} u_j = \sum_{r=p}^{n} u_r = \ldots$$

Cas d'un terme général constant. Il suffit de compter le nombre de termes dans la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} a = \qquad ; \sum_{k=0}^{n} a = \qquad\qquad ; \sum_{k=p}^{n} a =$$

Remarque :
De façon générale, si I est un ensemble d'indices, on note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ la somme des nombres u_i pour i variant dans I.
Par exemple, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} u_i$.
On peut aussi mettre une condition : $\displaystyle\sum_{k\in\{0,\ldots,2n\},\ k \text{ pair}} (k+1)u_k = u_0+3u_2+5u_4+\cdots+(2n+1)u_{2n}$.
Par convention, lorsque I est vide, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = 0$.

4.b Propriétés élémentaires

Proposition :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n} \lambda\, u_k &= \\ \sum_{k=p}^{n} (u_k+v_k) &= \\ \text{si } p \leq q < n,\ \sum_{k=p}^{n} u_k &= \end{aligned}$$

5. tant qu'il ne s'agit pas d'un symbole utilisé dans le terme général ou fixé par ailleurs.

4.c Changement d'indice

Voici des exemples de changements d'indice courants :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} k!\ u_{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

Conseils :

- Écrire la définition du nouvel indice i en fonction de l'ancien indice k, puis k en fonction de i : pour savoir ce qu'il faut mettre dans u_k.
- Pour les bornes, se demander : "quand k vaut p (la borne inférieure), que vaut i ?" et "quand k vaut n (la borne supérieure), que vaut i ?"

Remarquez que, comme l'indice est muet :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

⚠ On ne peut faire n'importe quoi comme changement d'indice : il ne faut pas qu'on ait supprimé ou ajouté de termes par rapport à la somme initiale. Ainsi, le changement d'indice $i = 2k$ n'est pas possible, il donnerait par exemple :

$$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2m} = \sum_{k=0}^{m} x^{2k} =$$

4.d Télescopage

Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) =$$

Mais aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) =$$

Ne pas hésiter à écrire la sommes avec … pour voir ce qui se simplifie et ce qui reste.

4.e Sommes classiques à connaître

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

Démonstration 16

Exemples :

- Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{k-1}}$

- Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :

Les deux propositions suivantes sont valables pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$.

Proposition :

(Formule du binôme) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n =$$

$$=$$

Démonstration 17

Exemples à connaître par cœur aussi : $(a+b)^3 =$

$(a-b)^n =$

$(a-b)^3 =$

Proposition :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n \quad =$$

$$=$$

Démonstration 18

Exemples à connaître par cœur aussi : $a^3 - b^3 =$

$a^3 + b^3 =$

De façon générale, $a^{2k+1} + b^{2k+1} =$

4.f Sommes doubles

On considère le tableau de nombres suivant (i variant de 1 à n et j variant de 1 à p) :

La somme de tous les éléments du tableau est notée $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} u_{i,j}$.

Cette somme peut s'obtenir en sommant chacune des lignes puis en sommant ces sommes intermédiaires ; ou bien en sommant chacune des colonnes puis en sommant ces sommes intermédiaires :

Proposition :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} u_{i,j} =$$

Remarque : lorsqu'on fait le produit de deux sommes simples, c'est une somme double que l'on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_p + a_2b_1 + \quad \ldots \quad + a_nb_p = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_i\, b_j$$

Sommes triangulaires

On considère le tableau suivant (j variant de 1 à n et i variant de 1 à j) :

La somme de tous les éléments du tableau est notée $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} u_{i,j}$. Cette somme peut s'obtenir en sommant chacune des lignes puis en sommant ces sommes intermédiaires, ou bien en sommant chacune des colonnes puis en sommant ces sommes intermédiaires :

Proposition :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} u_{i,j} &= \\ \\ &= \end{aligned}$$

On peut aussi considérer $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} u_{i,j} =$

Exemple : pour $n\geq 2$, calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$.

Démonstration 19

4.g Sommes et inégalités

On sait déjà que si on a des réels a_1, a_2, b_1, b_2 vérifiant $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, alors $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$. Cette propriété se généralise par récurrence à une somme d'un nombre quelconque de réels :

Proposition :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tous réels $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$,

$$\text{Si } \forall\, k\in\{1,\dots,n\},\ a_k\leq b_k, \quad \text{alors } \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Cela se généralise bien sûr à des sommes indexées sur un autre ensemble que $\{1,\dots n\}$.

Exemple : On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}-S_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Démonstration 20

L'inégalité triangulaire (pour la valeur absolue quand on manipule des réels, mais aussi pour le module quand on manipule des complexes) se généralise à une somme de n termes :

Proposition :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et des réels (ou des complexes) $x_1,\dots,x_n$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

5 Produits

On note de même $\prod_{k=1}^{n} u_k$ le produit $u_1.u_2.\dots.u_n$.

Par exemple : $\prod_{k=1}^{4} k^2 = 1.4.9.16$; $\prod_{k=1}^{n} a =$ (a constante).

La factorielle s'exprime alors de la façon suivante :

Les propriétés (élémentaires, changements d'indice, télescopage...) sont similaires à celles des sommes avec quelques adaptations. En particulier :

Proposition :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda\, u_k =$$

$$\prod_{k=1}^{n} (u_k\, v_k) =$$

$$\text{si } 1 \leq q < n, \quad \prod_{k=1}^{n} u_k =$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) =$$

$$\text{si } \forall\, k,\ u_k > 0, \quad \ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) =$$

$$\text{Si pour tout } k \in \{1, \dots, n\},\ 0 \leq u_k \leq v_k \quad , \quad \text{alors} \quad 0 \leq \prod_{k=1}^{n} u_k \leq \prod_{k=1}^{n} v_k$$

De façon plus générale, comme pour les sommes, si I est un ensemble d'indices, on a la notation $\prod_{i\in I} u_i$.

Par convention, lorsque I est vide, $\prod_{i\in I} u_i = 1$.

Plan du cours