Devoir maison 3.

À rendre le lundi 3 novembre 2025

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_n) : \ z^n + z + 1 = 0$$

1°) Le cas $n = 2$

Déterminer les solutions de (E_2).

Vérifier qu'elles ont toutes un module strictement inférieur à 2.

2°) Le cas $n = 3$

a) On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 + t + 1 \end{array}$.

À l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E_3) possède une et une seule solution réelle.

On la note r.

Vérifier que $r \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

b) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E_3) dans $\mathbb{C}$ (*on ne cherchera pas à les calculer*).

On pose $P(z) = z^3 + z + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - r)(z - z_1)(z - z_2)$$

En déduire que : $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = -\frac{1}{r}$.

c) Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.

En déduire en particulier que $|z_1| < 1 + |z_2|$.

d) Obtenir de même un encadrement de $|z_1 z_2|$.

e) On suppose que $|z_1| \geq 2$. Qu'en déduit-on sur $|z_2|$ par la question précédente ?

Montrer que cela conduit à une absurdité.

f) Montrer que toutes les solutions de (E_3) ont un module strictement inférieur à 2.

3°) On veut généraliser les résultats précédents à tous les entiers $n \geq 2$.

a) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit la fonction φ :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n - t - 1 \end{array}$$

Étudier la fonction φ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Quel est le signe de la fonction φ sur $[2, +\infty[$?

b) Soit n un entier ≥ 2.

Déduire de la question précédente que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'implication

$$z^n + z + 1 = 0 \implies |z| < 2$$

c) Que penser de la réciproque ? Justifiez.

Exercice 2

On note

$$(E) \qquad z^2 + (2-i)z + 2 + 2i = 0$$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) et on pose $P(z) = z^2 + (2-i)z + 2 + 2i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
On notera z_1 celle dont la partie réelle est strictement négative.

1°) Sans résoudre (E), donner, en justifiant, les valeurs de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

2°) Résoudre (E) et exprimer z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Résoudre $P(z^3) = 0$.