

Programme de la semaine 16 (du 26/01 au 01/02).

Limites de fonctions, continuité

- Notion de voisinage d'un point. Définitions d'une limite (finie/ $+\infty$ / $-\infty$) en un point a de l'intervalle I ou une extrémité de I (a fini/ $+\infty$ / $-\infty$). Limite à gauche, limite à droite, extension de la définition de la limite lorsque f est définie sur I privé de a .
- Unicité de la limite ; si f a une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a ; si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ((u_n) à valeurs dans I) alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, utilisation pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite. Opérations usuelles sur les limites.
- Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
- Théorèmes sur les fonctions monotones (existence d'une limite finie ou infinie selon la situation).
- Définition de la continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche et à droite. Prolongement par continuité en un point. Opérations.
- Théorème des valeurs intermédiaires, principe de dichotomie. Théorème de la bijection. Théorème des bornes atteintes (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

Dérivation : COURS UNIQUEMENT

Pas d'exercice sur ce thème.

- Dérivabilité en un point. Caractérisation par l'existence d'un DL1. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche et à droite en un point. Dérivabilité sur un intervalle.
- Opérations : somme, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition, réciproque.
- Dérivées d'ordre supérieur à 1. Classe \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞ . Opérations : somme, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition, réciproque, dérivées n èmes de $f + g$, $\lambda.f$, fg .

Questions de cours

Demander :

- L'UNE DES 9 DEFINITIONS DE LIMITE : limite finie, $+\infty$ ou $-\infty$ pour une fonction f en un a réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- une définition ou un énoncé du cours ;
- et l'une des démonstrations suivantes :
 - Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et si $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$: preuve dans le cas où a, b, ℓ sont finis.
 - Montrer que toute fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
 - Étude de $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ en 0 : prolongement par continuité, dérivabilité, tangente, position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Semaine suivante : Continuité, dérivation.