Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 2.

1°) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = \boxed{\operatorname{ch}(x)\exp\left(\operatorname{sh}(x)\right)}.$$

2°) f_2 est dérivable là où elle est définie (par somme, produit et quotient), et pour tout x dans son domaine de définition :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{-\sin x\,(\sin x - x\cos x) - \cos x\,(\cos x + x\sin x - 1\times\cos x)}{(\sin x - x\cos x)^2} \\ &= \boxed{\frac{-\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2}} \end{aligned}$$

3°) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_4'(x) = \boxed{4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3}$$

4°) Pour tout réel x, $2-x>0 \iff x<2$. Donc $\boxed{f_4 \text{ est définie sur }]-\infty,2[}$.
$x \mapsto 2-x$ est dérivable sur $]-\infty,2[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $]-\infty,2[$.
Par quotient ($x \mapsto x$ est dérivable sur $]-\infty,2[$), $\boxed{f_4 \text{ est dérivable sur }]-\infty,2[}$.
Pour tout $x \in]-\infty,2[$,

$$f_4'(x) = \frac{1\times\sqrt{2-x} - x\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\sqrt{2-x}^2} = \frac{2(2-x)+x}{2\sqrt{2-x}(2-x)} = \boxed{\frac{4-x}{2\sqrt{2-x}(2-x)}}$$

Autre manière de faire le calcul : en écrivant $f_4(x) = x(2-x)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 1\times(2-x)^{-\frac{1}{2}} + x\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)\times(2-x)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= (2-x)\times(2-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(2-x)+x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \boxed{\frac{4-x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

5°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$ donc $0 < e^{-x^2} \leq 1$, autrement dit $x \mapsto e^{-x^2}$ est à valeurs dans $]0,1]$.
Comme Arcsin est définie sur $[-1,1]$ qui contient $]0,1]$, $\boxed{f_5 \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout réel x, $e^{-x^2} = 1 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$.
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x^2} \in]0,1[$, et $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition.

Par ailleurs, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et donc sur $]0,1[$. Par composition, $\boxed{f_5 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_5'(x) = (-2x)e^{-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{-x^2}\right)^2}} = \boxed{\frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}}$$