

---

## TD 15. Polynômes.

---

### Equations d'inconnue un polynôme

- Exercice 1.**
- a) Déterminer tous les polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $Q^2 = XP^2$ .
  - b) Déterminer tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $(P')^2 = 4P$ .
  - c) Déterminer tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$ .

**Exercice 2.** Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que :

$$P(1) = 3, \quad P'(1) = 4, \quad P''(1) = 5, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow P^{(n)}(1) = 0.$$

### Liens entre racines et division euclidienne

**Exercice 3.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $(a, b) \in \mathbb{K}^2, a \neq b$ .

- a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .
- b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$ .
- c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $n \geq 2$ . En s'inspirant des méthodes vues aux deux questions précédentes, déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X - 2)^{2n} + (X - 1)^n + 1$  par  $(X - 1)^2(X - 2)$ .

**Exercice 4.** Soient  $n \geq 2, \theta \in \mathbb{R}$ .

Déterminer le reste dans  $\mathbb{R}[X]$  dans la division euclidienne de  $(X \sin \theta + \cos \theta)^n$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $P_n = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ .

- a) Montrer que  $P_n$  est divisible par  $(X - 1)^2$ .
- b) Simplifier  $P_n - P_{n-1}$  pour tout  $n \geq 2$ .
- b) En déduire le quotient de la division euclidienne de  $P_n$  par  $(X - 1)^2$ .

### Nombre de racines d'un polynôme

**Exercice 6.** Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que :

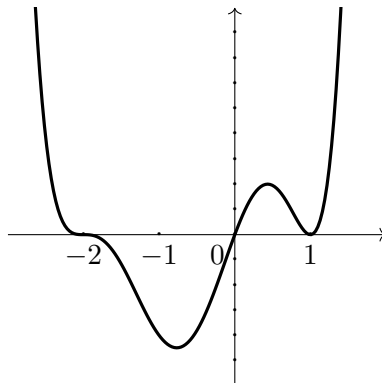
$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1 \end{cases}$$

- 1) On suppose dans cette question que  $P \in \mathbb{C}[X]$  est solution.  
Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ .
  - a) Montrer que la suite  $u$  est strictement monotone.
  - b) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = P(u_n)$ . Montrer que  $v = u$ .
  - c) En déduire  $P$ .
- 2) Conclure.

**Exercice 7.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

## Factorisation d'un polynôme

**Exercice 8.** Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{R}[X]$ , de degré 6. À partir de la courbe représentative de sa fonction polynomiale ci-dessous, déterminer  $P$  sous forme factorisée :



**Exercice 9.** Factoriser les polynômes suivants dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  :

a)  $P = X^8 + X^4 + 1$    b)  $P = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ )

**Exercice 10.** a) Soit  $P = X^3 - 16X^2 + 83X - 152$ . Factoriser  $P$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ , sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

b) Soit, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^3 + 5z^2 - 8z + \lambda = 0$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Donner une CNS sur  $\lambda$  pour que deux des racines de cette équation aient pour somme  $-1$ . Dans ce cas, résoudre l'équation.

**Exercice 11.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . On considère le polynôme  $P = (X + 1)^n - e^{2in\theta}$ .

a) Déterminer les racines de  $P$  sous forme simplifiée.

b) Factoriser  $P$ .

c) En calculant  $P(0)$ , déterminer  $A = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$ .

## Suite de polynômes

**Exercice 12.** On considère la suite de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$P_0 = 1, P_1 = 2X \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = 2XP_n - 2nP_{n-1}$$

1°) Calculer  $P_2, P_3$ .

2°) Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .

3°) Déterminer la parité de  $P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Polynômes et algèbre linéaire (premiers exercices !)

**Exercice 13.** On pose  $E = \mathbb{R}[X]$  et pour tout  $P \in E$ ,  $f(P) = P - P'$ .

1°) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2°) Déterminer son noyau. Qu'en déduit-on ?

3°) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction polynôme  $P_n$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = n! \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$ .

Vérifier que  $P_n$  est solution de l'équation différentielle :  $-y' + y = x^n$ .

4°) En déduire que  $f$  est surjective.

**Exercice 14.** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  où  $n \in \mathbb{N}$ . On pose :  $\forall P \in E, u(P) = P(1 - X)$ .

1°) Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

2°) Calculer  $u \circ u$ . Qu'en déduit-on ?

**Exercice 15.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer  $(A + I_3)^3$ .

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X + 1)^3$ . En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 16.** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = X^2 P'' + X P' - P$$

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2°) Même question avec  $g$  définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad g(P) = X^3 P'' + X^2 P' - n^2 X P$$

## Décomposition en éléments simples

**Exercice 17.** 1°) Décomposer en éléments simples  $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ .

2°) Décomposer en éléments simples  $g : x \mapsto \frac{2x^5 + 6x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 1}{x(x-1)(x+3)}$ .

3°) On admet qu'il existe d'unique réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}, \quad \frac{x^2 + x - 1}{x^2(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}.$$

Déterminer  $a, b, c, d$ .