Chapitre 16. Espaces vectoriels de dimension finie.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Familles de vecteurs

1.a Compléments sur les familles génératrices

Rappel :
Définition :

On dit qu'une famille $(x_1, x_2 \dots, x_n)$ de vecteurs de E est une famille génératrice de E si

$$E = \text{Vect}(x_1, x_2 \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_i . x_i \ / \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

c'est-à-dire :

Remarque : l'ordre des x_i n'a pas d'importance.
Exemples :

- $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ car : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (x, y) =$
- $((1, 0))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$ puisqu'il existe un vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui n'en soit pas combinaison linéaire : par exemple $(0, 1)$.
- Par contre, $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ est une autre famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (x, y) =$$

- Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n, est :
- Une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}[X]$, l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$, est :

Quelques règles à connaître :

- Si on adjoint d'autres vecteurs à une famille génératrice de E, cela reste une famille génératrice de E. Version savante : "Toute surfamille d'une famille génératrice est génératrice".
- En particulier : Si y est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$, alors

$$\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y) =$$

- Dans un Vect / dans une famille génératrice, on peut multiplier l'un des x_i, ou plusieurs, par des constantes non nulles ; par exemple :

- On peut ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres vecteurs : par exemple,

Démonstration 1

Une méthode pour savoir si une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de E :
Prendre $x \in E$, et chercher s'il existe ou non des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i.x_i$ (souvent, on se ramène à un système).
Il faut qu'il y ait au moins une solution pour tout x dans E.

1.b Familles libres, familles liées

Définition :

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si la seule combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i$ qui valle 0_E est celle où tous les λ_i sont nuls, autrement dit :

- Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée ; autrement dit, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si :

Remarque : l'ordre des x_i n'a pas d'importance.

Exemples

- $((1,0),(0,1))$ est dans $\mathbb{R}^2$ car :

- $((1,0),(0,1),(1,1))$ est dans $\mathbb{R}^2$ car :

- Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (5,-1,3)$, $v_3 = (6,-1,5)$.
  La famille (v_1, v_2, v_3) est

- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est

- Dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-ev, la famille $(1, i)$ est

Retenir les méthodes suivantes :

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée :

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre :

Exercice : On prend $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f = \cos$, $g : x \mapsto \cos(2x)$, $h : x \mapsto x$. Montrer que la famille (f, g, h) est libre.

Démonstration 2

Cas particuliers importants :

- Si l'un des x_i est nul, alors la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée :

- Cas d'une famille avec un seul vecteur (x_1) :
$$(x_1) \text{ libre } \iff$$
Car :

- Cas d'une famille avec deux vecteurs (x_1, x_2) :
$$(x_1, x_2) \text{ libre } \iff$$
Car :

⚠ Une erreur classique est de dire cela pour une famille de 3 vecteurs ou plus.
C'est faux !! On a vu par exemple qu'avec
$v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (5, -1, 3)$, $v_3 = (6, -1, 5)$,
la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre ;
pourtant, aucun vecteur n'est colinéaire à un autre !

Proposition :

- Toute famille <u>contenant</u> une famille est également
- Toute famille <u>contenue</u> dans une famille est également

Démonstration 3

Exemple : Une famille contenant en particulier deux vecteurs u et v colinéaires est

Proposition :

Soit $(x_1, \dots x_n)$ une famille libre de E. Soit $x_{n+1} \in E$.
$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ liée } \iff$$
$$\iff$$

Démonstration 4

Corollaire :

Soit $(x_1, \dots x_n)$ une famille libre de E.
Si $u \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors la famille $(x_1, \dots, x_n, u)$ est encore libre.

Proposition :

Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ une famille libre de E.
Alors en posant $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_q)$, les sev F et G sont en somme directe.

Démonstration 5

Exemple : Soient $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On pose $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $D = \text{Vect}(e_3)$. Justifier que la somme $P + D$ est directe.

Démonstration 6

Cas des familles de polynômes de degrés distincts

Proposition :

> Toute famille $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est libre.

Démonstration 7

En particulier, c'est le cas pour toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de polynômes non nuls à degrés échelonnés, c'est-à-dire si $-\infty < \deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$.

Exemples : $(X - 1, X^2 + X + 2, X^4 - X)$; $(1, X - a, (X - a)^2, (X - 3)^2, \ldots, (X - a)^n)$...

Nous avons vu que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. On peut maintenant dire qu'elle est composée de polynômes non nuls, à degrés échelonnés, donc elle est également libre...

1.c Bases

Définition :

> Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
> On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si elle est

Exemples :

- $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, on a vu que :
  $((1, 0), (0, 1))$

  $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$

  $((1, 0))$
- Plus généralement, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ définie par :

⚠ il n'y a pas unicité de la base d'un ev !
Par exemple, $((0, 1), (1, 1))$ est aussi libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$, c'en est une base.

Théorème :

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
$(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$, autrement dit :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \iff$$

Démonstration 8

Comparer avec la définition d'une famille génératrice : la seule différence est l'unicité !

Définition :

Avec les notations du théorème ci-dessus, lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Exemples :

- Les coordonnées de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont

  Les coordonnées de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $((0,1),(1,1))$ sont

- Plus généralement, dans $\mathbb{K}^n$, les coordonnées d'un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base canonique sont ce qu'on appelle communément les coordonnées du vecteur u : $(u_1, \dots, u_n)$...

- $P = (X-1)^4$ est dans $\mathbb{R}_6[X]$, qui a pour base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$.

- La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$ des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; les coordonnées d'une matrice sont simplement les coefficients de la matrice :

- Une autre base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est par exemple : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

  Démonstration 9

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.a Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition :

> Soit E un espace vectoriel.
> On dit que E est de dimension finie

Exemples :

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie car

- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie car

- $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (on dit parfois qu'il est de dimension infinie).
  Démonstration 10
  Par contre, $\mathbb{K}[X]$ admet des familles génératrices infinies (sens non vu dans ce cours) :

- On verra que l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, et l'ensemble de fonction $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (entre autres), sont des ev de dimension infinie.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On sait que $\{0_E\}$ est un sev de E, c'est donc un ev.
  Il est de dimension finie car :

2.b Extraction et complétion d'une base

Lemme :

> Soit E un espace vectoriel. On suppose que $(x_1, \ldots, x_m)$ est une famille génératrice de E, et que cette famille contient une sous-famille libre ; quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre (avec $p \leq m$).
> Alors on peut compléter $(x_1, \ldots, x_p)$ en une base de E à l'aide de vecteurs bien choisis parmi $x_{p+1}, \ldots, x_m$.

Démonstration 11

Lorsque E n'est pas réduit à $\{0_E\}$, prenons une famille génératrice finie $(x_1, \ldots, x_m)$ de E. L'un des vecteurs x_i au moins est non nul (sinon, $E = \text{Vect}(0_E, \ldots, 0_E) = \{0_E\}$). Ce vecteur non nul forme alors une sous-famille libre de $(x_1, \ldots, x_m)$. Donc le lemme s'applique : il existe donc une base de E, extraite de $(x_1, \ldots, x_m)$. En résumé :

Théorème :

> (de la base extraite)
> Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$.
> De n'importe quelle famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, de la famille génératrice $((1,0),(0,1),(1,1))$, on peut extraire

Conséquence : Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base. (Dans le cas particulier $E = \{0_E\}$, il n'y a pas de base, la seule famille génératrice (0_E) est liée...)

Théorème :

> (de la base incomplète)
> Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
> Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille libre de E.
> Soit $(v_1,\ldots,v_n)$ une famille génératrice finie de E (par exemple une base de E).
> On peut compléter la famille libre $(u_1,\ldots,u_p)$ en une base de E, à l'aide de certains vecteurs bien choisis parmi $(v_1,\ldots,v_n)$

C'est à nouveau une conséquence du lemme, en prenant $(x_1,\ldots,x_{p+n}) = (u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots,v_n)$ (c'est une famille génératrice de E car elle contient la famille génératrice $(v_1,\ldots,v_n)$).

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,1),(1,0,-1))$ est libre car
  On peut donc la compléter en une base en choisissant convenablement un ou des vecteur(s) parmi

- Dans $\mathbb{C}_2[X]$, la famille $((X-1)^2)$ est libre car
  On peut donc la compléter en une base en choisissant convenablement un ou des vecteur(s) parmi

Démonstration 12

2.c Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition :

> Soit E un espace vectoriel, possédant une famille génératrice à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.
> Alors toute famille de E possédant au moins $n+1$ vecteurs est liée ; autrement dit, toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration 13

Théorème-définition :

> - Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$.
>   Alors
>
> - Par convention, on note $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Démonstration 14

Exemples essentiels :

- $\dim \mathbb{K}^n =$ car

- $\dim \mathbb{K}_n[X] =$ car

- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$ car

- $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, admet $(1, i)$ comme base ; donc

- Soit I un intervalle et $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
  On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène $(E_1) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$.
  L'ensemble des solutions de (E_1) est un espace vectoriel de dimension 1.
- Soient a, b et c dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants $(E_2) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.
  L'ensemble des solutions de (E_2) est un espace vectoriel de dimension 2.
  ✎ **Démonstration** 15

2.d Cardinaux d'une famille libre, d'une base, d'une famille génératrice

Théorème :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (donc E n'est pas réduit à $\{0_E\}$).

a) Toute famille libre a et c'est une base si et seulement si

b) Toute famille génératrice a et c'est une base si et seulement si

✎ **Démonstration** 16

Traduction : Dans E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$:

a) Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre. Alors
et $(x_1, \ldots, x_p)$ base $\Longleftrightarrow$
Conséquence : si $p > n$ alors $(x_1, \ldots, x_p)$

b) Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille génératrice. Alors
et $(x_1, \ldots, x_m)$ base $\Longleftrightarrow$
Conséquence : si $m < n$ alors $(x_1, \ldots, x_m)$

Corollaire :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

Ainsi, pour montrer qu'une famille "qui a le bon nombre de vecteurs" est une base, il suffit de montrer, au choix, qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice !

Utilisations :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $((1,2),(3,4),(5,6))$ est

- Dans $\mathbb{R}^3$, $((1,2,1),(1,0,-1))$ est

- Dans $\mathbb{R}^2$, $((1,2),(3,4))$ ...

  -

  -

  -

Remarque : On obtient aussi que dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre a toujours moins d'éléments que n'importe quelle famille génératrice.

2.e Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel quelconque et $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de E.
Vect$(x_1,\dots,x_p)$ est un ev de dimension finie car il possède une famille génératrice finie : $(x_1,\dots,x_p)$.

Définition :

On appelle <u>rang de la famille $(x_1,\dots,x_p)$</u> l'entier $\boxed{\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p)=\dim\left(\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)\right)}$.

Cela donne une idée de "la place que prend la famille $(x_1,\dots,x_p)$".

Proposition :

$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p)\leq$
On a égalité si et seulement si

Démonstration 17

Ainsi, le rang d'une famille libre, c'est son nombre d'éléments.

3 Dimension finie et sous-espaces vectoriels

3.a Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors tout sous-espace vectoriel F de E

Démonstration 18

Proposition :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E.
$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq n$, et on a égalité si et seulement si

Démonstration 19

Vocabulaire

- Si $\dim F = 1$, on dit que F est une droite (vectorielle) de E.
  C'est équivalent à dire que
- Si $\dim F = 2$, on dit que F est un plan (vectoriel) de E.
  C'est équivalent à dire que
- On dit que F est un hyperplan de E si $\boxed{\dim(F) = \dim(E) - 1}$.

Théorème :

Soit E un ev de dimension finie$F$ et G des sev de E.
Si alors $F = G$

Démonstration 20

Ce théorème est très pratique ! !

Exemple d'utilisation :
Dans $\mathbb{C}^4$, on pose $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \ / \ x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (-2, 1, -2, 1)$ et $v = (2, -1, 0, 1)$.
Montrer que $F = G$.

Démonstration 21

3.b Somme de sous-espaces, sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Proposition :

(Formule de Grassman)
Soit E un ev de dimension finie, et F, G des sev de E.

Démonstration 22

On en tire en particulier que $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.

Cette formule sert telle quelle mais aussi pour montrer une nouvelle caractérisation très pratique de la supplémentarité :

Proposition :

Soit E un ev de dimension finie et F et G des sev de E.

$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow$$

Démonstration 23

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, 2, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Démonstration 24

Proposition :

Soit E un ev de dimension finie et F et G des sev de E.
On suppose que F et G ne sont pas réduits à $\{0_E\}$ (ce qui assure qu'ils possèdent des bases).

$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow$$

Démonstration 25

Cette proposition permet parfois de vérifier que l'on a des sev supplémentaires ; on l'utilisera si on dispose facilement de bases $\mathcal{B}_F$ de F et $\mathcal{B}_G$ de G pour lesquelles c'est rapide ou déjà su que la réunion est une base de E.

Cette proposition donne surtout, en dimension finie, une **méthode pour créer un supplémentaire** d'un sev F non réduit à $\{0\}$ donné :

- Créer une base de E adaptée au sev F, c'est-à-dire une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ forment une base de F :

- On pose alors $G =$

  G est alors un supplémentaire de F dans E !

On a montré :

Théorème :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

Exemple : Dans $E = \mathbb{C}^4$, trouver un supplémentaire de $F = \text{Vect}\left((1,2,0,1),(0,1,1,0)\right)$.

Démonstration 26

La proposition peut s'utiliser pour créer de toutes pièces des sev supplémentaires. Par exemple, la famille $(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ (sauriez-vous le justifier ?), donc $F = \text{Vect}(1, (X-2)^2, (X-2)^4)$ et $G = \text{Vect}(X-2, (X-2)^3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$.

4 Dimension finie et applications linéaires

4.a Différents modes de définition

Théorème :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
et on considère une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une famille quelconque de n vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

Autrement dit,

Démonstration 27

On savait définir les applications linéaires de la façon suivante : par exemple,

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+3y, 5x+4y, 2x) \end{array} \qquad \text{(expression analytique de } u\text{)}$$

Ce théorème nous donne un autre mode de définition d'une application linéaire : il suffit de dire qu'elle est bien linéaire et de donner l'image d'une base.

Exemple : Déterminer l'expression analytique de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $u(1,0) = (3,4,5)$ et $u(0,1) = (0,-1,2)$.

Démonstration 28

Il y a un troisième mode de définition d'une application linéaire à connaître :

Théorème :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose E de dimension finie et $E = E_1 \oplus E_2$.
Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par sa restriction à E_1 et sa restriction à E_2.

Autrement dit, se donner $u : E \to F$ linéaire, c'est équivalent à se donner $u_1 : E_1 \to F$ et $u_2 : E_2 \to F$ et à poser, pour tout $x \in E$ s'écrivant $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$:

4.b Image d'une famille par une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Vu au chapitre 14 :

Proposition :

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$; autrement dit, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition :

On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E (ainsi E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$).

- u est surjective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est
- u est injective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est
- u est bijective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est

✎ **Démonstration** 29

Remarques :
• Dans la démonstration, on a montré au passage que "l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre" :

Proposition :

Si u est injective et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F.

• Le troisième point donne une **caractérisation des isomorphismes**, très importante :

$\boxed{u \in \mathcal{L}(E, F) \text{ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de } E \text{ par } u \text{ est une base de } F}$

Exemple : Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - y + t, x + z, -x - z) \end{array}$.
Déterminer $\mathrm{Im}(u)$; u est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

✎ **Démonstration** 30

4.c Espaces vectoriels de dimension finie isomorphes

Définition :

Deux espaces vectoriels E et F sont dits <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme φ de E dans F (ou de F dans E).

Théorème :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes.
Si E est de dimension finie alors :
-
-

✎ **Démonstration** 31

Il s'agit d'un moyen très utile de montre qu'un ev est de dimension finie !

C'est ce qui va nous permettre de montrer le résultat connu sur les suites récurrentes linéaires :
Théorème :

Soient a et b des complexes et F l'ensemble des suites récurrente linéaire d'ordre 2 complexes d'équation caractéristique $(K) : r^2 = ar + b$:

$$F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$$

Alors F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
On peut en trouver une base de la manière suivante :

- Si (K) a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors

- Si (K) a une racine double r_1, alors

Démonstration 32

Pour obtenir le même résultat sur les suites récurrentes linéaires doubles réelles, on passe par $F \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 également.
La forme de ses suites est similaire dans les cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles (simples ou double), rappelons le résultat dans le cas de racines complexes conjuguées :

Si a, b réels, et si (K) a deux racines non réelles distinctes r_1 et r_2, alors ces racines sont non nulles et conjuguées l'une de l'autre ; on les écrit sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration 33

Exemple : On sait que $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, de même que $\mathbb{K}^{n+1}$. Donner un isomorphisme simple entre eux.

Démonstration 34

4.d Rang d'une application linéaire

Définition :

Soient E et F des espaces vectoriels.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{Im}u$ est de dimension finie, on définit le rang de u comme l'entier :

Proposition :

On garde les mêmes notations.

- Si F est de dimension finie p, alors $\mathrm{rg}(u) \leq p$, égalité si et seulement si
- Si E est de dimension finie n, alors $\mathrm{rg}(u) \leq n$, égalité si et seulement si

Démonstration 35

En particulier, si E et F sont de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Proposition :

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq$
- Si u est un isomorphisme alors
- Si v est un isomorphisme alors

Démonstration 36

4.e Applications linéaires entre ev de mêmes dimension

Théorème :

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $\boxed{\text{avec } \dim E = \dim F}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration 37

Corollaire :

Soit E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$, et u un endomorphisme de E.

Exemple d'application de base :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (2y + z, x + z, -x + y + z)$.
Montrer que f est un automorphisme.

Démonstration 38

⚠ Ce n'est plus vrai en dimension infinie. Considérons par exemple :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Démonstration 39

Exemple d'application classique : les polynômes d'interpolation de Lagrange
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, dont on ne connaît que les valeurs $y_0, \dots, y_n$ en $n+1$ valeurs $a_0, \dots, a_n$ distinctes deux à deux : $\forall\, i \in \{0, \dots, n\}, \quad f(a_i) = y_i$
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que P coïncide avec f en ces $n+1$ valeurs : $\forall\, i \in \{0, \dots, n\}, \quad P(a_i) = y_i$

Démonstration 40

Rappel du chapitre 10 :
Si f est une application quelconque de E dans F, avec E et F ensembles quelconques :

$$f \text{ bijective } \iff \exists\, g : F \to E,\ g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Dans ce cas, g est la réciproque de f. Si $E = F$ est un ev et que $f \in \mathcal{L}(E)$, on a donc $g \in \mathcal{L}(E)$ aussi.
Dans la démonstration, nous avions vu que :
- l'égalité $g \circ f = \mathrm{id}_E$ donne l'injectivité
- l'égalité $f \circ g = \mathrm{id}_F$ donne la surjectivité.

On en tire :
Théorème :

Soit E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f \in GL(E) \iff \begin{array}{c} f \text{ est inversible à gauche dans } \mathcal{L}(E) \\ \text{i.e. } \exists\, g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array} \iff \begin{array}{c} f \text{ est inversible à droite dans } \mathcal{L}(E) \\ \text{i.e. } \exists\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = \mathrm{id}_E \end{array}$$

4.f Théorème du rang

Lemme :

(Forme géométrique du théorème du rang)
Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.
L'application $v : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration 41

Théorème :

(Théorème du rang)
Soient E et F des espaces vectoriels, $\boxed{\text{avec } E \text{ de dimension finie}}$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration 42

Cela se réécrit :

Moralement :

⚠ Cela ne dit pas que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans le cas $F = E$! !
Ce n'est pas le cas en général.

Utilisation courante : *comment se simplifier la tâche...*
Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer une base du noyau et une base de l'image :

1°) $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x + y + 2z, 2x - y - t, 3y + 4z + t) \end{array}$

2°) $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x + y + z, x + y + z) \end{array}$

3°) $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, 2x + 3y - z) \end{array}$

4°) $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \mapsto & (x - 2y, 2x - 4y, 0, y - \frac{1}{2}x) \end{array}$

Démonstration 43

Plan du cours