Cahier de vacances de maths pour futurs PTSI.

Afin de préparer votre année de PTSI en mathématiques, mais aussi en physique-chimie et en sciences industrielles, nous vous demandons de faire les 30 exercices suivants avant la rentrée de septembre.

Il s'agit d'entraînement au calcul algébrique de base, ainsi qu'un peu de trigonométrie et de calcul de dérivées. Pour la trigonométrie et la dérivation, un formulaire vous est également fourni ; il faut arriver en PTSI en le connaissant parfaitement.

L'objectif est d'être à l'aise et efficace dès la rentrée sur les techniques de base de calcul, et pour cela, rien ne vaut l'entraînement !

Dans tous les exercices, les paramètres qui apparaissent (x, a, b, ...) sont supposés réels, et on ne s'intéressera pas à l'existence des objets manipulés (quotients, racines, ...), l'objectif étant purement technique.

On ne se servira pas de calculatrice.

Les corrections sont disponibles à la fin du document. Vérifiez le résultat final, mais comparez aussi vos étapes de calcul avec le corrigé pour voir où vous pouvez gagner en efficacité.

Bon courage et à bientôt !

Développements / factorisations

Question 1. [correction]

1°) Rappeler les identités remarquables pour $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.

2°) Développer et simplifier $(a+b+c)^2$.

Question 2. [correction]

1°) Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2°) En déduire une factorisation de a^3+b^3.

3°) Application : Factoriser $27x^3+8$.

Question 3. [correction]
Factoriser l'expression $A = x^2 - 16x - 17$

Question 4. [correction]
Factoriser, sans jamais développer, les expressions suivantes :

1°) $A = b^4 - b^2$

2°) $B = x^3 - 3x^2 + x - 3$

3°) $C = (4x-5)^2 - 9x^2$

Question 5. [correction]
Factoriser, sans jamais développer

$$A = (x-1)^2 - 4(x^2-1) - 7x + 7$$

Étudier le signe de A.

Question 6. [correction]
Factoriser, sans jamais développer, les expressions suivantes :

1°) $A = x^2 - 2x + 1 - (x-1)(2x+3)$

2°) $B = (4x^2-25)(x+2) - (x^2-4)(2x+5) + (5x+10)(2x+5)$

Quotients

Question 7. [correction]

Réduire de la manière la plus efficace possible :

$$A=\frac{7}{8}+\frac{5}{12}-\frac{4}{3}$$

$$B=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

Question 8. [correction]

Simplifier :

$$x=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\quad y=\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}},\quad z=\frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{d},\quad t=\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d}$$

Question 9. [correction]

Simplifier :

$$A=\frac{\frac{a^2}{3b}}{\frac{ac}{6b}},\qquad B=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{15}{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{15}\times\frac{5}{2}},\qquad C=\frac{6\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(4+\frac{1}{3}\right)}{12\left(5+\frac{1}{4}\right)\left(7-\frac{1}{3}\right)}$$

Question 10. [correction]

Simplifier, sans se préoccuper de l'existence :

$$A=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{1-x^2}\qquad B=\frac{x-a}{ax}+\frac{a-b}{ab}+\frac{b-x}{xb}$$

Question 11. [correction]

Simplifier :

$$A=\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}},\qquad B=\frac{2+\dfrac{2+a}{2-a}}{2-\dfrac{2+a}{2-a}}$$

Racines

Question 12. [correction]

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes :

1°) $A = (2\sqrt{5})^2$

2°) $B = \left(2\sqrt{3}\right)^4$

3°) $C = (2+\sqrt{5})^2 + (2-\sqrt{5})^2$

4°) $D = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

5°) $E = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Question 13. [correction]

Comparer $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Question 14. [correction]

Simplifier, de sorte qu'aucune racine n'apparaisse au dénominateur :

1°) $A = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

2°) $B = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Question 15. [correction]

Soit a et b deux réels strictement positifs.
Simplifier l'expression $\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} + 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ pour $x = \sqrt{ab}$

Puissances

Question 16. [correction]

Mettre sous forme irréductible : $\dfrac{14^2 \times 9^2}{3^5 \times 7}$

Question 17. [correction]

Trouver une expression plus simple valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(-1)^n} \qquad (-1)^{n+2} \qquad (-1)^{2n} \qquad (-1)^{2n+1}$$

Qu'en déduire pour $(-a)^n$ pour a réel et $n \in \mathbb{N}$?

Il faudra connaître ces résultats !

Question 18. [correction]

Mettre les nombres suivants sous la forme 2^a3^b où a et b sont entiers.

$$x = \frac{2^3 3^2}{6^{-2}3^4 2^8}, \quad y = 2^{100} + 2^{101}, \quad z = 2^{101} - 2^{100}, \quad t = 3^{15} + 3^{15}, \quad u = \frac{\left(3^2(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 2^3\right)^{-2}}$$

Question 19. [correction]

Simplifier, sans se préoccuper de l'existence :

$$A = 3x^2y^3 - y(xy)^2 \qquad B = \frac{4x^2y^3 - (xy)^2y}{x^2y^2 \times (-x)^3} \qquad C = \frac{(-a)^7 \times (-b^2c^3)^3}{-b^3c \times (-a)^5}$$

Exponentielle et logarithme

Question 20. [correction]

Exprimer les nombres suivants en utilisant seulement $\ln 2$ et/ou $\ln 3$.

1°) $A = \ln 16$

2°) $B = 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) - 3\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

3°) $C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Question 21. [correction]

Donner une écriture simplifiée de $A = \ln((2+\sqrt{3})^{20}) + \ln((2-\sqrt{3})^{20})$.

Question 22. [correction]

Écrire les nombres les plus simplement possible :

1°) $A = e^{3\ln 2}$

2°) $B = \ln(\sqrt{e})$

3°) $C = e^{-2\ln 3}$

4°) $D = e^{\ln 3 - \ln 2}$

Question 23. [correction]

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible :

1°) $A = e^{-\ln(\ln 2)}$

2°) $B = \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

3°) $C = \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$

Trigonométrie

Question 24. [correction]

Calculer les nombres suivants :

1°) $A = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

2°) $B = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

3°) $C = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

4°) $D = \sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

5°) $E = \cos\left(\frac{97\pi}{3}\right)$

6°) $F = \sin\left(\frac{357\pi}{6}\right)$

Question 25. [correction]

En utilisant une formule d'addition de cos, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Question 26. [correction]

Simplifier $A = \sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$.

Question 27. [correction]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Question 28. [correction]

Simplifier :

$$A = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(5\pi - x) + \sin^2(\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Question 29. [correction]

Calculer $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Dérivation

Question 30. [correction]

Dans chacun des cas suivants, calculer l'expression de la dérivée de f sans se préoccuper de la dérivabilité, à l'aide du formulaire.

1°) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^4}{x}$

2°) $f(x) = (x^3 + x - 2)^4$

3°) $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$

4°) $f(x) = e^{\cos x}$

5°) $f(x) = \left((\cos x)^2 + \dfrac{3}{2}\right)\sin(2x)$

6°) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

7°) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

8°) $f(x) = \ln\left(3(\sin x)^2 + 5\right)$

Corrections complètes.

Correction question 1. [énoncé]

1°)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\\(a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\&= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2\\&= \boxed{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}\end{aligned}$$

On remarque que le carré de la somme de 3 réels est égal à la somme des carrés et de tous les doubles produits : $2ab$, $2bc$, $2ac$. Se généralise au carré d'une somme de n réels. A retenir.

Correction question 2. [énoncé]

1°) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3 = \boxed{a^3-b^3}$.

2°)

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= a^3-(-b^3)\\&= a^3-(-b)^3\\&= (a-(-b))\left(a^2+a(-b)+(-b)^2\right)\\&= \boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\end{aligned}$$

$(-1)^3=-1$ car 3 est impair donc $(-b)^3=-b^3$

3°)

$$\begin{aligned}27x^3+8 &= 3^3x^3+2^3\\&= (3x)^3+2^3\\&= (3x+2)\left((3x)^2-3x\times 2+2^2\right)\\&= \boxed{(3x+2)\left(9x^2-6x+4\right)}\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme qui apparait est strictement négatif, on ne factorise pas plus dans $\mathbb{R}$.

Correction question 3. [énoncé]

A est un trinôme du second degré. Le discriminant est :

On fera attention à la rédaction : définir le discriminant, faire des phrases complètes.

$$\begin{aligned}\Delta &= 16^2 - 4 \times (-17)\\ &= 4(4^3 + 17)\\ &= 4(64 + 17)\\ &= 4 \times 81\\ &= (2 \times 9)^2\\ &= 18^2\end{aligned}$$

Pour calculer Δ, il est judicieux de mettre 4 en facteur. Cela simplifie les calculs à faire et permet aussi de mettre plus facilement Δ sous la forme d'un carré.

$\Delta > 0$ donc le trinôme a 2 racines distinctes : $\dfrac{16+18}{2}$ et $\dfrac{16-18}{2}$, c'est-à-dire 17 et -1. Comme le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient devant x^2) vaut 1, on a :

$$\boxed{A = (x+1)(x-17)}$$

Pour un trinôme du 2d degré $ax^2 + bx + c$ où a, b, c réels tels que $a \neq 0$, admettant des racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues, en cas de racine double) alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ne pas oublier a quand on factorise.

Autre méthode : Comme nous l'étudierons en cours d'année, on peut procéder autrement.
Pour un trinôme du 2d degré $ax^2 + bx + c$ où a, b, c réels tels que $a \neq 0$, admettant deux racines x_1 et x_2 alors $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
Ici on remarque que -1 est racine donc, puisque le produit des racines vaut -17, l'autre racine est 17.

Correction question 4. [énoncé]

1°)

$$\begin{aligned}A &= b^4 - b^2\\ &= b^2b^2 - b^2\\ &= b^2(b^2 - 1)\\ &= \boxed{b^2(b-1)(b+1)}\end{aligned}$$

On se sert beaucoup des identités remarquables :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

2°) $B = x^2(x-3) + x - 3 = \boxed{(x-3)(x^2+1)}$

3°)

$$\begin{aligned}C &= (4x-5)^2 - 9x^2\\ &= ((4x-5) - 3x)((4x+5) + 3x)\\ &= \boxed{(x-5)(7x+5)}\end{aligned}$$

Correction question 5. [énoncé]

$$\begin{aligned} A &= (x-1)^2 - 4(x-1)(x+1) - 7(x-1) \\ &= (x-1)(x-1-4(x+1)-7) \\ &= (x-1)(-3x-12) \\ &= -3(x-1)(x+4) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de A		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, lorsqu'il admet deux racines réelles distinctes est du signe de $-a$ entre les racines et de $+a$ à l'extérieur des racines.

Correction question 6. [énoncé]

1°)

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2x + 1 - (x-1)(2x+3) \\ &= (x-1)^2 - (x-1)(2x+3) \\ &= (x-1)(x-1-2x-3) \\ &= (x-1)(-x-4) = \boxed{(1-x)(x+4)} \end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned} B &= (4x^2-25)(x+2) - (x^2-4)(2x+5) + (5x+10)(2x+5) \\ &= (2x-5)(2x+5)(x+2) - (x-2)(x+2)(2x+5) + 5(x+2)(2x+5) \\ &= (2x+5)(x+2)\,(2x-5-(x-2)+5) \\ &= (2x+5)(x+2)(x+2) = \boxed{(2x+5)(x+2)^2} \end{aligned}$$

Correction question 7. [énoncé]

$$\begin{aligned}
A &= \frac{7}{8}+\frac{5}{12}-\frac{4}{3}\\
&= \frac{7\times 3}{8\times 3}+\frac{5\times 2}{12\times 2}-\frac{4\times 8}{3\times 8}\\
&= \frac{21+10-32}{24}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A=-\frac{1}{24}}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\
&= \frac{n}{(n+1)^2\times n}+\frac{(n+1)n}{(n+1)\times(n+1)n}-\frac{(n+1)^2}{n\times(n+1)^2}\\
&= \frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B=-\frac{1}{n(n+1)^2}}$$

Ne pas prendre systématiquement le produit des trois dénominateurs.

Pour A, on prend bien sûr 24, le PPCM de 8, 12 et 3 (le plus petit commun multiple).

Pour B, il suffit d'adapter cette méthode !

Correction question 8. [énoncé]

$$x=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\boxed{\frac{ad}{bc}}.$$

$$y=\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}=\frac{a}{\frac{bd}{c}}=\boxed{\frac{ac}{bd}}.$$

$$z=\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d}\;=\;\frac{\frac{ac}{b}}{d}=\boxed{\frac{ac}{bd}}.$$

$$t=\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d}=\frac{\frac{a}{bc}}{d}=\boxed{\frac{a}{bcd}}.$$

Lorsque le numérateur est une fraction $\frac{a}{b}$, on peut le voir comme un facteur multiplicatif devant le quotient :

$$\frac{\frac{a}{b}}{X}=\frac{a}{b}\frac{1}{X}.$$

Lorsque le dénominateur est une fraction $\frac{c}{d}$, on peut utiliser :

$$\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c}.$$

Correction question 9. [énoncé]

$$A = \frac{\frac{a^2}{3b}}{\frac{ac}{6b}} = \frac{6ba^2}{3bac} = \boxed{\frac{2a}{c}}.$$

$$B = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{15}{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{15} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{5 \times 2} \times \frac{5 \times 3}{3 \times 3} \times 2}{\frac{3 \times 3}{3 \times 5} \times \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Penser à faire un maximum de simplifications grâce aux fractions présentes avant de multiplier des nombres.

$$C = \frac{6\left(3 - \frac{1}{2}\right)\left(4 + \frac{1}{3}\right)}{12\left(5 + \frac{1}{4}\right)\left(7 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{2}\frac{13}{3}}{2\frac{21}{4}\frac{20}{3}} = \frac{\frac{5 \times 13}{2 \times 3}}{\frac{21 \times 4 \times 5}{2 \times 3}} = \frac{13}{21 \times 4} = \boxed{\frac{13}{84}}.$$

ou bien :

$$\frac{2 \times \left(3 - \frac{1}{2}\right) \times 3 \times \left(4 + \frac{1}{3}\right)}{4 \times \left(5 + \frac{1}{4}\right) \times 3 \times \left(7 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{(6-1)(12+1)}{(20+1)(21-1)} = \frac{5 \times 13}{21 \times 4 \times 5} = \frac{13}{84}.$$

Ne pas développer brutalement ; penser à factoriser ou ici mettre au même dénominateur pour détecter des simplifications.

Correction question 10. [énoncé]

$$A = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x}{1-x^2}$$
$$= \frac{x+1-x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2-2x}{x^2-1} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{-2}{x+1}}.$$

$$B = \frac{b(x-a)}{abx} + \frac{x(a-b)}{abx} + \frac{a(b-x)}{axb}$$
$$= \frac{bx - ba + xa - xb + ab - ax}{abx} = \boxed{0}$$

Comme à l'exercice 7, ne pas prendre comme dénominateur commun le produit des trois dénominateurs ; chercher les facteurs communs pour obtenir le meilleur dénominateur commun possible.

Correction question 11. [énoncé]

Pour A,

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Donc $A = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{9}{5}}$.

$$B = \frac{2 + \frac{2+a}{2-a}}{2 - \frac{2+a}{2-a}} = \frac{\frac{2(2-a)+2+a}{2-a}}{\frac{2(2-a)-2-a}{2-a}} = \frac{4-2a+2+a}{4-2a-2-a} = \boxed{\frac{6-a}{2-3a}}$$

Penser à faire des calculs intermédiaires (traiter le dénominateur et le numérateur séparément).

Correction question 12. [énoncé]

1°) $A = 4 \times 5 = \boxed{20}$

2°) $B = 4 \times 3 = \boxed{12}$

3°) $C = 4 + 4\sqrt{5} + 5 + 4 - 4\sqrt{5} + 5 = \boxed{18}$

4°) Si x est un réel positif alors $\sqrt{x^2} = x$.

Si x est un réel négatif alors $\sqrt{x^2} = -x$:

$-x$ est en effet un réel positif et $(-x)^2 = x^2$.

On résume, en utilisant la valeur absolue : $\sqrt{x^2} = |x|$.

$D = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2|$.

Or $3 < 4$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ c'est-à-dire $\sqrt{3} < 2$. Donc $\sqrt{3}-2 < 0$.

Ainsi, $\boxed{D = 2 - \sqrt{3}}$.

5°) $(1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$.

Donc $D = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = |1+\sqrt{3}| = \boxed{1+\sqrt{3}}$.

Ici, on va tenter une astuce. Si on arrive à forcer une identité remarquable sous la racine, on résout notre problème.

Correction question 13. [énoncé]

Comme $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés.

$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} > \sqrt{3}^2$. Donc, $\boxed{1+\sqrt{2} > \sqrt{3}}$.

Lorsque a et b sont positifs, on a :

$$a = b \iff a^2 = b^2$$
$$a < b \iff a^2 < b^2$$
$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2$$

Correction question 14. [énoncé]

1°) $A = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{4(3+\sqrt{5})}{9-5} = \boxed{3+\sqrt{5}}$

2°)

$$\begin{aligned} B = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2} \\ &= 3 + 2 + 2\sqrt{6} - (3 + 2 - 2\sqrt{6}) \\ &= \boxed{4\sqrt{6}} \end{aligned}$$

On utilise la technique dite de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \end{aligned}$$

Correction question 15. [énoncé]

$$\begin{aligned}\frac{a}{x}+\frac{x}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}\\ &= \frac{a}{\sqrt{a}\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}\\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+2\sqrt{\frac{a}{b}}=\boxed{4\sqrt{\frac{a}{b}}}\end{aligned}$$

Un produit/quotient de racines est la racine du produit/quotient.
$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$
$\frac{\sqrt{b}}{b}=\frac{1}{\sqrt{b}}$

Correction question 16. [énoncé]
$\frac{14^2\times 9^2}{3^5\times 7}=\frac{7^2\times 2^2\times \left(3^2\right)^2}{3^5\times 7}=\frac{7\times 4\times 3^4}{3^5}=\frac{7\times 4}{3}=\boxed{\frac{28}{3}}$

Penser à factoriser les entiers non premiers (14 et 9) pour trouver des facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Correction question 17. [énoncé]
$\boxed{\frac{1}{(-1)^n}=(-1)^n}$ car c'est $\frac{1^n}{(-1)^n}=\left(\frac{1}{(-1)}\right)^n=(-1)^n$.

$\boxed{(-1)^{n+2}=(-1)^n}$ car c'est $(-1)^n(-1)^2$.

$\boxed{(-1)^{2n}=1}$ car c'est $\left((-1)^2\right)^n=1^n=1$.

$\boxed{(-1)^{2n+1}=-1}$ car c'est $(-1)(-1)^{2n}=-1$ par ce qui précède.

$(-a)^n=(-1\times a)^n=\boxed{(-1)^n a^n}$, donc :
si n est pair, c'est a^n ; si n est impair, c'est $-a^n$.

Correction question 18. [énoncé]
$x=\frac{2^3 3^2}{3^{-2}2^{-2}3^4 2^8}=\frac{2^3 3^2}{3^2 2^6}=\boxed{2^{-3}}$
$y=2^{100}+2^{101}=2^{100}(1+2)=\boxed{3.2^{100}}$
$z=2^{101}-2^{100}=2^{100}(2-1)=\boxed{2^{100}}$
$t=\boxed{2.3^{15}}$
$u=\frac{\left(3^2(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 2^3\right)^{-2}}=3^{16}2^{32}\left((-3)^5 2^3\right)^2=3^{16}2^{32}3^{10}2^6=\boxed{2^{38}3^{26}}$

Rappel : règles de manipulation des puissances (dès que les expressions ont un sens) :
$a^n a^p=a^{n+p}$
$\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$
$(ab)^n=a^n b^n$
$(a^n)^p=a^{np}$

Correction question 19. [énoncé]

$$A = 3x^2y^3 - y(xy)^2 = 3x^2y^3 - yx^2y^2 = 3x^2y^3 - x^2y^3 = \boxed{2x^2y^3}.$$

$$B = \frac{4x^2y^3 - (xy)^2y}{x^2y^2 \times (-x)^3} = \frac{4x^2y^3 - x^2y^3}{-x^2y^2x^3} = -\frac{3x^2y^3}{x^5y^2} = \boxed{-\frac{3y}{x^3}}.$$

$$C = \frac{(-a)^7 \times (-b^2c^3)^3}{-b^3c \times (-a)^5} = \frac{(-a^7) \times (-b^6c^9)}{-b^3c \times (-a^5)} = \frac{a^7b^6c^9}{a^5b^3c} = \boxed{a^2b^3c^8}.$$

Correction question 20. [énoncé]

1°) $A = \ln(2^4) = \boxed{4\ln 2}$

2°)
$$\begin{aligned} B &= 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) - 3\ln\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= 2\ln 3 - 2\ln 4 - 3\ln 3 + 3\ln 8 \\ &= 2\ln 3 - 2\ln(2^2) - 3\ln 3 + 3\ln(2^3) \\ &= -\ln 3 - 4\ln 2 + 9\ln 2 \\ &= \boxed{5\ln 2 - \ln 3} \end{aligned}$$

3°) $C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\ln\left(\sqrt{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(2)}$

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$\ln(x^n) = n\ln x$.
C'est aussi valable pour $n \notin \mathbb{Z}$.
Par exemple,
$\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln x$.

Correction question 21. [énoncé]

$$\begin{aligned} A &= 20\left(\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})\right) \\ &= 20\ln\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right) \\ &= 20\ln(1) = \boxed{0} \end{aligned}$$

Pour $x > 0, y > 0$,
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Correction question 22. [énoncé]

1°) $A = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = \boxed{8}$

2°) $B = \frac{1}{2}\ln(e) = \boxed{\frac{1}{2}}$

3°) $C = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$

4°) $D = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Pour $x > 0, y > 0, n \in \mathbb{Z}$,
$e^{\ln x} = x$
$e^{n\ln x} = x^n$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

Correction question 23. [énoncé]

1°) $A = \dfrac{1}{e^{\ln(\ln 2)}} = \boxed{\dfrac{1}{\ln 2}}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

2°) $B = \exp\left(-\dfrac{1}{3} \times (-3\ln e)\right) = \exp(\ln e) = \boxed{e}$

3°) $C = \dfrac{1}{2}\ln(\exp(-2\ln e)) = \dfrac{1}{2}\ln(\exp(-2)) = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

Correction question 24. [énoncé]

1°) $A = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Donc $A = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \left(= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2°) $B = -\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ car sin est impaire

Donc $B = -\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc $B = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

3°) $C = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Donc $C = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

4°) $D = \sin\left(\dfrac{20\pi + \pi}{4}\right) = \sin\left(5\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

On essaie de ramener l'angle dans l'intervalle usuel $]-\pi, \pi]$. On cherche un multiple du dénominateur proche du numérateur et on décompose facilement ensuite en utilisant la 2π-périodicité de sin et cos ainsi que les formules trigonométriques de base.

Donc $D = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ car sin est 2π-périodique.

Donc $D = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

5°) $E = \cos\left(\dfrac{96\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(32\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc $E = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ car cos est 2π-périodique.

Donc $E = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

6°) $F = \sin\left(\dfrac{360 - 3\pi}{6}\right) = \sin\left(60\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Donc $F = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ par 2π-périodicité de sin.

Donc $F = \boxed{-1}$.

Correction question 25. [énoncé]

Essayons d'écrire $\dfrac{\pi}{12}$ en fonction de $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{4}$: $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4\pi - 3\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

Correction question 26. [énoncé]

$A = \sin(4x - 5x) = \sin(-x) = \boxed{-\sin x}$ par imparité de sin.

On reconnaît la forme $\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ qui est égal à $\sin(a-b)$.

Correction question 27. [énoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \cos x$.

Alors, $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \iff 2X^2 - 5X + 2 = 0$.

On reconnaît un trinôme du second degré en X.

Le discriminant est $\Delta = 25 - 4 \times 4 = 9 = 3^2 > 0$.

Les racines du trinôme sont : $\dfrac{5+3}{4} = 2$ et $\dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \iff \cos x = 2$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

L'équation $\cos x = 2$ n'a pas de solutions car $\cos x \in [-1, 1]$.

$\cos x = \dfrac{1}{2} \iff \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres de la forme $\boxed{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}}$.

De manière formelle, cet ensemble de solutions se note : $\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction question 28. [énoncé]

$$\begin{aligned}A &= \cos x + \cos(\pi - x) + (-\sin x)^2 + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2 \\ &= \cos x - \cos x + \sin^2 x + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2 \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

Correction question 29. [énoncé]

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(2\times\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On utilise $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

Correction question 30. [énoncé]

1°) $$f'(x)=\frac{4.\frac{1}{x}(\ln x)^3x-(\ln x)^4.1}{x^2}=\frac{4(\ln x)^3-(\ln x)^4}{x^2}=\boxed{(\ln x)^3\frac{4-\ln x}{x^2}}$$

2°) $$f'(x)=\boxed{4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3}$$

3°) $$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x\left[(-\sin)(\sin x)\right]-(-\sin x)\left[\cos(\cos x)\right]\\&=\boxed{\sin x\left(\cos(\cos x)\right)-\cos x\left(\sin(\sin x)\right)}\end{aligned}$$

4°) $$f'(x)=\boxed{-\sin(x)e^{\cos(x)}}$$

5°) $$f'(x)=\boxed{\left((\cos x)^2+\frac{3}{2}\right)2\cos(2x)-2\sin(x)\cos(x)\sin(2x)}$$

6°) $$\begin{aligned}f'(x)&=\left(1-\frac{2x}{x^4}\right)\sin\frac{1}{x}+\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}\\&=\boxed{\left(1-\frac{2}{x^3}\right)\sin\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)\cos\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

7°) $$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\boxed{\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}}$$

8°) $$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{3\times2\sin'(x)\sin(x)}{3\sin^2 x+5}\\&=\boxed{\frac{6\cos(x)\sin(x)}{3(\sin x)^2+5}}\end{aligned}$$

1) On utilise la dérivée de $\frac{u}{v}$:
$$\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
et la dérivée de u^α :
$$\alpha u'u^{\alpha-1}$$

2) On utilise la dérivée de u^α.

3) On utilise la dérivée de uv :
$$u'v+uv'$$
et la dérivée de $x\mapsto g(f(x))$:
$$x\mapsto f'(x)g'(f(x))$$

4) On utilise la dérivée de e^u :
$$u'e^u$$

5) On utilise la dérivée de uv, de u^α et de $x\mapsto g(f(x))$ avec $f(x)=2x$ et $g=\sin$.

6) On utilise la dérivée de uv et de $x\mapsto g(f(x))$ avec $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g=\sin$.

7) Dérivée de $\sqrt{u}$: $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) Dérivée de $\ln(u)$: $\frac{u'}{u}$