Correction du devoir surveillé 4.

Exercice 1

1°) a) La fonction f est continue sur $[0,1]$, qui est bien un intervalle.
De plus, f est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2xe^x + 2e^x = 2e^x(1+x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0,1]$.
D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,1] \text{ dans } [f(0), f(1)] = [0, 2e]}$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$2e$

x	0	$2e$
$f^{-1}(x)$	$0 \nearrow$	1

b) Soit $x \in [0,1]$.
$$xe^x = 1 \iff 2xe^x = 2 \iff f(x) = 2$$
Or $2 \in [0, 2e]$ (puisque $e > 1$). Puisque f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,2e]$, 2 admet un unique antécédent α par f, i.e. l'équation $\boxed{\alpha e^\alpha = 1 \text{ admet une unique solution dans } [0,1]}$.
On a $0e^0 = 0 \neq 1$ donc $\boxed{\alpha \neq 0}$.

c) Soit $x \in [0,1]$.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2xe^x = x \\ &\iff x(2e^x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } e^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\ln(2) \quad \text{car ln est bijective} \\ &\iff x = 0 \quad \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$
Pour résoudre (I), on peut donc supposer $x \neq 0$.
$$\begin{aligned} f(x) > x &\iff 2xe^x > x \\ &\iff 2e^x > 1 \quad \text{car } x > 0 \\ &\iff e^x > \frac{1}{2} \\ &\iff \underbrace{x > -\ln 2}_{\text{vrai car } x \in]0,1]} \quad \text{car ln est strictement croissante} \end{aligned}$$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{0\} \text{ et celui de } (I) \text{ est }]0,1]}$.

2°) a)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \in]0,1]$.
- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $u_0 = \alpha \in]0,1]$ d'après la question 1.b.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.
  $u_n \in]0,1] \subset [0,2e]$. Comme f^{-1} est défini sur $[0,2e]$, $f^{-1}(u_n)$ i.e. u_{n+1} existe.
  De plus, f^{-1} est strictement croissante sur $[0,2e]$.
  $0 < u_n \leq 2e$ donc $f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(2e)$. Donc $0 < u_{n+1} \leq 1$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \in]0,1].}$

b) D'après 1.c, pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) > x$; donc, par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$. Comme f^{-1} est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > f^{-1}(u_n)$ c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$, $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite.
Or la fonction f^{-1} est continue sur $[0, 2e]$ donc en ℓ.
On en déduit que ℓ est un point fixe de f^{-1} : $f^{-1}(\ell) = \ell$.
En prenant l'image par f cela donne $\ell = f(\ell)$. D'après 1.c, $\boxed{\ell = 0.}$

3°) a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(f^{-1}(u_n)) = f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}}$, d'où $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2e^{u_{n+1}}}$ i.e. $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}.}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $u_0 = \alpha$, et $\dfrac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-u_0} = \dfrac{1}{e^\alpha} = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha} = \alpha$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{e^{-S_n}}{2^n}e^{-u_{n+1}} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}.}$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. $u_k = \dfrac{e^{-S_k}}{2^k}$.

$S_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} u_p$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p \geq 0$, donc $S_k \geq 0$ soit $-S_k \leq 0$.
Comme exponentielle est croissante, $e^{-S_k} \leq e^0 = 1$.

Ainsi, puisque $\dfrac{1}{2^k} \geq 0$, $\boxed{u_k \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k.}$

d) (S_n) est croissante puisque pour tout n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ donc, en sommant ces inégalités pour k de 0 à n on trouve :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 2$. Donc $S_n \leq 2$.
(S_n) est majorée par 2, comme (S_n) est croissante, on en déduit que (S_n) converge vers un réel $L \leq 2$.
Par croissance de (S_n), $L \geq S_0$. Or $S_0 = u_0 = \alpha$ donc $L \geq \alpha$.
Ainsi, $\boxed{\alpha \leq L \leq 2}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n u_n = e^{-S_n}$ et (S_n) converge vers L.
Comme la fonction exponentielle est continue, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 2^n u_n = e^{-L}.}$$

Exercice 2

1°) On pose $h = x - 1$. $h \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1+h) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+h)\right)}{\ln(1+h)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right)}{\ln(1+h)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{\ln(1+h)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{-\frac{\pi h}{2} + o(h)}{h + o(h)} \qquad \text{car } -\frac{\pi h}{2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{-\frac{\pi}{2} + o(1)}{1 + o(1)}
\end{aligned}$$

Par quotient de limites, cette dernière expression tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}}$.

2°) Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x + 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2\left(1 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}_{X}\right)
\end{aligned}$$

$X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. De plus, un $o(x^2)$ est un $o(X^2)$.

Ainsi, on développe $\ln(1+X)$ à l'ordre 2 en 0 : $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{=} X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$. D'où,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x + x^2\left(-\frac{1}{16} - \frac{9}{32}\right) + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + o(x^2)}$$

3°) Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{x\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}} \qquad \text{car } x > 0 \\
&\underset{x\to +\infty}{=} x\frac{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{car } \frac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{1}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{x\to +\infty}{=} x\frac{1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}
\end{aligned}$$

On pose $X \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $X \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$ donc un $o(X^2)$ est un $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

On sait que $\dfrac{1}{1+X} \underset{X\to0}{=} 1-X+X^2+o(X^2)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} &\underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}+4\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{2}{x}+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x-2+\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\underbrace{f(x)-(x-2)}_{\Delta(x)} = \dfrac{4}{x}+\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{x}$.

★ Comme $\dfrac{4}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\boxed{\text{la droite } D \text{ d'équation } y=x-2 \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ de } f \text{ en } +\infty.}$

★ Comme $\dfrac{4}{x}>0$ pour $x>0$, on a $\Delta(x)>0$ au voisinage de $+\infty$.
Donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est au-dessus de } \mathcal{D} \text{ au voisinage de } +\infty.}$

Exercice 3

Partie 1 : Étude de deux suites

1°) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose H_n : "les réels u_n et v_n existent et $u_n>0$ et $v_n>0$".

★ H_0 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
Alors, u_n et v_n existent et $u_n>0$ et $v_n>0$. D'où $u_nv_n>0$ et $u_n+v_n>0$.
Ainsi, $u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ existent et sont strictement positifs. H_{n+1} est donc vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont strictement positifs}}$.

2°) Soient x et y deux réels strictement positifs.

$$\begin{aligned}
\frac{2xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{2} &\iff 4xy\leq(x+y)^2 \qquad \text{car } x+y>0\\
&\iff x^2-2xy+y^2\geq0\\
&\iff (x-y)^2\geq0 \qquad \text{ce qui est toujours vrai.}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\boxed{\dfrac{2xy}{x+y}\leq\dfrac{x+y}{2}}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc, par ce qui précède, $\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \leq \dfrac{u_n+v_n}{2}$ ie $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

De plus $u_0 \leq v_0$. Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.}$

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n \\ &= \frac{2u_nv_n - u_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n} \\ &= \frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n} \geq 0 \text{ car } u_n > 0,\ v_n > 0, \text{ et } u_n \leq v_n \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \text{ car } u_n \leq v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante et la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

5°) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} \\ &= \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{v_n-u_n}{u_n+v_n} \times \frac{\alpha_n}{2} \end{aligned}$$

On a $0 \leq v_n - u_n$ puisque $u_n \leq v_n$, et on a $v_n - u_n \leq v_n + u_n$ car $0 < u_n$.
Donc, puisque $u_n + v_n > 0$, $0 \leq \dfrac{v_n-u_n}{u_n+v_n} \leq 1$.
Ainsi, puisque $\dfrac{\alpha_n}{2} \geq 0$, il vient $0 \leq \dfrac{v_n-u_n}{u_n+v_n} \times \dfrac{\alpha_n}{2} \leq \dfrac{\alpha_n}{2}$ i.e. $\boxed{0 \leq \alpha_{n+1} \leq \dfrac{\alpha_n}{2}}$.

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$, on a $\dfrac{\alpha_n}{2} \leq \alpha_n$, et donc $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.
Ainsi (α_n) est décroissante, et minorée (par 0), donc elle converge. Notons ℓ' sa limite.
En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient : $0 \leq \ell' \leq \dfrac{\ell'}{2}$,
d'où $0 \leq \ell'$ et $\ell' - \dfrac{\ell'}{2} \leq 0$, d'où $\ell' \geq 0$ et $\ell' \leq 0$ donc $\boxed{\ell' = 0}$.
Autre méthode :
À l'aide de la question précédente, on peut montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_0}{2^n}$.
Comme $2 > 1$, il vient : $\dfrac{\alpha_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ converge vers } 0}$.

6°) La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Par le théorème sur les suites adjacentes, on en déduit que $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell.}$

7°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\frac{u_n+v_n}{2} = u_nv_n = w_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est constante}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_0v_0 = ab$ ie $u_nv_n = ab$.
Donc, d'une part, $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ab$. D'autre part, par produit de limites, $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^2$.
Par unicité de la limite, il vient : $\ell^2 = ab$. D'où $|\ell| = \sqrt{ab}$.
Comme ℓ est la limite de suites positives, il vient, par passage à la limite, $\ell \geq 0$.
D'où, finalement, $\boxed{\ell = \sqrt{ab}}$.

Partie 2 : Une équation fonctionnelle

8°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= f(u_{n+1}) + f(v_{n+1}) \\ &= f\left(\frac{2u_n v_n}{u_n+v_n}\right) + f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \\ &= f(u_n) + f(v_n) \quad \text{par } (**) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n$. $\boxed{\text{La suite } (z_n) \text{ est donc constante.}}$

9°) Soient a et b des réels tels que $0 < a \leq b$, et (u_n) et (v_n) comme dans la partie 1.
On rappelle que (u_n) et (v_n) convergent vers $\ell = \sqrt{ab}$. On a donc d'ailleurs $\ell > 0$.
D'une part, puisque (z_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n = f(u_n) + f(v_n) = f(u_0) + f(v_0) = f(a) + f(b).$$

Ainsi, $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a) + f(b)$.
D'autre part, (u_n) converge vers ℓ, et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en ℓ. Ainsi, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
De même $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. D'où, $z_n = f(u_n) + f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2f(\ell) = 2f(\sqrt{ab})$.
Par unicité de la limite, il vient : $\boxed{2f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b)}$.
Prenons maintenant a et b deux réels quelconques de $\mathbb{R}_+^*$.
Si $a \leq b$, on a montré que $2f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b)$.
Si $a > b$, on peut appliquer le résultat précédent en remplaçant a par b et b par a, ce qui donne $2f(\sqrt{ba}) = f(b) + f(a)$.
Donc $\boxed{\text{la relation } 2f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b) \text{ est encore valable pour tout } (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2}$.

10°) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Posons $a = t$ et $b = 1$, ce sont deux réels strictement positifs, donc par la question précédente, $2f(\sqrt{t \times 1}) = f(t) + f(1)$ i.e. $\boxed{2f(\sqrt{t}) = f(t)}$ puisque $f(1) = 0$.

11°) Montrons que f vérifie la relation $(*)$.
Soit x et y deux réels strictement positifs. On a $xy \in \mathbb{R}_+^*$ donc, par 10,

$$f(xy) = 2f(\sqrt{xy}).$$

On peut alors appliquer le résultat de la question 9 avec x et y :

$$2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y).$$

Ainsi, on a bien $f(xy) = f(x) + f(y)$.
f vérifie la relation $(*)$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par la propriété admise :

$$\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \alpha \ln x}$$

Partie 3 : Preuve du résultat provisoirement admis

12°) **a)** On utilise $(*)$ avec le couple $(1,1)$: $f(1) = f(1) + f(1)$. Donc $\boxed{f(1) = 0}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On utilise $(*)$ avec le couple $\left(t, \frac{1}{t}\right)$: $f\left(t \times \frac{1}{t}\right) = f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Donc $f(1) = f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right)$. Comme $f(1) = 0$, il vient : $\boxed{f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)}$.

b) ★ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : f(t^n) = nf(t)$.

- Pour $n = 0$: $f(t^0) = f(1) = 0 = 0 \times f(t)$. Donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}) &= f(t^n \times t) \\ &= f(t^n) + f(t) \quad \text{par } (*) \text{ avec le couple } (t^n, t) \\ &= nf(t) + f(t) \quad \text{par } H_n \\ f(t^{n+1}) &= (n+1)f(t) \end{aligned}$$

  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(t^n) = nf(t)$. Et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

★ Montrons le résultat sur $\mathbb{Z}_-^*$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}^-$. Soit $m = -n$, alors $m \in \mathbb{N}$.
$f(t^n) = f(t^{-m}) = f\left(\frac{1}{t^m}\right) = -f(t^m)$ par la question précédente.
Or $m \in \mathbb{N}$ donc $f(t^m) = mf(t)$ donc $f(t^n) = -mf(t) = nf(t)$.

On a bien montré que : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z},\ f(t^n) = nf(t)}$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $p \in \mathbb{Z}^*$.
$pf\left(t^{\frac{1}{p}}\right) = f\left(\left(t^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)$ par 12b, puisque $p \in \mathbb{Z}$ et $t^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc, $pf\left(t^{\frac{1}{p}}\right) = f(t)$. Finalement, $\boxed{f\left(t^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}f(t)}$ car $p \neq 0$.

d) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors il existe des entiers p et q, avec $q \neq 0$, tels que $r = \dfrac{p}{q}$. Calculons :

$$\begin{aligned} f(e^r) = f(e^{\frac{p}{q}}) &= f\left((e^p)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &= \frac{1}{q} f(e^p) \quad \text{par la question c avec } t = e^p \text{ (bien dans } \mathbb{R}_+^*\text{) et l'entier non nul } q \\ &= \frac{p}{q} f(e) \quad \text{par la question b avec } t = e \text{ (bien dans } \mathbb{R}_+^*\text{) et l'entier } p \end{aligned}$$

$\boxed{f(e^r) = r\alpha}$

e) On sait qu'il existe une suite (r_n) de rationnels qui tend vers y. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(e^{r_n}) = \alpha r_n$ par la question précédente.
Or, d'une part, $\alpha r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha y$.
D'autre part, par continuité de exp en y, on a $e^{r_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^y$, puis par continuité de f en $e^y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(e^{r_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(e^y) = f(x)$.
Par unicité de la limite, on a donc $\boxed{f(x) = \alpha y}$.

13°)
- Dans la question 1, on a montré que si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ était une fonction continue vérifiant $(*)$, alors il existe un réel α tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \alpha \ln(x)$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $f : x \mapsto \alpha \ln(x)$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f(xy) = \alpha \ln(xy) = \alpha(\ln(x) + \ln(y)) = \alpha \ln(x) + \alpha \ln(y) = f(x) + f(y).$$

  Ainsi, f vérifie $(*)$.
- Conclusion : l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues vérifiant $(*)$ est $\boxed{\{x \mapsto \alpha \ln(x) \ /\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 4

1°) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. $|f(z)| = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|}$. Or, $|1-\overline{z}| = |\overline{1-z}| = |1-z|$ donc $\boxed{|f(z)|=1}$.

On en déduit, par exemple, que 2 n'admet pas d'antécédent par f, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$

2°) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

$$\begin{aligned} f(z)=1 &\iff \frac{z-1}{1-\overline{z}} = 1 \\ &\iff z-1 = 1-\overline{z} \\ &\iff z+\overline{z} = 2 \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = 1 \\ &\iff z = 1+ia,\ a \in \mathbb{R}^* \qquad \text{car pour } a=0,\ 1+ia=1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(z)=1 \text{ est donc } \{1+ia \,/\, a \in \mathbb{R}^*\}}$.

$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$ car, par exemple, 1 admet une infinité d'antécédents.

3°) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff \frac{z-1}{1-\overline{z}} = \frac{\overline{z}-1}{1-z} \\ &\iff (z-1)(1-z) = (\overline{z}-1)(1-\overline{z}) \\ &\iff (z-1)^2 = (\overline{z}-1)^2 \\ &\iff z-1 = \overline{z}-1 \text{ ou } z-1 = 1-\overline{z} \\ &\iff z = \overline{z} \text{ ou } z+\overline{z} = 2 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \big(\mathbb{R} \cup \{1+ia \,/\, a \in \mathbb{R}\}\big)\backslash\{1\}}$.

4°) On résout, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} f(z) = e^{i\theta} &\iff \frac{x+iy-1}{1-(x-iy)} = e^{i\theta} \\ &\iff x-1+iy = e^{i\theta}(1-x+iy) \\ &\iff x(1+e^{i\theta}) + iy(1-e^{i\theta}) = 1+e^{i\theta} \\ &\iff x\,e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) + iy\,e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) \\ &\iff x\,e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + iy\,e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\iff (E) : x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{car } 2e^{i\frac{\theta}{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

Si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$, $(E) \iff y = -\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}x + \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. θ étant fixé, c'est l'équation d'une droite.

Si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, alors $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ donc $(E) \iff x = 1$, c'est à nouveau l'équation d'une droite.

Remarquons que l'inconnue z vérifie $z \neq 1$ i.e. $(x,y) \neq (1,0)$, et que $(1,0)$ vérifie l'équation (E). Cependant, comme une droite est infinie, cela permet tout de même de conclure que l'ensemble des solutions de $f(z) = e^{i\theta}$ est infini.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{U}$, t a au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. On en déduit que $\mathbb{U} \subset f\left(\mathbb{C}\backslash\{1\}\right)$.

Par ailleurs, d'après la question 1, $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $f(z) \in \mathbb{U}$, i.e. $f\left(\mathbb{C}\backslash\{1\}\right) \subset \mathbb{U}$.

On en déduit que : $\boxed{f(\mathbb{C}\backslash\{1\}) = \mathbb{U}}$.