Devoir surveillé 2.

Samedi 18 octobre 2025, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

1°) Résoudre l'équation :

$$(E_1) \ : \ 1+\cos(x)+\cos(2x)=0.$$

2°) Résoudre l'équation :

$$(E_2) \ : \ \sqrt{3}\cos(3x)-\sin(3x)=\sqrt{2}.$$

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Le but de l'exercice est de redémontrer la formule donnant l'expression de S_n en fonction de n, par deux méthodes indépendantes.

On ne servira donc pas de l'expression apprise pour S_n, mais on pourra se servir de celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

1°) Première méthode

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$.

b) À l'aide de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, la somme suivante :

$$T_n=1+\sum_{k=2}^{n}\left(2\binom{k}{2}+k\right).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier d'une autre manière T_n, et en déduire S_n.

2°) Deuxième méthode
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) En calculant $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$ de deux manières différentes, établir l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2}S_n+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)^2}{2}-S_n.$$

b) En déduire S_n.

Exercice 3

On note th la fonction

$$\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Partie 1 : Étude de la fonction th

1°) Justifier que th est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de th.

2°) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction de ch.

3°) Dresser le tableau de variations de th.

Partie 2 : Étude de la fonction argth

4°) Justifier que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On notera argth sa fonction réciproque.

5°) Justifier que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
Indication : On vérifiera que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.

6°) En déduire que, pour tout $y \in]-1,1[$, $\operatorname{argth}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Partie 3 : Étude d'une autre fonction

On considère la fonction $g : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.

7°) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

8°) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = \operatorname{ch}(x)$. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

9°) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

Partie 4 : Un calcul de somme

10°) Soit x et y des réels. Montrer que $1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y) \neq 0$, puis que :

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}.$$

11°) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+2}\right)$.

12°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)$.
Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis calculer la limite de (S_n).

Exercice 4

1°) Dans cette question, on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ au moins.
Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de φ en précisant la limite en $+\infty$.

2°) Dans cette question, on considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f(3)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifier que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{Arcsin}(h)}{h} = 1$.
En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
Que peut-on dire de la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ?

c) Justifier que f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

d) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.
Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$, $f'(x) = \psi(x)$, et que pour tout $x \in \,]1,+\infty[$, $f'(x) = -\psi(x)$.

3°) On note g la fonction définie par $g : x \mapsto \text{Arctan}(\sqrt{x})$.

a) Justifier que g est définie $\mathbb{R}_+$, et dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $g(x)$ pour $x \in]1,+\infty[$, et l'expression de $f(x)$ en fonction de $g(x)$ pour $x \in]0,1[$. Peut-on étendre l'égalité obtenue à $[0,1]$?

4°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\theta = \text{Arctan}(\sqrt{x})$, de sorte que $\sqrt{x} = \tan(\theta)$.
Déterminer une expression simplifiée de $\varphi(x)$ en fonction de θ.
Retrouver l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$ de la question 3b.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$