
Devoir maison 9.

À rendre le lundi 6 mars 2023

Exercice

On considère la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Étude de A

1°) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .

2°) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$, vérifier qu'elle est diagonale.
Exprimer A en fonction de P , P^{-1} et D .

Partie 2 : Résolution d'un système différentiel

On considère trois fonctions x, y, z de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant le système suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= 8x(t) + 4y(t) - 16z(t) \\ y'(t) &= 4y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= 4x(t) + 4y(t) - 12z(t) \end{cases}$$

1°) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

Quelle relation relie $X'(t)$ et $X(t)$?

2°) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.

Justifier que les fonctions u, v et w sont dérivables sur \mathbb{R} .

On note naturellement $Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Quel est le lien entre $Y'(t)$ et $X'(t)$?

3°) En utilisant la partie 1, déterminer la relation entre $Y'(t)$ et $Y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On justifiera rigoureusement.

En déduire le système différentiel vérifié par u, v et w .

4°) On suppose, pour le reste de l'exercice, que : $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Déterminer $u(0), v(0), w(0)$ en minimisant le nombre de calculs.

5°) Déterminer les fonctions u, v, w .

6°) En déduire les fonctions x, y, z .