TD 3. Nouvelles fonctions usuelles.

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2. Soient a et x deux réels.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kx)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kx)$.

Exercice 3. Résoudre $\operatorname{ch}(x) = 2$.

Exercice 4. 1) (Une formule de trigonométrie hyperbolique) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$.
2) (Application) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 5. Étudier les fonctions suivantes, et tracer leurs courbes représentatives :
$f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$, $g : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ $h : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan(x))$.

Exercice 6. On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1°) Déterminer le domaine de définition D de f.

2°) Soit $x \in D$. Comment poser θ pour avoir $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$?
Exprimer alors $f(x)$ en fonction de θ.

3°) À l'aide de l'expression trouvée précédemment, simplifier f.

Exercice 7. On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, et son domaine de dérivabilité.
b) Calculer f'.
c) En déduire une expression simple de f.
d) Retrouver ce résultat par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $2\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} x$ b) $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$.

Exercice 10. On considère l'équation : (E) : $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$.

1°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

2°) La déterminer.

Exercice 11. Donner les domaines de définition, de dérivabilité et calculer les dérivées de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire ?