Corrigé du devoir maison 2.

Exercice 1

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\sin(x)\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc $\boxed{a=\sqrt{2} \text{ et } b=\frac{\pi}{4} \text{ conviennent.}}$

2°) sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \text{ non définie en } x &\iff \cos(x)+\sin(x)=0 \\ &\iff \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ &\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x+\frac{\pi}{4}=k\pi \\ &\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{aligned}$$

Donc le domaine de définition D de f est $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

3°) Pour tout $x \in D$,

$$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} = f(x).$$

Ainsi, f est périodique de période π.

$\boxed{\text{Il suffit donc d'étudier } f \text{ sur } I=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[}$ (c'est un intervalle de longueur π, inclus dans D).

En conséquence, $\boxed{\text{on obtient } \mathcal{C} \text{ à partir de } \mathcal{C}_1 \text{ par translations de vecteur } k\pi\overrightarrow{i}, \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.}$

4°) Par quotient, f est dérivable sur D, et pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\left(\sin(x)+\cos(x)\right)-\sin(x)\left(\cos(x)-\sin(x)\right)}{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^2} = \frac{\left(\cos(x)\right)^2+\left(\sin(x)\right)^2}{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^2} > 0$$

D'où le tableau de variation de f sur I :

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites :

- On a $\sin(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
  D'autre part, pour tout $x \in I$, $\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to-\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} \sqrt{2}\sin(0) = 0$.
  Comme pour tout $x \in I$, $x+\frac{\pi}{4} \in]0,\pi[$, la quantité $\sin(x)+\cos(x)$ tend vers 0 en restant positive donc $\dfrac{1}{\sin(x)+\cos(x)} \underset{x\to-\frac{\pi}{4}^+}{\longrightarrow} +\infty$, et finalement $f(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{4}^+}{\longrightarrow} -\infty$.
- On a $\sin(x) \underset{x\to\frac{3\pi}{4}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
  D'autre part, pour tout $x \in I$, $\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\frac{3\pi}{4}}{\longrightarrow} \sqrt{2}\sin(\pi) = 0$.
  De même, pour tout $x \in I$, $x+\frac{\pi}{4} \in]0,\pi[$, donc la quantité $\sin(x)+\cos(x)$ reste positive ; $\dfrac{1}{\sin(x)+\cos(x)} \underset{x\to\frac{3\pi}{4}^-}{\longrightarrow} +\infty$, et finalement $f(x) \underset{x\to\frac{3\pi}{4}^-}{\longrightarrow} +\infty$.

5°) Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
1 \geq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &> 0\\
\sqrt{2} \geq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &> 0\\
\sqrt{2} \geq \sin(x)+\cos(x) &> 0\\
2 \geq (\sin(x)+\cos(x))^2 &> 0\\
\frac{1}{2} \leq \frac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2} &\text{ i.e. } \boxed{\frac{1}{2} \leq f'(x).}
\end{aligned}$$

6°) Soit $x_0 \in I$. La tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$ si et seulement si sa pente vaut 2, autrement dit si et seulement si :

$$\begin{aligned}
f'(x_0) = 2 &\iff \frac{1}{(\sin x_0+\cos x_0)^2} = 2\\
&\iff (\cos x_0+\sin x_0)^2 = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos^2 x_0+\sin^2 x_0+2\cos x_0\sin x_0 = \frac{1}{2}\\
&\iff 1+\sin(2x_0) = \frac{1}{2}\\
&\iff \sin(2x_0) = -\frac{1}{2}\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x_0 = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2x_0 = \pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x_0 = -\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ ou } x_0 = \frac{7\pi}{12}+k\pi
\end{aligned}$$

On a $-\dfrac{\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{12} < 0$ et $0 < \dfrac{7\pi}{12} < \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$ donc les valeurs $-\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$ donc bien dans I ; comme I est un intervalle ouvert de longueur π, les valeurs de la forme $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ ou de la forme $\dfrac{7\pi}{12}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ non nul ne sont pas dans I.

Finalement, les abscisses des points de $\mathcal{C}_1$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$ sont $-\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.

7°) Remarquons que si $x \in I$, $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, donc $\dfrac{\pi}{4} > -x > -\dfrac{3\pi}{4}$, donc $\dfrac{3\pi}{4} > \dfrac{\pi}{2} - x > -\dfrac{\pi}{4}$, autrement dit $\dfrac{\pi}{2} - x$ est bien dans I.

La quantité à calculer a donc bien un sens et l'abscisse $\dfrac{\pi}{2} - x$ correspond à un point de $\mathcal{C}_1$.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \\ &= \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1}$$

On a donc $\dfrac{f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

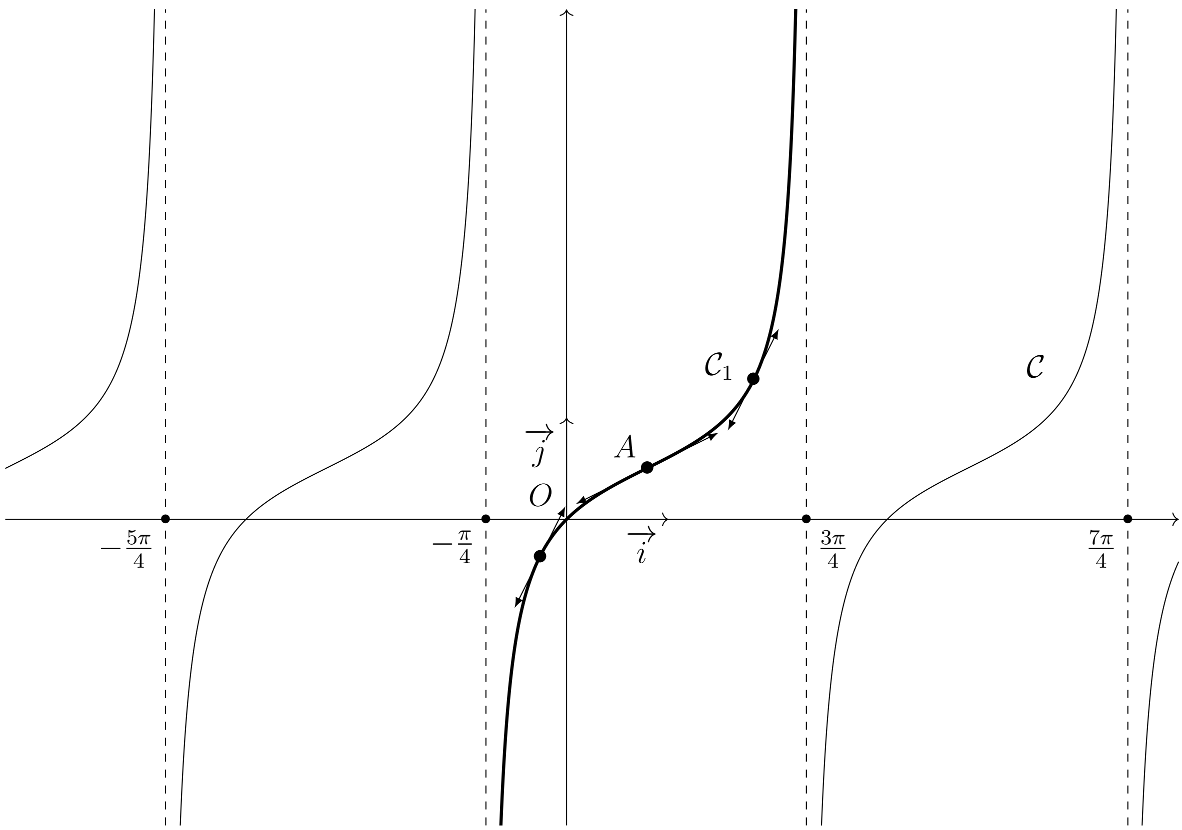
Le point A de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ est donc le milieu du segment $[MM']$, avec M le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M' le point de $\mathcal{C}_1$ d'abcisse $\frac{\pi}{2} - x$.

Cela signifie que $\boxed{A \text{ est un centre de symétrie pour } \mathcal{C}_1.}$

8°) Allure de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}$:

Au point A, la tangente a pour pente $\dfrac{1}{2}$ puisque $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$.

On peut également faire des pentes de 2 aux abscisses $-\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.



Exercice 2

1°) a) Soient x et y des réels.
Supposons que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
La propriété $(*)$ appliquée avec x et y s'écrit (puisque $f(x) = f(y)$) :

$$f(x) + f\left(x + f(x)\right) = y + f\left[f(x) + f\left(f(x)\right)\right].$$

On peut voir le membre de gauche comme celui de la propriété appliquée à x et x, d'où également :

$$f(x) + f\left(x + f(x)\right) = x + f\left[f(x) + f\left(f(x)\right)\right].$$

On a donc :

$$y + f\left[f(x) + f\left(f(x)\right)\right] = x + f\left[f(x) + f\left(f(x)\right)\right] \quad \text{i.e.} \quad y = x.$$

On a bien montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y}$.

b) Appliquons la propriété $(*)$ en remplaçant x et y par 0 :

$$f(0) + f\left(0 + f(0)\right) = 0 + f\left[f(0) + f\left(f(0)\right)\right] \quad \text{i.e.} \quad f(0) + f\left(f(0)\right) = f\left[f(0) + f\left(f(0)\right)\right].$$

On a donc $\boxed{a = f(a)}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.
La propriété $(*)$ appliquée à x et a donne :

$$f(a) + f\left(x + f(a)\right) = a + f\left[f(x) + f\left(f(a)\right)\right].$$

Or $f(a) = a$, et également $f\left(f(a)\right) = f(a) = a$, d'où

$$\begin{gathered} a + f\left(x + a\right) = a + f\left(f(x) + a\right) \\ \text{i.e. } f(x + a) = f\left(f(x) + a\right) \end{gathered}$$

D'après le résultat de la question 1a, ceci implique que $x + a = f(x) + a$.
D'où $\boxed{f(x) = x}$.

2°)
- On a montré que si f vérifiait $(*)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, autrement dit que f était la fonction identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$.
- Réciproquement, posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, et montrons que f vérifie bien la propriété $(*)$.
  Soient x et y des réels :

  $$f(y) + f\left(x + f(y)\right) = y + x + y = x + 2y,$$

  $$\text{et} \quad y + \left[f(x) + f\left(f(y)\right)\right] = y + x + y = x + 2y.$$

  Ainsi f vérifie $(*)$.
- On a donc montré que l'unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$ est la fonction identité $x \mapsto x$.