

Devoir maison 7.

À rendre le lundi 19 janvier 2026

Exercice

Soit f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{\bar{z}+2} \end{aligned}$$

1°) Étude de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de f

a) On pose $\Delta = f^{-1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\Delta = \left\{ -\frac{3}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R} \right\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{-2\})$.

b) Calculer $f(z)$ pour $z \in \Delta$.

L'application f est-elle injective ? Bijective ?

c) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution. Qu'en déduire sur f ?

2°) Étude de la restriction aux réels

On définit $g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto f(x)$

Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble à préciser, et expliciter la réciproque.