

## TD 13. Matrices et systèmes linéaires.

### Systèmes linéaires

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases} & 
 2) \quad \begin{cases} x - y + 4z = 6 \\ y + 2z + t = 1 \\ 2x + 3y - t = 5 \\ -3x - 8z + t = -15 \end{cases} & 
 3) \quad \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \\
 \\ 
 4) \quad \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} & 
 5) \quad \begin{cases} x + y + 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \\ x + 2y - z - 2t = -1 \\ -y + 4z + 3t = 2 \end{cases} & 
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Résoudre les systèmes linéaires à paramètres :

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ 3x + 13y + 12z = b \\ 4x + 15y + 9z = c \end{cases}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 & 
 2) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\
 \\ 
 3) \quad \begin{cases} (4 - m)x + 2y = 0 \\ -x + (1 - m)y = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{R} \quad (\text{Quelle interprétation géométrique proposez-vous ?}) & 
 \\ 
 4) \quad \begin{cases} (1 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y - z = 0 \\ -x + y - \lambda z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} & 
 5) \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

### Matrices

**Exercice 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

1°) Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On suppose que  $M^3 = A$ .

- a) Montrer alors que  $AM = MA$ .
- b) En déduire que  $M$  est diagonale.

2°) Résoudre l'équation  $M^3 = A$  où  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Questions bonus (sans tout refaire) :

- Qu'obtiendrait-on si l'inconnue de l'équation était  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ?
- Qu'obtiendrait-on, avec  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pour l'équation  $M^2 = B$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\sigma(A)$  la somme de tous les coefficients de  $A$ .

On définit la matrice  $J$  suivante de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $JAJ = \sigma(A)J$ .

**Exercice 5.** Soient  $a, b, c$  trois réels. Soit  $N = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ .

1°) Ecrire  $N$  comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

2°) En déduire  $N^n$  pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 6.** Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 7.** Soient  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer  $J^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ .

1) Calculer  $M^2 - 2aM + (a^2 - b^2)I_3$ .

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $M$  soit inversible. Dans ce cas, calculer  $M^{-1}$ .

**Exercice 9.** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

1) Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $R(\theta)R(\theta')$ .

2) Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $R(\theta)$  est inversible, et calculer son inverse.

3) Calculer, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $R(\theta)^n$ .

**Exercice 10.** On dit qu'une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ .

a) Soit  $N$  une matrice nilpotente et  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ .

Que dire de  $N^k$  pour  $k > p$ ?  $N$  peut-elle être inversible?

b) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont nilpotentes et commutent, alors  $A + B$  est nilpotente.

c) Montrer que si  $A$  est nilpotente et que  $A$  et  $B$  commutent, alors  $AB$  est nilpotente.

d) Soit  $N$  une matrice nilpotente et  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ .

Montrer que  $I_n - N$  est inversible et donner son inverse.

*Indication : on s'inspirera de la formule valable pour un nombre  $x \neq 1$  :  $\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$ .*

**Exercice 11.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$  pour  $a > 0$ .

1°) Calculer  $A^2$  en fonction de  $A$  et  $I_3$ .

2°) En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

3°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$  où  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont des suites réelles qui vérifient des relations de récurrence à préciser.

4°) En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 12.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $P$  est inversible, et calculer  $P^{-1}$ .

2) Calculer  $D = P^{-1}AP$ .

3) En déduire  $A^n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13.** Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bonus :  $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 14.** On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Discuter l'inversibilité de  $A - \lambda I_3$  suivant la valeur du paramètre réel  $\lambda$ .