Correction du devoir surveillé 4.

Exercice 1

1°) (L_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène, et sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(L_1) \ : \ xy'(x) + y(x) = 0 \iff y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est ln.

Donc les solutions de (L_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, autrement dit

$\boxed{\text{ce sont les fonctions } x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$

2°) a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, solution de (E).

Remarque : comme pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$, la fonction $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions f, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par produit et composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ x^2 f''(x) &= \underbrace{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}_{xf'(x)} - xf'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Or f vérifie l'équation (E). Comme $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, en évaluant en $\dfrac{1}{x}$: $f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}f(x)$. Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 f''(x) \ = \ xf'(x) - f(x)$$

$\boxed{f \text{ est donc bien solution de } (L) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.}$

b) • La fonction $F : x \mapsto x \ln x$ est bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = 1 + \ln x$, $F''(x) = \dfrac{1}{x}$. On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2F''(x) - xF'(x) + F(x) = x - x - x\ln x + x\ln x = 0$$

Ainsi $\boxed{F \text{ est bien solution de } (L)}$.

• Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xF\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ et $F'(x) = 1 + \ln x$.

$-\ln(1) = 0$ et $F'(1) = 1 + \ln(1) = 1 \neq 0$.

Donc les fonctions F' et $x \mapsto xF\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sont distinctes.

Ainsi $\boxed{F \text{ n'est pas solution de } (E)}$.

Remarque : Il faudra donc bien faire attention, après avoir résolu (L), à ne conserver que les solutions qui sont aussi solutions de (E) !

3°) a) Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, g l'est aussi par quotient.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = xg(x)$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = g(x) + xg'(x), \quad f''(x) = 2g'(x) + xg''(x).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (L) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2x^2 g'(x) + x^3 g''(x) - xg(x) - x^2 g'(x) + xg(x) = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^3 g''(x) + x^2 g'(x) = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xg''(x) + g'(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ solution de } (L) \iff g' \text{ solution de } (L_1) : \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ xy'(x) + y(x) = 0}$$

b) On a donc, pour f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (L) &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ g'(x) = \frac{\lambda}{x} \\ &\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = \lambda \ln x + \mu \qquad \text{car } \mathbb{R}_+^* \text{ est un intervalle} \\ &\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \lambda x \ln x + \mu x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (L) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } \{x \mapsto \lambda x \ln x + \mu x \ / \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

4°)
- D'après les questions 1.a et 2.b, si f est solution de (E), alors il existe des réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \lambda x \ln x + \mu x$.
- Réciproquement, soit λ et μ des réels.
  Posons : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = \lambda x \ln x + \mu x$.
  Par somme et produit, y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $y'(x) = \lambda + \lambda \ln x + \mu$, d'où :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda + \mu + \lambda \ln x = x\left(\lambda \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\mu}{x}\right) \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda + \mu + \lambda \ln x = -\lambda \ln x + \mu \\ &\iff (*) \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(1 + 2\ln x) = 0 \end{aligned}$$

  Si $\lambda = 0$, alors $(*)$ est clairement vérifiée.
  Si $(*)$ est vérifiée, alors, en particulier, pour $x = 1$ on obtient $\lambda(1+0) = 0$ donc $\lambda = 0$.
  Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $\lambda = 0$.
- Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\{x \mapsto \mu x \ / \ \mu \in \mathbb{R}\}}.$$

Exercice 2

1°) On pose $f : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$.

f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et , pour tout $x > -1$,
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{x}{1+x}$ est du signe de x puisque $1 + x > 0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x > -1, f(x) \geq f(0) = 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } x > -1, \ln(1+x) \leq x}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

$\ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$.

On a bien obtenu : $\boxed{\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \dfrac{1}{n+1} \text{ et } \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\dfrac{1}{n+1}}$.

3°) ★ $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0$ par 1).

Donc (a_n) est croissante,

★ $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ par 1).

Donc (b_n) décroissante

★ $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Ainsi, par le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent et ont même limite } \gamma}$.

4°) De plus, par le cours, on a aussi : pour tout $n \geq 1, a_n \leq \gamma \leq b_n$. Donc, $a_1 \leq \gamma \leq b_1$.

Donc $\boxed{1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1}$.

5°) La suite (b_n) converge vers γ donc $b_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $b_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Ainsi, $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)}$. On en déduit que : $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

6°) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
K_{n+1} - K_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \qquad \text{en posant } j = k+1 \text{ dans la 1ere somme} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La suite } (K_n) \text{ est donc strictement croissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$1 \leq k \leq n$ donc $0 < n+1 \leq n+k \leq 2n$ donc $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

On somme de $k = 1$ à $k = n$ l'inégalité de droite :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$ *i.e* $K_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ donc $K_n \leq 1$.

La suite (K_n) est croissante et majorée donc $\boxed{\text{la suite } (K_n) \text{ converge}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{K_n = H_{2n} - H_n}$.

d) En utilisant 5,

$$\begin{aligned}
K_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) \qquad \text{car } 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Par somme, $\boxed{\text{la suite } (K_n) \text{ converge vers } \ln 2}$.

7°) a) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n : A_{2n} = K_n$.

★ Pour $n = 1$: $K_1 = \dfrac{1}{2}$ et $A_2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}
A_{2(n+1)} = A_{2n+2} &= A_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= K_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \qquad \text{par } \mathcal{P}_n \\
&= K_{n+1} \text{ par le calcul effectué dans 6a}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = K_n}$.

b) (K_n) converge vers $\ln 2$ par 6d donc (A_{2n}) converge vers $\ln 2$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{2n+1} = A_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$ donc la suite (A_{2n+1}) converge aussi vers $\ln 2$.

Les 2 suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs de la suite (A_n) sont convergentes de même limite $\ln 2$ donc $\boxed{\text{la suite } (A_n) \text{ converge vers } \ln 2}$.

8°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

9°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} &= \frac{n+1-n}{n(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n(2n+1)} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{2n+1-2n}{n(2n+1)} - \frac{2(n+1)-(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}
\end{aligned}$$

Les réels $\boxed{a=1,\ b=1,\ c=-4}$ conviennent donc.

Autre méthode : Réduire l'expression $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{2n+1}$ au même dénominateur, il suffit alors de résoudre un système.

10°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
H_{2n+1} &= \sum_{p=1}^{2n+1}\frac{1}{p} = \sum_{\substack{p \text{ pair}\\ 1\le p\le 2n+1}}\frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \text{ impair}\\ 1\le p\le 2n+1}}\frac{1}{p}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\\
&= \frac{1}{2}H_n + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} = H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n-1}$

11°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. De ce qui précède, on déduit :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{v_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{k}+\frac{6}{k+1}-\frac{24}{2k+1}\right)\\
&= 6H_n + 6\left(\frac{1}{n+1}+H_n-1\right) - 24\left(H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{6}{n+1}+18+24H_n-24H_{2n+1}}$$

12°) Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{6}{n+1}+18+24(\ln n+\gamma+o(1))-24(\ln(2n+1)+\gamma+o(1))\\
&\qquad \text{par 5 et car } 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{6}{n+1}+18-24\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)+o(1)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{6}{n+1}+18-24\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)+o(1)
\end{aligned}$$

Par opérations, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 18-24\ln 2.}$

Exercice 3

1°) Soit $n\geq 3$.

f_n est dérivable sur $[1,+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale, et pour tout $x\in[1,+\infty[$, $f_n'(x)=nx^{n-1}-1$.

Pour tout $x\geq 1$, $x^{n-1}\geq 1$, donc $f_n'(x)\geq n-1>0$ puisque $n\geq 3$.

Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

De plus, f_n est continue sur $[1,+\infty[$, et $[1,+\infty[$ est un intervalle.

Donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $[f_n(1),\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)[$.

On a $f_n(1) = -1$ et $f_n(x) = x(x^{n-1} - 1) - 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.Ainsi, f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.
Comme $0 \in [-1, +\infty[$, le réel 0 admet un unique antécédent par f_n dans $[1, +\infty[$, ce qui signifie que $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } u_n \text{ dans } [1, +\infty[.}$

2°) Soit $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^{n+1} - u_n - 1 = u_n \times u_n^n - u_n - 1 \\ &= u_n(u_n + 1) - u_n - 1 \qquad \text{car } u_n^n = u_n + 1 \\ &= u_n^2 - 1 \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq 1$, il vient, $\boxed{f_{n+1}(u_n) \geq 0}$, ce qui peut se réécrire : $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$.
Si on avait $u_n < u_{n+1}$, comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et que u_n et u_{n+1} sont éléments de $[1, +\infty[$, on aurait $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Ce n'est pas le cas, donc $u_n \geq u_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

3°) (u_n) est décroissante et minorée (par 1) donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$.

4°) **a)** Soit $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k - 2 - \frac{1}{n} \qquad \text{d'après la formule du binôme} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - 2 - \frac{1}{n} \\ &= 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + r_n - 2 - \frac{1}{n} \qquad \text{avec } r_n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{n-1}{2n} + r_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n-3}{2n} + r_n \end{aligned}$$

Or $r_n > 0$ donc $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{n-3}{2n}$. Donc, comme $n \geq 3$, $\boxed{f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0}$.

b) Soit $n \geq 3$, $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 = f_n(u_n)$.

De plus f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $1 + \frac{1}{n}$ et u_n sont des éléments de $[1, +\infty[$ donc $u_n < 1 + \frac{1}{n}$.
On a donc : $\forall n \geq 3$, $1 \leq u_n < 1 + \frac{1}{n}$.
Or la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge vers 1.
Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$
Remarque : Comme on sait déjà que la suite (u_n) converge vers un réels ℓ, on pouvait aussi passer à la limite dans l'encadrement : $1 \leq \ell \leq 1$. Donc $\ell = 1$.

5°) Soit $n \geq 3$.
$u_n^n = u_n + 1$ donc, puisque les termes sont strictement positifs, $n \ln u_n = \ln(u_n + 1)$.

D'où, $\ln u_n = \dfrac{\ln(1+u_n)}{n}$ puis $\boxed{u_n = \exp\left(\dfrac{\ln(1+u_n)}{n}\right)}$.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ par somme et composition.

On peut donc écrire : $\ln(1+u_n) = \ln 2 + o(1)$.

D'où $u_n = \exp\left(\dfrac{\ln 2 + o(1)}{n}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

On pose : $X = \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $X \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et un $o(X)$ est un $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On sait : $e^X \underset{X\to 0}{=} 1 + X + o(X)$ donc $e^X = 1 + \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $\boxed{u_n = 1 + \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Exercice 4

1°)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+\ln(1+x)) + x \times \frac{1}{1+x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + x \times (1 - x + x^2 + o(x^2)) \end{aligned}$$

On pose $X \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a bien $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. $X \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc un $o(x^3)$ est un $o(X^3)$.

Comme $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{=} X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + o(X^3)$,

$$\begin{aligned} \ln(1+\ln(1+x)) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 \\ &\underset{x\to 0}{=} x + x^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\ln(1+\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \dfrac{7}{6}x^3 + o(x^3) + x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Finalement, $\boxed{f(x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^3)}$.

2°)

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{2x - \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - 2\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{(x+o(x))^2} \qquad \text{car } 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-x + o(x)}{1 + o(1)} \end{aligned}$$

Le numérateur $-x + o(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et dénominateur $1 + o(1)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Par quotient de limite, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

3°)

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\frac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{car } \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

On pose $X \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on a bien $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$X \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc un $o(X^2)$ est un $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\dfrac{1}{1+X} \underset{X\to0}{=} 1-X+X^2+o(X^2)$ donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ainsi, $\underbrace{f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}_{\Delta(x)} \underset{x\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{4x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire que $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4x}$. Ainsi :

★ Comme $-\dfrac{1}{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$

★ Comme $-\dfrac{1}{4x} < 0$ pour $x > 0$, on a $\Delta(x) < 0$ au voisinage de $+\infty$, donc $\mathcal{C}$ est localement en-dessous de $\mathcal{D}$.