

## TD 6. Equations différentielles linéaires.

### Ordre 1

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants :

- |   |  |
|---|--|
| a) $y' + y = 2e^{-x}$<br>c) $y' - y \tan x = \sin x$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$<br>e) $xy' - 2y = -\ln x$ | b) $(1 + x^2)y' - xy = x$<br>d) $\begin{cases} (x+1)y' - xy + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ sur $] -1, +\infty[$<br>f) $xy' + y = xe^{\frac{x^2}{2}}$ |
|---|--|

**Exercice 2.** (Équation fonctionnelle)

On cherche à déterminer les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$(*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$

- 1) Soit  $f$  une fonction vérifiant (\*).
  - a) Déterminer  $f$  dans le cas où  $f(0) = 0$ .
  - b) On suppose  $f(0) \neq 0$ . Montrer que  $f(0) = 1$ .
  - c) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par  $f$ . En déduire  $f$  dans le cas où  $f(0) \neq 0$ .
- 2) Conclure.

**Exercice 3.** (Équation faisant intervenir une intégrale)

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 1 = \int_0^x tf(t) dt.$$

- 1) Soit  $f$  une solution.
  - a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle à préciser.
  - c) En déduire la forme de  $f$ .
- 2) Conclure.

### Ordre 2

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants :

- |   |  |
|---|--|
| a) $y'' + y' + y = x^2 + e^{-x}$<br>c) $y'' - 2y' + y = e^x + \cos x$ | b) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$<br>d) $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x} \sin(x).$ |
|---|--|

**Exercice 5.** (Changements de fonction inconnue)

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation :

$$(E) : x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 1 + x^2$$

1°) *Première méthode :*

a) Pour toute fonction  $y$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on définit la fonction  $z$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = xy(x).$$

Déterminer une équation différentielle  $(E_1)$  telle que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \iff z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

b) Résoudre  $(E_1)$  puis  $(E)$ .

2°) *Deuxième méthode :*

a) Pour toute fonction  $y$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on définit la fonction  $z$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t).$$

(Il s'agit bien d'un changement de fonction inconnue, mais un physicien dirait "on change de variable en posant  $t = \ln x$ ").

Déterminer une équation différentielle  $(E_2)$  telle que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \iff z \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

b) Résoudre  $(E_2)$  puis  $(E)$ .

**Exercice 6.** (Systèmes différentiels)

a) Déterminer les fonctions dérivables  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

*Indication : supposer  $x$  solution et trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par  $x$ .*

b) Déterminer les fonctions deux fois dérivables  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}$$

*Indication : poser la fonction  $z = x + iy$ .*