

## Chapitre 22. Intégration sur un segment.

### 1 Fonctions en escalier : définition, intégrale

Dans toute cette partie, on se place sur un segment :  $a, b$  désignent des réels tels que  $a < b$ .

#### 1.a Fonction en escalier

**Définition :**

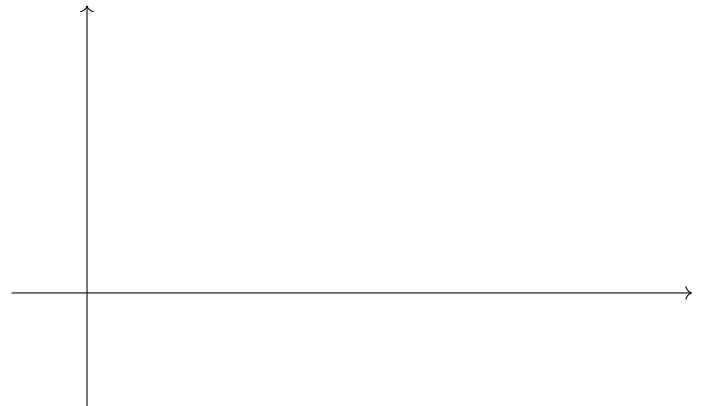
On dit qu'une famille de réels  $(x_0, \dots, x_n)$  forme une subdivision du segment  $[a, b]$  si :

**Définition :**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction en escalier s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et une subdivision  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f$  soit constante sur  $]x_{i-1}, x_i[$  :

Ainsi, pour chaque  $i$  :

- La valeur de  $f$  en  $x_i$  est quelconque :
- Il n'est pas obligatoire que  $x_i$  soit un point de discontinuité de  $f$



On dit que la subdivision est adaptée à  $f$  fonction en escalier si  $f$  est constante sur  $]x_{i-1}, x_i[$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Il y a plusieurs subdivisions adaptées à  $f$  (même une infinité).



On notera dans ce cours  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## 1.b Intégrale d'une fonction en escalier

### Définition :

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier,  $(x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée  $f$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\lambda_i$  la valeur de  $f$  sur  $]x_{i-1}, x_i[$ .

On définit alors l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par :

$$\int_{[a,b]} f =$$

On admet que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à  $f$ , ce qui fait que cette définition a un sens. Autres notations :  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(x)dx$ , ou  $\int_a^b f(t)dt...$



### Remarques :

- $\int_{[a,b]} f$  représente donc l'aire algébrique sous la courbe de  $f$  (aire du  $i$ ème rectangle comptée positivement si  $\lambda_i \geq 0$ , négativement si  $\lambda_i < 0$ ).
- 

**Cas particulier d'une fonction constante :** Si  $f$  est cste égale à  $\lambda$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f =$

Deux façons de le retrouver :

### Proposition :

Soient  $f, g$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- **Linéarité**
- **Positivité**
- **Croissance**
- **Relation de Chasles**



Démonstration 1

## 2 Définition et propriétés de l'intégrale pour une fonction continue

### 2.a Définition et propriétés de base

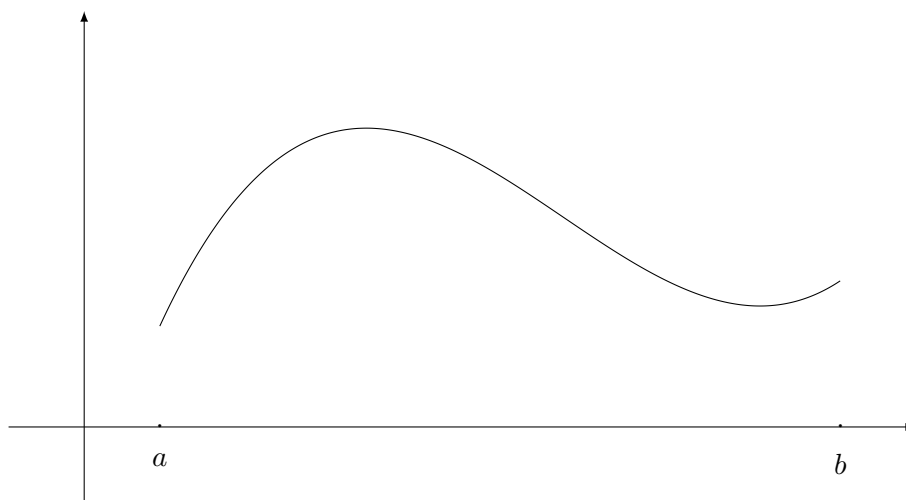
#### Définition :

Soient  $a, b$  des réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On considère :

$$I^+ =$$

$$I^- =$$



Alors

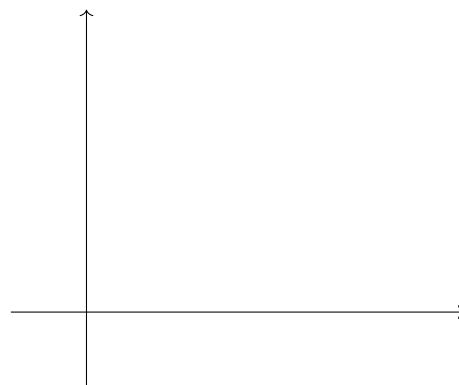
Cette valeur commune est appelé intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

On la note  $\int_{[a,b]} f$  ou  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(t)dt$  (ou  $\int_a^b f(x)dx...$ ).

#### Interprétation :

- L'intégrale représente l'aire algébrique sous la courbe.

- Le nombre  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  est la



**Proposition :**

Soient  $a, b$  des réels tels que  $a < b$ , des fonctions continues  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- **Linéarité**

$$\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(Autrement dit, est une forme linéaire)

- **Positivité**

$$\text{Si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f \geq 0.$$

- **Croissance**

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

- **Relation de Chasles**

si  $c$  est entre  $a$  et  $b$  (et encore, c.f. plus bas) :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Démonstration 2**

**Définition de  $\int_a^b$  lorsque  $a \geq b$**

Soit  $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, où  $a \geq b$ . On définit :

$$\begin{aligned} \text{si } a = b : & \int_a^b f = \\ \text{si } a > b : & \int_a^b f = \end{aligned}$$

**⚠** Les propriétés de l'intégrales ne s'étendent pas toutes ! En particulier attention aux inégalités !  
Cependant la linéarité et la relation de Chasles sont encore valables. Cette dernière s'écrit donc, de façon plus générale :

$$\text{Soit } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } \forall (x, y, z) \in [a, b]^2, \quad \int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f.$$

**2.b Autres propriétés essentielles****Proposition :**

Soient  $a, b$  des réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**Démonstration 3**

**Théorème :**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose :

- $f \geq 0$
- $f$  n'est pas identiquement nulle sur  $[a, b]$  (c'est-à-dire : )

Alors

$$\int_a^b f > 0.$$

**Démonstration 4****Corollaire :**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose :

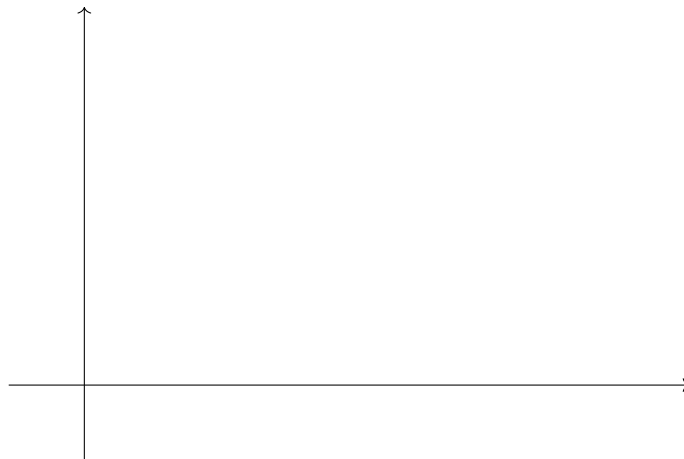
- $f \geq 0$
- $\int_a^b f = 0$

Alors

On a le même résultat en remplaçant «  $f \geq 0$  » par «  $f \leq 0$  ».

**⚠** Ce n'est pas vrai si la fonction est en escalier : toujours rappeler que  $f$  est continue quand on applique ce théorème ou ce corollaire!!

Contre-exemple :

**Exemple d'application :**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$  est strictement positive.

### 3 Lien primitive-intégrale

**Théorème :**

(Théorème fondamental de l'analyse)

Soit  $I$  un intervalle, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Soit  $a \in I$ .

$F_a$  : est une primitive de  $f$ .

C'est

Autre formulation :



**Démonstration 5**

Rappelons les différentes conséquences :

**Corollaire :**

- Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I$ ,  $a, b$  des éléments de  $I$ , et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Application classique :** étude de fonctions de la forme


$$F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Exemple : On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_x^{\text{sh}(x)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ .

Montrer que  $F$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa dérivée.



**Démonstration 6**

 Il faut commencer par trouver le domaine de définition de ce type de fonction ; Cela demande parfois du soin !

Exemple : trouver le domaine de définition de  $F : x \mapsto \int_x^{x^2+x} \frac{\cos t}{t} dt$ .



**Démonstration 7**

## 4 Inégalité de Taylor-Lagrange

### Théorème :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- $f$  est de classe  $\boxed{\mathcal{C}^{n+1}}$  sur  $I$
- et qu'il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$ .

Alors pour tout  $a \in I$  et tout  $x \in I$ ,

Autrement dit, pour tout  $a \in I$  et tout réel  $h$  tel que  $a + h \in I$  :

Si  $0 \in I$ , en prenant  $a = 0$ , on obtient, pour tout  $x \in I$  :

Bien comprendre l'intérêt par rapport à la formule de Taylor-Young vue au chapitre 21 :

La formule de Taylor-Young est *locale* (elle s'écrit avec des petits  $o$ , donc elle parle d'une limite) alors que l'inégalité de Taylor-Lagrange est *globale* : elle est valable sur tout un intervalle.

Cette inégalité est conséquence d'une égalité : la formule de Taylor avec reste intégrale, qui est plus précise mais plus difficile à retenir :

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur l'intervalle  $I$ , alors pour tout  $x \in I$  et tout  $a \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt}_{\text{reste intégral}}$$

### Exemple d'application :

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ .

Montrer que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ .



### Démonstration 8

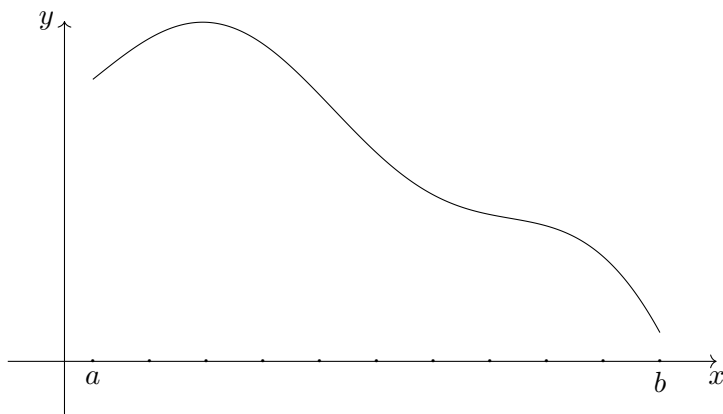
## 5 Sommes de Riemann

On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On souhaite approcher l'aire sous la courbe par  $n$  rectangles de largeur constante.

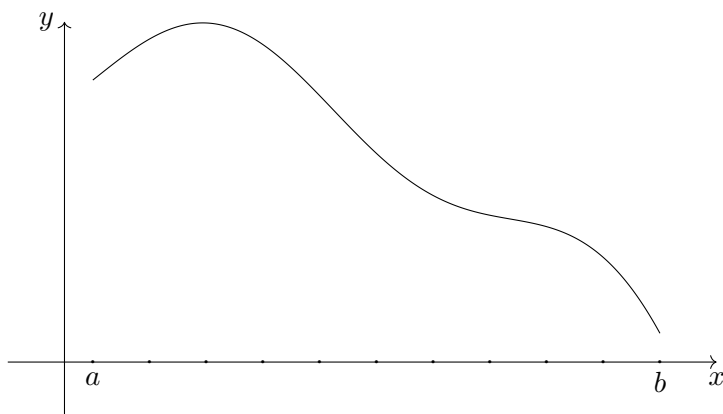
On prend donc une subdivision de  $[a, b]$  à pas constant  $\frac{b-a}{n}$  :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$



On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$R_n(f) =$$



On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$R'_n(f) =$$

### Proposition :

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f \quad \text{et} \quad R'_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$



### Démonstration 9

**Remarque :** Souvent, on a  $[a, b] = [0, 1]$ , ou alors on se ramène à ce cas. Les formules deviennent :



## 6 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Rappel : Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue, ce qui signifie que les fonctions réelles  $u = \operatorname{Re}(f)$  et  $v = \operatorname{Im}(f)$  sont continues sur  $I$ .

Pour  $a, b$  dans  $I$ , on définit l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b u(x) \, dx + i \int_a^b v(x) \, dx$$

Autrement dit,

$$\operatorname{Re} \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) \, dx \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) \, dx$$

On a encore :

- la linéarité de l'intégrale
- la relation de Chasles
- l'IPP et le changement de variable
- l'inégalité de Taylor-Lagrange
- l'inégalité  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$  reste valable avec  $|\cdot|$  désignant le module.

## Plan du cours

<b>1</b>	<b>Fonctions en escalier : définition, intégrale</b>	<b>1</b>
1.a	Fonction en escalier . . . . .	1
1.b	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Définition et propriétés de l'intégrale pour une fonction continue</b>	<b>3</b>
2.a	Définition et propriétés de base . . . . .	3
2.b	Autres propriétés essentielles . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Lien primitive-intégrale</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Inégalité de Taylor-Lagrange</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Sommes de Riemann</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes</b>	<b>9</b>