Devoir maison 8.

Exercice

1°) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{-2+5x-2x^2}{x^3}$$

Pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-2x^2+5x-2$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc ses racines sont $\frac{-5+3}{-4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-5-3}{-4} = 2$. Comme le coefficient de x^2 est négatif, on en tire le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$\varphi(2)$	$\searrow$	$-\infty$

avec $\varphi(2) = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} - 2\ln(2) = -\frac{9}{4} - 2\ln(2)$, et $\varphi(\frac{1}{2}) = 4 - 10 + 2\ln(2) = -6 + 2\ln(2)$.
Explications des limites :
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} - 2\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
$\varphi(x) = \frac{1-5x-2x^2\ln x}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ car $x^2 \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

2°)
- L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de même que la fonction φ.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff 1 - 5x - 2x^2\ln x = 0 \\ &\iff \frac{1-5x-2x^2\ln x}{x^2} = 0 \text{ car } x \neq 0 \\ &\iff \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $\varphi(x) \leq \varphi(2) = -\frac{9}{4} - 2\ln 2 < 0$.
  Donc l'équation (E) n'a pas de solution sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
- Sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, φ est continue et strictement décroissante.
  D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ dans l'intervalle image $\left]\varphi(\frac{1}{2}), \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)\right[$ i.e. de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ dans $\left]\varphi(\frac{1}{2}), +\infty\right[$.
  Comme $\varphi(\frac{1}{2}) \leq \varphi(2) < 0$, on a $0 \in \left]\varphi(\frac{1}{2}), +\infty\right[$. Ainsi 0 admet un unique antécédent par φ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$: il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
- On a bien montré $\boxed{\text{l'existence et l'unicité d'une solution } \alpha \text{ à l'équation } (E) \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$
  De plus, $\boxed{\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.}$

3°) a) On a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

C'est une limite finie donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = \dfrac{1}{4}}$.

f est également continue sur $]0, +\infty[$ comme somme, produit et quotient de fonctions continues.

$\boxed{f \text{ est prolongeable en une fonction continue sur } [0, +\infty[}$.

b)
- f est continue sur $[0, +\infty[$.
- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par opérations.
- Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(-1 - 4x\ln x - 2x^2\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{4} - x\ln x - \frac{1}{2}x$$

On a $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4}$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\dfrac{1}{4}}$.

De plus, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4} = f'(0)$, donc la fonction f' est continue en 0.

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par opérations.

Finalement, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$

c) Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{-x\ln x - \frac{1}{2}x}{x} = -\ln x - \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc f' n'est pas dérivable en 0, ce qui signifie que $\boxed{f \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0.}$

Autre méthode : f' est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x > 0, f''(x) = -\ln(x) - \dfrac{3}{2}, f''(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée : $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

d) f' est dérivable sur $]0, 1]$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in]0, 1], f''(x) = -\ln x - x\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} = -\ln x - \dfrac{3}{2}$

Pour $x \in]0, 1]$:

$$f''(x) > 0 \iff \ln x < -\frac{3}{2} \iff x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ car exp est strictement croissante}$$

$$f''(x) = 0 \iff \ln x = -\frac{3}{2} \iff x = e^{-\frac{3}{2}} \text{ car exp est bijective}$$

Comme f' est continue en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$, on en tire le tableau suivant :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1
$f''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$f'(e^{-\frac{3}{2}})$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $-\dfrac{3}{4} \leq f'(x) \leq f'(e^{-\frac{3}{2}})$.
Or, $f'(e^{-\frac{3}{2}}) = -\dfrac{1}{4} - e^{-\frac{3}{2}} \ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{4} \leq 0$ d'après l'énoncé.
Ainsi f' est négative sur $[0,1]$. Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $-\dfrac{3}{4} \leq f'(x) \leq 0$.

Il vient : $\boxed{\forall\, x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}.}$

e) Comme f' est négative sur $[0,1]$, $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0,1]}$.
Donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$.
Comme $f(1) = 0$ et que $f(0) = \frac{1}{4} \leq 1$, on a bien :

$$\boxed{\forall\, x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1]}.$$

4°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : "le réel u_n existe et $u_n \in [0,1]$".
- P_0 est vraie, car $u_0 = \frac{1}{5}$ existe et il est dans $[0,1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons P_n vraie.
  Comme $u_n \in [0,1]$, $f(u_n)$ existe, autrement dit u_{n+1} existe, et par la question précédente, on a aussi $u_{n+1} \in [0,1]$. Ainsi P_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que :
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans } [0,1].}$

b) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$, et $|f'|$ est majorée par $\dfrac{3}{4}$ sur cet intervalle.
On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Appliquons cette inégalité avec $x = u_n$ et $y = \alpha$, qui sont bien dans $[0,1]$:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$, et, en utilisant le fait que α est solution de (E) :
$f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha-2\alpha^2\ln\alpha}{4} = \dfrac{1-\alpha-(1-5\alpha)}{4} = \alpha$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|.}$

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

- $\mathcal{Q}_0$ est vraie car $\left(\dfrac{3}{4}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie. D'après la question précédente,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \quad \text{par } Q_n$$

  Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : on a montré par récurrence que :
  pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Comme $\dfrac{3}{4} \in]-1,1[$, on a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $|u_0 - \alpha|$ étant une constante, on en tire, par le théorème d'encadrement, que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$