Chapitre 24. Géométrie dans l'espace.

E désigne l'espace euclidien usuel.

1 Rappels et compléments

La définition de la colinéarité vue dans le plan au chapitre précédent se généralise sans changement.
La notation $A + \overrightarrow{u}$ désigne toujours le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
$A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ désigne encore la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

1.a Plans affines

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\boxed{\text{non colinéaires}}$.
$\boxed{A + \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ désigne l'ensemble de tous les points M tels que $\overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, c'est-à-dire tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (\text{i.e. } M = A + \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v})$$

C'est donc $\boxed{\text{le plan } P \text{ passant par } A \text{ et dirigé par le couple } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).}$
Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'appelle alors la <u>direction</u> de P, c'est l'unique plan passant par O et parallèle à P.
Lorsqu'on dit qu'un vecteur est dans le plan P, cela signifie en fait que le vecteur est dans la direction de P.

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'appelle une <u>base</u> de P. Un plan P possède une infinité de bases : toutes les bases de $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ au sens de l'algèbre linéaire conviennent.
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit <u>normal</u> à P s'il est non nul et s'il est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.b Coplanarité de trois vecteurs

On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de E sont <u>coplanaires</u> si la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée, autrement dit s'ils existe des réels (λ, μ, γ) non tous nuls tels que $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} + \gamma.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Cela revient à dire que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ sont contenus dans un même plan.

1.c Angles dans l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls, et P un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On ne peut pas définir d'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de façon universelle et absolue ; si on veut parler d'angle orienté, il faudra préciser l'orientation choisie sur le plan P contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

On choisit une orientation sur P. Soit alors θ_0 la détermination principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ dans P (c'est-à-dire la mesure qui est dans $]-\pi, \pi]$).
On définit la mesure de l'angle non orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme la valeur absolue θ_0 : c'est un nombre compris entre 0 et π.

2 Repérage dans l'espace

2.a Repère cartésien, coordonnées cartésiennes

- Une base de l'espace est un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs $\boxed{\text{non coplanaires.}}$
  Pour tout vecteur de l'espace $\vec{u}$, il existe alors un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.
  Le triplet (x, y, z) s'appelle les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.
- Un repère (cartésien) de l'espace est formé d'un point O, appelé origine du repère, et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un tel repère est noté $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
  Pour tout point de l'espace M, il existe alors un unique triplet (x, y, z) de réels tel que :
  $$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \quad \text{i.e.} \quad M = O + x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$
  Le triplet (x, y, z) s'appelle les coordonnées du point M.

En conséquence, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées, deux points sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.

En gardant ces notations, la base $\mathcal{B}$ (ou le repère $\mathcal{R}$) peut avoir les caractéristiques suivantes :

- orthogonale si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux :
$$\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{i}.$$
- orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et si les vecteurs de la base sont unitaires (on dit aussi normés) : $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$.

- directe ou indirecte :

Lorsqu'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est fixé, on pourra identifier un point et ses coordonnées, ainsi qu'un vecteur et ses coordonnées ; par ex $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$, $O = (0, 0, 0)$.
On parle alors de coordonnées cartésiennes et on peut identifier E à $\mathbb{R}^3$.
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur, A, B des points, de coordonnées respectives (x, y, z), (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B).

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

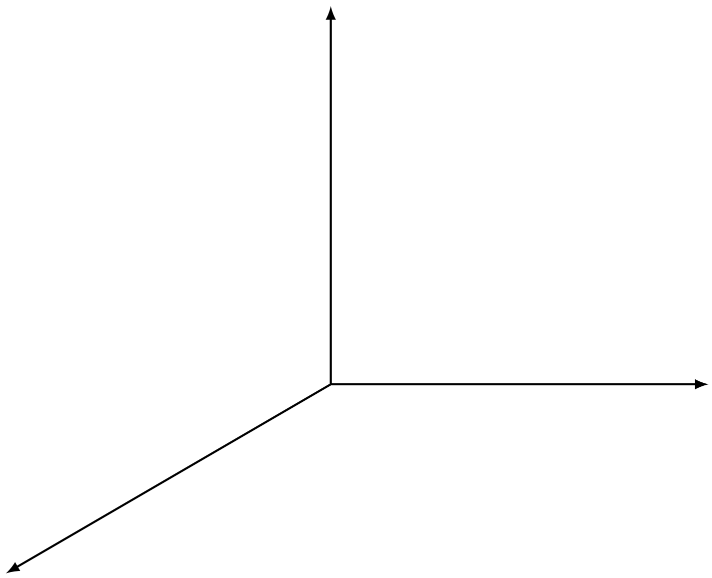
2.b Orientation d'un plan P

Soit P un vecteur de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à P.
Ce choix de $\overrightarrow{n}$ étant fixé, on définit la notion de base directe de P de la façon suivante :
Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de P est dite directe si la base de l'espace $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ est directe.

On dit alors que P est orienté par $\overrightarrow{n}$.
⚠ Si on change $\overrightarrow{n}$ et qu'on prend un vecteur normal opposé, l'orientation est changée en son opposée !

2.c Coordonnées cylindriques

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $M(x, y, z)$ un point de E. Soit P le plan d'équation $z = 0$ (c'est-à-dire le plan passant par O dirigé par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$), on l'oriente par le vecteur $\overrightarrow{k}$.
Notons H le projeté orthogonal de M sur le plan P.
Soit (ρ, θ) un couple de coordonnées polaires de H.
Alors (ρ, θ, z) s'appelle un système de coordonnées cylindriques de M.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \\ &= \boxed{\rho.\overrightarrow{u_\theta} + z.\overrightarrow{k}} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées cylindriques déterminent la position du point M : $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}}$

Il n'y a pas unicité des coordonnées cylindriques, mais pour $M \neq O$, en imposant $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, on a unicité.

3 Produit scalaire

Proposition :

(Rappels sur la norme) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de l'espace :

- $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$
- $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda|.||\overrightarrow{u}||$
- $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ (inégalité triangulaire)

3.a Définition

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace.
Définissons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- Si l'un des vecteurs est nul : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls,
  en notant θ une mesure de l'angle (non orienté) entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,\cos\theta}$$

Autres notations : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$, $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$, ...
$\boxed{\text{C'est un réel.}}$

Cas particuliers :

✧ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$

✧ En particulier, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.
On a donc $\boxed{||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}}$.

3.b Propriétés

Proposition :

(Caractérisation de l'orthogonalité)

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$$

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace, et λ un réel.

- Symétrie : $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- Bilinéarité :

$$(\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \lambda.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Corollaire :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace.

✧ $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

✧ $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

✧ $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2)$

✧ $\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Interprétation en termes de projection
Notons H le projeté orthogonal d'un point M
sur la droite passant par un point A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ non nul.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u}$$

Proposition :

(Expression en coordonnées cartésiennes)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé.
Notons (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarques :

- On retrouve en particulier que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- Les coordonnées s'obtiennent en faisant des produits scalaires avec les vecteurs de la base : $x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}, \quad y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}, \quad z = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{k}$.
  D'où $\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}\right)\overrightarrow{i} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}\right)\overrightarrow{j} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{k}\right)\overrightarrow{k}$.

4 Produit vectoriel

4.a Définition

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace.
Définissons le <u>produit vectoriel</u> de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un plan.
  On note θ l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

  $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est alors défini comme l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ vérifiant les 3 conditions :

  $$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{w} \text{ normal au plan } \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ ||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base directe de l'espace.} \end{array}}$$

$\boxed{\text{C'est un vecteur.}}$

⚠ Ce n'est défini que dans l'espace (en dimension 3).

Conséquences très importantes :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u} \qquad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$
- Norme : $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$;

  En particulier, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et non nuls, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthogonale directe.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe.

4.b Propriétés

Proposition :

(Caractérisation de la colinéarité dans l'espace)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires} \iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace, et λ un réel.

- Antinsymétrie : $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$
- Bilinéarité :
  $(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$
  $\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct.

- Les bases suivantes de E sont orthonormées indirectes :

  En effet, elles s'obtiennent à partir de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par un échange.
- Celles-ci sont orthonormées directes :

  En effet, elles s'obtiennent par permutation circulaire à partir de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, ce qui revient à faire deux échanges.

On en tire en particulier :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = \qquad \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} =$$

Proposition :

(Expression en coordonnées cartésiennes)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct. Notons (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Démonstration 1

Cela s'écrit :

Exemple : Calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4.c Interprétation en termes d'aire

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace non colinéaires.
Alors $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Corollaire :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace non colinéaires.
Alors $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'aire du triangle construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

5 Produit mixte

5.a Définition et premières propriétés

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace.
Définissons le produit mixte de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}}$$

C'est un réel.

Proposition :

- Antisymétrie : Si on échange deux vecteurs dans $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, le signe change.
- Trilinéarité : Le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs.
  Par exemple, la linéarité par rapport au 2ème vecteur s'écrit :

$$\forall\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) \in E^4,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\quad [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}]$$

Proposition :

(Expression en coordonnées cartésiennes)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct. Notons (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Alors :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Démonstration 2

Ainsi, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ est en fait le déterminant de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5.b Lien avec la coplanarité et l'orientation

Proposition :

(Coplanarité dans l'espace)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace E.

$$\boxed{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ coplanaires } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ base de } E \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0}$$

Proposition :

(Orientation d'une base dans l'espace)
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base de l'espace.

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ directe } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] > 0}$$
$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ indirecte } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] < 0}$$

De plus :
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 1$.
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée indirecte, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -1$.
(réciproques fausses !)

5.c Interprétation en termes de volume

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ des vecteurs non coplanaires.
Alors $|\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

Démonstration 3

6 Plans de l'espace

Dans la suite du cours, on se place un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E.

6.a Représentations d'un plan dans l'espace

6.a.i Paramétrage

Théorème :

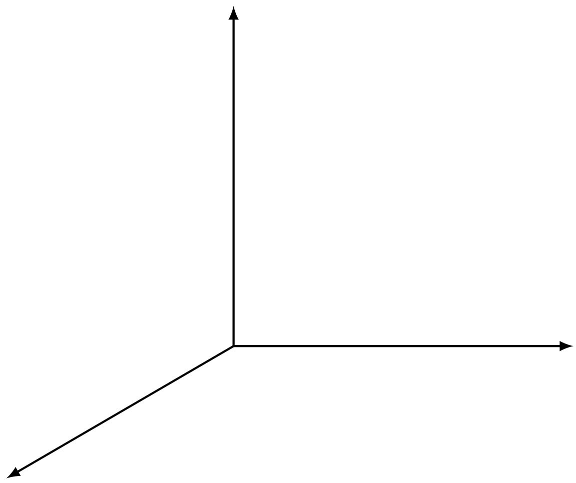
Les plans P de l'espace sont les ensembles admettant un paramétrage de la forme :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ y = z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{array}\right. \quad , \ (t, t') \in \mathbb{R}^2}$$

avec $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs $\boxed{\text{non colinéaires}}$.
Le plan P est alors le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Avec les notations ci-dessus et en notant M le point de coordonnées (x, y, z), le paramétrage signifie exactement $\boxed{M = A + t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}}$ en passant aux coordonnées !
C'est donc une simple traduction de la définition : $P = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exemple : Donner un paramétrage du plan P passant par $A(-1, 0, 1)$ et dirigé par $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 3)$, et représenter ce plan.



6.a.ii Équation cartésienne

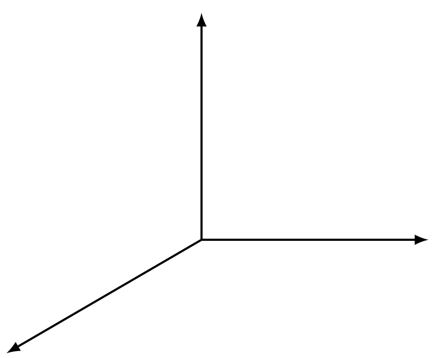
Théorème :

Les plans de l'espace sont les ensembles admettant une équation cartésienne de la forme :

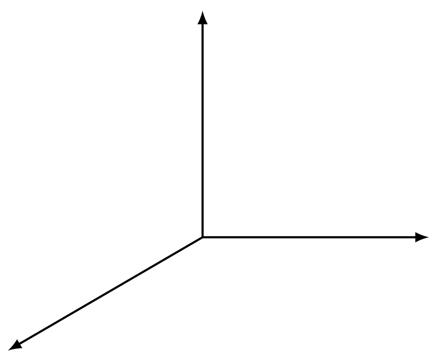
$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)}$$

Un vecteur normal au plan est alors $\boxed{\overrightarrow{n} = (a, b, c)}$

L'ensemble d'équation $y = -x + 2$ <u>dans l'espace</u> n'est pas une droite, mais un plan !



Représentons le plan d'équation $2x + y - z = 2$:



6.b Méthodes de base

6.b.i Obtenir une base (ou un paramétrage) d'un plan

On suppose qu'on dispose d'une équation cartésienne de P, ou au moins d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Voici deux méthodes :

- Trouver une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de P, c'est trouver deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{n}$, et non colinéaires. Cela peut se faire "à vue", ou bien, on peut trouver d'abord un premier vecteur $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{n}$, puis poser $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}$.
  Pour obtenir un point de P, il suffit de choisir une solution particulière de l'équation.
- Autre méthode : résoudre l'équation de P, on trouvera l'ensemble des solutions sous la forme $(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ce qui donne un point de P et une base de P.

Exemple : Déterminer une base, un point, un paramétrage de $P : x - 2y + 4z = 7$.
✎ **Démonstration** 4

Remarque : lorsqu'on cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ orthogonal à $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, on résout en fait $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ soit $\boxed{ax + by + cz = 0}$.
On reconnaît

6.b.ii Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal

Soit P le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et normal à $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et M le point de coordonnées (x, y, z).
Notre outil pour exprimer l'orthogonalité de deux vecteurs : le produit scalaire.

$$\begin{aligned}
M \in P &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \\
&\iff \boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0} \\
&\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}
\end{aligned}$$

6.b.iii Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'une base

Soit P le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Voici deux méthodes :

- Contruire un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à P, et se ramener au cas précédent. Le vecteur $\boxed{\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$ convient !

- Notons $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$. Nous avons un outil pour exprimer la coplanarité de trois vecteurs : le produit mixte. Ainsi, pour $M(x, y, z)$:

$$M \in P \iff \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires}$$
$$\iff \boxed{\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right] = 0} \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Remarque : En développant par rapport à la première colonne, on obtient :
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ avec } a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix},\ b = -\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix},\ c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}.$$
Finalement, le vecteur (a, b, c) est le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ de la première méthode...

Exemple : Trouver une équation cartésienne du plan P passant par $A(3, 4, -1)$ et dirigé par $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1, -3)$.

Démonstration 5

Remarque : si P est défini par trois points deux à deux distincts et non alignés A, B, C, on se ramène à ce cas en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$: ces vecteurs forment une base de P.

7 Droites de l'espace

7.a Représentations d'une droite dans l'espace

7.a.i Paramétrage

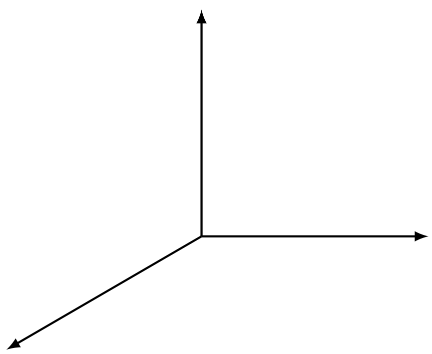
Théorème :

Les droites D de l'espace sont les ensembles admettant un paramétrage de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)}$$

Un point de la droite D est alors $A(x_0, y_0, z_0)$, et un vecteur directeur est alors $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Exemple : Donner un paramétrage de la droite D passant par $(1, 1, 0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$. La représenter.



7.a.ii Équations cartésiennes

En fait il nous faut $\boxed{\text{deux}}$ équations cartésiennes pour décrire une droite de l'espace : en effet, une droite D de l'espace peut se voir comme l'intersection de deux plans de l'espace.

Théorème :

> Les droites de l'espace sont les ensembles D admettant un système d'équations cartésiennes de la forme :
>
> $$\boxed{\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}}$$
>
> où $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n}'=(a',b',c')$ sont $\boxed{\text{non colinéaires}}$.
>
> Un vecteur directeur de la droite est alors $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$.

Avec les notations de ce théorème, on peut noter P le plan d'équation $ax+by+cz=d$, P' le plan d'équation $a'x+b'y+c'z=d'$, et on a alors $\boxed{D=P\cap P'}$.

$\overrightarrow{n}$ est normal à P, $\overrightarrow{n'}$ est normal à P' ; un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D doit être à la fois dans la direction de P et dans la direction de P', dont il doit être orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n'}$. Voilà pourquoi $\boxed{\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}}$ convient !

7.b Méthodes de base

7.b.i Passer d'un système d'équations à un paramétrage

Autrement dit, on cherche un point et un vecteur directeur de D.
Voici deux méthodes :

- résoudre le système
- trouver directement un point solution du système et un vecteur directeur à partir des vecteurs normaux aux plans dont D est l'intersection.

Exemple : $D \ : \ \begin{cases} x+y=2 \\ x+z=1 \end{cases}$.
Trouver un paramétrage de D.

Démonstration 6

7.b.ii Passer d'un paramétrage à un système d'équations

Autrement dit, on dispose d'un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D.
Voici deux méthodes :

— éliminer le paramètre

— trouver deux plans P et P' (et leurs équations) tels que $D = P \cap P'$:

- On trouve un premier vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ non nul et $\boxed{\text{orthogonal à } \overrightarrow{u}}$. Notons P le plan passant par A et normal à $\overrightarrow{n}$: comme $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}$, on a $D \subset P$.
- Puis on trouve un autre vecteur $\overrightarrow{n'} = (a', b', c')$ non nul, $\boxed{\text{orthogonal à } \overrightarrow{u}}$, $\boxed{\text{non colinéaire à } \overrightarrow{n}}$ (soit "à vue", soit en prenant $\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}$).
  Notons P' le plan passant par A et normal à $\overrightarrow{n'}$: de même, $D \subset P'$.
- Comme $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n'}$ non colinéaires, P et P' sont sécants : leur intersection est une droite, c'est D.

Exemple : $D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.
Trouver un système d'équations cartésiennes de D.

Démonstration 7

7.c Intersections droite-plan : problèmes de projections orthogonales

Définition :

> Soit P un plan et A un point extérieur à P.
> La droite orthogonale à P et passant par A coupe P en un unique point, appelé projeté orthogonal de A sur P.
> La longueur AH (c'est-à-dire $||\overrightarrow{AH}||$) s'appelle alors la distance de A à P, on la note $d(A, P)$.

Exemple : Soient $A = (3, 4, 4)$ et $P : x + y + z = 2$: déterminer le projeté orthogonal H de A sur P.

Démonstration 8

Définition :

Soit D une droite et A un point extérieur à D.
Le plan orthogonal à D et passant par A coupe D en un unique point, appelé projeté orthogonal de A sur D.
La longueur AH (c'est-à-dire $||\overrightarrow{AH}||$) s'appelle alors la distance de A à D, on la note $d(A, D)$.

Exemple : Soient $A = (1, 1, -3)$ et D la droite passant par $N(-1, 2, 1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, 1, -1)$. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur D.

✎ **Démonstration** 9

8 Sphères

Définition :

On appelle sphère de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{M \in E \ / \ \Omega M = R\}.$$

D'où une $\boxed{\text{équation cartésienne de } \mathcal{S}}$: Si $M(x, y, z)$ et $\Omega(x_0, y_0, z_0)$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\iff ||\overrightarrow{\Omega M}||^2 = R^2 \\ &\iff \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2} \end{aligned}$$

Réciproquement, si on a une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, on peut faire apparaître des carrés à l'aide des termes en x^2 et x, en y^2 et y, en z^2 et z, en en faisant des apparitions-disparitions pour les constantes. L'ensemble ainsi défini est soit une sphère, soit un point, soit l'ensemble vide.

Exercice classique : intersection d'une droite et d'une sphère
Utiliser un paramétrage de la droite et une équation caractésienne de la sphère.
Exemple : trouver l'intersection de la droite D passant par $(0, 1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (0, -1, 1)$, et de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1, 2, 3)$ et de rayon 2.

✎ **Démonstration** 10

Proposition :

Soient A et B deux points distincts de E.
L'ensemble des points M de E tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[A, B]$.

Plan du cours