TD 12. Dérivation.

Exercice 1. Étudier la dérivabilité de la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-e^x \text{ si } x<0 \\ \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \text{ si } x \geq 0. \end{cases} \end{array}$

Exercice 2. Pour les fonctions f suivantes, justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de f :

$$\text{a) } f(x) = (3x^2+x-5)\sin(x) \qquad \text{b) } f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \qquad \text{c) } f(x) = e^x \cos(x)$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f'(x) = -2xf(x)$.
c) En déduire : $\forall n \geq 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$P_{n+1}(x) + (2n+2)xP_n(x) + (n^2+n)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

Exercice 4. On pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle à déterminer, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
b) Justifier que sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer la valeur de $\left(f^{-1}\right)'(0)$, et déterminer $\left(f^{-1}\right)''$ en fonction de f^{-1} et des dérivées de f.

Exercice 5. Soit $a > 0$, et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie : $f(0) = 0$, f dérivable sur $]0,a]$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est n fois dérivable et qu'elle admet $n+1$ valeurs d'annulation distinctes.
   a) Montrer que f' admet au moins n valeurs d'annulation distinctes.
   b) Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins une valeur d'annulation.
2) Application : Soit P une fonction polynomiale de degré $k \in \mathbb{N}$.
   Que dire du polynôme $P^{(k+1)}$?
   À l'aide 1), montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $k+1$ solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle.

a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   Montrer que si f' ne s'annule pas sur I, alors f est strictement monotone sur I. En déduire qu'elle est injective.
b) On suppose f dérivable sur I.
   Montrer que si f' ne s'annule pas sur I, alors f est injective.
   Indication : raisonner par contraposée.

Exercice 8. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que : $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

a) On pose, pour $x \in]0, a]$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
Montrer que g est dérivable sur $]0, a]$, et calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, a]$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que la tangente en c à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Exercice 9. a) Montrer que pour tout x positif, $\operatorname{Arctan} x \leq x$.
b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\operatorname{Arcsin} x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n + 5}. \end{cases}$

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule valeur possible pour sa limite ? On notera φ cette valeur.

c) Déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \varphi| \leq k|u_n - \varphi|$.

d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ.

Exercice 11. 1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{e^x - 1} \end{array}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : x \to \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}\right)$.
Quel est le domaine de définition de f ?
Montrer que f est prolongeable par continuité en un certain point, et déterminer si le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ ou non.
Question bonus : simplifier l'expression de $f(x)$.