Corrigé du devoir maison 9.

1°) exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{\exp \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$

2°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \forall\, x \in]-\infty, 1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $\forall\, x \in]-\infty, 1[,\ \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$.
- Si c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$ donc $f^{(n+1)}(x) = -n!(-n-1)(1-x)^{-n-2} = \dfrac{n!(n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{(n+1)+1}}$, donc H_{n+1} est vraie.
- Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in]-\infty, 1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \geq 0$ puisque $1 - x > 0$.

Donc $\boxed{f \in \mathcal{A}(]-\infty, 1[, \mathbb{R}).}$

3°) Les fonctions $f + g$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I par somme et produit.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $f^{(n)} \geq 0$, $g^{(n)} \geq 0$, donc $(f+g)^{(n)} \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{f + g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Leibniz, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, et tous les termes de cette somme sont positifs par hypothèse ; donc $(fg)^{(n)} \geq 0$.
Donc $\boxed{fg \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

4°) Soit $p \in \mathbb{N}$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, c'est-à-dire qu'elle est indéfiniment dérivable, donc $f^{(p)}$ aussi.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(f^{(p)}\right)^{(n)} = f^{(p+n)}$, et cette fonction est positive sur I puisque $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
Donc $\boxed{f^{(p)} \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

5°) **a)** Par composition, exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f sur I, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$.

On a $\varphi' = f' \times (\exp \circ f)$ donc $\boxed{\varphi' = f' \times \varphi}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule de Leibniz en voyant φ' comme le produit $f'\varphi$ (les fonctions f' et φ sont bien n fois dérivables) :

$$(\varphi')^{(n)} = (f'\varphi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(n-k)} \varphi^{(k)} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\varphi^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} \varphi^{(k)}}$$

c) (Récurrence forte !) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "$\varphi^{(n)} \geq 0$ sur I.".

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\varphi^{(0)} = \varphi = \exp \circ f \geq 0$ puisque exp est positive.
- Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout k entre 0 et n.

  Soit $x \in I$. D'après la question précédente, $\varphi^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) \varphi^{(k)}(x)$.

On sait que $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ donc pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(n+1-k)}(x) \geq 0$.
Par ailleurs, par hypothèses de récurrence, pour tout k entre 0 et n, $\varphi^{(k)}(x) \geq 0$.
Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(x)$ est positif comme somme et produit de termes positifs, et ceci pour tout $x \in I$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On en déduit que $\boxed{\varphi \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

6°) Comme $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, on a $f^{(0)} = f \geq 0$ sur I : $\boxed{f \text{ est positive sur } I}$.

On sait aussi que f est dérivable et que $f' = f^{(1)} \geq 0$ sur l'intervalle I, donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } I}$.
Ainsi, f est croissante et minorée sur $]a, b[$; d'après un théorème du cours sur les fonctions monotones, $\boxed{f \text{ admet une limite finie } \ell_0 \text{ en } a}$.

Pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq 0$, donc $\boxed{\ell_0 \geq 0}$ par passage à la limite.

7°) Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, telle que $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.

- f est continue sur $[a, b[$ par hypothèse.
- f est dérivable sur $]a, b[$ puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$.
- Comme $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, on sait par la question 4 que $f' = f^{(1)}$ est également dans $\mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$. On peut donc appliquer à f' le résultat de la question précédente : $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ avec ℓ_1 réel positif.

Par le théorème de la limite de la dérivée, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$.

Comme $\ell_1 \in \mathbb{R}$, cela signifie que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell_1$. On a bien $\boxed{f'(a) \geq 0}$.
L'information $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ se réécrit $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$, donc f' est continue en a.
De plus, f est de classe C^1 sur $]a, b[$ (puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$).

On en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a, b[}$.

8°) Soit $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
D'après la question 6, f a une limite finie positive ℓ_0 en a, donc f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = \ell_0$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: H_n : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b[$ et $f^{(n)}(a) \geq 0$.

- f est continue sur $]a, b[$ car elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$, et on l'a prolongé par continuité en a, donc f est continue i.e. de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b[$.
  De plus, $f^{(0)}(a) = f(a) = \ell_0 \geq 0$.
  Donc H_0 est vraie.
- Supposons H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $f^{(n)}$ existe et est continue sur $[a, b[$.
  Par ailleurs, puisque $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, $f^{(n)}$ est aussi dans $\mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$ d'après la question 4.
  On peut donc appliquer à la fonction $f^{(n)}$ le résultat de la question 7 : la fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $\left(f^{(n)}\right)'(a) \geq 0$.
  Autrement dit f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b[$ et $f^{(n+1)}(a) \geq 0$.
  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[a, b[$ et $f^{(n)}(a) \geq 0$.

Ainsi f est de classe C^∞ sur $[a, b[$; et comme on sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $]a, b[$, on a maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $[a, b[$.
Autrement dit, $\boxed{f \in \mathcal{A}\left([a, b[, \mathbb{R}\right).}$

9°) Avec $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}}$, on a vu que $f \in \mathcal{A}\left(]a, b[, \mathbb{R}\right)$ avec $a = -\infty$ et $b = 1$. Mais elle n'est même pas prolongeable par continuité en 1 puisque $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Donc le même raisonnement ne sera pas possible pour la borne de droite.