

TD 21. Analyse asymptotique.

Exercice 1. *Attention aux idées fausses* On pose $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

- Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Qu'est-ce que cela signifie en termes de DL ? Qu'en déduire ?
- Montrer que, pourtant, f n'est pas deux fois dérivable en 0, et que f' n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0.

Exercice 2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I , et $a \in I$. Calculer, si cette limite existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 3. Déterminer les DL des fonctions f suivantes à l'ordre et au point demandés.

- $\frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x + 1}$ en 0 à l'ordre 2
- $\frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$ en 0 à l'ordre 2
- $\frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ en 1 à l'ordre 2
- $\exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2
- $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ en 0 à l'ordre 10
- $\text{Arctan}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2

Exercice 4. En utilisant le lien entre \tan' et \tan , retrouver le DL à l'ordre 3 en 0 de \tan .

Exercice 5. Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow J$

$$x \mapsto xe^x.$$

- Montrer que f réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Montrer que f et f^{-1} sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leurs ensembles de définition.
- Déterminer le DL_3 en 0 de f^{-1} .

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple de :

- $u_n = -\sqrt{n} + \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \ln(n^2)$
- $u_n = \ln(n+1) - \ln(n+2)$
- $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
- $u_n = n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$
- $u_n = \sqrt[3]{8n^3+1} - 2n$
- $u_n = \ln(n^2 - 3n + 2)$

Exercice 7. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné :

- $\frac{x^3 + 1 - \cos x}{(x^2 - 2x) \tan(3x)}, x = 0$
- $\frac{\sin(x \ln x)}{x}, x = 0$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{x}, x = 0 \text{ et } x = +\infty$
- $\frac{\ln \cos(3x)}{\sin^3(2x)}, x = 0$
- $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, x = +\infty$
- $x \ln(1+x) - (x+1) \ln x, x = +\infty$
- $\frac{\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1}{\text{Arcsin } x}, x = 0$
- $x(2 + \cos x) - 3 \sin x, x = 0$

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de (u_n) :

a) $u_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, où $t > 0$

b) $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + n + 2}}$

c) $u_n = n \left(\cos \frac{1}{n} - \ln(e + \frac{1}{n}) \right)$

d) $u_n = \frac{\ln \left(\cos \left(\frac{a}{n} \right) \right)}{\ln \left(\cos \left(\frac{b}{n} \right) \right)}$, (a et b non nuls)

Exercice 9. Calculer la limite de f au point donné :

a) $\ln x \cdot \ln(1 + \ln(1 + x))$, $x = 0$

b) $\frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1}{x^2}(e^{\cos x - 1} - 1)$, $x = 0$

d) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$, $x = e$

e) $(\sin x)^{\ln(x - \frac{\pi}{2})}$, $x = \frac{\pi}{2} +$

f) $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, $x = 0$

Exercice 10. On pose, pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$.

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$.

"Revisions" : applications déjà vues des DL

Exercice 11. On pose, pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur $] -1, +\infty[$, et déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 12. On pose $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 1}{x} - x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$.

Déterminer le domaine de définition de f .

Montrer que la courbe de f admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$, et étudier la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.