Chapitre 13. Systèmes linéaires et matrices.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n, p, q, r désigneront des entiers de $\mathbb{N}^*$.

Première partie

Systèmes linéaires

1 Définition, vocabulaire

Voici des exemples de systèmes linéaires :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 2x-y+z=0 \\ y+3z=5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-3z-4t=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

Définition :

- On appelle <u>équation linéaire à p inconnues</u> toute équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

  d'inconnues les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (ce sont des éléments de $\mathbb{K}$). On peut aussi dire que l'inconnue est le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, c'est un élément de $\boxed{\mathbb{K}^p}$.
  Les a_j sont les <u>coefficients</u> (éléments de $\mathbb{K}$), et $b \in \mathbb{K}$ le <u>second membre</u>.

- On appelle <u>système linéaire à n équations et p inconnues</u> tout système (S) de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \quad\ldots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

  où les $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ sont les <u>coefficients</u> (éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ;
  le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est le <u>second membre</u>, noté parfois b ;
  $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est le p-uplet des <u>inconnues</u>, parfois noté x.

- Deux systèmes (S) et (S') sont dits <u>équivalents</u> s'ils ont même ensemble de solution, c'est-à-dire si : $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ solution de $(S) \iff (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ solution de (S')

- Lorsque tous les b_i sont nuls, le système est dit <u>homogène</u>.
  Si (S) n'est pas homogène, on peut définir le <u>système homogène associé</u> à (S), c'est le système (H) obtenu en remplaçant tous les b_i par des 0.

- On dit que (S) est <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution. Dans le cas contraire, on dit qu'il est <u>incompatible</u>.

2 Systèmes triangulaires et échelonnés

Un système est dit échelonné si, lorsqu'on considère les coefficients $a_{i,j}$ présentés en tableau (en matrice), chaque ligne commence par davantage de zéros que la précédente. Quand, de plus, il y a autant d'équations que d'inconnues, on a un système triangulaire.
Ces systèmes se résolvent facilement via une "remontée".

Par exemple, résolvons le système triangulaire suivant :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & + & z & = & 3 \\ & & -y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Résolvons les systèmes échelonnés suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & - & 2z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

Pour résoudre un système linéaire plus général que ceux-ci, vous aviez sans doute l'habitude d'isoler une variable pour l'injecter dans une autre équation. Il y avait un risque de tourner en rond... Notre objectif pour la suite :

- Identifier précisément les opérations autorisées sur les systèmes linéaires (celles qui permettent d'obtenir un système équivalent au système d'origine)
- Apprendre un algorithme qui nous dictera les opérations à effectuer et l'ordre dans lequel les effectuer, pour obtenir à coup sûr un système échelonné ou triangulaire, et donc toutes les solutions !

3 Opérations élémentaires

Définition :

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système ou d'une matrice l'une des opérations suivantes :

- Échange de deux lignes L_i et L_j : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$, condition $i \neq j$.
- Multiplication d'une ligne L_i par une constante : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$, condition $\alpha \neq 0$.
- Ajout à une ligne L_i d'un multiple d'une autre ligne L_j : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \beta L_j}$, condition $j \neq i$, le nombre β est n'importe quel élément de $\mathbb{K}$.

Illustrons sur un exemple : $(S) \ : \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 2 \end{cases}$

On est autorisé à écrire des symboles $\Longleftrightarrow$ lorsqu'on fait des opérations élémentaires : celles-ci donnent bien un système équivalent, car elles sont "inversibles" :

- Inverse de $L_i \leftrightarrow L_j$:
- Inverse de $L_i \leftarrow \lambda L_i$:
- Inverse de $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$:

Remarques :

- ⚠ A priori il faut faire les opérations élémentaires une à la fois !
  Par exemple si on écrit $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$, on ne sait pas bien quelle ligne L_1 on utilise pour modifier L_2 : la nouvelle ou l'ancienne ? Cela peut mener à un système non équivalent.
  Par contre, on peut faire $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$ par exemple, car il n'y a pas d'ambiguïté.
- On peut faire : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $j \neq i$ et
  car c'est la composée de :

4 Résolution par l'algorithme du pivot de Gauss

Cet algorithme permet de passer de n'importe quel système à un système échelonné, que l'on sait ensuite résoudre par "remontée".
On part d'un système quelconque :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Pour plus de lisibilité dans l'explication de la méthode, on va représenter le système ainsi :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \qquad \text{où } \bullet \text{ désigne un coefficient quelconque}$$

On omet les inconnues x_1, ... x_p pour alléger.

Le but est de créer des coefficients nuls petit à petit : d'abord dans la première colonne en dessous du premier coefficient, puis dans la deuxième colonne, etc...

$\boxed{*}$ **Traitement de la première colonne** :
Souvent, le coefficient en haut à gauche, devant la première inconnue, est non nul ; ce sera notre premier "pivot".
Si jamais ce coefficient est nul, on échange L_1 avec une autre ligne plus bas dont le premier coefficient est non nul. On se ramène donc à la situation d'un coefficient $a_{1,1}$ non nul, encadrons-le pour le mettre en valeur (pivot) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{a_{1,1}} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ a_{2,1} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

On se sert du pivot pour éliminer les coefficients se trouvant en dessous dans la colonne :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{a_{1,1}} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$\boxed{*}$ **Traitement de la deuxième colonne** :

Il y a deux cas :

— On peut avoir une série de coefficients nuls dans la 2ème colonne à partir de la 2ème ligne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{a_{1,1}} & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Dans ce cas, on passe à la colonne suivante !

— Sinon, quitte à faire un échange de ligne, on se ramène à un coefficient $a_{2,2}$ <u>non nul</u> :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{a_{1,1}} & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \boxed{a_{2,2}} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

On se sert du pivot pour éliminer les coefficients se trouvant en dessous dans la colonne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{a_{1,1}} & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & \boxed{a_{2,2}} & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \bullet & \dots & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$\boxed{*}$ Et on recommence, colonne par colonne, jusqu'à obtenir un système échelonné !

Exemples :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = -3 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{l} 3x + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 3 \end{array}\right.$$

$$(S_4) : \left\{\begin{array}{l} 3x + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

Démonstration 1

5 Exemples de systèmes à paramètres

Lorsque le/les paramètres n'apparaissent que dans le second membre
Seule "complication" possible : obtenir une équation de compatibilité $0 = cste$: la constante peut dépendre des paramètres, et donc être vérifiée ou pas, selon les paramètres.

Exemple : $(S) \ : \ \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 5y - 2z = a \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ x + 4y - z = b \end{cases}$

Démonstration 2

Remarque : Bien différentier le/les paramètres d'un système et les inconnues ! Il faut considérer que pour chaque valeur du couple (a, b), on a en fait un système différent, et donc un ensemble de solutions différent. Il ne faut pas faire varier a et b dans l'ensemble des solutions !

Lorsque les paramètres sont dans les coefficients
Il faut choisir les pivots (en faisant des échange de lignes), pour retarder au maximum la discussion sur les paramètres.
Par exemple, dans l'exemple suivant, il ne faut pas commencer par faire un cas $m = 0$ et un cas $m \neq 0$!

Exemple : $(S) \ : \ \begin{cases} mx + y + x = 1 \\ x + y + (2m - 1)z = 1 \ \ , \ m \in \mathbb{R} \\ x + my + z = 3m + 3 \end{cases}$

Démonstration 3

Quelques techniques à retenir :

- Si à un moment on obtient le système $\left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & \bullet & + \ \bullet & = & \bullet \\ & & (1-m)y & + \ \bullet & = & \bullet \\ & & (m-1)y & + \ \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$,

  ne faites pas le cas $m = 1$: on peut faire une transvection, ici $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, qui donne un système triangulaire, même si on n'est pas sûr que $1 - m$ soit un vrai pivot (c'est-à-dire un nombre non nul).

- S'il y a autant d'équations que d'inconnues, on essaye d'obtenir un système triangulaire. On doit ensuite faire des cas selon que les coefficients diagonaux sont tous non nuls ou pas.
  Dans les cas où l'un des coefficients diagonaux est nul, on continue l'échelonnage.

Deuxième partie

Matrices

1 Définitions

1.a L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout tableau de scalaires de la forme :

On parle aussi de matrice de taille $n \times p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, ou $A = (a_{i,j})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

$a_{i,j}$ s'appelle le coefficient (i, j) de A ; on le note aussi $A_{i,j}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1.b Zoologie des matrices

La matrice <u>nulle</u> de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, notée 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté sur sa taille.

Les matrices <u>ligne</u> : par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; ce sont des éléments de

Les matrices <u>colonne</u> : par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; ce sont des éléments de

Les matrices <u>élémentaires</u> :

Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1 :

Par exemple, dans $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$, $E_{3,2} =$

Les matrices <u>carrées</u>

Lorsque $n = p$, on note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:

Il y a alors des coefficients dits diagonaux : ce sont les

Quelques matrices carrées particulières :

- Les matrices <u>diagonales</u> : de la forme

- La matrice <u>identité</u> de taille n, notée I_n :

Une matrice de la forme λI_n i.e. avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelée matrice <u>scalaire</u>.

- Les matrices triangulaires supérieures : de la forme $T =$

  On parle de matrice triangulaire supérieure stricte lorsque

- Les matrices triangulaires inférieures : de la forme $T =$

  On parle de matrice triangulaire inférieure stricte lorsque

2 Opérations sur les matrices

2.a Combinaisons linéaires (lois + et .)

Définition :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
On note $C = A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

On note $D = \lambda.A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

Exemples :

⚠ On ne peut pas sommer des matrices de tailles différentes.

On peut donc faire des combinaisons linéaires de matrices : par exemple, une combinaison linéaire de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice qui s'écrit $\lambda.A + \mu.B$ avec λ et μ des scalaires.
La loi . est souvent sous-entendue, on pourra noter $\lambda A + \mu B$.

Proposition :

- La loi $+$ est commutative : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ A+B = B+A$.
- La loi $+$ est associative : $\forall (A,B,C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3,\ (A+B)+C = A+(B+C)$.
- La matrice nulle est l'élément neutre pour $+$: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A+0 = 0+A = A$.
- Toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un opposé : $\exists ! B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \ A+B = B+A = 0$.
  L'opposé de A est noté $-A$; en notant $a_{i,j}$ les coefficients de A, les coefficients de $-A$ sont les $-a_{i,j}$; on a donc $-A = (-1).A$.

Proposition :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- $\lambda.(A+B) =$
- $(\lambda+\mu).A =$
- $\lambda.(\mu.A) =$
- $0.A =$ et $\lambda.0_{n,p} =$

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: par exemple, dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1,1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,2}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_{1,1}.E_{1,1} + a_{1,2}.E_{1,2} + a_{1,3}.E_{1,3} + a_{2,1}.E_{2,1} + a_{2,2}.E_{2,2} + a_{2,3}.E_{2,3}$$

De manière générale, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

2.b Produit matriciel

2.b.i Produit d'une matrice par une matrice colonne

À tout système linéaire (S), on peut associer une matrice des coefficients A, une matrice colonne des inconnues X, et une matrice colonne second membre B :

$$\text{Pour } (S)\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

$$\text{on a } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemple : (S) : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & - & z & + & 8t & = & 4 \\ & & y & + & 5z & - & t & = & 8 \\ x & + & 7y & - & 10z & & & = & 3 \end{array}\right.$, $A =$, $X =$, $B =$

.

On va définir le produit matriciel $A \times X$ de manière à retrouver le système (S). On pose :

De sorte que $(S) \iff A \times X = B$.

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

On définit le produit $C = A \times X$ comme la matrice colonne suivante :

$$A \times X =$$

Autrement dit, on a :

Concrètement :

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Remarques :

- ⚠ Attention aux formats des matrices :

- $\boxed{A \times X \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A :}$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} =$$

$$=$$

$$=$$

En conséquence, un système linéaire se mettant sous la forme $AX = B$ a des solutions si et seulement si

- Cas particuliers d'une matrice colonne élémentaire :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow j^{\text{ème}} \text{ position} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2.b.ii Généralisation à deux matrices rectangulaires

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit le produit $C = A \times B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ suivante :

On peut sous-entendre la loi $\times$ et écrire AB au lieu de $A \times B$.

Ainsi on peut voir $c_{i,j}$ comme le "produit" de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Important : En notant $X_1, \ldots, X_q$ les colonnes de B, le calcul de AB revient aux calculs de $AX_1, \ \ldots, \ AX_q$:

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

⚠ Pour faire $A \times B$, il faut que les tailles des matrices soient compatibles : le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \times B$ est défini mais pas $B \times A$.

⚠ La loi $\times$ n'est pas commutative :

- On vient de voir que $A \times B$ peut être défini mais pas $B \times A$.
- Même si $A \times B$ et $B \times A$ sont tous les deux définis, il peut ne pas y avoir égalité :

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

⚠ Contrairement à ce qu'on a avec le produit de nombres réels ou complexes :

$$\boxed{A \times B = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad A = 0 \text{ ou } B = 0}$$

Un contre-exemple :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À connaître : produit de deux matrices élémentaires
Soient $i \in \{1, \dots, n\}$, $(j, k) \in (\{1, \dots, p\})^2$ et $\ell \in \{1, \dots q\}$.
Définition :

On définit le symbole de Kronecker de la manière suivante : $\begin{cases} \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \\ \delta_{j,k} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On note $E_{i,j} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,\ell} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Que vaut $E_{i,j}E_{k,\ell}$?

2.b.iii Propriétés du produit matriciel

Proposition :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall (B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, \quad A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$

✎ **Démonstration** 4

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,

- $A \times I_p = A$ et $I_n \times A = A$
- $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$

✎ **Démonstration** 5

Ces propriétés, valables en particulier pour le produit avec une matrice colonne, permettent de préciser la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible :

Proposition :

Soit (S) un système linéaire, que l'on écrit sous forme matricielle $AX = B$, où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne des inconnues x_1, ... , x_p.
On note (H) : $AX = 0$ le système linéaire homogène associé.
On suppose que (S) possède au moins une solution $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions de (S) est $\{X_0 + Y \ / \ Y \text{ solution de } (H)\}$.

✎ **Démonstration** 6

2.c Transposition

C'est l'opération "qui échange les lignes et les colonnes".

Définition :

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A, notée ${}^{t}A$ ou A^T, est la matrice de
dont le coefficient (i, j) est

Exemples : pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, on a $A^T =$

pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $A^T =$; pour $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $A^T =$

Proposition :

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \left(A^T\right)^T =$
- $\forall\, (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda A)^T = \qquad\qquad (A+B)^T =$
- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall\, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \qquad (AB)^T =$

✎ **Démonstration** 7

3 Matrices carrées

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable pour la loi + et la loi . :
$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda.A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On peut résumer en disant que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n a une stabilité supplémentaire, par le produit :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

En résumé :

Proposition :

Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices carrées d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n.

3.a Puissances d'une matrice carrée

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les puissances successives de A par récurrence :

$$A^0 = \qquad\qquad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} =$$

Par exemple, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(I_n)^k =$

⚠ Une puissance d'une matrice non nulle peut être nulle :

Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

Définition :

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad (\lambda.A)^p = \lambda^p.A^p$
- $\forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad A^{p+q} = A^p \times A^q = A^q \times A^p$ (ainsi A^p et A^p commutent !)

On rappelle que deux matrices carrées quelconques ne commutent pas toujours. Cependant :

- I_n, 0_n, λI_n (pour $\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec n'importe quelle matrice
- Si A et B commutent (i.e. si $AB = BA$), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, A^p et B^k commutent.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculons :

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Autrement dit, pas de formule du binôme dans le cas général !

Cependant :

Théorème : Formule du binôme de Newton

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est-à-dire que $\boxed{A \times B = B \times A.}$
Alors,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p =$$

Exercice d'application très classique :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration 8

3.b Sous-ensembles stables

Proposition :

L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est stable pour les lois $+, ., \times$, ce qui signifie : pour toutes matrices D, Δ diagonales d'ordre n et pour tout scalaire λ,

$$\begin{cases} D + \Delta \text{ est diagonale} \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda D \text{ est diagonale} \\ D\Delta \text{ est diagonale} \end{cases}$$

Démonstration 9

Remarque :
Retenir que produit de deux matrices diagonales d'ordre n s'obtient très facilement en multipliant les coefficients diagonaux : par exemple,

D'où, pour les puissances : si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Proposition :

> L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est stable pour les lois $+, ., \times$.

✎ **Démonstration** 10

Proposition :

> L'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est stable pour les lois $+, ., \times$.

Remarque :
Soient T et U des matrices triangulaires supérieures. On pose $V = TU$.

Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. Si $i = j$ alors $v_{i,i} =$

Ainsi, les coefficients **diagonaux** de V sont les produits terme à terme des coefficients diagonaux de T et U.

On a le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.
Exemples :

3.c Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si .
  Cela revient à :

- On dit que A est antisymétrique si .
  Cela revient à :

Exemples :

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est antisymétrique, alors

Démonstration 11

Les propriétés de la transposition permettent d'obtenir très vite les résultats suivants :

Proposition :

L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n est stable pour les lois + et ..
L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n est stable pour les lois + et ..

Démonstration 12

4 Matrices carrées inversibles

4.a Introduction

Un réel (ou un complexe) a est inversible si et seulement si il est non nul ; son inverse $\frac{1}{a}$ est l'unique nombre a' tel que $a \times a' = a' \times a = 1$.

C'est l'inverse qui permet de résoudre $ax = b$ (a, b réels, inconnue x réelle) dans la plupart des cas :

— si a est inversible, alors il y a une unique solution $x = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \times b$.

— si a n'est pas inversible, c'est-à-dire si a est non nul, alors il peut y avoir 0 solution (si $b \neq 0$) ou une infinité de solutions (tout réel x dans le cas $b = 0$).

Ces résultats vont se généraliser, mais ce sera moins simple, car pour les matrices,

"A inversible" n'est pas équivalent à "$A \neq 0$"

Il y aura des matrices non nulles mais pourtant non inversibles...

4.b Définition, premiers exemples

Proposition-définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible si

La matrice B, lorsqu'elle existe, est unique ; on la note A^{-1}.

Démonstration 13

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire d'ordre n.

Exemples :

- I_n

- O_n

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - 2A + 3I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
  Démonstration 14

Proposition :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne ou une ligne nulle, alors A n'est pas inversible.

Démonstration 15

Proposition :

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et dans ce cas :

si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i \neq 0,$ alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$

Démonstration 16

Il y a un résultat similaire pour les matrices triangulaires supérieures, mais nous ne le prouverons qu'à la partie 5 :

Proposition :

Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas : si T était triangulaire supérieure, T^{-1} aussi ; si T était triangulaire inférieure, T^{-1} aussi ; et les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses de ceux de T.

4.c Premières propriétés

Proposition :

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

- Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et
- Si A et B sont inversibles alors $A \times B$ est inversible et
- Si A est inversible alors A^T est inversible et
- Si A est inversible alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est inversible et

✎ **Démonstration** 17

⚠ Une somme de matrices inversibles n'est pas inversible en général.

Conséquence :

Si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors PA est inversible si et seulement si A est inversible, si et seulement si AP est inversible.

Autrement dit, multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible préserve l'inversibilité.

✎ **Démonstration** 18

Remarque : dans les équivalences

Lorsqu'une matrice A est inversible, on peut écrire :

$$AP = AQ \Longleftrightarrow P = Q$$

En effet :

De même, $PA = QA \Longleftrightarrow P = Q$

⚠ Ces manipulations ne sont plus possibles si A n'est pas inversible !

On peut aussi écrire :

$$AP = Q \Longleftrightarrow$$

4.d Lien avec les systèmes et 1re méthode de calcul

Un système linéaire <u>carré</u>, avec autant d'équations que d'inconnues, peut se mettre sous la forme $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
D'après ce qui précède, si A est inversible,

$$AX = B \iff X = A^{-1}B$$

Ainsi, si A est inversible, alors le système linéaire $AX = B$ a une unique solution, qui est $X = A^{-1}B$.
On a même mieux, une équivalence :
Théorème :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution.

Démonstration 19

Application : 1re méthode pour prouver l'inversibilité et calculer l'inverse

Il suffit de résoudre le système dont parle le théorème :
- S'il n'y a pas de solution ou si l'ensemble des solutions est infini (décrit à l'aide d'un ou plusieurs paramètres), alors A n'est pas inversible.
- Si on trouve une unique solution, cela prouve que A est inversible, et comme l'unique solution doit être $A^{-1}B$, on en tire la matrice A^{-1}.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
Démonstration 20

5 Opérations élémentaires sur les lignes et deuxième méthode de calcul de l'inverse

5.a Traduction des opérations élémentaires en produit matriciel

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice vont s'interpréter par des produits matriciels.
Commençons par des exemples : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

Calculons : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A =$

Cela revient à faire l'opération élémentaire

Calculons : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A =$

Cela revient à faire l'opération élémentaire

Calculons : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times A =$

Cela revient à faire l'opération élémentaire

Généralisons : Soit $(i,j) \in \{1,\dots n\}^2$, avec $i \neq j$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Faire une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice particulière :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$ avec : $D_i(\lambda) =$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(\lambda \neq 0)$ avec : $T_{i,j}(\lambda) =$

- $L_i \leftrightarrow L_j$ avec : $P_{i,j} =$

De même on peut agir sur les colonnes de A en multipliant A à droite par une de ces matrices :

- Faire $A \times D_i(\lambda)$ revient faire l'opération :

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

- Faire $A \times T_{i,j}(\lambda)$ revient faire l'opération :

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

- Faire $A \times P_{i,j}$ revient faire l'opération :

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

5.b Liens avec l'inversibilité

Proposition :

> Les matrices de dilatation $D_i(\lambda)$, de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ et de permutation $P_{i,j}$ sont inversibles.

✎ **Démonstration** 21

Conséquence : Si une matrice carrée A' est obtenue à partir d'une matrice A par une opération élémentaire, A est inversible si et seulement si A' est inversible.

(En effet, A' s'obtient à partir de A par multiplication, à gauche ou à droite, par une matrice inversible, ce qui préserve l'inversibilité).

Ainsi, $\boxed{\text{les opérations élémentaires préservent l'inversibilité}}$.

Allons plus loin : imaginons qu'on passe de la matrice A à la matrice A' par une série d'opérations élémentaires uniquement sur les lignes.

- Ces opérations sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices $E_1, \ldots, E_k$ (matrices de dilatation, de transvection ou de permutation). Autrement dit, on a

$$E_k \ldots E_1 A = A'$$

- Pour récupérer le résultat de $E_k \ldots E_1$, rien de plus simple ! Il suffit d'effectuer les mêmes opérations élémentaires, mais à partir de I_n au lieu de A : la matrice obtenue sera bien :

$$E_k \ldots E_1 I_n = E_k \ldots E_1.$$

Remarque : ceci est également valable si on décide de ne faire que des opérations sur les colonnes ; il s'agira alors de multiplications à droite par des E_i.

Ces considérations permettent (enfin !) de démontrer la proposition sur l'inversibilité des matrices triangulaires :

Proposition :

> Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas : si T était triangulaire supérieure, T^{-1} aussi ; si T était triangulaire inférieure, T^{-1} aussi ; et les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses de ceux de T.

✎ **Démonstration** 22

En conséquence, comme l'inversibilité d'une matrice carrée est liée à l'unicité de la solution d'un système associé, cela prouve le résultat intuitif suivant :

Proposition :

> Un système linéaire triangulaire possède une unique solution si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

5.c Deuxième méthode de calcul de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Effectuons les opérations élémentaires sur les lignes dictées par l'algorithme du pivot de Gauss, $\boxed{\text{à la fois sur } A \text{ et sur } I_n}$.

À partir de A, on arrive alors à une matrice A' triangulaire supérieure, qui est inversible si et seulement si A l'est (c.f 5.b). D'où deux cas :

- Si l'un des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire est nul, alors celle-ci n'est pas inversible et donc A non plus.
- Si tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire sont non nuls, alors celle-ci est inversible et donc A aussi.

Dans le deuxième cas, on peut alors poursuivre le calcul par opérations sur les lignes pour transformer la matrice A' en I_n... tout en continuant de faire les opérations en simultané sur la matrice issue de I_n.
D'après ce qui a été dit en 5.b :

- Cela signifie que $MA = I_n$ avec M inversible (produit de matrices $E_k \dots E_1$). Nécessairement, $M = A^{-1}$!!
 (car on sait que A est inversible donc on peut multiplier $MA = I_n$ par A^{-1} à droite)
- Et justement, la matrice obtenue à partir de I_n, en faisant les mêmes opérations en simultané, sera $MI_n = M$, autrement dit c'est A^{-1} !

D'où la **2$^{\text{e}}$ méthode pour prouver l'inversibilité et calculer l'inverse** :

- On applique la méthode du pivot de Gauss sur A et simultanément sur I_n, placée à droite.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

- On obtient alors une matrice triangulaire supérieure à partir de A :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ matrice modifiée}$$

— Cas 1 : $\boxed{\text{Si la matrice triangulaire a (au moins) un coefficient diagonal nul}}$, alors elle n'est pas inversible, donc A non plus.

— Cas 2 : $\boxed{\text{Si tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire sont non nuls}}$, alors elle est inversible, donc A aussi.

- Dans le cas 2, on poursuit les opérations sur les lignes pour obtenir I_n à partir de A : on met des 1 sur la diagonale et on crée des 0 au dessus de la diagonale, colonne par colonne, en partant de la dernière.
  On fait aussi les mêmes opérations sur la matrice issue de I_n.

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \qquad & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ I_n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \leftarrow \text{c'est } A^{-1}\,! \end{array}$$

Remarque :
On peut aussi appliquer la méthode du pivot de Gauss en ne faisant que des opérations sur les colonnes. On a alors les mêmes résultats : A est inversible si et seulement si la matrice triangulaire obtenue l'est ; en poursuivant jusqu'à obtenir I_n, on obtient A^{-1} en faisant depuis le début les mêmes opérations à partir de I_n.

⚠ Il ne faut pas mélanger les opérations sur les lignes et sur les colonnes lorsque vous calculez A^{-1} !

Exemples :
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles ; si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

✎ **Démonstration** 23

Plan du cours