Exercices supplémentaires ch 11 (limites et continuité)

exo1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

exo2 : Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
f a une limite finie en $+\infty$, g périodique, $f+g$ est croissante.
Montrer que g est constante.

exo3 : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$, $f : [a,b] \to [a,b]$.
On suppose que : $\forall (x,x') \in [a,b]^2$, $x \neq x' \Rightarrow |f(x)-f(x')| < |x-x'|$
(on dit que f est contractante).
1) Montrer que f est continue
2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ a une unique solution dans $[a,b]$.

exo4 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, ayant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que f prend toute valeur strictement comprise entre $f(0)$ et l.

exo5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, décroissante. Montrer que f admet un point fixe et un seul.

exo6 : Soit $f : I \to I$ avec I intervalle, continue.
On suppose que $f\circ f$ admet un point fixe.
Montrer que f aussi admet un point fixe.

exo7 : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues.
On suppose que : $\forall x \in [a,b]$, $0 < g(x) < f(x)$.
Montrer que $\exists \lambda > 0, \forall x \in [a,b], (1+\lambda)g(x) < f(x)$