Devoir maison 5.

À rendre le lundi 8 décembre 2025

Exercice

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2y'' + 5|x|y' + 9y = 1 + x^2$$

Partie 1 : Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$

Dans cette partie, on se place sur $I =]0, +\infty[$.
Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On associe la fonction g définie par : $g : t \mapsto y(e^t)$.

1°) Donner le domaine de définition de g.
Justifier que g est deux fois dérivable et calculer g' et g'' en fonction de y et de ses dérivées.

2°) Montrer que y est solution de (E) sur I ssi g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants notée (F).

3°) Résoudre (F).

4°) En déduire les solutions de (E) sur I.

Partie 2 : Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$

Dans cette partie, on se place sur $J =]-\infty, 0[$.
Soit y une fonction deux fois dérivable sur J.
On pose, pour tout $x < 0$, $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^3}$, ce qui s'écrit aussi : $y(x) = x^3 z(x)$.

5°) Justifier que z est deux fois dérivable sur J puis montrer que

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } J \iff \underbrace{\forall x < 0,\ x^5 z''(x) + x^4 z'(x) = 1 + x^2}_{z \text{ est solution de } (G) \text{ sur } J}$$

6°) Résoudre l'équation (G).

7°) En déduire les solutions de (E) sur J.