TD 23. Géométrie plane.

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1. Soit ABC un triangle non aplati.

a) Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Exercice 2. Calculer l'aire du triangle ABC, où $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(3, 3)$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non aplati, on note $\hat{A}$ l'angle non orienté entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\hat{B}$ celui de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, et $\hat{C}$ celui de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. On note également $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
Démontrer la formule d'Al-Kachi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Exercice 4. a) Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite Δ passant par $A(1, 2)$ et parallèle à la droite D d'équation : $4x - y + 1 = 0$.
b) Étudier l'intersection de D et de la droite passant par le point $(-2, 5)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2)$.

Exercice 5. Soient A le point de coordonnées $(1, -1)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $3x + 4y - 1 = 0$.
Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Exercice 6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la droite D_a d'équation : $(1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$.

a) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, D_a est bien une droite.

b) Existe-t-il un point du plan qui appartienne à toutes les droites D_a ?

c) Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe au moins une droite D_a.

d) Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe deux droites D_a et $D_{a'}$ perpendiculaires.

Exercice 7. Soit l'ensemble $\mathcal{C}$ défini par l'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D} : x - y + 2 = 0$.

c) Soit A le point de coordonnées $(5, 0)$. Une droite est dite tangente à $\mathcal{C}$ si elle n'a qu'un seul point d'intersection avec $\mathcal{C}$.
Déterminer les droites passant par A et tangentes à $\mathcal{C}$.

Exercice 8. Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon 10.
Soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble défini par l'équation : $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Étudier l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 9. A tout réel m, on associe l'ensemble $\mathcal{C}_m$ d'équation : $x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m - 1) = 0$

a) Montrer que, pour tout réel m, $\mathcal{C}_m$ est un cercle.

b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

c) Vérifier que, parmi tous les cercles $\mathcal{C}_m$, il y en a un et un seul dont le rayon est minimal.

d) Prouver qu'il existe deux points A et B communs à tous les cercles $\mathcal{C}_m$.
Donner une équation de la droite (AB).

e) Démontrer que, pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ n'appartenant pas à la droite (AB), il existe un cercle $\mathcal{C}_m$ et un seul contenant M_0.