Devoir maison 4.

À rendre le lundi 17 novembre 2025

Exercice

On pose, pour tous entiers naturels p et q,

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \, \mathrm{d}t.$$

1°) Calculer $I(1,1)$, et calculer $I(p,0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2°) Montrer que, pour tous entiers naturels p et q : $I(p,q) = I(q,p)$.

3°) Soient p et q dans $\mathbb{N}$.
Montrer que $I(p+1,q) = \dfrac{p+1}{q+1} I(p,q+1)$.

4°) En effectuant une récurrence sur p, montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

5°) En déduire, pour tous entiers naturels p et q, la valeur de l'intégrale :

$$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1} \, \mathrm{d}\theta.$$

Indication : On effectuera le changement de variable $t = \sin^2\theta$.