Chapitre 14. Espaces vectoriels, applications linéaires.

Première partie : espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.a Définition et vocabulaire

Définition :

Soit E un ensemble muni de deux lois :

- Une loi de composition interne notée + : $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$
- Une loi de composition externe notée . : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$

On dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si

✪ $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes :

- la loi + est commutative :
- la loi + est associative :
- E admet un élément neutre pour +, unique, noté 0_E :
- Tout élément x de E admet un opposé pour +, noté $-x$:

✪ Les lois + et . vérifient aussi les 4 propriétés suivantes :
$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

(i) $\lambda.(x + y) =$

(ii) $(\lambda + \mu).x =$

(iii) $(\lambda \times \mu).x =$

(iv) $1.x =$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois + et ., on dit juste "E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel".

On dit aussi que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$, on dit juste "espace vectoriel".
Abréviation courante à l'oral et en TD : $\mathbb{K}$-ev ou ev.

Vocabulaire :

- Les éléments de E sont appelés les vecteurs.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.
- 0_E est appelé le vecteur nul.
  Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, on le note 0.

⚠ Le scalaire est toujours devant le vecteur ! Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.x \text{ a un sens, pas } x.\lambda$$

On abrège souvent en λx.

1.b Premiers exemples de référence

✪ $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec + l'addition naturelle sur $\mathbb{R}$
et $.: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \times x \end{array}$.

✪ De même, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec + l'addition naturelle sur $\mathbb{C}$
et $.: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda \times z \end{array}$.

✪ $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !

✪ $\mathbb{R}^2$, vu comme l'ensemble des vecteurs du plan muni de ses lois + et . naturelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De même pour $\mathbb{R}^3$ vu comme l'ensemble des vecteurs de l'espace... Généralisons :

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On muni $\mathbb{K}^n$ d'une loi de composition interne + et d'une loi de composition externe . définies par :

Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$x + y =$

$\lambda.x =$

$(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

✎ **Démonstration** 1

✪ Soit Ω un ensemble quelconque (par exemple un intervalle I de $\mathbb{R}$).
On note $E = \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ (noté aussi $\mathbb{K}^\Omega$).
On a des lois + et . naturelles : si f et g sont des éléments de E, autrement dit si ce sont des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{K}$ et $g : \Omega \to \mathbb{K}$, on pose

$$f+g : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \text{et} \quad \lambda.f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

$(\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
✎ **Démonstration** 2

Remarque : lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, on retrouve $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, l'ensemble des suites réelles et l'ensemble des suites complexes. Ainsi, munis des lois naturelles + et . sur les suites, ce sont des espaces vectoriels.

✪ Au chapitre 13, on a définit la somme de deux matrices de même format et la multiplication d'une matrice par un scalaire.
Muni de ces lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.c Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour tous vecteurs x et y de E et pour tous scalaires λ et μ :

a) $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

b) $(-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$

c) $\lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y$
$(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$

✎ **Démonstration** 3

⚠ Que conclure lorsque $\lambda.x = \mu.x$?

De même, si $\lambda.x = \lambda.y$:

1.d Combinaisons linéaires

Définition :

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaires de $v_1, \dots, v_p$ tout vecteur x tel que :

Remarque : Certains λ_i peuvent être nuls (voire tous, auquel cas $x = 0_E$!).

Exemples :

- Avec $p = 1$ vecteur : dire que x est combinaison linéaire de v_1 c'est dire que x s'écrit $x = \lambda.v_1$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Cela se dit : x colinéaire à v_1.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,1,2)$ est combinaison linéaire de $v = (-1,-1,0)$ et $w = (0,0,1)$ puisque

- Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$M = \begin{pmatrix} a & 2c & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} =$$

- Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1,1,1)$, $x = (1,2,3)$, $y = (1,-1,1)$. Le vecteur u est-il combinaison linéaire de x et de y ?

2 Sous-espaces vectoriels

2.a Définition, caractérisation, premières propriétés

Définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si :

-
-
-

La dernière condition est la stabilité par combinaison linéaire ; cela revient à la stabilité par $+$ et ., ou encore à :

Abréviation : sev.

Proposition :

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

-
-

Démonstration 4

Lorsqu'on montre que F est un sev avec la méthode "vérification de la définition"[1], pour montrer la deuxième condition $F \neq \emptyset$, on vérifie en général que $0_E \in F$.

Proposition :

Soit E un ev. E et $\{0_E\}$ sont des sev de E.

On les appelle "sev triviaux".

Proposition :

Soit E un K-ev et F un sev de E.
F est stable par combinaison linéaire d'un nombre quelconque de ses vecteurs, c'est-à-dire :

Démonstration 5

1. On verra de nombreuses autres méthodes pour montrer qu'une partie de E est un sev.

2.b Exemples et contre-exemples

Pour savoir si une partie F d'un espace vectoriel E est un sev de E ou non, il est conseillé de commencer, au brouillon, par regarder si 0_E est dans F ou non :

→ Si $0_E \notin F$,

→ Si $0_E \in F$,

✪ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$

✪ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - 2x + 1 = 0\}$

✪ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \ln(1 + x^2)\}$

✪ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - x^2 = 0\}$

✪ L'ensemble F des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration 6

✪ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ des fonctions définies et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration 7

Idem pour $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ pour tout n.

✪ Au chapitre 13, on a vu que l'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est stables par $+$ et par .
Cela signifie que $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Idem pour l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.c Sous-espace vectoriel engendré

Proposition-définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est noté $\text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$:

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p) =$$

C'est un sev de E, appelé <u>sev engendré par $v_1, v_2, \ldots, v_p$</u>.

Démonstration 8

Exemples :

- On a une nouvelle preuve que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$:

  Plus généralement, tout ensemble de la forme suivante sera un sev de $\mathbb{K}^n$:

- $F = \left\{(a + b, b, a - b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ / \ (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrice diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$D_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \ / \ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$=$$

$$=$$

On retrouve que $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: au ch6, on a vu que les solutions de (E_1) : $y' + xy = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: au ch6, on a vu que les solutions de (E_2) : $y'' - 2iy' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{ix} = \lambda x e^{ix} + \mu e^{ix}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Vocabulaire : Un sev engendré par un seul vecteur non nul s'appelle une droite vectorielle :
Pour v_1 non nul, $\text{Vect}(v_1) = \{\lambda.v_1 \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$, c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à v_1.
Cet ensemble est parfois $\mathbb{K}.v_1$.

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, avec $u = (1, 2, 3)$, $\text{Vect}(u) =$

- Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et u la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de F. On dit qu'une famille $(v_1, v_2 \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est une famille génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2 \ldots, v_p)$

Exemples :

1°) Pour $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\}$, on a trouvé $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right)$, donc que $((1,1,0),(1,0,1))$ est une famille génératrice de F. Mais il y en a d'autres :

2°) Trouvons une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$:

⚠ Il y a des ev E sans famille génératrice finie, c'est-à-dire qu'on ne peut pas les écrire $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ avec $v_1, \ldots, v_p$ famille finie de vecteurs de E.
Par exemple, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites réelles...

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F un sev de E, et $v_1, v_2 \ldots, v_p$ des vecteurs de F.
Alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2 \ldots, v_p) \subset F$.

✎ **Démonstration** 9

2.d Intersections de sous-espaces vectoriels

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G des sev de E.
Alors $F \cap G$ est un sev de E.

✎ **Démonstration** 10

Ceci donne une ttroisième méthode pour montrer qu'une partie H de E est un sev de E : l'écrire sous la forme $H = F \cap G$ avec F et G deux sev connus de E.

⚠ Cela ne marche pas, en général, pour $F \cup G$: ce n'est pas un sev de E en général !
Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$, $G = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.

Une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^*$ permet d'obtenir :

Proposition :

> Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F_1, \dots, F_n$ des sev de E.
> Alors $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ (noté $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$) est un sev de E.

Exemple d'application :

Notons F l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (S) : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$

Notons F_i l'ensemble des solutions de la $i$ème équation :

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p = 0\}$$

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

3.a Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition-définition :

> Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On définit la somme $F + G$ comme l'ensemble :
>
> C'est un sev de E.

Démonstration 11

On définit plus généralement la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ de n sev de E ; c'est un sev de E.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{Vect}\left((0,1,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((0,3,1)\right)$. Déterminons $F + G$:

Illustration :

Retenir, plus généralement :

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p) + \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_q) =$$

3.b Somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition :

Soient F et G des sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On dit que la somme $F+G$ est directe, ou bien que F et G sont en somme directe, si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique, autrement dit si :

Si F et G sont en somme directe, lorsqu'on manipule la somme $F+G$, on la note $F \oplus G$.

Proposition :

Soient F et G des sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
F et G sont en somme directe si et seulement si

Démonstration 12

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, cherchons si les sev suivants sont en somme directe ou non :

- les droites $F = \text{Vect}\left((0,1,0)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((0,3,1)\right)$
- les plans $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\right\}$ et $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\right\}$

Démonstration 13

Définition :

Soient F et G des sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si

Reprise des exemples précédents :

- Cependant P et $\Delta = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- $D_1 = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

✎ **Démonstration** 14

⚠ Ne pas confondre "supplémentaire" (algèbre linéaire) et "complémentaire" (théorie des ensembles).
⚠ Ne pas croire qu'un sev F a un unique supplémentaire dans E ; il en a en général une infinité ! Nous verrons tout à l'heure un autre supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.

Prouver que $F \cap G = \{0\}$ est quasiment toujours facile ; et dans les exemples traités jusqu'à présent, prouver que $F + G = E$ était relativement simple (et cela revient toujours à montrer que $E \subset F + G$, car l'autre inclusion est toujours vraie).
Comment faire quand montrer $E \subset F+G$ (c'est-à-dire décomposer un vecteur quelconque de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G) n'est pas évident ? On ne cherchera pas à montrer $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$, on fera plutôt une analyse-synthèse à la place, à l'aide du théorème de caractérisation suivant :

Théorème :

> Soient F et G des sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
> F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Autrement dit :

✎ **Démonstration** 15

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\right\}$ et $D = \mathrm{Vect}\left((1,2,-1)\right)$ sont supplémentaires.

  ✎ **Démonstration** 16

- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions de E constantes, et $G = \{f \in \mathbb{E} \ / \ f(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires dans E.

  ✎ **Démonstration** 17

Plan du cours