Rappel : Par définition,

un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

$$\emptyset,\ \mathbb{R},\ [c,d],\ ]c,d],\ [c,d[,\ ]c,d[,$$
$$[c,+\infty[,\ ]c,+\infty[,\ ]-\infty,d],\ ]-\infty,d[$$

On souhaite montrer :

Proposition :

Soit I une partie de $\mathbb{R}$,

I intervalle de $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset I$

$\Rightarrow$ Supposons que I ~~soit~~ soit un intervalle de $\mathbb{R}$

Faisons le cas d'un segment : on suppose que $I = [c,d]$ avec c, d des réels tels que $c \leq d$.

$I = [c,d] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, c \leq x \leq d \}$.

Soient a et b des éléments de I tels que $a \leq b$.

Montrons que $[a,b] \subset I$; on a donc $c \leq a \leq d$
et $c \leq b \leq d$.

Soit $x \in [a,b]$. On a : $a \leq x \leq b$

or $c \leq a$ et $b \leq d$

donc $c \leq x \leq d$ ie $x \in [c,d] = I$

ceci pour tout $x \in [a,b]$ donc $[a,b] \subset I$.

On a bien montré : $\forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leq b$, $[a,b] \subset I$

$\Leftarrow$ Supposons que : $\forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leq b$, $[a,b] \subset I$.

Montrons que I est de l'un des 10 types d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Si $I = \emptyset$, c'est un intervalle ! supposons que I soit non vide.

cas 1 : I majorée et minorée.

Par la prop. de la borne supérieure (et de la borne inférieure), I possède une borne supérieure et une borne inférieure ; notons $c = \inf(I)$ et $d = \sup(I)$

- **sous-cas 1** : $c \in I$ et $d \in I$, montrons que $I = [c,d]$.
  - * $c \in I$ et d majore I donc $c \leq d$, donc par l'hypothèse, $[c,d] \subset I$.
  - * Soit $x \in I$, comme c est un minorant de I : $c \leq x$

    — d — majorant de I : $x \leq d$

    ainsi $c \leq x \leq d$ donc $x \in [c,d]$

    Ainsi $I \subset [c,d]$
  - * Conclusion : $I = [c,d]$, c'est un intervalle.

• **sous-cas 2** : $c \in I$ et $d \notin I$. Montrons que $I = [c, d[$

* Soit $x \in [c, d[$. Montrons que $x \in I$.

on a $x < d$ et d est le plus petit des majorants de I

donc x n'est pas un majorant de I :

non $(\forall t \in I,\ t \leq x)$ <u>ie</u> $\exists t \in I,\ t > x$

donc $c \leq x < t$ avec $c \in I$, $t \in I$ donc $x \in [c, t] \subset I$

donc $x \in I$, donc $[c, d[\subset I$

* Soit $x \in I$. Montrons que $x \in [c, d[$

Comme c est un minorant de I : $c \leq x$

— d est un majorant de I : $x \leq d$, si on avait $x = d$,

on aurait $d = x \in I$: contradiction.

donc $c \leq x < d$ <u>ie</u> $x \in [c, d[$

ceci pour tout $x \in I$ donc $I \subset [c, d[$.

* Conclusion : $I = [c, d[$.

- **sous-cas 3** : $c \notin I$ et $d \in I$:

  on montre de façon similaire que $I =]c, d]$

- **sous-cas 4** : $c \notin I$ et $d \notin I$:

  on montre de façon similaire que $I =]c, d[$

Cas 2 : I majorée mais non minorée

Comme $I \neq \emptyset$ et I majorée, elle possède une borne supérieure, notons $d = \sup(I)$.

- **sous-cas 1** : $d \in I$. Montrons que $I =]-\infty, d]$.

  * Soit $x \in]-\infty, d]$. Montrons que $x \in I$.

  on a $x \leq d$.

  I est non minorée : non$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall t \in I, m \leq t)$

  ie : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists t \in I, t < m$

  on peut l'utiliser avec $m = x$: on obtient un $t \in I$, $t < x$

Ainsi, on a $t \leq x \leq d$ avec $t, d \in I$ ie $x \in [t,d] \subset I$
donc $x \in I$! (hyp)

Ainsi, $]-\infty, d] \subset I$.

* Soit $x \in I$. d est un majorant de I donc $x \leq d$ ie $x \in]-\infty, d]$
  Ainsi $I \subset]-\infty, d]$
* Finalement, $I =]-\infty, d]$

• Sous-cas 2 : $d \notin I$, on montre que $I =]-\infty, d[$

⊛ Cas 3 : I minorée mais non majorée

De même, on note $c = \inf(I)$ et on montre $I = [c, +\infty[$ ou $I =]c, +\infty[$, selon que $c \in I$ ou non.

⊛ Cas 4 : I non minorée et non majorée...

De même, on montre que $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$!