Corrigé du devoir maison 5.

Exercice 1

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \cos^n x$ ne s'annule pas sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc , $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^n x}$ est bien définie sur ce segment.

De plus, cette fonction y est continue comme inverse et produit de fonctions continues.

Ainsi, $\boxed{I_n \text{ existe}}$.

2°) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \,\mathrm{d}x$ donc $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{4}}$.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$ donc $\boxed{I_2 = 1}$.

3°) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \,\mathrm{d}x.$

★ On pose $u = \sin(x)$. $x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

★ On note $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$

★ $\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ alors } u = 0 \\ \text{Si } x = \dfrac{\pi}{4} \text{ alors } u = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Par le théorème de changement de variables,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-u^2} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{(1-u)+(1+u)}{(1-u)(1+u)} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(|1+u|) - \ln(|1-u|) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\left| \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \ln(\sqrt{2}+1)}$$

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} \times \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x.$

Soit u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$u(x) = \frac{1}{\cos^n x} = \cos^{-n} x \qquad u'(x) = (-n)(-\sin x)\cos^{-n-1} x = n\frac{\sin x}{\cos^{n+1} x}$$

$$v(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad v'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[\frac{\tan x}{\cos^n x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2} x}\,\mathrm{d}x \\
&= (\sqrt{2})^n - n(I_{n+2} - I_n) \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
(n+1)I_{n+2} &= (\sqrt{2})^n + nI_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n}$$

Exercice 2

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_n + u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n t + \tan^{n+2} t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\left(1+\tan^2 t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\tan'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On reconnaît la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}\tan^{n+1}(t)$:

$$\begin{aligned}
u_n + u_{n+2} &= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}(\tan 0)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction tan positive sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$, la fonction $\tan^n$ aussi, et donc, par la propriété de positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$.
De même, $u_{n+2} \geq 0$, donc $u_n + u_{n+2} \geq u_n$.
Ainsi, on a bien $0 \leq u_n \leq u_n + u_{n+2}$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cela se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Or $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ (ce qui signifie : la suite converge et sa limite est 0).

3°) Posons $x = \tan(t)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, ce qui revient à $t = \mathrm{Arctan}(x)$. La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
Si $t = 0$, $x = 0$, et si $t = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$. D'où :

$$\boxed{u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}.$$

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in [0,1]$. On a $0 < 1 + x^2 \leq 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.

Puis, comme $x^n \geq 0$, $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

Ceci pour tout $x \in [0,1]$, donc, par croissance de l'intégrale sur le segment $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x &\leq u_n \text{ d'après la question précédente} \\
\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 &\leq u_n \\
\boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leq u_n}
\end{aligned}$$