TD 18. Ensembles finis, dénombrement.

Exercice 1. Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique.
Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Exercice 2. a) Soit A l'ensemble des nombres à 6 chiffres formés avec les chiffres $1, 2, 3, \dots, 9$. Quel est le cardinal de A ?
b) Déterminer le nombre d'éléments de A dont tous les chiffres sont pairs.
c) Déterminer le nombre d'éléments de A dont tous les chiffres sont différents.
d) Déterminer le nombre d'éléments de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante.
e) Déterminer le nombre d'éléments de A où deux chiffres côte à côte sont toujours différents.

Exercice 3. Donner le nombre d'anagrammes de LAPIN, MAMAN, ANAGRAMMES.

Exercice 4. On dispose de 8 boules numérotées de 1 à 8, et de 3 sacs numérotés de 1 à 3. On répartit les 8 boules dans les 3 sacs, chaque sac pouvant bien contenir entre 0 et 8 boules.

a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
b) Combien y a-t-il de répartitions avec aucun sac vide ?

Exercice 5. On dispose d'un jeu de 32 cartes (hauteurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as, pour chacune des 4 couleurs coeur, pique, trêfle, carreau).
a) Combien y a-t-il de "mains" (5 cartes) possibles ?
b) Combien y a-t-il de mains avec exactement un as ?
c) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ?
d) Combien y a-t-il de mains avec au plus un as ?
e) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un roi ?
f) Combien y a-t-il de mains avec exactement un as et exactement un trêfle ?
g) Combien y a-t-il de full (3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur) ?

Exercice 6. Sur une étagère, il faut ranger 4 livres de maths distincts, 6 livres de physique distincts, et 2 livres de chimie distincts.
a) Quel est le nombre de rangements possibles si on veut que les livres soient regroupés par matière ?
b) Quel est le nombre de rangements possibles si on n'impose que le regroupement des livres de mathématiques uniquement ?

Exercice 7. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant p boules blanches et q boules noires, numérotées de 1 à $p + q$. On effectue un tirage simultané de n boules, avec $n \leq p + q$.

a) En calculant le nombre de tirages possibles de deux manières, montrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.
b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Retrouver cette valeur en développant $(1 + x)^{2n}$ de deux manières différentes.

Exercice 8. On souhaite placer n couples homme/femme ($n \in \mathbb{N}^*$) autour d'une table ronde.

a) Donner le nombre de dispositions possibles si les chaises sont numérotées. Comment obtenir le nombre de dispositions possibles si les chaises ne sont pas numérotées et qu'on ne se préoccupe que des positions relatives des convives ?

Dans la suite, on suppose que les chaises sont numérotées.

b) Déterminer le nombre de dispositions possibles qui respectent l'alternance homme/femme.

c) Déterminer le nombre de dispositions possibles qui ne séparent pas les couples.

d) Déterminer le nombre de dispositions possibles qui respectent l'alternance homme/femme et qui ne séparent pas les couples.

Exercice 9. Combien y a-t-il de couples (x, y) de $\{0, 1, \ldots, n\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ tels que...

a) $x + y = n$?   b) $x \neq y$?   c) $x > y$?

Exercice 10. Un échiquier comporte 8 lignes et 8 colonnes. Une tour peut prendre toute pièce se situant sur la même colonne ou sur la même ligne qu'elle.

Combien y a-t-il de façons de placer 8 tours sur l'échiquier pour qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par une autre ?

Exercice 11. Soit $\mathcal{M}$ un mot formé de n lettres deux à deux distinctes, par exemple TIPE pour $n = 4$. On appelle dérangement de $\mathcal{M}$ tout mot formé par les mêmes lettres que $\mathcal{M}$, mais où aucune n'est à la place qu'elle occupait initialement dans $\mathcal{M}$.

Par exemple, EPTI est un dérangement de TIPE, mais pas PIET.

On note d_n le nombre de dérangements d'un mot de n lettres ; montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.

Exercice 12. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Combien existe-t-il de partitions de E, c'est-à-dire de couples (A, B) de parties de E, disjointes, telles que $A \cup B = E$?

2) Combien existe-t-il de recouvrements de E, c'est-à-dire de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$?