Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 1.

1°) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in\in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_1'(x) = \frac{4.\frac{1}{x}(\ln x)^3 x - (\ln x)^4 .1}{x^2} = \frac{4(\ln x)^3 - (\ln x)^4}{x^2} = \boxed{(\ln x)^3 \frac{4 - \ln x}{x^2}}$$

2°) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2'(x) = \boxed{\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) 2\cos(2x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(2x)}$$

Non demandé On peut tenter de simplifier en mettant tout en fonction de $\cos x$ (utile si on avait souhaité le signe de f_2') :

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right)(4\cos^2(x) - 2) - 2\sin(x)\cos(x)2\sin(x)\cos(x) \\
&= 4\cos^4(x) + 6\cos^2(x) - 2\cos^2(x) - 3 - 4\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos^2(x) \\
&= 4\cos^4(x) + 4\cos^2(x) - 3 - 4\cos^2(x) + 4\cos^8(x) \\
&= 8\cos^4(x) - 3
\end{aligned}$$

On peut aussi tout exprimer en fonction de $\cos(2x)$:

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \left(2\cos^2 x + 3\right)\cos(2x) - \sin^2(2x) \\
&= \left(2\cos^2 x - 1 + 4\right)\cos(2x) - \left(1 - \cos^2(2x)\right) \\
&= (\cos(2x) + 4)\cos(2x) - 1 + \cos^2(2x) \\
&= 2\cos^2(2x) + 4\cos(2x) - 1
\end{aligned}$$

3°) Si $x > 0$, $1 + \frac{2}{x} > 1$ donc $f_3(x)$ existe.
Si $x < 0$, $1 + \frac{2}{x} > 0 \iff \frac{2}{x} > -1 \iff \frac{1}{-x} < \frac{1}{2} \iff -x > 2$ car $-x$ et 2 sont strictement positifs.
Le domaine de définition de f_3 est donc $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. C'est aussi le domaine de dérivabilité.
Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$,

$$f_3'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = \boxed{\frac{-2}{x(x+2)} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)}$$

4°) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)$ existe et $\tan(x) \geq 0$, donc $\boxed{f_4 \text{ est bien définie sur } [0, \frac{\pi}{2}[}$.
Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, tan est dérivable et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Par composition, } f_4 \text{ est dérivable sur }]0, \frac{\pi}{2}[}$.

Pour tout $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f_4'(x) = \boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}}$$

5°) $X^2 - 3X - 10$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 + 40 = 7^2$, donc ses racines sont $\dfrac{3+7}{2} = 5$ et $\dfrac{3-7}{2} = -2$. Comme le coefficient de X^2 est positif, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$$

Donc $\boxed{f_5 \text{ a pour domaine de définition }]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[.}$

$x \mapsto x^2 - 3x - 10$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, et pour tout $x \in \,]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, $x^2 - 3x - 10 > 0$. De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, $\boxed{f_5 \text{ est dérivable sur }]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[.}$

Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$,

$$f_5'(x) = \boxed{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x - 10}}}$$

Soit $x \in]5, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{f_5(x) - f_5(5)}{x-5} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x-5} \\
&= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x-5} \\
&= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}} \text{ car } x - 5 > 0 \text{ donc } x - 5 = \sqrt{x-5}^2 \\
\frac{f_5(x) - f_5(5)}{x-5} &\xrightarrow[x \to 5]{} +\infty
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_5 \text{ n'est pas dérivable en } 5}$.

Soit $x \in]-\infty, -2[$:

$$\begin{aligned}
\frac{f_5(x) - f_5(-2)}{x-(-2)} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x+2} \\
&= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x+2} \\
&= \frac{\sqrt{-x+5}\sqrt{-x-2}}{-\sqrt{-x-2}^2} \text{ car } x + 2 < 0 \text{ et } -x + 5 < 0 \\
&= \frac{\sqrt{-x+5}}{-\sqrt{-x-2}} \\
\frac{f_5(x) - f_5(-2)}{x-(-2)} &\xrightarrow[x \to -2]{} -\infty
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_5 \text{ n'est pas dérivable en } -2.}$