Correction du devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de } (E_1) &\iff 1+\cos(x)+2\cos^2(x)-1=0\\
&\iff \cos(x)\left(2\cos(x)+1\right)=0\\
&\iff \cos(x)=0 \text{ ou } \cos(x)=-\frac{1}{2}\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } \cos(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc : $\boxed{\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de } (E_2) &\iff 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\sin(3x)\right)=\sqrt{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(3x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(3x)x=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff \cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 3x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } 3x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc : $\boxed{\left\{\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}, -\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 2

1°) a) Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $\mathcal{P}_n$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$.

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{2}\binom{k}{2}=\binom{2}{2}=1$, et $\binom{2+1}{3}=1$, donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, avec $n \geq 2$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \binom{n+1}{2} \\
&= \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{3} \quad \text{par la fomule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

  Ainsi P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}}$.

b) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
T_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(2\binom{k}{2} + k \right) &= 2\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=2}^{n} k + 1 \\
&= 2\binom{n+1}{3} + \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{par la question précédente} \\
&= 2\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)n \times 2(n-1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)\,(2n-2+3)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

c) Par ailleurs, pour tout $k \geq 2$, $2\binom{k}{2} + k = 2\frac{k(k-1)}{2} + k = k(k-1) + k = k^2$.

Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$T_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(2\binom{k}{2} + k \right) = 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n.$$

On retrouve donc que pour tout $n \geq 2$, $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2°) a) D'une part,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} i \right) &= \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)i \quad \text{car } i \text{ est une constante vis-à-vis de } j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (n+1)i - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - S_n \\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - S_n
\end{aligned}$$

D'autre part, $$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$$
$$= \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

On a donc bien : $\boxed{\frac{1}{2}S_n + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2} - S_n}$.

b) On en tire :

$$\frac{3}{2}S_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$
$$S_n = \frac{2}{3}n(n+1)\left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$
$$S_n = \frac{2n(n+1)}{3}\frac{2n+2-1}{4}$$
$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 3

1°) sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$, et ch est strictement positive, donc $\boxed{\text{th est définie sur } \mathbb{R}}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(-x) = \dfrac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = -\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\,\text{th}(x)$ car sh est impaire et ch est paire.

Ainsi, $\boxed{\text{th est impaire}}$.

2°) $\boxed{\text{La fonction th est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme quotient et somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x}$ donc $\boxed{\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}}$.

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Explication des limites en $+\infty$ et $-\infty$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) = \dfrac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Comme $\begin{cases} -2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ e^X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$, par composition, il vient : $e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par somme et quotient, on en tire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$.

Comme th est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$.

4°) • $\mathbb{R}$ est un intervalle
• th est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$
• th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par le théorème de la bijection, th réalise une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $\text{th}(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x)[$. Donc $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1,1[.}$

5°) Vérifions d'abord l'égalité sur th' :

Soit $x \in \mathbb{R}$. $1 - \text{th}^2 x = 1 - \dfrac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \dfrac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$.

Donc $\boxed{\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2 x}$.

• th est dérivable sur $\mathbb{R}$
• pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$ donc $\text{th}'(x) \neq 0$.

Donc argth est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $y \in]-1,1[$,

$$\text{argth}'(y) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(y))} = \frac{1}{1-\text{th}^2(\text{argth}(y))}$$

$$\boxed{\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-y^2}}$$

6°) On note $f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \end{array}$.

On remarque que, pour $y \in]-1,1[$, $f(y) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+y) - \ln(1-y))$ car $1+y > 0$ et $1-y > 0$.

f est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout $y \in]-1,1[$,

$$f'(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-y+1+y}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y^2} = \text{argth}'(y)$$

Les fonctions argth et f sont dérivables sur <u>l'intervalle</u> $I =]-1,1[$ et ont la même dérivée sur cet intervalle. On en déduit que les fonctions diffèrent d'une constante :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall y \in]-1,1[,\ \text{argth}(y) = f(y) + c$$

Prenons alors $y = 0$. $\text{th}(0) = 0$ donc $\text{argth}(0) = 0$.

D'autre part, $f(0) = \dfrac{1}{2}\ln(1) = 0$. Donc $c = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \in]-1,1[,\ \text{argth}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)}$.

7°) ch est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\text{ch}(x) \geq 1$, donc $\dfrac{\text{ch}\, x - 1}{\text{ch}\, x + 1}$ existe.

De plus on en tire que $0 \leq \text{ch}\, x - 1$, et également $0 < \text{ch}(x) + 1$, donc $0 \leq \dfrac{\text{ch}\, x - 1}{\text{ch}\, x + 1}$.

Enfin, on a $\text{ch}\, x - 1 < \text{ch}\, x + 1$, et comme $\text{ch}(x) + 1 > 0$, on en tire $\dfrac{\text{ch}\, x - 1}{\text{ch}\, x + 1} < 1$.

Finalement, $0 \leq \sqrt{\dfrac{\text{ch}\, x - 1}{\text{ch}\, x + 1}} < 1$. Comme argth est définie sur $]-1,1[$, $g(x)$ existe.

$\boxed{\text{Ainsi } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

8°)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) \qquad \text{par 6}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})^2}{(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1+y-1+2\sqrt{(y+1)(y-1)}}{y+1-(y-1)}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{y^2-1})}$$

9°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par ce qui précède $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x}) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x + |\operatorname{sh} x|)$.

Si $x \geq 0$ alors $\operatorname{sh}(x) \geq 0$, donc $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}$.

Si $x < 0$ alors $\operatorname{sh}(x) < 0$, donc $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = \frac{1}{2}\ln(e^{-x}) = -\frac{x}{2}$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{|x|}{2}}$.

10°) On sait que th est à valeurs dans $]-1,1[$ donc $0 \leq |\operatorname{th}(x)| < 1$ et $0 \leq |\operatorname{th}(y)| < 1$. D'où, par produit, $|\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)| < 1$. Ainsi, $\boxed{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y) \neq 0}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)} &= \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \times \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}\\
&= \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{y+x}+e^{y-x}-e^{-y+x}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}\\
&= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+e^{-x-y}}\\
&= \operatorname{th}(x+y)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}}$.

11°) Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $A = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$ et $B = \underbrace{\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right)}_{\text{noté } \alpha} - \underbrace{\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)}_{\text{noté } \beta}$.

D'une part, $\operatorname{th}(A) = \operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)\right) = \frac{1}{k^2+3k+1}$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(B) = \operatorname{th}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{th}(\alpha) + \operatorname{th}(-\beta)}{1 + \operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(-\beta)} && \text{par la question précédente} \\
&= \frac{\operatorname{th}(\alpha) - \operatorname{th}(\beta)}{1 - \operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)} && \text{par imparité de th} \\
&= \frac{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}}{1 - \frac{1}{k+1}\frac{1}{k+2}} = \frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)-1} = \frac{1}{k^2+3k+1} \\
\operatorname{th}(B) &= \operatorname{th}(A)
\end{aligned}$$

Donc, puisque th est bijective, $A = B$, i.e. $\boxed{\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)}$.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)\right) \\
&= \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{argth}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)} \qquad \text{par téléscopage}$$

$\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\operatorname{argth}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \operatorname{argth}(0)$ par continuité de argth en 0.

Or $\operatorname{th}(0) = 0$ donc $\operatorname{argth}(0) = 0$. Par composition, $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par somme, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Exercice 4

1°) a) La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par quotient $\boxed{\varphi \text{ est au moins dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - 2x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \boxed{\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}}.$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)$ est du signe de $1-x$, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Justifions la limite de φ en $+\infty$: $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2°) a) D'après la question précédente, φ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $[0,1]$; comme Arcsin est définie sur $[-1,1]$, $\boxed{f = \text{Arcsin}\circ\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+}$.

On a $\varphi(0) = 0$ donc $\boxed{f(0) = \text{Arcsin}(0) = 0}$.

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{\dfrac{1}{3}}}{\dfrac{4}{3}}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, donc $\boxed{f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}}$.

$f(1) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2}{2}\right) = \text{Arcsin}(1)$ donc $\boxed{f(1) = \dfrac{\pi}{2}}$.

$f(3) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, donc $\boxed{f(3) = \dfrac{\pi}{3}}$.

$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\text{Arcsin}(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} \text{Arcsin}(0) = 0$ par continuité de Arcsin en 0.

Par composition de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

b) Comme $\text{Arcsin}(0) = 0$, on reconnaît le taux d'accroissement de Arcsin en 0.

Comme Arcsin est dérivable en 0, sa limite en 0 existe et vaut $\text{Arcsin}'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$,

autrement dit : $\boxed{\dfrac{\text{Arcsin}(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1}$.

Calculons maintenant le taux d'accroissement de f en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\text{Arcsin}\left(\varphi(x)\right)}{x} = \frac{\text{Arcsin}\left(\varphi(x)\right)}{\varphi(x)}\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\text{Arcsin}\left(\varphi(x)\right)}{\varphi(x)}\frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arcsin}(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1$.

Finalement, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet}}$ $\boxed{\text{une tangente verticale au point d'abscisse 0.}}$

c) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, et d'après son tableau de variation, sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, φ est à valeurs dans $]0,1[$, donc à valeurs dans $]-1,1[$.
La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

Donc, par composition, $\boxed{f = \text{Arcsin}\circ\varphi \text{ est dérivable (au moins) sur } \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}.}$

d) Pour tout $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \varphi'(x)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\varphi(x)\right)^2}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2+2x-4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{1+x^2-2x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{(1+x)}{\sqrt{(1-x)^2}} \qquad \text{car } 1+x>0 \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \,]0,1[}$, on a $1-x>0$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \boxed{\psi(x)}$.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \,]1,+\infty[}$, on a $1-x<0$ donc $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(x+1)} = \boxed{-\psi(x)}$.

3°) a) $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{g = \operatorname{Arctan} \circ u \text{ est définie } \mathbb{R}_+}$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable (au moins) sur } \mathbb{R}_+^*}$ par composition.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{2}\psi(x)}.$$

b) Ainsi, pour tout $x \in \,]1,+\infty[$, $f'(x) = -2g'(x)$. Comme $]1,+\infty[$ est un intervalle, il existe une constante réelle C_1 telle que :

$$\forall\, x \in \,]1,+\infty[, \quad f(x) = -2g(x) + C_1.$$

En particulier, $f(3) = -2g(3) + C_1$, d'où $C_1 = f(3) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} + 2\dfrac{\pi}{3} = \pi$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]1,+\infty[,\ f(x) = -2g(x) + \pi}$.
De même, pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = 2g'(x)$. Comme $]0,1[$ est un intervalle, il existe une constante réelle C_2 telle que :

$$\forall\, x \in \,]0,1[, \quad f(x) = 2g(x) + C_2.$$

En particulier, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2g\left(\dfrac{1}{3}\right) + C_2$, d'où $C_2 = f\left(\dfrac{1}{3}\right) - 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3} - 2\dfrac{\pi}{6} = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[,\ f(x) = 2g(x)}$.
Comme $f(0) = 0$ et $2g(0) = 2\operatorname{Arctan}(0) = 0$, c'est encore valable en 0.
Comme $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $2g(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, c'est encore valable en 1.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ f(x) = 2g(x)}$.

4°) Calculons :

$$\varphi(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}^2} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{2\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}} = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \boxed{\sin(2\theta)}.$$

On a donc $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\varphi(x)) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta))$.
Supposons $x \in [0,1]$. Alors $0 \le \sqrt{x} \le 1$, donc, par croissance de Arctan, $0 \le \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) \le \dfrac{\pi}{4}$ i.e. $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$, d'où $0 \le 2\theta \le \dfrac{\pi}{2}$
On a donc $2\theta \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, donc $\operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta)) = 2\theta$, autrement dit $\boxed{f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}$.