Correction du devoir surveillé 3.

Exercice 1

1°) Soient u et v les fonctions suivantes, qui sont de classe C^1 sur $[1,2]$:

$$u(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad u'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2}\frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$v(x) = x^2 \qquad v'(x) = \frac{x^3}{3}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{-1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{8}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^2-1+1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{9}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{9}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\int_1^2 \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{9}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(|1+x|)\right]_1^2\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{9}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\left(\frac{2^2}{2} - 2 + \ln(3) - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2)\right)\\
&= \frac{8}{3}\ln(3) - \frac{9}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 3\ln(3) - \frac{10}{3}\ln(2) + \frac{1}{6}}$$

2°) On pose : $t = \sin x$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est bien de classe C^1 sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.
On note $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{cases} \text{Si } x = \dfrac{\pi}{6} \text{ alors } t = \dfrac{1}{2} \\ \text{Si } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ alors } t = 1. \end{cases}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Par le théorème de changement de variables,

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= 2 - \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{5} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$\boxed{J = \frac{8}{5} - \frac{19}{20}\sqrt{2}}$$

Exercice 2

1°)

$$\begin{aligned}1 - a + a^2 - a^3 + a^4 &= \sum_{k=0}^{4}(-a)^k \\ &= \frac{1-(-a)^5}{1-(-a)} \text{ car } -a \neq 1 \\ &= \frac{1+a^5}{1+a} \text{ car 5 est impair}\end{aligned}$$

Or $a^5 = (e^{i\frac{\pi}{5}})^5 = e^{i\pi} = -1$. Donc, $\boxed{1 - a + a^2 - a^3 + a^4 = 0}$.

2°) $a^5 = -1$ donc $a^4 \times a = -1$. Comme $a \neq 0$, $a^4 = -\dfrac{1}{a}$.

Or $|a| = 1$ donc $a^4 = -\overline{a}$.

De même, $a^3 \times a^2 = -1$ donc $a^3 = -\dfrac{1}{a^2} = -\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = -\overline{a}^2$.

Ainsi, $1-a+a^2-a^3+a^4 = 1-a+a^2+\overline{a}^2-\overline{a}$ donc $\boxed{1-(a+\overline{a})+(a^2+\overline{a}^2) = 1-a+a^2-a^3+a^4}$.

3°) $a + \overline{a} = e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ par une formule d'Euler.

De même, $a^2 + \overline{a}^2 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Ainsi, $1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 - (a+\overline{a}) + (a^2+\overline{a}^2)$.

On en déduit par les questions 1 et 2 que $\boxed{1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 0}$.

4°) On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1$.

D'où, $1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1\right) = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1$.

Cette quantité est nulle par la question précédente.

Donc, $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \text{ est solution de l'équation : } 4X^2 - 2X - 1 = 0.}$

5°) Le trinôme $4X^2 - 2X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

Les solutions sont : $\dfrac{2+2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Or $\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \geq 0$.

Comme $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, on en déduit que : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

On rappelle alors : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{8} - 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} - 1$.

Finalement, $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 3

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^n + 1 = 0 &\iff z^n = -1 \\
&\iff z^n = e^{i\pi} \\
&\iff z^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists\, k \in \{0, \dots, n-1\},\ \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists\, k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = e^{i\frac{\pi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}\ /\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}}$.

2°) a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{n-p} && \text{par la formule du binôme} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{p} z^p \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{n-p} && \text{(échange des sommes)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}\right) && \text{car } \binom{n}{p} z^p \text{ est une constante vis-à-vis de } k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} a_p z^p}$$

b) Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. $a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}\right)^k$.

- Si $p = n$, $e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)} = e^{i0} = 1$; si $p = 0$, $e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)} = e^{i2\pi} = 1$.
  Donc, $\boxed{\text{pour } p = 0 \text{ et } p = n,\ a_p = n}$.

- Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$: on a $0 < p < n$ donc aussi $0 < n-p < n$, donc $0 < \dfrac{n-p}{n} < 1$ et $\dfrac{2\pi(n-p)}{n} \in]0, 2\pi[$. Ainsi, $e^{i\frac{2(n-p)\pi}{n}} \neq 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1 - \left(e^{i\frac{2(n-p)\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{-i\frac{2(n-p)\pi}{n}}} \\ &= \frac{1 - e^{i2(n-p)\pi}}{1 - e^{-i\frac{2(n-p)\pi}{n}}} \\ \boxed{a_p = 0} &\text{ car } (n-p) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c) D'après les question a et b : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \binom{n}{0} a_0 z^0 + \binom{n}{n} a_n z^n = \boxed{n(1+z^n)}$.

3°) a) Soient θ et θ' deux réels.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\left(\theta - \frac{\theta+\theta'}{2}\right)} + e^{i\left(\theta' - \frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}$$

b) Prenons $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$, d'après la question 1, on a donc $n(z^n+1) = 0$.

Donc, d'après la question 2c, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = 0$.

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, utilisons la question précédente avec $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ et $\theta' = \dfrac{2k\pi}{n}$:
$\theta + \theta' = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$ et $\theta - \theta' = \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{(-2k+1)\pi}{n}$, donc :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \cos\left(\frac{(-2k+1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ \text{d'où} \quad \left(e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= 2^n e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^n e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ik\pi} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^n i(-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \qquad \text{car } e^{ik\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^n i(-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^n i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Puisque cette somme est nulle et que $2^n i \neq 0$, on obtient bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0}$.

Exercice 4

Partie 1 : Indépendance vis-à-vis de n

1°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = \dfrac{1}{1+(\cos(x+\pi))^2} = \dfrac{1}{1+(-\cos(x))^2} = \dfrac{1}{1+(\cos(x))^2} = f(x)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est π-périodique, l'intégrale de f sur un segment de longueur π a toujours la même valeur. Comme les segments $[n\pi, (n+1)\pi]$ et $[0, \pi]$ ont pour longueur π,

$$\boxed{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

2°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variables $u = px$ dans l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(px)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(px)} p\,\mathrm{d}x$$

$x \mapsto px$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$. On a $\mathrm{d}u = p\,\mathrm{d}x$. $\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ alors } u = 0 \\ \text{Si } x = \pi \text{ alors } u = p\pi \end{cases}$.

Par le théorème de changement de variables, on obtient :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(px)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{p\pi} \frac{1}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{1}{p}\int_0^{p\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

3°) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, H_n : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

★ H_1 est vraie de manière claire.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2((n+1)x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{par 2 avec } p = n+1 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\int_0^{n\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{par la relation de Chasles} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(n\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{par 1b et 2 avec } p = n \\
&= \frac{1}{n+1}\left(n\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{par } H_n \\
&= \frac{n+1}{n+1}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, H_n \text{ est vraie.}}$

Partie 2 : Valeur de l'intégrale

4°) Comme f est π-périodique et que $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est de longueur π, $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

f est également paire, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\dfrac{1}{1+\cos^2(-x)}=\dfrac{1}{1+\cos^2(x)}=f(x)$.

Comme le segment $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est centré en 0, on a bien :

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x}$$

5°) Pour poser $t=\tan x$, on devrait avoir tan de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Or tan n'est même pas définie en $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{le changement de variables } t=\tan x \text{ n'est pas possible.}}$

6°) La fonction $f: x\mapsto\dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable (même de classe C^1) sur $\mathbb{R}$, et pour tout $b\in\mathbb{R}$, $F'(b)=\dfrac{1}{1+\cos^2(b)}$.

En particulier F est continue en $\frac{\pi}{2}$: $\displaystyle\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}F(b)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ i.e. $\boxed{\displaystyle\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^b\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=I}$.

7°) $\displaystyle\varphi(a)=\int_0^a\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t.$

On a alors $\varphi(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^a$ (on pouvait aussi poser le changement de variables $u=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$). Finalement, $\boxed{\varphi(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)}$.

8°) On a $\displaystyle F(b)=\int_0^b\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{1}{1+\frac{1}{1+\tan^2(x)}}\,\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

On pose $t=\tan(x)$, la fonction $x\mapsto\tan x$ est bien de classe C^1 sur $[0,b]$.

On a $\mathrm{d}t=(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{cases}\text{Si } x=0 \text{ alors } t=0\\ \text{Si } x=b \text{ alors } t=\tan(b)\end{cases}.$$

Par le théorème de changement de variables, $\displaystyle F(b)=\int_0^b\frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\tan(b)}\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi, $\boxed{F(b)=\varphi\left(\tan(b)\right)}$.

9°) Par les deux questions précédentes, pour tout $b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $F(b)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\tan b}{\sqrt{2}}\right)$.

Or $\dfrac{\tan b}{\sqrt{2}}\xrightarrow[b\to\frac{\pi}{2}^-]{}+\infty$, et $\mathrm{Arctan}(X)\xrightarrow[X\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{2}$.

Par composition de limite (et produit), on obtient donc : $F(b)\xrightarrow[b\to\frac{\pi}{2}^-]{}\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Par 6, on en déduit que : $\boxed{I=\displaystyle\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}F(b)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$.

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 5

1°) a) $1^{p-1}+\cdots+1+1=p=p.1^p$, donc $\boxed{1 \text{ est solution de } (E_p).}$

b) $(E_2) \Longleftrightarrow 2z^2-z-1=0$.
Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta=1+8=9$.
Donc $\boxed{\text{les solutions de } (E_2) \text{ sont } \dfrac{1+3}{4}=1 \text{ et } \dfrac{1-3}{4}=\dfrac{-1}{2}}$.

c) $(E_3) \Longleftrightarrow 3z^3-z^2-z-1=0$.
Comme 1 est une solution de (E_3), le polynôme $3z^3-z^2-z-1$ se factorise par $(z-1)$: il existe des complexes a, b, c tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$(z-1)(az^2+bz+c)=3z^3-z^2-z-1.$$

Développons le membre de gauche : pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$(z-1)(az^2+bz+c)=az^3-az^2+bz^2-bz+cz-c=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a :

$$\begin{cases} a=3 \\ b-a=-1 \\ c-b=-1 \\ -c=-1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (E_3) &\Longleftrightarrow (z-1)(3z^2+2z+1)=0 \\ &\Longleftrightarrow z=1 \quad \text{ou} \quad 3z^2+2z+1=0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $3z^2+2z+1$ est $\Delta=4-12=-8=(2i\sqrt{2})^2$, donc les racines de $3z^2+2z+1$ sont

$$\frac{-2+2i\sqrt{2}}{6}=\frac{-1+i\sqrt{2}}{3} \text{ et } \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_3) est $\boxed{\left\{1, \dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right\}}$.

2°) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{ix}\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow e^{ix}=\pm 1 \Longleftrightarrow \exists\, n\in\mathbb{Z}, x=n\pi$.
Comme $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}\in\mathbb{R}$, il existe donc un entier n tel que $\dfrac{(p+1)\theta}{2}=n\pi$. On a alors $\boxed{\theta=\dfrac{2n\pi}{p+1}}$.

b) Remplaçons θ par son expression :

$$\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{p}{2}\frac{2n\pi}{p+1}\right)=\sin\left(\frac{(p+1)-1}{p+1}n\pi\right)=\sin\left(n\pi-\frac{n\pi}{p+1}\right)=\sin\left(n\pi-\frac{\theta}{2}\right).$$

Or $\sin\left(n\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin(n\pi)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\cos(n\pi)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=-\cos(n\pi)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
Si n est pair, on l'écrit $n=2m$ avec $m\in\mathbb{N}$, et alors $\cos(n\pi)=\cos(2m\pi)=1$.
Si n est impair, $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$, et alors $\cos(n\pi)=\cos(2m\pi+\pi)=\cos(\pi)=-1$.
Dans tous les cas, $\cos(n\pi)=(-1)^n$.
(*autre preuve :* $\cos(n\pi)=\mathrm{Re}(e^{in\pi})=\mathrm{Re}\left((e^{i\pi})^n\right)=\mathrm{Re}((-1)^n)=(-1)^n$).

Ainsi, $\boxed{\sin\left(\dfrac{p\theta}{2}\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

3°) a) Calculons : comme $z = e^{i\theta} \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} (e^{i\theta})^k &= \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^p}{1-e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{i\frac{p\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{p\theta}{2}} - e^{i\frac{p\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{i\frac{p\theta-\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} z^k = e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

b) Or, par hypothèse, z est solution de (E_p), donc la somme est égale à $pz^p = p\left(e^{i\theta}\right)^p$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
pe^{ip\theta} &= e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
\frac{e^{ip\theta}}{e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}}} &= \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

c) Ainsi, $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}$.

D'après la question 2, on en tire qu'il existe un entier n tel que $\dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{p}$.

On a donc $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{p}$ avec $p \geq 2$; c'est absurde car $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}$ est de module 1 et car $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1$.

On peut conclure que $\boxed{\text{la seule solution de module 1 de } (E_p) \text{ est } 1.}$

4°) Supposons que z soit une solution de (E_p) de module strictement supérieur à 1. Alors on aurait

$$\begin{aligned}
&|pz^p| = \left|z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1\right| \\
&|pz^p| \leq |z^{p-1}| + |z^{p-2}| + \cdots + |z| + 1 \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&p|z|^p \leq |z|^{p-1} + |z|^{p-2} + \cdots + |z| + 1
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $|z|^k < |z|^p$ puisque $|z| > 1$. Ainsi, tous les termes apparaissant dans le membre de droite ci-dessus sont strictement inférieurs à $|z|^p$, et comme il y a p termes, on obtient :

$$p|z|^p \leq |z|^{p-1} + |z|^{p-2} + \cdots + |z| + 1 < p|z|^p$$

C'est absurde.

On en déduit qu' $\boxed{\text{il n'existe pas de solution de } (E_p) \text{ de module strictement supérieur à } 1}$.