Devoir surveillé 1.

Samedi 20 septembre 2025, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$.

2°) Résoudre l'inéquation $e^{-x}(2e^{-x} - 1) \leq 3$.

Exercice 2

Pour tout réel k, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction suivante :

$$f_k : x \mapsto x - k\sqrt{x}$$

et on note alors $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) Quelle est la nature de C_0 ?

2°) Soit k un réel non nul. Étudier la dérivabilité de f_k en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

3°) Étudier, pour tout réel k, la limite de f_k en $+\infty$.

4°) Soient k et k' deux réels tels que $k > k'$. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k'}$.

5°) *Cas* $k > 0$

- **a)** Soit $k > 0$. Dresser le tableau de variations de f_k. On montrera qu'il y a un minimum atteint en une valeur a_k que l'on déterminera. Donner la valeur du minimum.
- **b)** Pour tout réel $k > 0$, on note A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse a_k. Montrer que tous les points A_k sont situés sur une même droite à préciser.
- **c)** Soit $k > 0$. Montrer, qu'en dehors de l'origine, $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses en un unique point B_k dont on précisera l'abscisse b_k.
  Vérifier que $b_k = 4a_k$.
- **d)** Établir que pour $k > 0$, la tangente à $\mathcal{C}_k$ en B_k a une pente qui ne dépend pas de k.

6°) *Cas* $k < 0$

- **a)** Soit $k < 0$. Dresser le tableau de variations de f_k.
- **b)** Montrer que pour tout $k < 0$, il existe un unique point D_k de $\mathcal{C}_k$ que l'on déterminera, où la tangente à $\mathcal{C}_k$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. À quelle droite indépendante de k ce point appartient-il ?

7°) Tracer sur une même figure avec le maximum de précision et avec tous les éléments mis en valeur les courbes pour $k = -1$, $k = 1$, $k = 2$.
On prendre 2 *cm pour unité.*

Exercice 3

1°) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x>0,\ f(x)=\ln(x)-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b) Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifier que, pour tout $x>0$, $f''(x)$ est de la forme $-\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2(x+1)^2}$ où a,b,c sont des entiers naturels indépendants de x à déterminer.

c) En déduire que f' est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

e) Dresser le tableau de variations de f. On indiquera les limites de f en 0 et $+\infty$.

f) Vérifier que $f(2)<0<f(3)$.

2°) **a)** Montrer que f est bijective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On notera g la bijection réciproque de f. Que peut-on dire de g ?

b) Quel encadrement de $g(0)$ peut-on préciser ?

3°) On note φ la composée $g\circ\ln$. Autrement dit, on a, pour tout $x>0$, $\varphi(x)=g(\ln x)$.

a) Justifier que φ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $x>0$. Montrer que : $0\leq x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ (on commencera par prouver que pour tout $t\geq 0$, $\ln(1+t)\leq t$).

c) En déduire que, pour tout $x>0$, $f(x)\leq\ln(x)\leq f(ex)$.

d) En déduire que, pour tout $x>0$, $x\leq\varphi(x)\leq ex$.

4°) **a)** Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)=(x+1)\ln x-x\ln(x+1)$.

b) Soit $x>0$. Montrer que :

$$x^{x+1}>10(x+1)^x \iff x>\varphi(10)$$

c) À l'aide de la question 3d et du fait que $e<2,72$, en déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 28, l'entier n^{n+1} s'écrit avec au moins un chiffre de plus (en base 10) que l'entier $(n+1)^n$.

Exercice 4

Pour tous réels a et b, on définit le réel $a*b$ par :

$$a*b=\ln(e^a+e^b).$$

1°) Montrer que pour tous réels a, b et c, $(a*b)*c=a*(b*c)$.
Remarque : on dit que la loi $*$ est associative.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x*(x*x)=0$.

3°) Soit a et b deux réels fixés. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $a=b*x$.

4°) Montrer que pour tous réels a, b et c, on a : $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$.

$*****$ FIN $*****$