
TD 8. Suites numériques.

Exercice 1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et de u_0 , dans les cas suivants :

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1.$$

2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{u_n}{n+2}.$$

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

On souhaite déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n , par deux méthodes.

1) Méthode 1

Montrer que la suite (u_n) est récurrente linéaire double.

En déduire u_n puis v_n en fonction de n .

2) Méthode 2

Que pouvez-vous dire de $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

En déduire u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 3. Montrer qu'une suite convergente d'entiers est stationnaire.

Exercice 4. Les suites de termes généraux suivants admettent-elles une limite ? Si oui, la calculer :

$$\text{a) } u_n = \frac{\sin(an)}{n} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{b) } u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \quad \text{c) } u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n} \quad \text{d) } u_n = \sqrt[n]{n^2}$$

Exercice 5. 1°) Soit u une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.

On suppose que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2°) Soit u une suite réelle, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

On suppose u bornée ; montrer que si v tend vers 0, alors u tend vers 0.

Qu'en est-il si on ne suppose plus u bornée ?

Exercice 6. Montrer que les suites de termes généraux suivants admettent une limite et la calculer :

$$\text{a) } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{b) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad \text{c) } u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+n} \quad \text{d) } u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \quad (\text{où } x \in \mathbb{R} \text{ fixé})$$

Exercice 7. a) Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer (S_n) a une limite.

Exercice 9. 1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^2 + \ln(x) = n$ a une unique solution sur \mathbb{R}_+^* , que l'on notera u_n .

2°) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n - \frac{1}{2} \ln(n)} \leq u_n \leq \sqrt{n}$.

Exercice 10. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $[0, 1]$ par :

$$P_n(x) = x^n - (1 - x)a.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

b) Déterminer le signe de $P_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.

c) Notons ℓ la limite de la suite (u_n) . Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 12. Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que sa limite ℓ est irrationnelle (pour cela, on écrira $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et on obtiendra un encadrement de $(2n+1)! \frac{p}{q}$ pour tout n).

Exercice 13. Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$ et $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et $0 < u_n \leq v_n$.

b) Montrer que $(u_n)_n$ est croissante, et que $(v_n)_n$ est décroissante.

c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

d) Montrer que les deux suites ont la même limite.

Exercice 14. (Vrai/Faux)

Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) . Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.

1°) Une suite (u_n) ne tendant ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ est bornée.

2°) Soit (u_n) une suite de réels tels que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Alors, (u_n) converge.

3°) Si (u_n) a une limite non nulle, alors à partir d'un certain rang, u_n est non nul.

4°) Si $(|u_n|)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers ℓ ou $-\ell$.

5°) Si (u_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 15. (La série harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) (Une autre "série" plus simple)

Montrer que la suite de terme général $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge.

Indication : on pourra utiliser que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^2 \geq k(k-1)$.

2) (Divergence de la série harmonique)

On souhaite montrer par l'absurde que (S_n) diverge vers $+\infty$.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
- b) On suppose que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que cela conduit à une absurdité.
- c) Conclure.

Exercice 16. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n \cos(n\pi/2)$. La suite u admet-elle une limite ?

Exercice 17. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 18. Déterminer si les suites suivantes admettent une limite, si oui la déterminer :

- a) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$ *Indications* : Justifier qu'il suffit de traiter le cas où $u_0 \in \mathbb{R}^+$.
- b) $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} \end{cases}$ *Indications* : Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur \mathbb{R}_+ .
Faire un tracé. En déduire un découpage de \mathbb{R}^+ en trois intervalles stables par f .
- c) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$ *Indications* : justifier que que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire, et montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 19. Soit (z_n) la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} z_0 = z_1 = 1 + i \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+2} = z_{n+1} - z_n + \overline{z_{n+1} - 3z_n} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de z_n en fonction de n . La suite (z_n) converge-t-elle ?