TD 13. Matrices et systèmes linéaires.

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y + 4z = 6 \\ y + 2z + t = 1 \\ 2x + 3y - t = 5 \\ -3x - 8z + t = -15 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y + 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \\ x + 2y - z - 2t = -1 \\ -y + 4z + 3t = 2 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires à paramètres :

1) $\begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ 3x + 13y + 12z = b \\ 4x + 15y + 9z = c \end{cases}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

3) $\begin{cases} (4 - m)x + 2y = 0 \\ -x + (1 - m)y = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ (Quelle interprétation géométrique proposez-vous ?)

4) $\begin{cases} (1 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y - z = 0 \\ -x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 5) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Matrices

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1°) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $M^3 = A$.

a) Montrer alors que $AM = MA$.

b) En déduire que M est diagonale.

2°) Résoudre l'équation $M^3 = A$ où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Questions bonus (sans tout refaire) :

— Qu'obtiendrait-on si l'inconnue de l'équation était $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

— Qu'obtiendrait-on, avec $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour l'équation $M^2 = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Soient a, b, c trois réels. Soit $N = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

1°) Ecrire N comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

2°) En déduire N^n pour $n \geq 1$.

Exercice 5. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M^2 - 2aM + (a^2 - b^2)I_3$.

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ce cas, calculer M^{-1}.

Exercice 8. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, calculer $R(\theta)R(\theta')$.

2) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)$ est inversible, et calculer son inverse.

3) Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $R(\theta)^n$.

Exercice 9. On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

a) Soit N une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.
Que dire de N^k pour $k > p$? N peut-elle être inversible ?

b) Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $A + B$ est nilpotente.

c) Montrer que si A est nilpotente et que A et B commutent, alors AB est nilpotente.

d) Soit N une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.
Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.
Indication : on s'inspirera de la formule valable pour un nombre $x \neq 1$: $\dfrac{1 - x^p}{1 - x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ pour $a > 0$.

1°) Calculer A^2 en fonction de A et I_3.

2°) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$ où (α_n) et (β_n) sont des suites réelles qui vérifient des relations de récurrence à préciser.

4°) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.

2) Calculer $D = P^{-1}AP$.

3) En déduire A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bonus : $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Discuter l'inversibilité de $A - \lambda I_3$ suivant la valeur du paramètre réel λ.