
Chapitre 11. Limites et continuité.

1 Limites : définitions

Sauf mention contraire :

- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide, non réduit à un singleton $\{a\}$.
- a désigne un élément de I ou une borne de I .

Par exemple si $I =]1, +\infty[$, a peut désigner un élément de $]1, +\infty[$ mais aussi 1 ou $+\infty$.

Rappel : Notion de voisinage

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et \mathcal{P} une propriété.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété \mathcal{P} au voisinage de a si : $\exists \eta > 0$, f vérifie \mathcal{P} sur $I \cap]a - \eta, a + \eta[$.

Par exemple, \cos est positive au voisinage de 0 car

Illustration :

- On dit que f vérifie la propriété \mathcal{P} au voisinage de $+\infty$ si : $\exists A \in \mathbb{R}$, f vérifie \mathcal{P} sur $I \cap]A, +\infty[$.

Par exemple, $f : x \mapsto (x - m)^2$ est croissante au voisinage de $+\infty$ car

Illustration :

- On dit que f vérifie la propriété \mathcal{P} au voisinage de $-\infty$ si : $\exists B \in \mathbb{R}$, f vérifie \mathcal{P} sur $I \cap]-\infty, B[$.

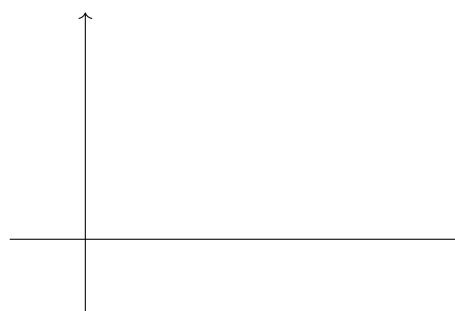
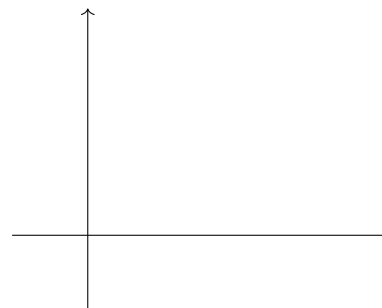
1.a Limite finie

Définition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\boxed{\ell \in \mathbb{R}}$.

On dit que f admet ℓ comme limite en a si :

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:
- Dans le cas $a = +\infty$:
- Dans le cas $a = -\infty$:



Notation : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$.

Remarques :

- Par définition, $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$.

Donc, comme une fonction qui tend vers 0 en a se note $o(1)$:

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \iff$$

- Si $a \in I$ (i.e. si f est définie en a), et si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est nécessairement égal à $f(a)$.



Démonstration 1

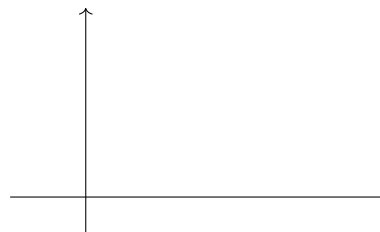
⚠ Cela n'est plus vrai si ℓ est seulement une limite à gauche ou une limite à droite, c.f. 1.c.

1.b Limites infinies

Définition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si :

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:



- Dans le cas $a = +\infty$:

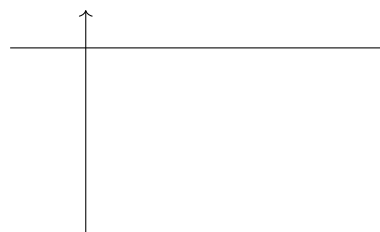


- Dans le cas $a = -\infty$:



Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ comme limite en a si :

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:



- Dans le cas $a = +\infty$:



- Dans le cas $a = -\infty$:



Notations : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

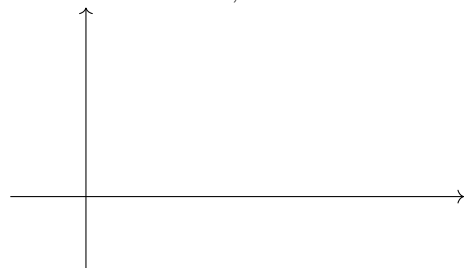
1.c Limite à gauche, limite à droite, et limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$

Définition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$; on suppose que a est un réel, élément ou extrémité de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

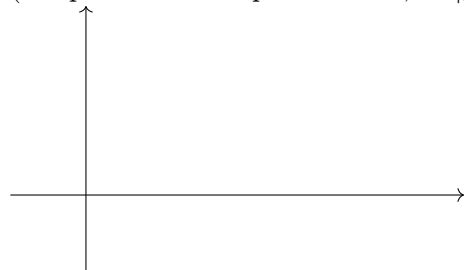
On dit que f admet ℓ comme limite à gauche en a si la restriction de f à $] -\infty, a[\cap I$ admet pour limite ℓ en a .

Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, cela revient à :



Idem dans les cas $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$

(remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par $\forall A \in \mathbb{R}$, et $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $f(x) \geq A$ ou $f(x) \leq A$).



On a bien sûr des définitions similaires pour la limite à droite en parlant de la restriction de f à $]a, +\infty[\cap I$ (en remplaçant $]a - \eta, a[$ par $]a, a + \eta[$).

Notations :

Exemple : $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Définition :

(Extension de la définition de limite lorsque f n'est pas définie au point $a \in \mathbb{R}$)

Soit $a \in I$ qui ne soit pas une extrémité de I , et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

2 Propriétés et théorèmes autour de la notion de limite

2.a Premières propriétés

Proposition :

(Unicité de la limite) Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.



Démonstration 2

Les notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_a f$ ont donc un sens.

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .



Démonstration 3

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, qui admet une limite finie $\ell > 0$ en a .

Alors, f est minorée au voisinage de a par $\ell/2$.

En particulier, elle est strictement positive au voisinage de a .



Démonstration 4

On a bien sûr une propriété similaire pour $\ell < 0$.

Proposition :

Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Conséquence : Pour démontrer que f admet une limite finie ℓ en a , on peut majorer $|f(x) - \ell|$ par une fonction qui tend vers 0 en a .

2.b Limite et suite

Proposition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelles à valeurs dans I telle que : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.



Démonstration 5

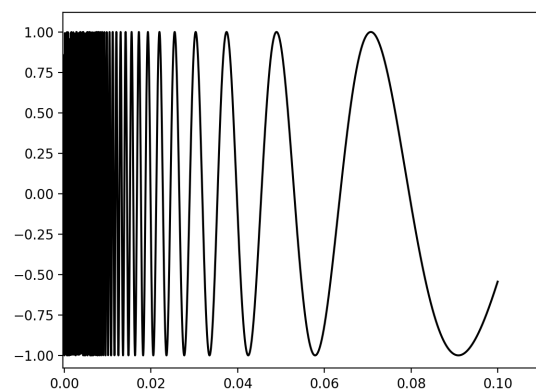
Utilisation : pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a .

- Il suffit de trouver, par exemple, une suite (u_n) qui tend vers a mais telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple : \cos en $+\infty$.

- Il suffit de trouver, par exemple, deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a mais telles que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ont des limites différentes.

Exemple : $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ en 0.



2.c Opérations

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$

En particulier, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$

- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \implies |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |\ell|.$

Proposition :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Proposition :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$
- Si $\ell + \ell'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(f + g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'$
 \rightarrow *Formes indéterminées* : $\infty - \infty$
- Si $\ell \ell'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \ell'$.
 \rightarrow *Formes indéterminées* : $0 \times \infty$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a , $f(x) > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a , $f(x) < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose $f(I) \subset J$.

Soit a un élément ou une extrémité de I , et b un élément ou une extrémité de J .

On suppose : $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(X) \xrightarrow{X \rightarrow b} \ell \end{cases}$. Alors, $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

**Démonstration 6**

Exemple : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2}$ existe et la calculer.

2.d Limites et inégalités

Proposition :

(Passage à la limite) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et ℓ, ℓ' des réels. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$.

- Si, au voisinage de a , $f(x) \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.
- Si, au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.

⚠ Les inégalités strictes deviennent des inégalités larges lors d'un passage à la limite !

Par exemple, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \dots$

Théorème :

(Théorème d'encadrement/des gendarmes)

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

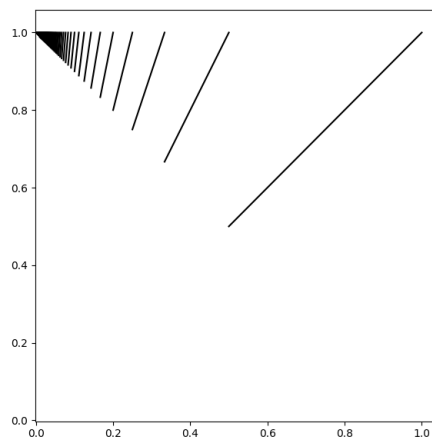
et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

⚠ C'est un théorème d'existence de limite : on ne suppose pas que f a une limite en a .

Bien faire la différence avec un simple passage à la limite dans l'inégalité $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Exemple : $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en 0^+ .



Théorème :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :

$$f(x) \leq g(x)$$

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

2.e Limites et monotonie

Théorème :

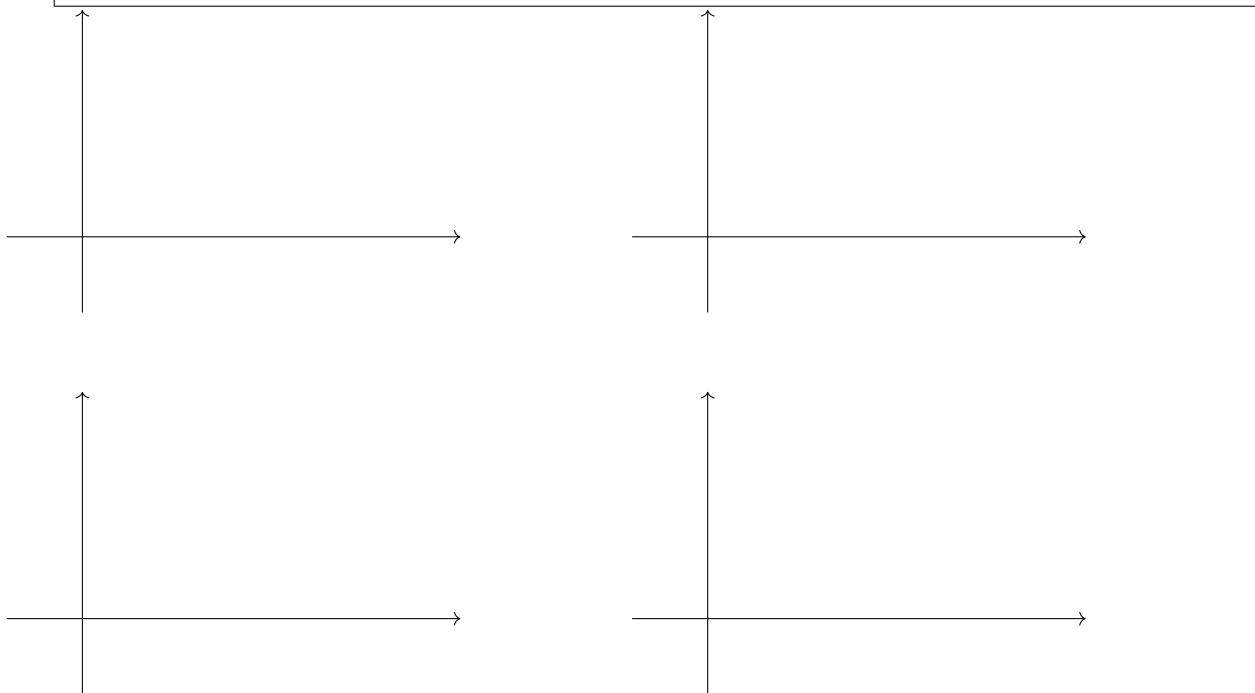
Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $a < b$ (donc $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). On pose $I =]a, b[$ ou $[a, b[$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante sur I .

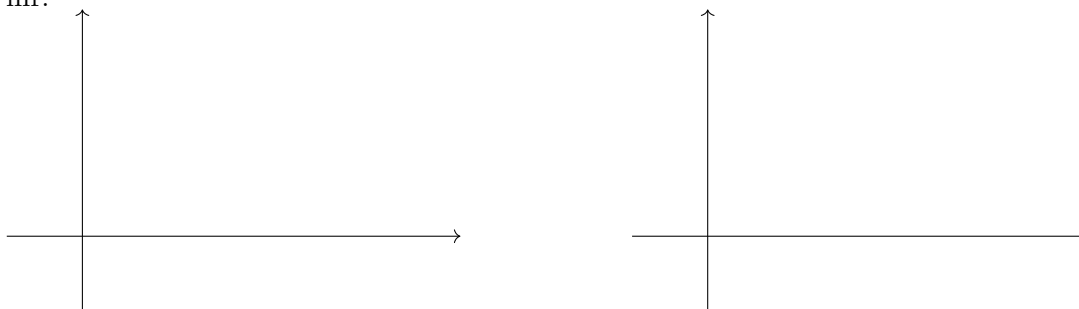
- Si f est majorée sur I , alors f admet une limite finie en b .

(Et on a $\lim_{x \rightarrow b} f(x) =$

- Si f n'est pas majorée sur I , alors



Ce théorème s'adapte pour les fonctions décroissantes : changer "majorée" en "minorée", et sup en inf.



Ce théorème s'adapte également pour la borne gauche de l'intervalle :

Théorème :

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $a < b$ (donc $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$). On pose $I =]a, b[$ ou $]a, b]$.

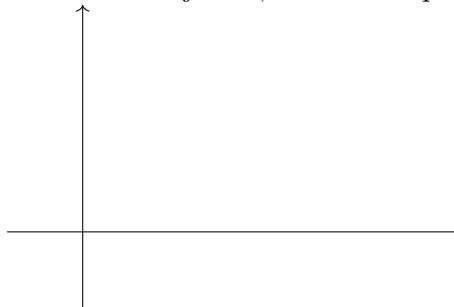
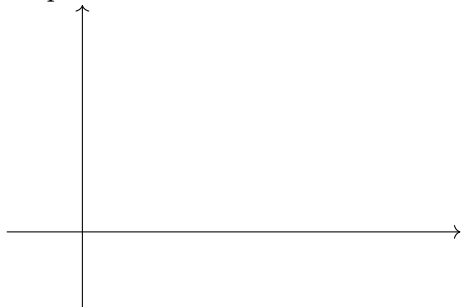
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante sur I .

- Si f est minorée sur I , alors f admet une limite finie en a .

(Et on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

- Si f n'est pas minorée sur I , alors

Et pour les fonctions décroissantes : changer "minorée" en "majorée", et inf en sup.



3 Continuité : généralités

3.a Définitions

Définition :

(Continuité en un point) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en a si :

Autrement dit, f est continue en a si et seulement si

Sinon, on dit que f est discontinue en a .

Définition :

(Continuité sur un intervalle) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

L'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Exemples : Toutes les fonctions usuelles, sauf la partie entière...

Remarque : Une fonction continue en a est bornée au voisinage de a .

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que a n'est pas l'extrémité droite de I .

On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Cela revient à dire que la restriction de f à $[a, +\infty[\cap I$ est continue en a .

On définit de manière similaire la continuité à gauche en a .

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une extrémité de I .

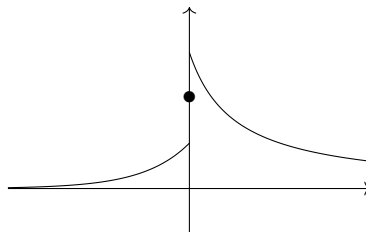
f est continue en $a \iff f$ est continue à droite et à gauche en a

$$\iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

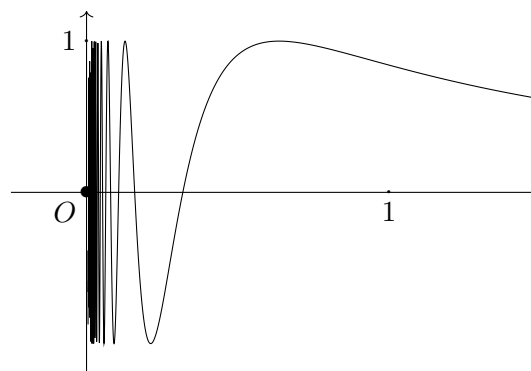
Exemples d'études :

La fonction partie entière.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

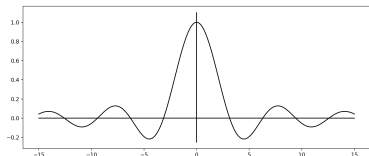


3.b Prolongement par continuité

Si $a \in I$ et si f n'est définie que sur $I \setminus \{a\}$, on cherche s'il existe un prolongement de f à I entier, qui soit continu en a , c'est-à-dire une application $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et telle que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \tilde{f}(x) = f(x).$$

Exemple : la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.



Définition :

On dit que $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en a si f a une limite finie ℓ en a .

Dans ce cas, l'unique prolongement sur I qui soit continu en a est : $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Remarque : Souvent, on commet l'abus d'appeler encore f le prolongement \tilde{f} , et on dit qu'on a prolongé f par continuité en a .

Exemple : Reprenons l'exemple de la fonction sinus cardinal :

3.c Opérations

Proposition :

Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, continues en a (respectivement sur I). Alors :

- λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , $|f|$, sont continues en a (resp. sur I).
- Si $f(a) \neq 0$ (resp. si f ne s'annule pas sur I), alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a (resp. sur I) et est continue en a (resp. sur I).

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ soit bien définie.

- Si f est continue en $a \in I$ et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .
- Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $a \in I$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I , qui converge vers a . Alors on a $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(a)$.

4 Continuité : théorèmes fondamentaux

4.a Théorème des valeurs intermédiaires

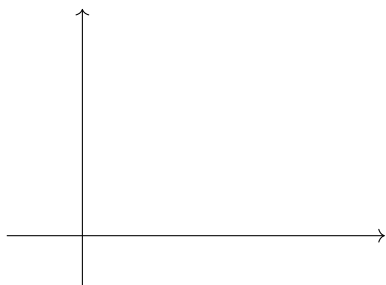
Théorème :

(TVI) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :



Démonstration 7

Graphiquement :




C'est le TVI qui dit que la courbe d'une fonction continue sur un intervalle "ne fait pas de saut".



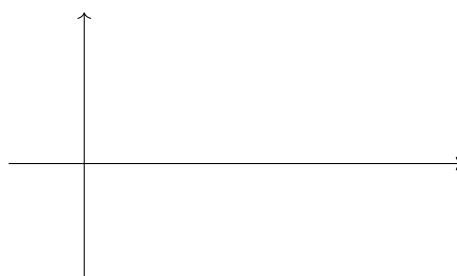
Utilisation classique : Existence d'un zéro.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$: le TVI montre l'existence d'un zéro :

$$\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) = 0.$$

 Cela ne montre pas l'unicité d'un zéro.

Pour avoir l'unicité, penser au théorème de la bijection.



Corollaire à redémontrer à chaque fois : si une fonction continue ne s'annule pas sur un intervalle, alors elle garde un signe constant (c'est la contraposée).

Exercice 1 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$.



Démonstration 8

Exercice 2 : Montrer que toute fonction polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.



Démonstration 9

Corollaire :

(du TVI) Si I est un intervalle et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque : Lorsque f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I , on sait facilement donner l'intervalle $f(I)$:

I	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
cas f str. croissante	$[f(a), f(b)]$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$
cas f str. décroissante	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)]$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

Le théorème de la bijection est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires et des théorèmes d'existence de limite pour les fonctions monotones. Rappel :

Théorème :

(de la bijection) Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et la réciproque f^{-1} est continue, de même stricte monotonie que f .

4.b Théorème des bornes atteintes**Théorème :**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors

Autrement dit :

Autrement dit :

Illustration graphique

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que f est bornée.



Démonstration 10

5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Rappelons quelques définitions :

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R} & \operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R} & |f| : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)) & x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)) & x \mapsto |f(x)| \end{array}$$

f est dite bornée sur I si : $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Définition :

Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).

On dit que f admet ℓ pour limite en a si

$$\text{cas } a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\text{cas } a = +\infty : \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\text{cas } a = -\infty : \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On définit aussi les notions de continuité en $a \in I$ et de continuité sur I .

Proposition :

(Caractérisation de la limite à l'aide de $\operatorname{Re}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Soit a un élément ou une extrémité de l'intervalle I .

La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ ont pour limites respectives $\operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(\ell)$ en a .

Ce résultat est intéressant car il permet de ramener l'étude d'une limite complexe à celle de deux limites réelles.

Corollaire :

On suppose $a \in I$. f est continue en a (respectivement sur I) si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a (resp. sur I).

Proposition :

Si f admet une limite finie en a (en particulier si f est continue en a) alors f est bornée au voisinage de a .

Opérations sur les limites (somme, produit, multiplication par un scalaire, quotient)

Elles sont similaires au cas réel, sauf qu'il n'y a jamais de limite infinie (en particulier pas de résultat

pour $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$).

Plan du cours

1	Limites : définitions	1
1.a	Limite finie	2
1.b	Limites infinies	3
1.c	Limite à gauche, limite à droite, et limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$	4
2	Propriétés et théorèmes autour de la notion de limite	5
2.a	Premières propriétés	5
2.b	Limite et suite	5
2.c	Opérations	6
2.d	Limites et inégalités	8
2.e	Limites et monotonie	9
3	Continuité : généralités	10
3.a	Définitions	10
3.b	Prolongement par continuité	12
3.c	Opérations	12
4	Continuité : théorèmes fondamentaux	13
4.a	Théorème des valeurs intermédiaires	13
4.b	Théorème des bornes atteintes	14
5	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes	15