Corrigé du devoir maison 5.

Partie 1 : Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$

Sur $I =]0,+\infty[$, $(E) \iff x^2y''(x) + 5xy'(x) + 9y(x) = 1 + x^2$.

1°) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \in \mathbb{R}_+^*$, et y est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans I, et y est deux fois dérivable sur I, donc, par composition, $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{g'(t) = e^t y'(e^t) \qquad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^t e^t y''(e^t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).}$$

2°)

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\iff \forall x > 0, x^2y''(x) + 5xy'(x) + 9y(x) = 1 + x^2 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 9y(e^t) = 1 + (e^t)^2 \\ &\qquad \text{car } e^t \text{ décrit } \mathbb{R}_+^* \text{ lorsque } t \text{ décrit } \mathbb{R} \\ &\iff \boxed{(F) : \forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + 4g'(t) + 9g(t) = 1 + e^{2t}} \end{aligned}$$

3°) L'équation vérifiée par g est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et avec second membre.

- L'équation homogène associée est : $g'' + 4g' + 9g = 0$.
  L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 9 = 0$, son discriminant est $\Delta = 16 - 36 = -20 = (2i\sqrt{5})^2$, donc ses racines sont $\dfrac{-4 \pm 2i\sqrt{5}}{2} = -2 \pm i\sqrt{5}$.
  Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-2t}(\lambda\cos(\sqrt{5}t) + \mu\sin(\sqrt{5}t)) \end{array}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- On recherche une solution particulière de (F) : $g''(t) + 4g'(t) + 9g(t) = 1 + e^{2t}$.
  Considérons deux nouvelles équations :
  $$\begin{cases} (F_1) : & g''(t) + 4g'(t) + 9g(t) = 1 \\ (F_2) : & g''(t) + 4g'(t) + 9g(t) = e^{2t} \end{cases}$$
  On remarque que la fonction $g_1 : t \mapsto \dfrac{1}{9}$ est une solution évidente de (F_1).
  Considérons maintenant (F_2). 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, ce qui nous amène à poser $A \in \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Ae^{2t}$.
  g est deux fois dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = 2Ae^{2t}$, $g''(t) = 4Ae^{2t}$.
  $$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (F_2) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 4Ae^{2t} + 4 \times 2Ae^{2t} + 9Ae^{2t} = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 21Ae^{2t} = e^{2t} \\ &\iff A = \frac{1}{21} \quad \text{car pour tout } t \in \mathbb{R},\ e^{2t} \neq 0 \end{aligned}$$
  Ainsi, $g_2 : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{21}$ est solution de (F_2).
  D'après le principe de superposition des solutions, $t \mapsto \dfrac{1}{9} + \dfrac{e^{2t}}{21}$ est solution de (F).

- Les solutions de (F) sont les fonctions :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{9} + \dfrac{e^{2t}}{21} + e^{-2t}(\lambda\cos(\sqrt{5}t) + \mu\sin(\sqrt{5}t)) \end{array} \quad , \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

4°) $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = y(e^t)$ donc $\forall x > 0$, $y(x) = g(e^{\ln x}) = g(\ln x)$.

y est solution de (E) sur I

$$\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{1}{9} + \frac{e^{2t}}{21} + e^{-2t}(\lambda\cos(\sqrt{5}t) + \mu\sin(\sqrt{5}t))$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ g(\ln x) = \frac{1}{9} + \frac{e^{2\ln x}}{21} + e^{-2\ln x}(\lambda\cos(\sqrt{5}\ln x) + \mu\sin(\sqrt{5}\ln x))$$

car $\ln x$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$

$$\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ y(x) = \frac{1}{9} + \frac{x^2}{21} + \frac{1}{x^2}\Big(\lambda\cos(\sqrt{5}\ln x) + \mu\sin(\sqrt{5}\ln x)\Big)$$

Les solutions de (E) sur I sont donc les :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{9} + \dfrac{x^2}{21} + \dfrac{1}{x^2}(\lambda\cos(\sqrt{5}\ln x) + \mu\sin(\sqrt{5}\ln x)) \end{array} \quad , \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Partie 2 : Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$

Sur J, $(E) \iff x^2y''(x) - 5xy'(x) + 9y(x) = 1 + x^2$.

5°) $\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur } J}$ comme quotient de deux fonctions deux fois dérivables.
$\forall x < 0$,

$$\begin{array}{rll} y(x) &= x^3z(x) & \times 9 \\ y'(x) &= x^3z'(x) + 3x^2z(x) & \times(-5x) \\ y''(x) &= x^3z''(x) + 6x^2z'(x) + 6xz(x) & \times x^2 \end{array}$$

y est solution de (E) sur J

$$\iff \forall x < 0,\ x^5z''(x) + z'(x)(6x^4 - 5x^4) + z(x)(6x^3 - 15x^3 + 9x^3) = 1 + x^2$$

$$\iff \boxed{(G) : \forall x < 0,\ x^5z''(x) + x^4z'(x) = 1 + x^2}$$

6°)

$$z \text{ solution de } (G) \text{ sur } J \iff \forall\, x < 0,\ z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3}$$

$$\iff z' \text{ solution sur } J \text{ de } (G_1) : Z'(x) + \frac{1}{x}Z(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3}$$

(G_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients variables avec second membre et sous forme normalisée.

- On résout d'abord l'équation homogène associée : $Z'(x) + \dfrac{1}{x}Z(x) = 0$.

  Une primitive sur J de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln|x|$, autrement dit $x \mapsto \ln(-x)$.

  Les solutions de l'équation : $Z'(x) + \dfrac{1}{x}Z(x) = 0$ sont : $\begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(-x)} = \dfrac{\lambda}{-x} \end{array}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Cela coïncide avec l'ensemble :
$$\begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x} \end{array}$$
  où $\lambda \in \mathbb{R}$ car $-\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

- On recherche maintenant une solution particulière de (G_1) : $Z'(x) + \dfrac{1}{x}Z(x) = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^3}$ par la méthode de variation de la constante.

  On pose $Z_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda : J \to \mathbb{R}$ est dérivable. Z_p est dérivable par quotient, et pour tout $x \in J$, $Z_p'(x) = \dfrac{\lambda'(x)}{x} - \dfrac{\lambda(x)}{x^2}$.
$$\begin{aligned} Z_p \text{ est solution de } (G_1) &\iff \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} \\ &\iff \lambda'(x) = x^{-4} + x^{-2} \end{aligned}$$
  On choisit par exemple, $\lambda : x \mapsto \dfrac{x^{-3}}{-3} + \dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{x}$.

  Alors, $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^4} - \dfrac{1}{x^2}$ est solution particulière de (G_1).

- Les solutions de (G_1) sur J sont donc les $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^4} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (G) \text{ sur } J &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x < 0,\ z'(x) = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x < 0,\ z(x) = \frac{x^{-3}}{9} + x^{-1} + \lambda \ln(-x) + \mu \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x < 0,\ z(x) = \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{x} + \lambda \ln(-x) + \mu \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les solutions de } (G) \text{ sur } J \text{ sont les } x \mapsto \dfrac{1}{9x^3} + \dfrac{1}{x} + \lambda\ln(-x) + \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$

7°) On rappelle : $\forall x < 0$, $y(x) = x^3 z(x)$.

Donc $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } J \text{ sont les } \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{9} + x^2 + \lambda x^3 \ln(-x) + \mu x^3 \end{array} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$