AP : Corrigé des exercices Rédaction / Raisonnement.

Exercice 1

Les phrases suivantes ne sont pas correctes mathématiquement : réécrivez-les de la bonne manière.

1°) « La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $e^x \sin x + e^x \cos x$. »

La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto e^x \sin x + e^x \cos x$.

2°) « La fonction exp est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) « $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$ »

La fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\cos(2x)$.

4°) « L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$. »

C'est l'ensemble $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$, qu'on peut aussi écrire :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{3}x^3 + C \end{array} \ / \ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5°) « $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x_1 = 1$ ou $x_2 = 2$ »

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = 2$

6°) On souhaite résoudre l'équation $(E) : x^2 + 3x - 2 = 0$.

« $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$. »

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 3^2 + 4 \times 2 = 17$, donc les solutions de (E) sont $\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

7°) Dans notre raisonnement on dispose d'un réel x positif, précédemment défini.

Puis vient la phrase : « On pose $x = y^2$. »

"On pose $y = \sqrt{x}$", ou "on pose $y = -\sqrt{x}$", ou "on pose y un réel tel que $x = y^2$"

8°) On dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, dont on vient de calculer la dérivée.

« $f'(x) = 0$ donc $f(x) = C$ constante »

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$.

Donc, puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C$.

9°) On désigne par $(*)$ la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) + f(2x)$, que l'on suppose vérifiée.
« Soit $x = 0$: $(*) \iff f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$ »
Prenons $x = 0$ dans la relation $(*)$, on obtient : $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

10°) « Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$. »
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
En particulier, en évaluant cette égalité en $\frac{\theta}{2}$, on obtient $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.
Bien comprendre le problème dans la phrase initiale : le θ était fixé. Ce n'est parce que, pour un θ fixé, on a une égalité, qu'elle sera forcément vraie en remplaçant θ par une autre valeur...

Exercice 2 : le jeu des 5 erreurs dans la récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases}$.

Trouvez les 5 erreurs de raisonnement ou rédaction dans cette récurrence :
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

- $u_0 = 0$ et $1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. *(ne pas partir de la ccl)*
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n} + 1}{2} && \text{par } \mathcal{P}_n \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie *(pas pour tout n, n était fixé)*
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Exercice 3

Les raisonnements ci-dessous sont incorrects : problème de rédaction, justifications mauvaises ou insuffisantes... Complétez-les ou réécrivez-les pour qu'ils deviennent corrects.

1°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 &\iff 2x \leq 1 + x^2 && \text{car } 1 + x^2 > 0 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff \underbrace{(x-1)^2 \geq 0}_{\text{vrai}} \end{aligned}$$

Donc, on montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

2°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 \\
&\text{donc } x+1-2\sqrt{x} \geq 0 \\
&\text{donc } x+1 \geq 2\sqrt{x} \\
&\text{donc } 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{car } x+1 \geq 0
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \geq 0$.
Donc, on a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$.

3°) Énoncé de l'exercice : *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$.
Étudier la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ *(on se servira du résultat précédent).*

Problèmes :

- *Dire que la fonction racine n'est pas dérivable en* 0*, ce n'est pas la bonne information. La bonne information, c'est qu'elle est dérivable ailleurs, sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
- *L'élève oublie de dire que* $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ *est toujours un réel positif, ce qui explique qu'on ne résout pas la même équation avec* -1*.*
- *La conclusion n'est pas la bonne ! On conclut seulement que* f *est dérivable sur son domaine de définition privé de* 0 *et de* 1*. Peut-être qu'elle est dérivable en* 0 *ou en* 1 *: pour le savoir, il faudrait étudier les limites des taux d'accroissement. Se rappeler qu'on n'a pas de résultat du type "si* f *n'est pas dérivable en* a*, alors* $g \circ f$ *n'est pas dérivable en* a*" (pas de résultat non plus avec* g*, ou avec le quotient...)*

$x \mapsto 2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par quotient $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est à valeurs dans $[0,1]$.
Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$;

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1 &\iff 2\sqrt{x} = x+1 \\
&\iff (\sqrt{x})^2 + 1 - 2\sqrt{x} = 0 \\
&\iff (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Donc, par composition, f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

4°) Énoncé de l'exercice : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Déterminer les racines nièmes de* i*.*
Problèmes :

- *Ne pas supposer* z *racine, c'est quelque chose qui ne doit apparaître que dans l'équivalence.*

— *On doit jusqu'au bout écrire des équivalences et pas des "donc", sinon on pourrait imaginer qu'on perd de l'information.*
— *Il faut introduire k à chaque ligne où il apparaît dans l'équivalence.*
— *Et la phrase de conclusion n'est pas française.*

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^n = i &\iff z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} \text{est une racine } n\text{ième de l'unité (ligne pas indispensable!)} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\ldots,n-1\},\ \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\ldots,n-1\}, z = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

L'ensemble des racines $n$ièmes de i est donc $\left\{e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}} \ / \ k \in \{0,\ldots,n-1\}\right\}$

5°) Énoncé de l'exercice : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Problèmes principaux : k n'est pas introduit, et surtout la deuxième équivalence est complètement fausse !

Soit $k \in \{n+1,\ldots,2n\}$.
On a $0 < k \leq 2n$ donc $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$.
Ceci pour tout k entre $n+1$ et $2n$: en sommant ces n inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

6°) Énoncé de l'exercice : *Résoudre le système suivant : (S) :* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\quad = 0 \\ -x+3y \quad = 2 \end{cases}$

Le problème, c'était de s'arrêter dans l'équivalence sur le système entier, car alors on ne peut pas justifier l'équivalence avec (S) : on peut perdre de l'information.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \\ -x+3y=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y+z=1 \\ x=y \\ 2y=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z=1-2y \\ x=y \\ y=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z=-1 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution est donc $(1,1,-1)$.