Devoir maison 10.

À rendre le lundi 27 mars 2023

Ce DM pourra être rédigé en binôme (une copie rendue pour 2 élèves), sans que ce soit obligatoire.
⚠ *Les deux élèves doivent chacun chercher l'ensemble du devoir !*
⚠ *Le travail de rédaction doit être équilibré pour chaque exercice.*
Par exemple, l'élève 1 rédige les questions 1 à 4 de l'exercice 1 et la question 3 de l'exercice 2 ; l'élève 2 rédige les questions 5 à 8 de l'exercice 1 et les questions 1 et 2 de l'exercice 2.

Exercice 1

Partie 1

Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que f vérifie l'équation :

$$(*) : \qquad f^3 + f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$$

0 désigne $0_{\mathcal{L}(E)}$.
$(*)$ signifie : $\forall x \in E,\ f^3(x) + f^2(x) + f(x) + x = 0_E$.

1°) Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

2°) **a)** Soit $x \in E$. On pose $y = f^2(x) + x$ et $z = x - f^2(x)$.
Montrer que $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$.

b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$.

3°) Qu'a-t-on démontré ?

Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle

On note E l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que :

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$$

Remarque : cela signifie bien sûr que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y^{(3)}(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$.

4°) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5°) On pose, pour tout $y \in E, \varphi(y) = y'$.
Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

6°) Quelle équation vérifie φ ?

7°) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E)$.
On exprimera ces ensembles sous la forme d'un Vect.

8°) En déduire l'ensemble E.

Exercice 2

Soit l'équation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(*) \quad : \quad (X+2023)P(X) = XP(X+1)$$

1°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$Q(X+1) = Q(X) \Longleftrightarrow Q \text{ constant}$$

2°) Soit P une solution de $(*)$.

a) Montrer que : $\forall k \in \{0, \dots, 2022\}$, $P(-k) = 0$.

b) Comment peut alors s'écrire P ?

3°) À l'aide des questions précédentes, résoudre $(*)$; on obtiendra que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle.