

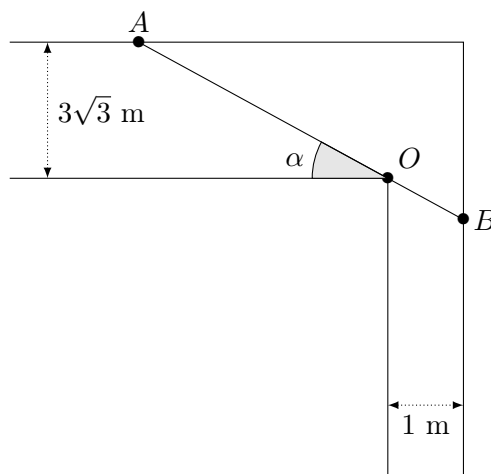
Devoir maison 2.

À rendre le jeudi 5 octobre 2023

Exercice 1 (Trigonométrie appliquée)

Dans un musée, un grand couloir de largeur $3\sqrt{3}$ mètres tourne à angle droit, pour ne faire plus qu'1 mètre de largeur. On souhaite transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. Le but de cet exercice est de déterminer la largeur maximale du tableau que l'on puisse ainsi déplacer dans ce couloir.

Le dessin ne respecte pas l'échelle



1°) Exprimer la longueur AB du schéma ci-dessus, en fonction de l'angle α .

On notera, dans la suite, f la fonction définie sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(\alpha) = AB$.

2°) Justifier que f est dérivable sur I , et calculer f' .

3°) Rappeler, pour tous réels a et b , la formule de factorisation de $a^3 - b^3$.

En déduire que pour tout $\alpha \in I$, $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.

4°) Dresser le tableau de variation de f .

5°) Quelle est la largeur maximale du tableau que l'on peut déplacer dans le couloir ?

Exercice 2

Résoudre l'équation :

$$1 + \sin(4x) - \cos(4x) = \sqrt{2} \sin(2x).$$

Exercice 3 (Facultatif)

Rappel : $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Montrer qu'il existe un couple (α, β) de nombres irrationnels tels que α^β soit rationnel.

Indication : on pourra s'intéresser au réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et faire deux cas.