

## Chapitre 9. Introduction aux développements limités.

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1 Négligeabilité : cas des suites

Exemple introductif : on définit la suite  $(u_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{n}.$$

On est tenté de dire que le terme  $\frac{1}{n}$  est "négligeable"...

Dans cette partie, on considère des suites  $u, v, w, t$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

#### 1.a Définition

**Définition :**

On suppose que la suite  $v$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

On dit que  $u$  est négligeable devant  $v$  si :

**Notation :**  $\boxed{u_n = o(v_n)}$  ou  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  ou  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$  ou  $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)}$ .

**Remarque :** Il y a une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff \exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ vérifiant : } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

**Exemples :**

$$n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$$

De manière générale, si

$$\text{alors } n^p \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^q)$$

$$\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=}$$

$$\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=}$$

De manière générale, pour  $p$  et  $q$  réels, si

$$\text{alors } \frac{1}{n^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

**Remarque :**

Les petits  $o$  sont la formalisation d'une idée intuitive : certains infinis sont "plus infinis" que d'autres. Certains zéros sont "plus zéros" que d'autres. Dire que  $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4)$  c'est affirmer l'immensité de  $n^4$  par rapport à  $n^2$  lorsque  $n$  est grand.

## 1.b Exemples à connaître

**Proposition :**

- $\forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, (\ln n)^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^\alpha).$
- $\forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, n^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha n}).$
- $\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall a > 1, n^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n).$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a| < |b| \implies a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b^n).$
- $\forall a \in \mathbb{R}, a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!).$
- $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^n).$



### Démonstration 1

On peut aussi retenir que, dès que  $(u_n)$  a une limite finie et que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $u_n = o(v_n)$  (le quotient tend vers 0...)

## 1.c Propriétés de base

**Proposition :**

- Pour  $\lambda \neq 0$  : si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\lambda v_n).$
- Somme :  
Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$  et si  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$  alors  $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n).$
- Produit :  
Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  alors  $t_n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t_n v_n).$   
Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  et  $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$  alors  $u_n t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n w_n).$
- Transitivité :  
Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  et si  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$  alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n).$



### Démonstration 2

**Proposition :**

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  signifie que



### Démonstration 3

⚠ Si vous trouvez  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(0)$ , vous avez très certainement fait une erreur. En effet, cela signifierait :

### Egalités plus longues avec des $o$

On rencontre souvent les  $o$  dans des exemples de la forme :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n)$

Ceci signifie :

Par exemple, si  $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  alors on ne peut pas en déduire :  $\alpha_n = \beta_n$  pour tout  $n$  (ni même à partir d'un certain rang !)

En effet, les relations précédentes signifient respectivement :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \quad \beta_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon'_n = 0$$

Les deux suites  $(\varepsilon_n)$  et  $(\varepsilon'_n)$  n'ont rien à voir a priori.

Ainsi, une écriture du type  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n)$  n'est pas une égalité au sens habituel mais donne plutôt une information sur la suite  $(u_n)$ .

### Simplifications de $o$

Lorsqu'on écrit :  $o(u_n) + o(v_n)$

cela désigne

Les règles sur la somme et le produit peuvent donc se réécrire en "abrégé" de la manière suivante :

Concrètement, il faut savoir appliquer ces règles sur des exemples comme les suivants :

1°)  $o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2°)  $o\left(\frac{1}{n^2}\right) - o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3°)  $o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

4°)  $o\left(\frac{1}{n^p}\right) + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$  avec  $p < q$

5°)  $o\left(\frac{5}{n}\right)$

$$6^\circ) \quad n \times o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$7^\circ) \quad o\left(\frac{1}{n}\right) \times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$8^\circ) \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n-1) \left(1 + n + \frac{7}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

### Définition :

Lorsque  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$ , on note  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , et on dit que  $u$  est équivalente à  $v$ .

Cela revient à  $\boxed{\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1}$  :

Cette notion d'équivalence sera étudiée de façon approfondie plus tard ; pour l'instant, elle va nous servir par exemple à simplifier certains  $o$  :

### Proposition :

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  et si  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n$ , alors  $u_n = o(t_n)$ .



### Démonstration 4

Autrement dit, un  $o(v_n + o(v_n))$  est un  $o(v_n)$ .

Exemple : Simplifier  $o\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

La notion d'équivalence est très utile pour les questions de limites et de signe :

### Proposition :

On suppose que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$ , autrement dit que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  :

- Si  $(v_n)$  admet une limite (finie ou infinie) alors  $(u_n)$  admet la même limite.
- Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \neq 0$  alors  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $u_n \neq 0$
- Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n > 0$  alors  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $u_n > 0$



### Démonstration 5

Une propriété assez intuitive et très utile :

### Proposition :

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  avec  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$  aussi.

## 2 Négligeabilité : cas des fonctions

### 2.a Définition et exemples

Les définitions et propriétés de  $o$  pour les fonctions seront les mêmes que pour les suites.

Une différence : pour les suites,  $n$  ne peut tendre que vers  $+\infty$ , alors qu'ici on se place en un point  $a$  qui peut être fini ou  $\pm\infty$ .

Dans la suite, sauf mention contraire, on considérera des fonctions  $(f, g, h\dots)$  définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , et  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  un point ou une extrémité de  $I$ .

#### Définition :

On dit que  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  au voisinage de  $a$  si :

cas  $a \in \mathbb{R}$  :

cas  $a = +\infty$  :

cas  $a = -\infty$  :

#### Définition :

On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Notation** :  $f = o_a(g)$ , ou  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ , ou  $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))}$ .

**Remarque** : Une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  :

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$   
 $\iff$  il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$  au voisinage de  $a$  et  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

**Exemple** : Comparer  $x$  et  $x^2$  en 0 et en  $+\infty$  :

#### Proposition :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\alpha < \beta$  :

#### Proposition : Relations de négligeabilité en $+\infty$

- $\forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad (\ln x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$
- $\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall a > 1, \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$

## 2.b Propriétés

### Proposition :

- Multiplication par un scalaire :  
Si  $\lambda \neq 0$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\lambda g(x))$
- Somme :  
Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$  et si  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$  alors  $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$
- Produit :  
Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  alors  $h(x)f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x)g(x))$ .  
  
Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $u(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(v(x))$  alors  $f(x)u(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)v(x))$ .
- Transitivité :  
Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et si  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$

### Proposition :

- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et si  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  aussi.

$\triangle!$   $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(0)$  signifie que  $f$  est nulle au voisinage de  $a$  (rarissime, vérifier ses calculs...)

### Exemples :

1°) Montrer que :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$

2°) Simplifier :

$$o(x^2) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=}$$

$$o(x^2) - o(x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{=}$$

$$o(x) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=}$$

$$o(x) + o(x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{=}$$

$$o(x^p) + o(x^q) \underset{x \rightarrow 0}{=} \quad \text{avec } p < q$$

$$o(x^p) + o(x^q) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \quad \text{avec } p < q$$

$$o(5x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$$

$$o(x) - o(x^2) + o(\ln x) - o(\exp x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=}$$

3°) On suppose que :  $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - 5x^2 + x^3 + o(x^3) \end{cases}$  . Que dire de  $f(x) + g(x)$ , de  $f(x) \times g(x)$  ?



**Démonstration 6**

**Définition :**

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$ , on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors un  $o(f(x))$  est un  $o(g(x))$ ; simplifions par exemple :

$$o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ln x\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 0$$

$$o(x + x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$$

$$o(x + x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 0$$

**Proposition :**

On suppose que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$ , autrement dit que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

- Si  $g$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$  alors  $f$  admet la même limite en  $a$ .
- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$  alors, au voisinage de  $a$ ,  $f(x) \neq 0$ .
- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) > 0$  alors, au voisinage de  $a$ ,  $f(x) > 0$ .

**2.c Qualité d'une approximation**

Une approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer l'erreur commise.

Si l'on nous dit que : «  $\pi$  est égal à 3,141592 à  $10^{-2}$  près »

on répondra qu'il suffit de dire que «  $\pi$  égal à 3,14 à  $10^{-2}$  près »

En effet, raisonner à  $10^{-2}$  près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que  $10^{-2}$ .

Dire « à  $10^{-2}$  près », c'est dire que l'erreur commise est comprise entre  $-10^{-2}$  et  $+10^{-2}$ .

Ainsi, la phrase : «  $\pi \approx 3,14$  à  $10^{-2}$  près » est aussi précise que la phrase «  $\pi \approx 3,141592$  à  $10^{-2}$  ».

C'est pareil avec les  $o$ . Partons de l'écriture suivante :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$$

Cette écriture affirme que  $1 + x + x^2$  est une approximation de  $e^x$  au voisinage de 0 avec un  $o(x)$  comme erreur commise. Le  $o(x)$  représente le niveau de précision de l'approximation effectuée.

Comme  $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ , la quantité  $x^2$  est inutile. Nous pouvons écrire :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$$

et cette nouvelle écriture est aussi précise que la précédente. Et surtout elle est plus lisible et économe !

Il est très important pour la suite que vous soyez conscient des termes qui sont inutiles dans une écriture avec des  $o$ .

### 3 Développements limités

Soit  $I$  un intervalle et  $n \in \mathbb{N}$ .

On souhaite approcher, au voisinage d'un point (généralement 0), les fonctions par des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

#### 3.a Développement limité en 0

On suppose ici  $0 \in I$  ou 0 est une extrémité de  $I$ .

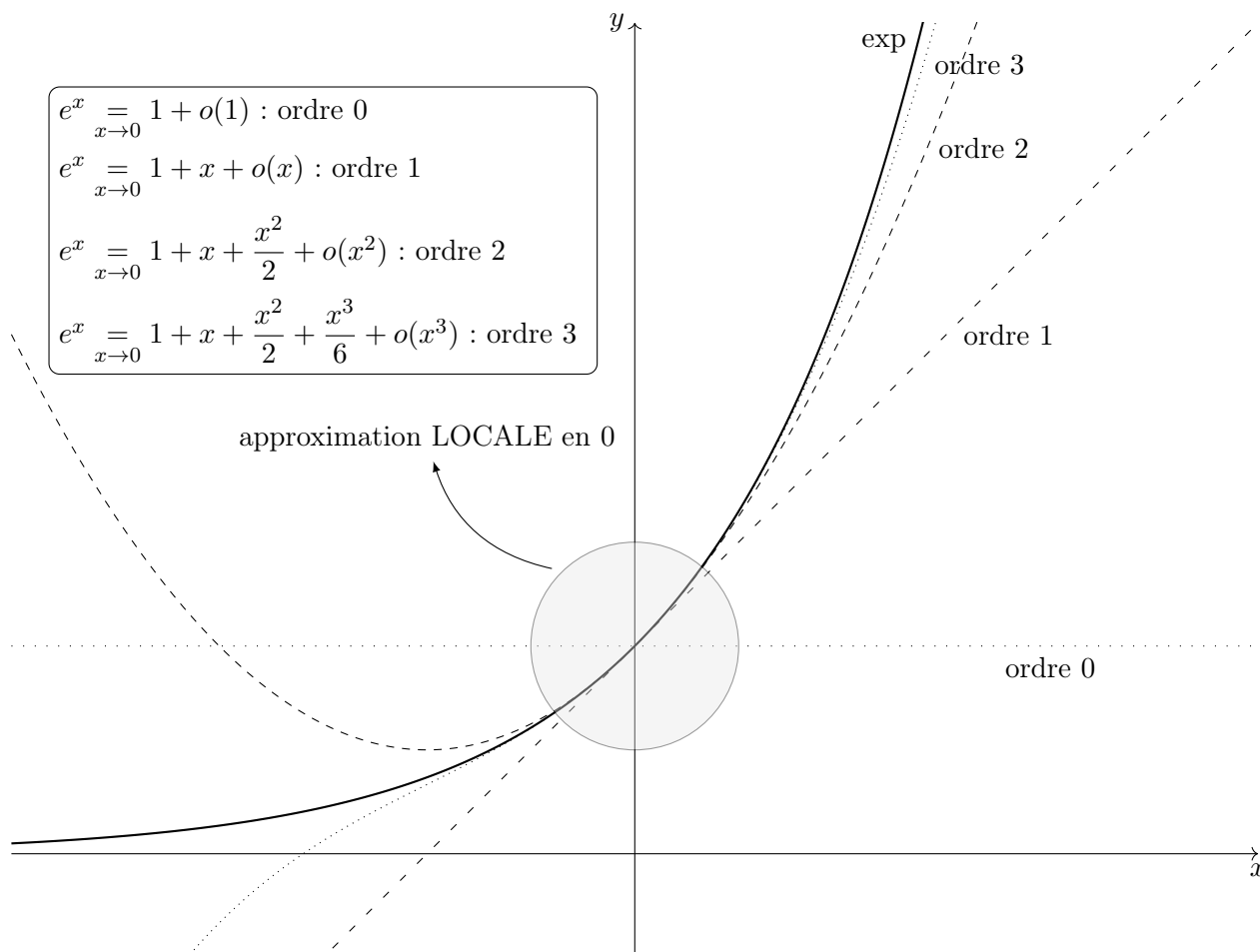
**Proposition-définition :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 s'il existe des réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que :

Les réels  $a_0, \dots, a_n$ , lorsqu'ils existent, sont uniques.

La fonction polynomiale  $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  s'appelle partie régulière ou partie principale du DL d'ordre  $n$  de  $f$  en 0.





### Remarques :

- Plus  $n$  est grand, plus la quantité  $x^n$  est petite au voisinage de 0 donc plus l'approximation de  $f$  obtenue au voisinage de 0 est précise.
- $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0}$  : le terme constant du DL en 0 est la limite de  $f$  en 0 (éventuellement nul).

**Exemple :**  $\exp$  admet le DL d'ordre 3 en 0 suivant :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Cela signifie que la fonction polynomiale de degré  $\leq 3$  la plus proche de  $\exp$  au voisinage de 0 est la fonction  $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .

D'ailleurs, on en tire aussi que :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .

Donc la fonction polynomiale de degré  $\leq 2$  la plus proche de  $\exp$  au voisinage de 0 est  $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .

Généralisons :

### Proposition :

(Troncature)

On suppose  $0 \leq p \leq n$ . Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors  $f$  admet un DL à l'ordre  $p$  en 0 :  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + o(x^p)$ .

**Remarque :** En notant  $a_i$  le premier coefficient non nul dans le DL :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_ix^i + \cdots + a_nx^n + o(x^n) & \text{ car } a_0 = \cdots = a_{i-1} = 0 \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} a_ix^i + o(x^i) & \text{ par troncature} \end{aligned}$$

Et comme  $a_i$  est non nul, un  $o(x^i)$  est un  $o(a_ix^i)$ , donc on a  $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_ix^i}$  :

un équivalent de  $f(x)$  est donné par le premier terme non nul dans le DL.

**Exemple :** Déterminer le DL à l'ordre  $n$  en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , puis celui de  $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .



**Démonstration 7**

### 3.b DL en 0 à connaître

c.f. Fiche distribuée.

Un chapitre ultérieur permettra de justifier ces DL.

Plus précisément, les DL en 0 de  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  s'obtiendront par la formule de Taylor-Young, et tous les autres s'en déduisent grâce aux techniques de calculs sur les DL.

### 3.c Techniques de calculs

Elles sont présentées sur des exemples, qu'il faut absolument savoir refaire.

**Remarque :** Pour obtenir un  $DL$  de  $f + g$ ,  $f \times g$ ,  $g \circ f$  à l'ordre  $n$ , on peut toujours partir d'un  $DL$  de  $f$  à l'ordre  $n$  et d'un  $DL$  de  $g$  à l'ordre  $n$ . On peut cependant souvent faire mieux, c'est-à-dire partir de  $DL$  de  $f$  et  $g$  à des ordres inférieurs à  $n$ , mais au cas par cas et en réfléchissant.

#### 3.c.i Passage de $x$ à $-x$

Comme nous l'avons vu pour le  $DL$  de  $\frac{1}{1+x}$  à partir de celui de  $\frac{1}{1-x}$  :

Si  $f$  admet un  $DL$  à l'ordre  $n$  en 0 alors  $x \mapsto f(-x)$  admet aussi un  $DL$  à l'ordre  $n$  en 0, qui s'obtient en remplaçant  $x$  par  $-x$  dans le  $DL$  initial.

#### 3.c.ii Combinaisons linéaires

**Exemple :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto 2 \cos x - 3 \ln(1+x)$ .



**Démonstration 8**

C'est aussi ce qui permet de prouver/retrouver les  $DL$  de  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  :

On sait que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

**Remarque :** de même, par différence, on obtient  $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ .

Mais en sommant partant du  $DL$  à l'ordre 6 de  $e^x$ , on obtiendrait

De manière générale :

- pour  $\operatorname{ch}(x)$ , derrière les termes  $1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , on peut mettre  $+o(x^{2n})$  ou  $+o(x^{2n+1})$
- pour  $\operatorname{sh}(x)$ , derrière les termes  $x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , on peut mettre  $+o(x^{2n+1})$  ou  $+o(x^{2n+2})$

#### 3.c.iii Produits

En première approche, on développe chacun des facteurs à l'ordre final demandé.

**Exemple 1 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 2 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ .



**Démonstration 9**

**Exemple 2 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 4 en 0 de  $f : x \mapsto x \ln(1+x)$ .



**Démonstration 10**

**Exemple 3 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 6 en 0 de  $f : x \mapsto (1 - \cos x)(\sin x - x)$ .



**Démonstration 11**

**Exemple 4 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 4 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{x^2(x-2)}{x-1}$ .



**Démonstration 12**

**Exemple 5 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 5 en 0 de  $f : x \mapsto (\sin(x))^3$ .



**Démonstration 13**

Retenir qu'une bonne méthode, pour les puissances, est de passer par des DL normalisés :

$$(x^2 + 3x^3 - x^4 + o(x^4))^2$$

### 3.c.iv Inverse

On commence toujours par développer l'« intérieur », à l'ordre demandé.

On transforme l'expression pour obtenir la forme  $\frac{1}{1+u}$  avec  $u$  qui tend vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ .

**Exemple 1 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sin(x)}$ .



**Démonstration 14**

**Exemple 2 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{2 + x + x^2}$ .



**Démonstration 15**

L'inverse est un cas particulier de composition : on compose  $\frac{1}{1+u}$  avec un autre DL (l'« intérieur »).

### 3.c.v Quotient

On transforme l'expression pour obtenir la forme  $f(x) \times \frac{1}{1+u}$  avec  $u$  qui tend vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ .

**Exemple 1 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 0 de  $\tan$ .



**Démonstration 16**

Lorsque le dénominateur initial a une limite nulle, il faut partir de développements limités à un ordre plus grand que celui demandé, car il y a des  $x$  qui se simplifient entre numérateur et dénominateur.

**Exemple 2 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 4 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ .



**Démonstration 17**

**Exemple 2 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 2 en 0 de  $f : x \mapsto \frac{\tan x}{\operatorname{Arctan} x}$ .



**Démonstration 18**

### 3.c.vi Composition

On développe toujours « l'intérieur » à l'ordre demandé. C'est « l'extérieur » qui, parfois, peut être développé à un ordre plus petit.

**Exemple 1 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto e^{\sin x}$ .



**Démonstration 19**

**Exemple 2 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 2 en 0 de  $f : x \mapsto \exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .



**Démonstration 20**

**Exemple 3 :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 4 en 0 de  $f : x \mapsto \sqrt{1+x \sin(x)}$ .



**Démonstration 21**

### 3.d DL en $x_0$

#### Proposition-définition :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in I$  ou  $x_0$  est une extrémité réelle de  $I$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$  s'il existe des réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que

Ce qui revient à :

Lorsque le  $DL$  d'ordre  $n$  en  $x_0$  existe, il est unique.

**Exemple :** Déterminer le  $DL$  à l'ordre 3 en 2 de  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ .



**Démonstration 22**

#### Remarques :

- ✧ Ne surtout pas développer les puissances  $(x - x_0)^k$ .
- ✧ On effectue systématiquement le changement de variables :  $h = x - x_0$  pour se ramener en 0.

Le DL de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $x_0$  s'écrit alors sous forme normalisée :

$$f(x) = f(x_0 + h) =$$

### 3.e Développements asymptotiques

**Rappel :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $+\infty$ .

On dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  si

On a bien sûr une définition similaire en  $-\infty$ .

Pour trouver une asymptote, on peut chercher un développement asymptotique.

Par exemple, on peut trouver une égalité de la forme : 
$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- On en tire :  $f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ , d'où :

ce qui donne que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  en  $+\infty$ .

- \* Si  $c \neq 0$ ,

ce qui donne le signe de la quantité  $f(x) - (ax + b)$  au voisinage de  $+\infty$ , et donc les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et de son asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

- \* Si  $c = 0$ , alors on développe à un ordre plus élevé, et on fait le même type de raisonnement, par exemple avec un terme  $\frac{d}{x^2}$  avec  $d$  non nul...

**Exemple :** Montrer que la courbe de  $f$  admet une asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et étudier les positions relatives :  $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$



#### Démonstration 23

On peut aussi faire des développements asymptotiques de suites :

**Exemple :** Déterminer le développement asymptotique de  $u_n = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n + 2}\right)$  à la précision  $\frac{1}{n^2}$ .



#### Démonstration 24

# Plan du cours

<b>1</b>	<b>Négligeabilité : cas des suites</b>	<b>1</b>
1.a	Definition . . . . .	1
1.b	Exemples à connaître . . . . .	2
1.c	Propriétés de base . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Négligeabilité : cas des fonctions</b>	<b>5</b>
2.a	Définition et exemples . . . . .	5
2.b	Propriétés . . . . .	6
2.c	Qualité d'une approximation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Développements limités</b>	<b>8</b>
3.a	Développement limité en 0 . . . . .	8
3.b	DL en 0 à connaître . . . . .	9
3.c	Techniques de calculs . . . . .	10
	3.c.i Passage de $x$ à $-x$ . . . . .	10
	3.c.ii Combinaisons linéaires . . . . .	10
	3.c.iii Produits . . . . .	10
	3.c.iv Inverse . . . . .	11
	3.c.v Quotient . . . . .	11
	3.c.vi Composition . . . . .	12
3.d	DL en $x_0$ . . . . .	12
3.e	Développements asymptotiques . . . . .	13