Corrigé du devoir maison 6.

Exercice 1

1°) $u_1 = u_0 + v_0 = 12$; $v_1 = 2u_0 + v_0 = 17$; $u_2 = u_1 + v_1 = 29$; $v_2 = 2u_1 + v_1 = 41$.
Ainsi, $\boxed{u_1 = 12 \quad v_1 = 17 \quad u_2 = 29 \quad v_2 = 41}$.

2°) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

★ H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie i.e. $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Alors $u_{n+1} = u_n + v_n > 0$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n > 0$. Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0, v_n > 0}$.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = v_n > 0$ et $v_{n+1} - v_n = 2u_n > 0$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont strictement croissantes}}$.

4°) Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ (en tant que suite extraite de (u_n)).
Donc $v_n = u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or (v_n) est croissante et $v_0 = 7$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 7$. Par passage à la limite, sachant que (v_n) converge vers 0, on obtient $0 \geq 7$: absurde.
Ainsi, la suite (u_n) diverge.
Comme elle est croissante, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = u_n > 0$, donc $v_{n+1} > u_{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
On a aussi $v_0 > u_0$. D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n > u_n}$.
Comme la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ diverge aussi vers } +\infty}$.

6°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $2u_n^2 - v_n^2 = (-1)^n$.

★ $2u_0^2 - v_0^2 = 2 \times 25 - 49 = 1 = (-1)^0$ donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$$\begin{aligned}
2u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 &= 2(u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2) - (4u_n^2 + 4u_nv_n + v_n^2) \\
&= -2u_n^2 + v_n^2 \\
&= -(-1)^n \qquad \text{par } H_n \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

★ Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_n^2 - v_n^2 = (-1)^n}$.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{u_n} - \sqrt{2} &= \frac{v_n - \sqrt{2}u_n}{u_n} \\
&= \frac{(v_n - \sqrt{2}u_n)(v_n + \sqrt{2}u_n)}{u_n(v_n + \sqrt{2}u_n)} \\
&= \frac{v_n^2 - 2u_n^2}{u_n(v_n + \sqrt{2}u_n)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{u_n(v_n + \sqrt{2}u_n)} \text{ par 6}
\end{aligned}$$

Comme le dénominateur est positif d'après la question 2, on en tire que $\left|\frac{v_n}{u_n} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{u_n(v_n + \sqrt{2}u_n)}$.

Minorons le dénominateur : on a $v_n > u_n$ donc $v_n + \sqrt{2}u_n > u_n(1 + \sqrt{2})$.

Or $1 + \sqrt{2} > 2$ et $u_n > 0$, donc $(1 + \sqrt{2})u_n > 2u_n$, et ainsi $v_n + \sqrt{2}u_n > 2u_n$.

Comme $u_n > 0$, il vient : $u_n(v_n + \sqrt{2}u_n) > 2u_n^2 > 0$.

Par passage à l'inverse, $\frac{1}{u_n(v_n + \sqrt{2}u_n)} < \frac{1}{2u_n^2}$.

On a montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{v_n}{u_n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2u_n^2}}$.

8°) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\frac{1}{2u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \sqrt{2}}$.

9°) Cherchons une valeur de n pour laquelle $\frac{1}{2u_n^2} \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $500 \leq u_n^2$.

On a $u_1^2 = 144 < 500$ mais $u_2^2 = 29^2 = 841 > 500$. Donc, d'après l'inégalité de la question précédente, $\boxed{\frac{u_2}{v_2} = \frac{29}{41} \text{ est une valeur approchée rationnelle de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Exercice 2

1°) a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "le réel v_n existe et $v_n \in [0, 1]$."

- v_0 et bien défini, et $v_0 = \alpha \in [0, 1]$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, i.e. que le réel v_{n+1} existe et qu'il est dans $[0, 1]$.
  On sait que $v_n \in [0, 1]$; comme f est définie sur $[0, 1]$, $f(v_n)$ est bien défini, donc $v_{n+1} = 2v_n - f(v_n)$ est bien défini.
  D'après la propriété $(P1)$, on sait de plus que $v_{n+1} = 2v_n - f(v_n) \in [0, 1]$.
  Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le réel } v_n \text{ existe et } v_n \in [0, 1].}$

b)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} &= 2v_{n+1} - f(v_{n+1}) \\ &= 2v_{n+1} - f\left(2v_n - f(v_n)\right) \\ &\boxed{v_{n+1} = 2v_{n+1} - v_n} \quad \text{d'après la propriété } (P2) \end{aligned}$$

c) Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$.
Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double.
Son équation caractéristique est :

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 1 = 0 &\iff (r-1)^2 = 0 \\ &\iff r = 1 \end{aligned}$$

Il y a une racine double, donc

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (\lambda n + \mu)\, 1^n = \lambda n + \mu$$

Or $v_0 = \alpha$ et $v_1 = 2v_0 - f(v_0) = 2\alpha - f(\alpha)$ ce qui impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \alpha \\ \lambda + \mu = 2\alpha - f(\alpha) \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \alpha \\ \lambda = \alpha - f(\alpha) \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = (\alpha - f(\alpha))\, n + \alpha}$.

d) Si on avait $\alpha - f(\alpha) \neq 0$, alors, d'après cette expression, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergerait vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (selon le signe de $\alpha - f(\alpha)$).
Or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, elle ne peut pas diverger vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
On en déduit que $\alpha - f(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$.

2°)
- Nous venons de voir que si f définie sur $[0, 1]$ est solution au problème, alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha) = \alpha$.
- Vérifions que la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 1]$ est solution au problème :
  $\forall x \in [0, 1], \quad 2x - f(x) = 2x - x = x \in [0, 1]$
  $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = 2x - f(x) = 2x - x = x.$
  Ainsi $(P1)$ et $(P2)$ sont bien vérifiées.
- Conclusion :
  $\boxed{\text{il y a une unique fonction définie sur } [0,1] \text{ vérifiant les propriétés } (P1) \text{ et } (P2) \text{ : c'est } x \mapsto x.}$