
TD 23. Géométrie plane.

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1. Soit ABC un triangle non aplati.

- Montrer que, pour tout point M de \mathcal{P} , on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Exercice 2. Calculer l'aire du triangle ABC , où $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(3, 3)$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non aplati, on note \hat{A} l'angle non orienté entre \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , \hat{B} celui de \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BA} , et \hat{C} celui de \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CB} . On note également $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Démontrer la formule d'Al-Kachi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

Exercice 4. a) Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite Δ passant par $A(1, 2)$ et parallèle à la droite D d'équation : $4x - y + 1 = 0$.

b) Étudier l'intersection de D et de la droite passant par le point $(-2, 5)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2)$.

Exercice 5. Soient A le point de coordonnées $(1, -1)$ et \mathcal{D} la droite d'équation : $3x + 4y - 1 = 0$.

Calculer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} .

Exercice 6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la droite D_a d'équation : $(1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$.

- Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, D_a est bien une droite.
- Existe-t-il un point du plan qui appartienne à toutes les droites D_a ?
- Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe au moins une droite D_a .
- Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe deux droites D_a et $D_{a'}$ perpendiculaires.

Exercice 7. Soit l'ensemble \mathcal{C} défini par l'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

- Montrer que \mathcal{C} est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Déterminer l'intersection de \mathcal{C} et de la droite $\mathcal{D} : x - y + 2 = 0$.
- Soit A le point de coordonnées $(5, 0)$. Une droite est dite tangente à \mathcal{C} si elle n'a qu'un seul point d'intersection avec \mathcal{C} .

Déterminer les droites passant par A et tangentes à \mathcal{C} .

Exercice 8. Soit le cercle \mathcal{C} de centre l'origine et de rayon 10.

Soit \mathcal{C}' l'ensemble défini par l'équation : $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

- Montrer que \mathcal{C}' est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- Étudier l'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Exercice 9. A tout réel m , on associe l'ensemble \mathcal{C}_m d'équation : $x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m - 1) = 0$

- Montrer que, pour tout réel m , \mathcal{C}_m est un cercle.
- Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque m décrit \mathbb{R} .
- Vérifier que, parmi tous les cercles \mathcal{C}_m , il y en a un et un seul dont le rayon est minimal.
- Prouver qu'il existe deux points A et B communs à tous les cercles \mathcal{C}_m .

Donner une équation de la droite (AB) .

- Démontrer que, pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ n'appartenant pas à la droite (AB) , il existe un cercle \mathcal{C}_m et un seul contenant M_0 .