Devoir maison 13.

À rendre le lundi 5 juin 2023

Exercice 1

Un joueur lance 100 fois de suite une pièce de monnaie donnant pile avec probabilité p, avec $p \in]0,1[$. Pour $N \in \{2,\dots,100\}$, on note X_N la variable aléatoire égale au nombre de fois, au cours des N premiers lancers, que deux résultats consécutifs ont été différents.
Autrement dit, X_N est égale au nombre de « changements » au cours des N premiers lancers.
Par exemple, si les 9 premiers lancers sont

$$PPFPFFFPP$$

Alors $X_2 = 0$, $X_3 = 1$, $X_4 = 2$, $X_5 = 3$, $X_6 = 3$, $X_7 = 3$, $X_8 = 4$ et $X_9 = 4$.

1°) Justifier que, pour tout $N \in \{2,\dots,100\}$, X_N est à valeurs dans $\{0,\dots,N-1\}$.

On pose, pour tout $k \in \{1,\dots,100\}$, A_k : « On obtient pile au $k$ième lancer ».
Dans les questions 2 et 3, on se servira de ces événements.

2°) Montrer que X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $2p(1-p)$. Quelle est son espérance ? Déterminer la loi de X_3.

3°) Soit $N \in \{2,\dots,100\}$. Montrer que $P(X_N = 0) = p^N + (1-p)^N$.

4°) Pour tout $k \in \{3,\dots,100\}$, on définit la variable aléatoire Y_k par :

$$Y_k = X_k - X_{k-1}$$

et on pose également $Y_2 = X_2$.

a) Justifier sans calcul que pour tout $k \in \{2,\dots,100\}$, Y_k suit la même loi que X_2.

b) Soit $N \in \{2,\dots,100\}$. Exprimer X_N à l'aide des Y_k, en déduire $E(X_N)$.

5°) **a)** Soit $k \in \{3,\dots,99\}$. Calculer $P\left((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)\right)$.
En déduire que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, Y_k et Y_{k+1} ne sont pas indépendantes.

b) On admet que si $p = \dfrac{1}{2}$, alors toutes les variables Y_k sont indépendantes.
Soit $N \in \{2,\dots,100\}$. Déterminer, sans calcul, la loi de X_N.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On tire au hasard un numéro entre 1 et n, et on note X le numéro obtenu.
On effectue ensuite X lancers successifs d'une pièce parfaitement équilibrée.
On note Y le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours de ces lancers.

1°) Quelle est la loi de X ?

2°) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

3°) Démontrer que : $\forall j \in \{0,\dots,n\}$, $P(Y = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} \frac{1}{2^i}$.

4°) Pour $j \in \{1,\dots,n\}$ et $i \in \{j,\dots,n\}$, transformer $j\dbinom{i}{j}$.

5°) Montrer que $E(Y) = \dfrac{n+1}{4}$.