

## Chapitre 4. Complexes.

### 1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

#### 1.a Définition des nombres complexes, forme algébrique

**Théorème-définition :**

Il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$ , contenant  $\mathbb{R}$ , muni de lois  $+$  et  $\times$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- Il existe un élément de  $\mathbb{C}$ , noté  $i$ , tel que  $i^2 = -1$
- Tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des réels.

Autrement dit :

C'est ce qu'on appelle l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .

Le réel  $x$  s'appelle la partie réelle de  $z$ , on la note  $\text{Re}(z)$ .

Le réel  $y$  s'appelle la partie imaginaire de  $z$ , on la note  $\text{Im}(z)$ .

On a donc  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ .

- Les lois  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{C}$  prolongent celles de  $\mathbb{R}$ , et ont les mêmes propriétés :
  - *Commutativité de  $+$  et de  $\times$*  :  
 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$  et  $z \times z' = z' \times z$ .
  - *Associativité de  $+$  et de  $\times$*  :  
 $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$  et  $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$ .
  - *Éléments neutres* :  
 $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$  et  $z \times 1 = 1 \times z = z$ .
  - *Distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$*  :  
 $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$  et  $(z' + z'') \times z = z' \times z + z'' \times z$ .
  - *Intégrité* :  
 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, zz' = 0 \iff z = 0$  ou  $z' = 0$ .

On peut donc écrire :

$$\mathbb{C} =$$

⚠ Malgré son nom, la partie imaginaire est un réel !

#### Vocabulaire :

- Lorsque  $\text{Re}(z) = 0$ , on dit que  $z$  est imaginaire pur.  
 Cela revient à dire qu'il est de la forme  $iy$  avec  $y$  réel. Exemples :  $i, -i, 2i, \sqrt{2}i\dots$   
 L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$ . Ainsi :

$$z \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(z) = 0.$$

- De façon similaire :

$$z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0.$$

## Conséquence de l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe

Deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  sont égaux si et seulement si  $z$  et  $z'$  ont même partie réelle et même partie imaginaire :

autrement dit, pour  $x, x', y$  et  $y'$  réels :

L'idée à retenir : une égalité de nombres complexes se traduit par deux égalités de nombres réels.

$$\text{En particulier, } z = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}.$$

### 1.b Addition, produit, inverse

Pour  $x, y, x', y'$  réels :

- Somme :  $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$ , autrement dit :  $\begin{cases} \operatorname{Re}(z+z') = \\ \operatorname{Im}(z+z') = \end{cases}$   
Cela se généralise à des sommes de  $n$  termes :

$$\bullet \text{ Produit : } (x+iy) \times (x'+iy') =$$

$\triangleleft \operatorname{Re}(zz')$  n'est donc pas égal à  $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ ... Idem avec la partie imaginaire.  
Cependant :

- Inverse : si  $z = x+iy$  est non nul, alors  $x^2+y^2 \neq 0$  car

$$\text{et on constate que : } (x+iy) \frac{(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2-(iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$\text{Ainsi, } z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

On pourra retenir que, pour  $(x,y) \neq (0,0)$  :

On calcule  $\frac{1}{x+iy}$  sous forme algébrique en multipliant au numérateur et au dénominateur par  $(x-iy)$

(cela donnera, au dénominateur,  $x^2+y^2$  puisque c'est le résultat de  $(x+iy)(x-iy)$ ).

Cas des puissances de  $i$  :

$$\frac{1}{i} =$$

$$i^3 = \quad i^4 = \quad i^5 =$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : i^{2n} = \quad i^{2n+1} =$$

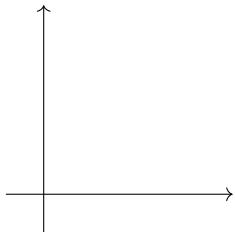
### 1.c Interprétation géométrique

Définition :

Le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  s'écrivant  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels.

- Le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est appelé point d'affixe  $z$ , ce que l'on note :  $M(z)$ .  
On dit aussi que  $M$  est le point image de  $z$ .
- Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  est appelé vecteur d'affixe  $z$ , ce que l'on note :  $\vec{u}(z)$ .

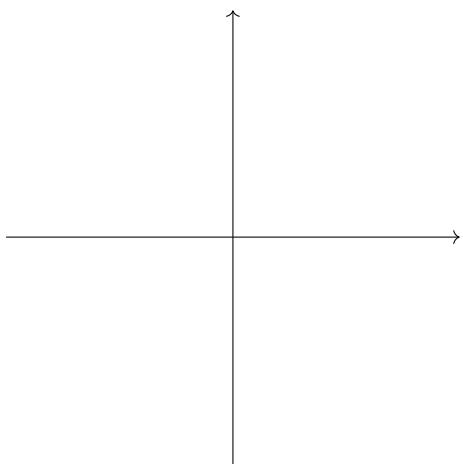


On peut donc identifier  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{P}$  (muni d'un repère orthonormé direct).

Exemples :

Plus généralement, les points  $M$  d'affixe  $z$  réelle sont les points de l'axe des abscisses :

$$z \in \mathbb{R} \iff M(z) \in (Ox)$$



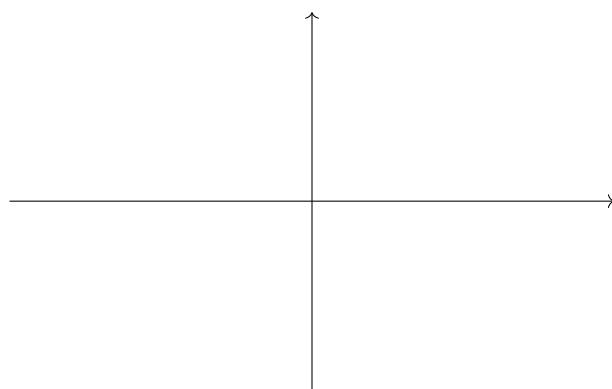
les points  $M$  d'affixe  $z$  imaginaire pur sont les points de l'axe des ordonnées :

$$z \in i\mathbb{R} \iff M(z) \in (Oy)$$

Proposition :

- Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  des vecteurs, d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ . Soit  $\lambda$  un réel.  
Alors l'affixe de  $\vec{u} + \vec{u}'$  est  $z + z'$  et l'affixe de  $\lambda \cdot \vec{u}$  est  $\lambda \cdot z$ .
- Soient  $A$  et  $B$  des points du plan, d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  
Alors l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $z_B - z_A$ .

Remarque : Soit  $M$  le point d'affixe  $z$ . Le point  $M'$  d'affixe  $-z$  est



## 2 Conjugué et module

### 2.a Conjugué

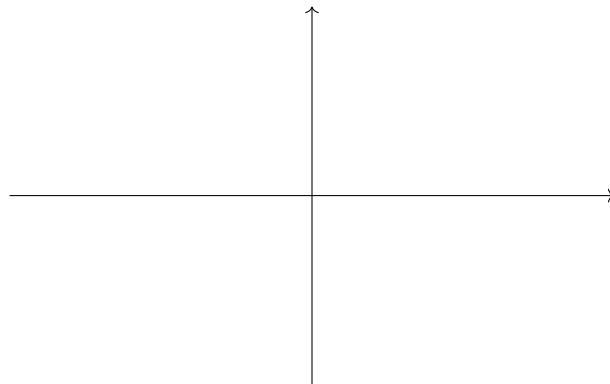
Définition :

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , s'écrivant  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

On appelle conjugué de  $z$  le complexe suivant :

Autrement dit,  $\bar{z} =$

Interprétation géométrique : Si  $M$  est le point d'affixe  $z$ , alors le point  $M'$  d'affixe  $\bar{z}$  est



Proposition :

Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  :

- $\overline{z + z'} =$
- $\overline{zz'} =$
- Si  $z \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$  et  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} =$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{z^n} =$   
(On peut prendre  $n \in \mathbb{Z}$  si  $z \neq 0$ )
- $\overline{\overline{z}} =$   
(On dit que la conjugaison est une involution).



Démonstration 1

Proposition :

Pour tout complexe  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z) =$

$\operatorname{Im}(z) =$



Démonstration 2

C'est à utiliser aussi "dans l'autre sens", c'est-à-dire :

**Corollaire :**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z \in \mathbb{R} \iff \text{et } z \in i\mathbb{R} \iff$$

## 2.b Module

**Définition :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , s'écrivant  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

On appelle module de  $z$  le réel positif suivant :

$$|z| =$$

On a aussi :

$$|z| =$$

En effet,

Très souvent, c'est  $|z|^2$  qu'on manipule ;

### Remarques importantes

- Le module et le conjugué permettent de calculer l'inverse :

On retrouve bien la formule donnée pour  $z = x + iy$  avec  $x, y$  réels :

- Si  $z = x + iy$ , avec  $x, y$  réels, est un réel, alors  $y = 0$ ,  $z = x$ , et  $|z| = \sqrt{x^2}$  : on retrouve la valeur absolue de  $x$ .  
Autrement dit, le module coïncide sur  $\mathbb{R}$  avec la valeur absolue, donc la notation  $|\cdot|$  n'est pas ambiguë.

**Interprétation géométrique :** (toujours dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct)

Si  $M$  est le point d'affixe  $z$ , alors  $|z|$  est

Si  $\vec{u}$  est le vecteur d'affixe  $z$ , alors  $|z|$  est

Si les points  $A$  et  $B$  ont pour affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ ,  
alors  $|z_B - z_A|$  est

Par conséquent : pour  $r$  réel positif et  $z_A$  un nombre complexe, en notant  $A$  le point d'affixe  $z_A$ ,

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| = r\}$  est

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| \leq r\}$  est

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| < r\}$  est

**Proposition :**

Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  :

- $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zz'| =$
- Si  $z \neq 0$ ,  $\left| \frac{1}{z} \right| =$  et  $\left| \frac{z'}{z} \right| =$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z^n| =$   
(On peut prendre  $n \in \mathbb{Z}$  si  $z \neq 0$ )
- $|z| = 1 \iff \bar{z} =$

☞ **Démonstration 3**

**Proposition :**

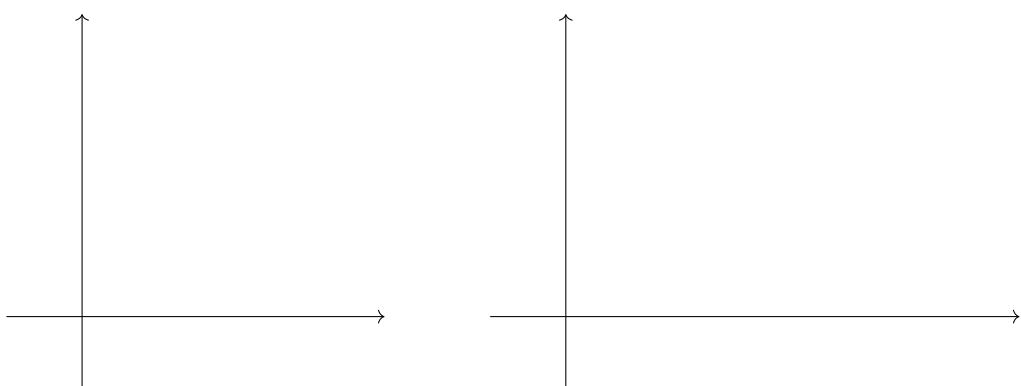
- Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- **(Inégalité triangulaire)** Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  :

Pour l'inégalité de droite, on a égalité si et seulement si  $z$  et  $z'$  sont positivement liés,  
c'est-à-dire :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, z' = \alpha z \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, z = \alpha z'.$$

☞ **Démonstration 4**

**Interprétations géométriques :**



### 3 Nombres complexes de module 1

#### 3.a Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition :

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} =$$

**Remarque importante** : Comme  $|z|$  est un réel positif,  $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1$ .

Premiers exemples :

Proposition :

- Pour tous éléments  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{U}$ , les éléments suivants sont encore dans  $\mathbb{U}$  :
- Pour tout  $z \in \mathbb{U}$ ,



#### Démonstration 5

Interprétation géométrique

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , de forme algébrique  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  sont donc des réels).

Soit  $M$  le point d'affixe  $z$ .

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U} &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

On sait aussi qu'un point  $M$  du cercle trigonométrique est déterminé par ses coordonnées  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle orienté entre  $\vec{i}$  et  $\overrightarrow{OM}$ , d'où :

Proposition :

Soit  $M$  un point du plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Notons  $(x, y)$  ses coordonnées.

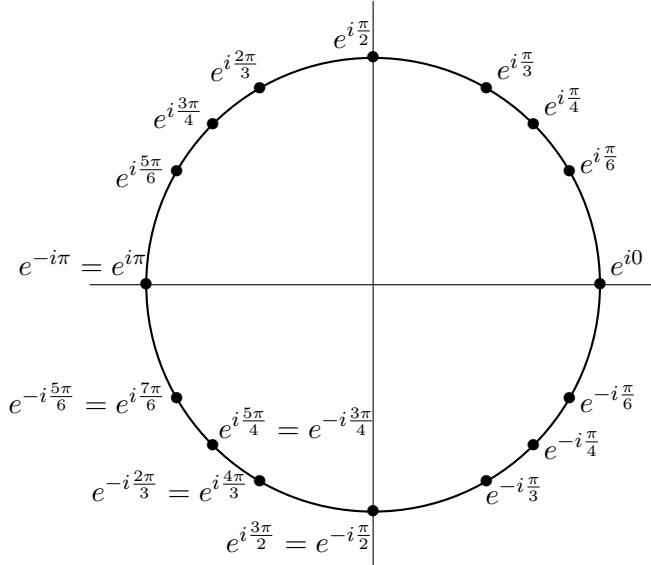
$$M \in \mathcal{C} \iff$$

$$\iff$$

Conséquence : **Théorème-définition :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$z \in \mathbb{U} \iff$$



**Proposition :**

- $e^{i0} = 1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$
  - $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i2k\pi} = 1$
  - Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$ ,  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \iff$
  - Pour tout réel  $\theta$ ,  $\overline{e^{i\theta}} =$
  - Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$ ,  $e^{i(\theta+\theta')} =$
  - Formules d'Euler :  $\cos \theta =$   $\sin \theta =$
  - Formule de Moivre :
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R},$



### Démonstration 6

**Exemple important :** On définit le nombre  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

$$\bar{j} =$$

$$j^2 =$$

### 3.b Une application : linéarisation, "délinéarisation"

#### • Linéarisation

Linéariser une expression polynomiale en  $\sin x$  et  $\cos x$  (avec des puissances, des produits et éventuellement des sommes) consiste à la transformer en somme de termes  $\cos 2x$ ,  $\cos 3x$ ,  $\sin x$ , ... sans puissances et sans produits. Cela sera extrêmement utile pour calculer des intégrales.

Il y a trois étapes :

- Étape 1 :

- Étape 2 :

- Étape 3 :

**Exemples** : a) Linéariser  $\cos^4 x$ .

b) Linéariser  $\sin^2 x \cos x$ .

#### Démonstration 7

- "**Dé-linéarisation**" On souhaite faire l'opération inverse : passer de  $\cos(nx)$  ou  $\sin(nx)$  à une expression polynomiale ne contenant plus que des  $\sin(x)$  et des  $\cos(x)$ .

Pour les petites valeurs de  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), les formules trigonométriques peuvent suffire.

Sinon, il y a aussi une méthode générale, avec deux choses à connaître : la formule du binôme de Newton encore, et

La formule de Moivre :  $\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos(x) + i \sin(x))^n$

**Exemple** : Exprimer  $\cos(6x)$  comme un polynôme en  $\cos(x)$ .

Exprimer  $\sin(6x)$  en fonction de  $\cos(x)$  et de  $\sin(x)$ .

Écrire  $\sin(6x) = \sin(x) \times f(\cos(x))$  où  $f$  est une fonction polynomiale.

#### Démonstration 8

### 3.c Technique de l'angle moitié

Calcul à savoir faire parfaitement : pour tout réels  $p$  et  $q$ ,

$$e^{ip} + e^{iq} = \quad e^{ip} - e^{iq} =$$

=

=

=

=

En particulier, pour  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ll} 1 + e^{i\theta} = & 1 - e^{i\theta} = \\ = & = \\ & = \end{array}$$

**Remarque** : Avec les formules obtenues pour  $e^{ip} + e^{iq}$  et  $e^{ip} - e^{iq}$ , on peut retrouver les formules trigonométriques  $\cos(p) \pm \cos(q)$  et  $\sin(p) \pm \sin(q)$  !

### 3.d Une autre application : calculs de sommes

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .

 **Démonstration 9**

## 4 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

### 4.a Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$  non nul. Alors :

**Définition :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  non nul. Il existe un réel  $\theta$ , unique à  $2\pi$  près, tel que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ .

Un tel réel  $\theta$  est appelé argument de  $z$ , ce qu'on note  $\theta = \arg(z)$ .

L'ensemble des arguments de  $z$  est alors  $\{\theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

L'écriture  $z = |z|e^{i\theta}$  est appelée forme trigonométrique de  $z$ .

**Remarque** : pour  $z \neq 0$ , il y a cependant un unique argument dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  : on l'appelle l'argument principal.

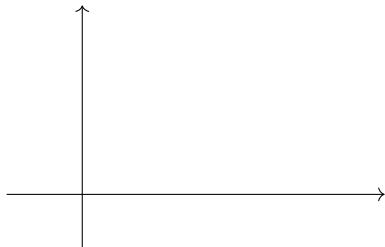
## Interprétation géométrique

Soit  $M$  le point du plan d'affixe  $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$ .

$|z|$  est la longueur du vecteur  $\overrightarrow{OM}$

$\theta$  est l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\overrightarrow{OM}$

$(|z|, \theta)$  forment un couple de coordonnées polaires de  $M(z)$ .



## Méthode

Lorsqu'on a mis un nombre complexe non nul  $z$  sous la forme  $z = \rho e^{i\theta}$  avec  $\boxed{\rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}}$  alors il s'agit bien de la forme trigonométrique de  $z$  :  $|z| = \rho$  et  $\arg(z) = \theta[2\pi]$ .

En effet :

## 4.b Propriétés

### Proposition :

Soient  $z$  et  $z'$  des complexes non nuls.  $z = z' \iff$



### Démonstration 10

### Proposition :

Soient  $z$  et  $z'$  des complexes non nuls. Alors :

$$\arg(zz') = \quad \text{et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$$



### Démonstration 11

On a aussi :  $\arg(\bar{z}) = \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$ .

### Proposition :

Soit  $z$  un complexe non nul.

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) =$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) =$$

## 4.c Comment obtenir la forme trigonométrique d'un complexe non nul ?

- Si  $z = a \in \mathbb{R}^*$  :

Retenir que transformer  $-1$  (un signe "moins") en  $e^{i\pi}$  peut être très utile...

Et de même, il faut penser parfois à remplacer  $i$  par  $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ...

- Autres exemples :

$$z_1 = \sqrt{2}i \quad ; \quad z_2 = -3i \quad ; \quad z_3 = ae^{i\theta} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad z_4 = 2 - 2i \quad ; \quad z_5 = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}i}$$

 **Démonstration 12**

- A-t-on une formule générale pour récupérer la forme trigonométrique  $z = |z|e^{i\theta}$  à partir de la forme algébrique  $z = x + iy$  de  $z \neq 0$  ?

#### 4.d Une application

**Proposition :**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} & \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a, b) \neq (0, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a \cos(t) + b \sin(t) \\ \iff & \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = A \cos(t - \varphi) \end{aligned}$$

 **Démonstration 13**

### 5 Des équations à savoir résoudre dans $\mathbb{C}$

#### 5.a $z^2 = Z_0$ : Racines carrées

**Définition :**

Soit  $Z_0 \in \mathbb{C}$ . On dit qu'un complexe  $z$  est une racine carrée de  $Z_0$  si  $z^2 = Z_0$ .

⚠ La notation  $\sqrt{x}$  n'a de sens que pour  $x \in \mathbb{R}_+$  ! Cela désigne l'unique réel positif  $y$  vérifiant  $y^2 = x$ . En effet,  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie comme la réciproque de :  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

$$x \mapsto x^2$$

Trouver les racines carrées de  $Z_0$ , c'est donc résoudre l'équation  $z^2 = Z_0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposition :**

Tout complexe  $Z_0$  non nul possède deux racines carrées exactement, opposées l'une de l'autre.



**Démonstration 14**

**Exemples :**

-1 a pour racines carrées

-4 a pour racines carrées

2 a pour racines carrées

Généralisons : pour un réel  $\alpha$ , les racines carrées de  $\alpha$  sont :

La démonstration nous donne une **méthode trigonométrique** pour trouver les racines carrées : si la forme trigonométrique de  $Z_0$  est  $\rho e^{i\theta}$ , alors les deux racines carrées de  $Z_0$  sont  $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

**Exemple :**  $Z_0 = 1 + i$

Que faire quand la forme trigonométrique de  $Z_0$  n'est pas facile à obtenir, et qu'on ne dispose que de sa forme algébrique ?

On écrit  $Z_0 = a + ib$  avec  $a, b$  réels.

On cherche  $z$  racine carrée de  $Z_0$  sous la forme  $z = x + iy$  avec  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ .

*Premier essai :*

$$z^2 = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Avec seulement cela, c'est compliqué de trouver  $x$  et  $y$  ! Il nous faudrait :

- une autre équation avec  $x^2$  et  $y^2$ , de sorte qu'on trouve les valeurs de  $x^2$  et  $y^2$  ;

- les signes relatifs de  $x$  et  $y$ , autrement dit le signe de  $xy$ .

*Deuxième essai - la **méthode algébrique** :*

L'astuce :

$$z^2 = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

**Exemple :** déterminer les racines carrées de  $4 - 3i$ .

 **Démonstration 15**

**5.b  $az^2 + bz + c = 0$  : Trinômes du second degré à coefficients complexes**

**Proposition :**

Soit  $(E)$  l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  suivante :  $az^2 + bz + c = 0$ ,  
avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .

Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Soit  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$ .

L'ensemble des solutions de  $(E)$  est :

En particulier, il n'y a qu'une seule solution si et seulement si

 **Démonstration 16**

**Exemple :**  $(E) : z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{i}{4} = 0$

- **Cas où  $a, b, c$  sont réels**

On retrouve les résultats connus car  $\Delta = b^2 - 4ac$  est alors un réel ;

— Si  $\Delta \geq 0$ ,

— Si  $\Delta < 0$ ,

- **Remarque importante dans le cas où  $a, b, c$  sont réels et  $\Delta < 0$**

Comme  $\sqrt{-\Delta} \neq 0$ , on a des solutions complexes non réelles.

Soit  $z_0$  l'une des deux solutions.

On peut l'écrire sous forme trigonométrique (car  $z_0 \neq 0$  sinon  $z_0$  serait réelle) :

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

L'autre solution est  $\bar{z}_0 = \rho e^{-i\theta}$  donc  $az^2 + bz + c =$

=

=

Il s'agit de la forme générale d'un trinôme du second degré :

— à coefficients réels

— sans racine réelle (i.e.  $\Delta < 0$ )

Sans calcul, on peut dire que les racines sont

**Remarque** : si on a un polynôme  $P(z)$  à coefficients complexes de degré strictement supérieur à 2, on cherche une racine "évidente"  $\alpha$ , et on peut mettre  $(z - \alpha)$  en facteur dans  $P(z)$  (comme au chapitre 1).

- **Relations coefficients-racines**

**Proposition :**

Soit  $(E) : az^2 + bz + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

$z_1$  et  $z_2$  sont les deux solutions de  $(E) \iff$



### Démonstration 17

Bien sûr, il est très courant d'avoir  $a = 1$  : équation de la forme  $z^2 + pz + q = 0$ .

$z_1$  et  $z_2$  sont les deux solutions de  $(E) \iff$

Le coefficient de  $z$  est alors

Le coefficient constant est alors

### 5.c $z^n = Z$ : Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe

Définition :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Z_0 \in \mathbb{C}$ .

On dit qu'un complexe  $z$  est une racine  $n$ -ième de  $Z_0$  si

Lorsque  $Z_0 = 1$ , on parle de racine  $n$ -ième de l'unité.

$\Delta$  Ne pas utiliser la notation  $\sqrt[n]{x}$  à mauvais escient :  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est définie comme la réciproque de  $x \mapsto x^n$ , de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  si  $n$  est pair et de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  si  $n$  est impair.

Ainsi,  $\sqrt[n]{x}$  n'a de sens que si  $x \in \mathbb{R}$  voire seulement si  $x \in \mathbb{R}_+$ ; et cela ne désigne qu'une seule des racines  $n$ -ièmes de  $x$  au sens complexe !

L'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité est noté  $\mathbb{U}_n$  :

$$\mathbb{U}_n =$$

Théorème :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité, qui sont les complexes suivants :



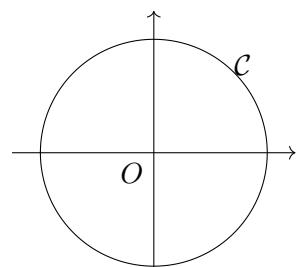
#### Démonstration 18

Ainsi

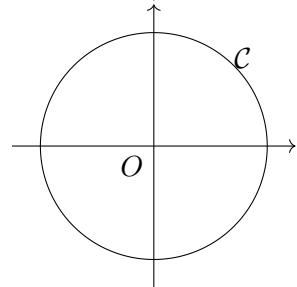
$$\mathbb{U}_n =$$

Pour les petites valeurs de  $n$ , voici les racines  $n$ -ièmes de l'unité et leurs points images sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  :

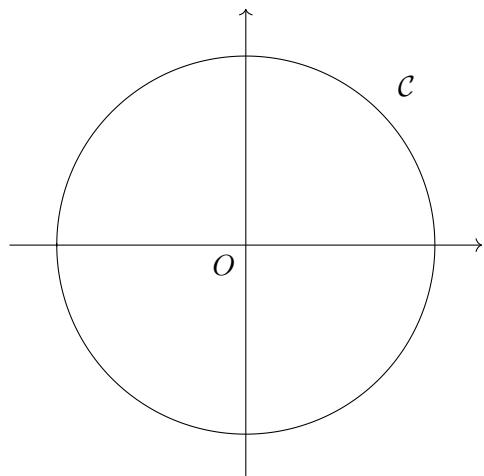
$n = 2$  :



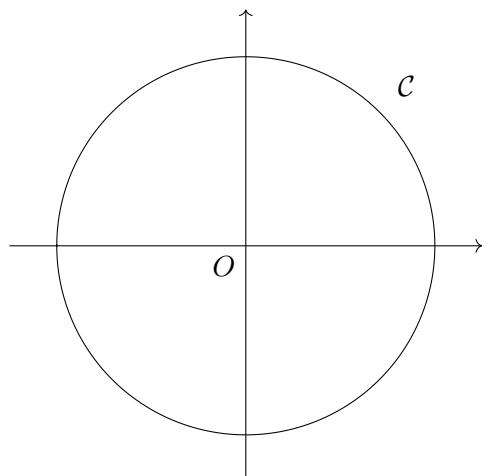
$n = 3$  :



$n = 4$  :



Les points images forment, sur le cercle trigonométrique,



### Proposition :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Notons  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$  est alors la somme des racines  $n$ ièmes de l'unité, elle vaut 0 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$



### Démonstration 19

En particulier :

Il faut savoir manipuler les puissances des racines  $n$ ièmes de l'unité. Par exemple, : si  $\alpha$  est une racine 5-ième de l'unité :

$$\alpha^5 = \quad \alpha^6 = \quad \alpha^8 =$$

$$\alpha^{2024} = \quad \bar{\alpha} =$$

Exemple d'application des racines  $n$ ièmes : Résoudre  $(z + 1)^4 = z^4$ .



### Démonstration 20

**Racines  $n$ ières de  $Z_0$  non nul :**

- On écrit  $Z_0$  sous forme trigonométrique :

$$Z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad \rho_0 > 0.$$

On en tire une racine  $n$ ième évidente :

- Donc :

$$z^n = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

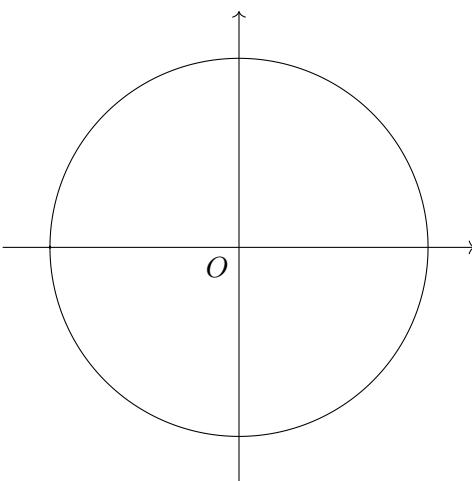
$$\iff$$

$$\iff$$

On a montré :

**Proposition :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Z_0 \in \mathbb{C}^*$ . Il existe exactement  $n$  racines  $n$ ières de  $Z_0$ , qui sont les complexes suivants :



**Exemple :** Trouver les racines 5ièmes de  $1 + i$ .

**Démonstration 21**

## 6 Exponentielle complexe

Définition :

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , de forme algébrique  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels).

On définit

$$e^z = e^x e^{iy}$$

C'est un nombre complexe non nul.

Il est écrit directement sous forme trigonométrique :

$e^x$  est un réel strictement positif,  $e^{iy}$  est un nombre complexe de module 1.

En résumé :

Proposition :

Soient  $z$  et  $z'$  des complexes.

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ .
- $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$ .
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .
- $e^z = e^{z'} \iff$



Démonstration 22

Exemple : Résoudre  $e^z = \sqrt{3} + i$ .



Démonstration 23

## 7 Applications à la géométrie

On se place dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 7.a Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité

Proposition :

- Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  des vecteurs non nuls, d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ . Alors :

$$(\vec{u}, \vec{u}') =$$

- Soient  $A, B, C, D$  des points d'affixes respectives  $a, b, c, d$ , avec  $A \neq B$  et  $C \neq D$ .

Alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$$



Démonstration 24

On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{u}'$  ou bien tel que  $\vec{u}' = k\vec{u}$ .

### Proposition :

(Colinéarité et orthogonalité)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  des vecteurs non nuls, d'affixes respectives  $z$  et  $z'$

- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires si et seulement si  $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$ .
- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux si et seulement si  $\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}$ .



### Démonstration 25

En fait, cela marque aussi si  $z' = 0$ .

Soient  $A, B, C$  des points d'affixes respectives  $a, b, c$ . Dire qu'ils sont alignés revient à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  (par exemple) sont colinéaires. On en tire que, si  $a \neq b$  :

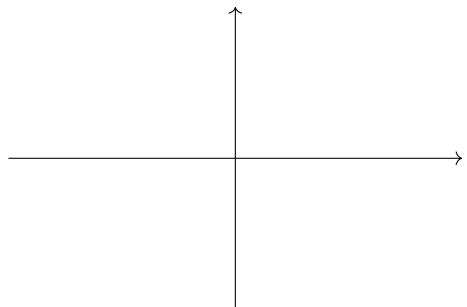
$$A, B, C \text{ alignés} \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

### 7.b Quelques transformations élémentaires du plan

On identifie  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{P}$ , autrement dit on identifie  $z$  et le point  $M$  d'affixe  $z$ .

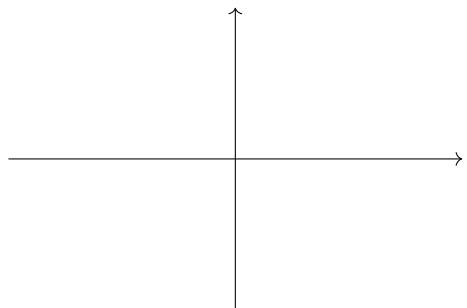
- La transformation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est

$$z \mapsto -z$$



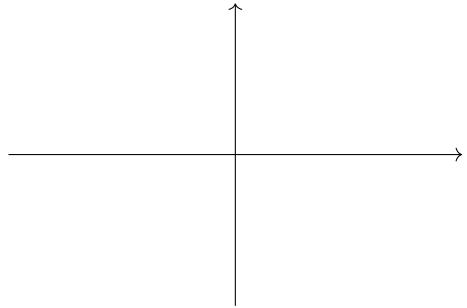
- La transformation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est

$$z \mapsto \bar{z}$$



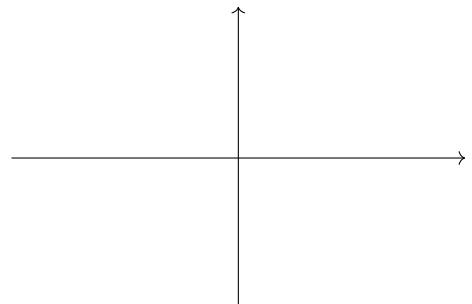
- Soit  $b \in \mathbb{C}$ . La transformation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est

$$z \mapsto z + b$$



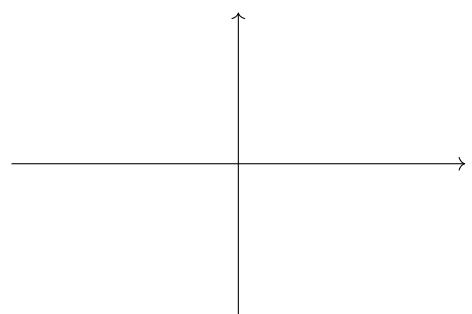
- Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ . La transformation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est  

$$z \mapsto kz$$



- Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La transformation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est  

$$z \mapsto e^{i\theta}z$$



De façon plus générale, si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , on peut s'intéresser à l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . En écrivant  $\alpha$   

$$z \mapsto \alpha z$$

sous forme trigonométrique  $\rho e^{i\theta}$ , avec  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on peut noter :

- $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\rho$
- $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

On a alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

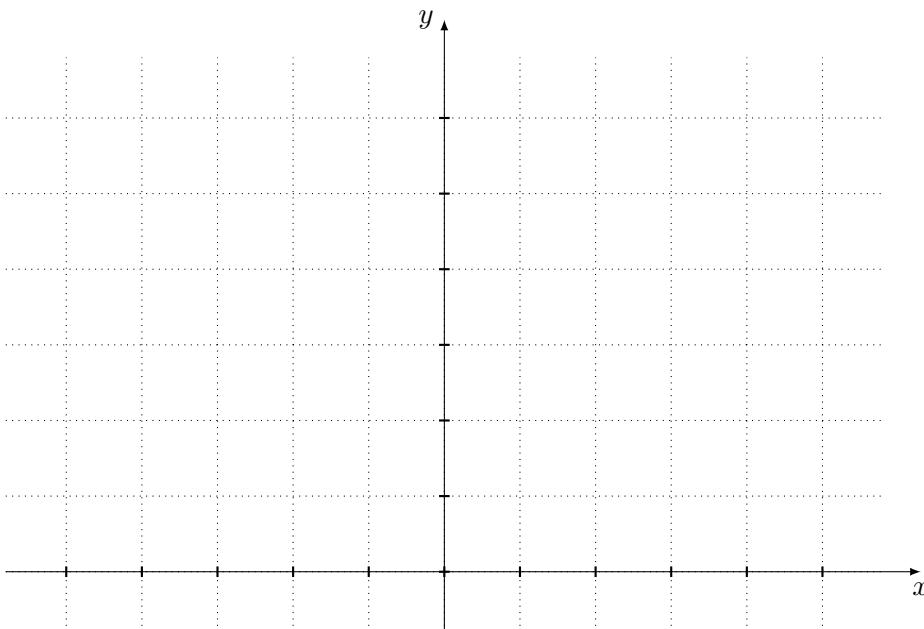
$$\begin{aligned} f(z) &= \rho \times e^{i\theta} \times z = h \circ r(z) \\ &= e^{i\theta} \times \rho \times z = r \circ h(z) \end{aligned}$$

$f$  est appelée similitude de centre  $O$ , de rapport  $\rho$  et d'angle  $\theta$ .

### Exemple

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Construire géométriquement  $f(2 + i)$ . Vérifier par le calcul.

$$z \mapsto 3iz$$



## 8 Fonctions à valeurs complexes

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On peut définir des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , par exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \ln(x) + ix^2. \end{aligned}$$

On peut alors considérer les parties réelles et imaginaires de  $f(x)$  pour tout  $x \in I$ , ce qui définit des fonctions  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  qui, elles, sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Dans l'exemple précédent,  $\text{Re}(f) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\text{Im}(f) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &\mapsto \ln(x) \\ &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

**Définition :**

- On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  (respectivement sur  $I$ ) si les fonctions  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  le sont.
- On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  (respectivement sur  $I$ ) si les fonctions  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  le sont.

Dans ce cas, on définit le nombre dérivé  $f'(x_0)$  (respectivement la fonction dérivée  $f'$ ) comme :

$$f'(x_0) = (\text{Re}(f))'(x_0) + i(\text{Im}(f))'(x_0)$$

$$(\text{respectivement } f' = (\text{Re}(f))' + i(\text{Im}(f))')$$

- Lorsque  $f$  est continue sur  $I$ , on définit, pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \text{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \text{Im}(f(t)) dt.$$

**Remarques :**

- La définition de  $f'$  permet d'écrire, en cas de dérivabilité :  $\begin{cases} \text{Re}(f') = (\text{Re}(f))' \\ \text{Im}(f') = (\text{Im}(f))' \end{cases}$
- Une somme, plus généralement une combinaison linéaire, un produit, un quotient de fonctions dérивables à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sont dérивables, et les formules habituelles sont valables.

**Exemples :**

- Avec la fonction  $f$  définie plus haut :

- Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la dérivée de  $x \mapsto \alpha x$  est  $x \mapsto \alpha$ .

 **Démonstration 26**

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ; calculons  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ .

**Proposition :**

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dérivable sur  $I$ . On pose, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = e^{\varphi(x)}$ .

On note :  $f =$

Alors,  $f$  est dérivable sur  $I$  et :  $\forall x \in I$ ,  $f'(x) =$

Ce qui se note :  $(e^\varphi)' =$

---



### Démonstration 27

**Exemple :** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\alpha$  est un complexe,

$$x \mapsto e^{\alpha x}$$

$f$  est dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ .

# Plan du cours

<b>1</b>	<b>L'ensemble <math>\mathbb{C}</math> des nombres complexes</b>	<b>1</b>
1.a	Définition des nombres complexes, forme algébrique . . . . .	1
1.b	Addition, produit, inverse . . . . .	2
1.c	Interprétation géométrique . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Conjugué et module</b>	<b>4</b>
2.a	Conjugué . . . . .	4
2.b	Module . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Nombres complexes de module 1</b>	<b>7</b>
3.a	Ensemble des nombres complexes de module 1 . . . . .	7
3.b	Une application : linéarisation, "délinéarisation" . . . . .	9
3.c	Technique de l'angle moitié . . . . .	9
3.d	Une autre application : calculs de sommes . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul</b>	<b>10</b>
4.a	Définition . . . . .	10
4.b	Propriétés . . . . .	11
4.c	Comment obtenir la forme trigonométrique d'un complexe non nul ? . . . . .	11
4.d	Une application . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Des équations à savoir résoudre dans <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>12</b>
5.a	$z^2 = Z_0$ : Racines carrées . . . . .	12
5.b	$az^2 + bz + c = 0$ : Trinômes du second degré à coefficients complexes . . . . .	14
5.c	$z^n = Z$ : Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Exponentielle complexe</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Applications à la géométrie</b>	<b>19</b>
7.a	Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité . . . . .	19
7.b	Quelques transformations élémentaires du plan . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Fonctions à valeurs complexes</b>	<b>22</b>