Devoir surveillé 2.

Samedi 20 octobre 2023, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1°) $\sin x - \sqrt{3}\sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

2°) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$.

3°) $(1+\sqrt{2})\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin(2x) = \sqrt{2}$.

Exercice 2

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux. On justifiera rigoureusement la réponse.

1°) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \sin x = ax^2 + bx + c$.

2°) $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin x = ax^2 + bx + c$.

3°) $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = a\cos^2 x + b\cos x + c$.

4°) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x \leq \cos x$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soit k un entier vérifiant $2 \leq k \leq n$.
Justifier que $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \leq n^k$.
En déduire que : $\displaystyle\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k(k-1)}$.

2°) **a)** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\quad \displaystyle\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$.

b) En déduire l'expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

3°) À l'aide de la formule du binôme, déduire des questions précédentes que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

4°) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$,

$$\frac{n^n}{n!} \leq 2 \times 3^{n-2}.$$

Exercice 4

On considère la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right) \end{array}$$
L'objectif de l'exercice est de simplifier l'expression de f par deux méthodes indépendantes.

Partie 1 : Première méthode

1°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

2°) En déduire une simplification de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. *On justifiera soigneusement.*

3°) Tester la cohérence de votre résultat obtenu à la question précédente en calculant les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ de deux façons différentes.

Partie 2 : Deuxième méthode

Dans cette partie, on ne se servira pas des résultats de la question précédente.

4°) Dans cette question, on se donne $x > 0$.

a) Justifier l'existence d'un unique $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta)$. Que vaut θ ?

b) Dans le cas où $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ en fonction de $\tan(2\theta)$.

c) Montrer que :
$$\begin{cases} \forall t > 0,\ \operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \forall t < 0,\ \operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

d) On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Dans quel intervalle se situe 2θ ?
À l'aide de la question précédente, obtenir une expression simple de $f(x)$ en fonction de x.

e) On suppose dans cette question que $x > 1$.
Obtenir de façon similaire une expression simple de $f(x)$ en fonction de x.

f) Que dire dans le cas $x = 1$?

5°) **a)** Justifier que f est impaire.

b) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x < 0$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$(*) : \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(xf(y)\right) = yf(x)$$
$$(**) : \ \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

On pourra utiliser le résultat suivant sans démonstration : soit $q \in \mathbb{R}$.
Si $0 \leq q < 1$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $q > 1$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1°) Dans toute cette question, f désigne une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant les deux conditions $(*)$ et $(**)$ ci-dessus.

- **a)** Montrer : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ t = xf(1)$.
- **b)** En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f \circ f(t) = t$.
- **c)** Montrer que $f(1) = 1$.

2°) Dans toute cette question, f désigne une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(*)$ et $(**)$, et x désigne un réel strictement positif fixé.
On pose $u = xf(x)$.

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u^n) = u^n$.
- **b)** En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $u \geq 1$.
- **c)** À l'aide de $(*)$ et de la question 2a, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{1}{u^n}\right) = \dfrac{1}{u^n}$.
- **d)** En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $u = 1$.

3°) Conclure.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$