AP : Corrigé des exercices Rédaction / Raisonnement.

Exercice 1

Les phrases suivantes ne sont pas correctes mathématiquement : réécrivez-les de la bonne manière.

1°) « La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. »

La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) « La fonction exp est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) « $(\text{Arctan}(\ln x))' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$ » , « $(\text{Arctan})'(\ln x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$ »

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\text{Arctan} \circ \ln)'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.

4°) « L'ensemble des primitives de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$. »

C'est l'ensemble $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$, qu'on peut aussi écrire : $\left\{x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + C \ / \ C \in \mathbb{R}\right\}$.

5°) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

« $f'(x) = 0$ donc $f(x) = C$ constante »

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$.

Donc, puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C$.

6°) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose $(*)$: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) + f(2x)$.

« Soit $x = 0$: $(*) \iff f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$ »

Remplaçons x par 0 dans la relation $(*)$, on obtient : $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

7°) « Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$. »

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

En particulier, en évaluant cette égalité en $\frac{\theta}{2}$, on obtient $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

Bien comprendre le problème dans la phrase initiale : le θ était fixé. Ce n'est parce que, pour un θ fixé, on a une égalité, qu'elle sera forcément vraie en remplaçant θ par une autre valeur...

Exercice 2 : Trouver les erreurs dans la récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Réécrire la récurrence :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

- $u_0 = 0$ et $1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. *(ne pas partir de la ccl)*
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n} + 1}{2} \qquad \text{par } HR \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie *(pas pour tout n, n était fixé ; et ce n'est pas la conclusion, on n'a en fait montré qu'une implication $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$)*

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Exercice 3

Les raisonnements ci-dessous sont incorrects : problème de rédaction et/ou de justifications.

1°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 &\Longleftrightarrow 2x \leq 1 + x^2 \qquad \text{car } 1 + x^2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 \geq 0}_{\text{vrai}} \end{aligned}$$

Donc, on montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

2°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \\ &\text{donc } x + 1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \\ &\text{donc } x + 1 \geq 2\sqrt{x} \\ &\text{donc } 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \qquad \text{car } x + 1 > 0 \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \geq 0$.

Donc, on a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$.

3°) Énoncé de l'exercice : *Résoudre l'inéquation* (I) : $e^{-2x} - e^{-x} - 2 > 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$. .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & e^{-2x} - e^{-x} - > 0 \\ \iff & X^2 - X - 2 > 0 \text{ avec } X = e^{-x} \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme du second degré qui apparaît est $\Delta = (-1)^2 + 4.2 = 9 = 3^2$, donc les racines de ce trinôme sont $\dfrac{1+3}{2} = 2$ et $\dfrac{1-3}{2} = -1$.
Comme le coefficient dominant est positif,

$$\begin{aligned} (I) \iff & X < -1 \text{ ou } 2 < X \\ \iff & e^{-x} < -1 \text{ ou } 2 < e^{-x} \\ \iff & 2 < e^{-x} \quad \text{car } e^{-x} > 0 \\ \iff & \ln(2) < -x \text{ car ln est strictement croissante} \\ \iff & x < -\ln(2) \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $]-\infty, -\ln(2)[$.

4°) Énoncé de l'exercice : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.
Problèmes principaux : k n'est pas introduit, et surtout la deuxième équivalence est complètement fausse !
Soit $k \in \{n+1, \ldots, 2n\}$.
On a $0 < k \leq 2n$ donc $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$.
Ceci pour tout k entre $n+1$ et $2n$: en sommant ces n inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

5°) Énoncé de l'exercice : *Résoudre le système suivant :* (S) : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\quad\; =0 \\ -x+3y \quad =2 \end{cases}$

Le problème, c'était de s'arrêter dans l'équivalence sur le système entier, car alors on ne peut pas justifier l'équivalence avec (S) *: on peut perdre de l'information.*

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \\ -x+3y=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y+z=1 \\ x=y \\ 2y=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z=1-2y \\ x=y \\ y=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z=-1 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution est donc $(1,1,-1)$.

6°) Énoncé de l'exercice : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Déterminer les racines nièmes de* i*.*

Problèmes :

— *Ne pas supposer* z *racine, c'est quelque chose qui ne doit apparaître que dans l'équivalence.*

— *On doit jusqu'au bout écrire des équivalences et pas des "donc", sinon on pourrait imaginer qu'on perd de l'information.*

— *Il faut introduire* k *à chaque ligne où il apparaît dans l'équivalence.*

— *Et la phrase de conclusion n'est pas française.*

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^n = i &\iff z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} \text{est une racine } n\text{ième de l'unité (ligne pas indispensable !)} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}, z = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

L'ensemble des racines $n$ièmes de i est donc $\left\{ e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}} \;/\; k \in \{0,\dots,n-1\} \right\}$