
Chapitre 10. Ensembles et applications.

1 Ensembles

1.a Définition d'un ensemble

Un ensemble E est par définition une collection d'objets (en nombre fini ou infini). Ces objets sont appelés les éléments de E .

Si x est un élément de E , on note : $x \in E$.

Représentations intuitive :

Exemples :

Il y a deux façons de définir un ensemble :

- en énumérant ses éléments.

Par exemple $E_1 = \{2, 4, 6, 8\}$, $E_2 = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

- en donnant une propriété qui caractérise les éléments de E ;
autrement dit on écrit $E = \{x \in \dots \mid P(x)\}$.

Par exemple $E_1 =$

et $E_2 =$

Remarque : Lorsqu'on résout une équation (E), c'est en fait qu'on passe de la forme "propriété" à la forme "énumération" pour l'ensemble des solutions \mathcal{S} :

Pour (E) : $z^2 = -2$ d'inconnue le complexe z :

$$\mathcal{S} =$$

Pour (E) : $x + y = 0$ d'inconnue le couple (x, y) :

$$\mathcal{S} =$$

Pour (E) : $y' = y$ d'inconnue une fonction dérivable y de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$\mathcal{S} =$$

Quelques ensembles particuliers :

- L'ensemble vide, noté \emptyset : il ne contient aucun élément.
- Un ensemble avec un seul élément s'appelle un singleton : $\{x\}$.
Un ensemble avec deux éléments s'appelle une paire : $\{x, y\}$ avec $x \neq y$.

1.b Inclusion

Définition :

Soient E et F des ensembles.

On dit que F est inclus dans E ou que F est une partie de E si :

$$\forall x \in F, \quad x \in E.$$

On note $F \subset E$.

Exemples :

Remarques :

- Si $F \subset E$ mais que $F \neq E$, on note parfois $F \subsetneq E$.
- \emptyset est inclus dans l'importe quel ensemble E
- $F \not\subset E$ signifie donc : .

Méthode :

- Pour montrer que $F \subset E$, on écrit :

- Pour montrer que $E = F$:

$E = F$ signifie que $\boxed{x \in E \iff x \in F}$.

D'où deux possibilités :

- Soit on arrive à montrer directement $x \in E \iff \dots \iff x \in F$.
Parfois facile, parfois difficile, parfois infaisable.
- Soit on raisonne par double inclusion :

Définition :

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, si E et F sont des ensembles,

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours \emptyset et E .

Exemple : Pour $E = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(E) = \{ \quad \quad \quad \}$$

1.c Réunion, intersection, différence, complémentaire

Dans cette partie, E désigne un ensemble et A, B, C des parties de E .

Définition :

- Réunion de A et B : c'est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B :

$$A \cup B =$$

- Intersection de A et B : c'est l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B :

$$A \cap B =$$

Ces définitions se généralisent au cas de plus de 2 ensembles :

Si I est un ensemble d'indices (fini ou infini) et si pour tout $i \in I$, A_i est une partie de E , on définit :

$$\bigcup_{i \in I} A_i =$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i =$$

Exemples :

— Le domaine de définition de \tan est

$$— \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1, 2 + \frac{1}{n} \right[=$$

Proposition :

- (Propriétés élémentaires)

$$A \cup A =$$

$$A \cup E =$$

$$A \cup \emptyset =$$

$$A \cap A =$$

$$A \cap E =$$

$$A \cap \emptyset =$$

- (Distributivité de \cap sur \cup et de \cup sur \cap)



Démonstration 1

Généralisation : $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) =$

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) =$$

Définition :

- Différence de A par B : c'est l'ensemble des éléments x de E appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B =$$

- Complémentaire de A dans E : c'est l'ensemble des éléments x de E n'appartenant pas à A ; autrement dit, c'est $E \setminus A$.

Souvent, il n'y a pas d'ambiguïté sur E , et le complémentaire de A dans E est alors noté \overline{A} ou A^c .

$$\overline{A} =$$

Exemple : le domaine de définition de \tan est

Proposition :

$\bar{\emptyset} =$	$A \cup \bar{A} =$	$\overline{A \cup B} =$
$\overline{\bar{E}} =$	$A \cap \bar{A} =$	$\overline{A \cap B} =$

**Démonstration 2**

Généralisation : $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} =$ $\bigcap_{i \in I} \bar{A_i} =$

1.d Parties disjointes, recouvrements disjoints, partitions**Définition :**

On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes si

Exemples :

Si I est un ensemble d'indices et si pour tout $i \in I$, A_i est une partie d'un ensemble E , on dit que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints si :

Définition :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des parties d'un ensemble E .

On dit que les A_i forment un recouvrement disjoint de E

si les A_i sont deux à deux disjoints, et si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Si de plus les A_i sont tous non vides, on dit plutôt que les A_i forment une partition de E .

Exemples :

- Avec $E = \mathbb{Z}$:
- Avec $E = \mathbb{R}$:
- Avec E l'ensemble des prénoms des élèves de la PTSI2 :

1.e Produit cartésien

Définition :

Soient E et F des ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble des couples d'un élément de E et d'un élément de F :

$$E \times F =$$

Une égalité entre deux éléments de $E \times F$ revient à une égalité dans E et une égalité dans F :

$$(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

⚠ L'ordre compte ! $(0, 1) \neq (1, 0)$.

⚠ Ne pas confondre avec $\{x, y\}$ qui désigne un ensemble.

Par exemple, $\{x, y\}$ est réduit à $\{x\}$ si $x = y$, alors que (x, x) a un sens différent de x .

Illustration :

Cette définition se généralise à un nombre fini quelconque d'ensembles :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n =$$

En particulier, $E \times E \times \cdots \times E$ (où E apparaît n fois) est noté E^n .

Exemples :

2 Applications : quelques notions générales

2.a Définition

Définition :

On appelle application (ou fonction) la donnée de trois choses :

- Un ensemble de départ E non vide
- Un ensemble d'arrivée F non vide
- Pour tout $x \in E$, la donnée d'un unique élément $f(x)$ de F associé, noté $f(x)$.

Notations :

$$\begin{array}{l} f : E \rightarrow F \quad \text{ou} \quad f : E \rightarrow F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F. \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

On dit que f est une application :

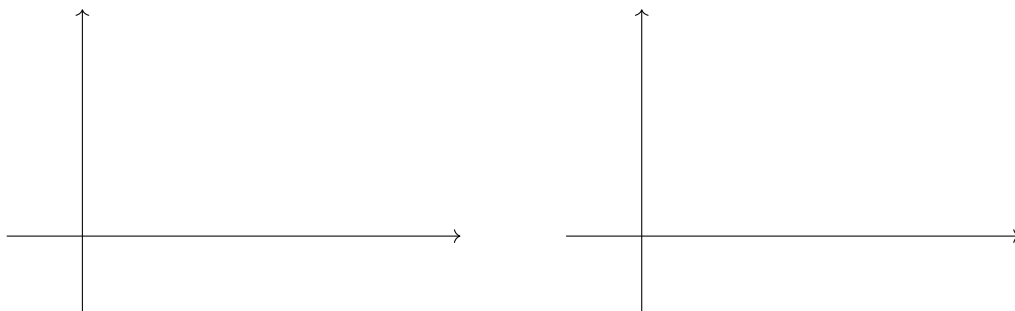
"de E dans F " ou bien "de E sur F " ou bien "définie sur E à valeurs dans F "

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Vocabulaire :

- Si $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par f .
- Si $y \in F$, tout élément $x \in E$ qui vérifie $f(x) = y$ s'appelle un antécédent de y par f .
Il peut y avoir plusieurs antécédents pour un même y !
- Le graphe de f est
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, c'est une partie de \mathbb{R}^2 que l'on appelle courbe représentative de f .

Exemples :

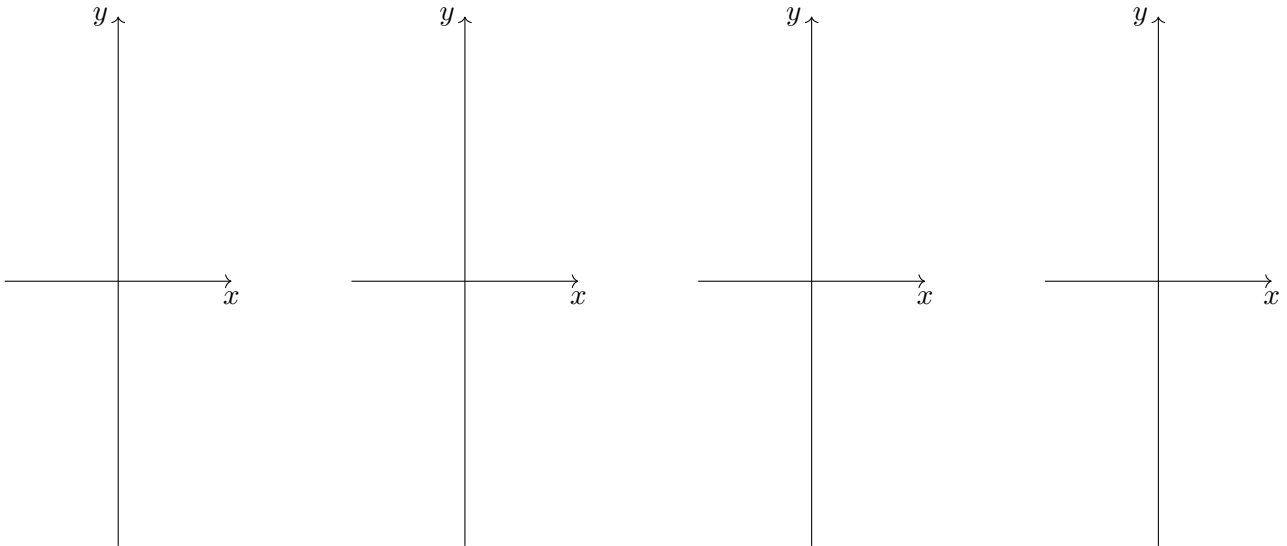


$$\begin{aligned} \text{id}_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F && \text{où } E = \text{PTSI2 et } F = \text{ensemble des prénoms écrits dans notre alphabet.} \\ \text{élève} &\mapsto \text{prénom} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} , & f_2 : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} , & f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ , & f_4 : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 & x &\mapsto x^2 & x &\mapsto x^2 & x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

sont 4 applications distinctes.



Montrer l'égalité de deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$, c'est donc :

- Vérifier que $E = E'$ (mêmes ensembles de départ)
- Vérifier que $F = F'$ (mêmes ensembles d'arrivée)
- Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

2.b Composition

Définition :


Soient E, F, G des ensembles, et des applications $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$.
On appelle composée de f par g l'application notée $g \circ f$ définie par :

Illustration :

Proposition :

(Associativité) Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$.
Alors :

On peut donc écrire

 Il n'y a pas de commutativité en général!!

Des contre-exemples :

Proposition :

Soit $f : E \rightarrow F$.

$$f \circ \quad = f \quad \circ f = f$$



Démonstration 3

2.c Restriction, prolongements

Définition :

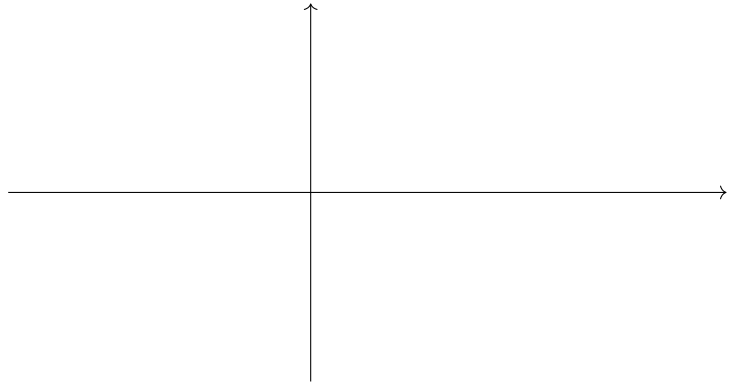
Soit $f : E \rightarrow F$ et A une partie de E .

On appelle restriction de f à A l'application $f|_A$ définie par :

Ce sont bien deux applications distinctes :

elles n'ont pas le même graphe !

Exemple : \cos et $\cos|_{[0,\pi]}$:

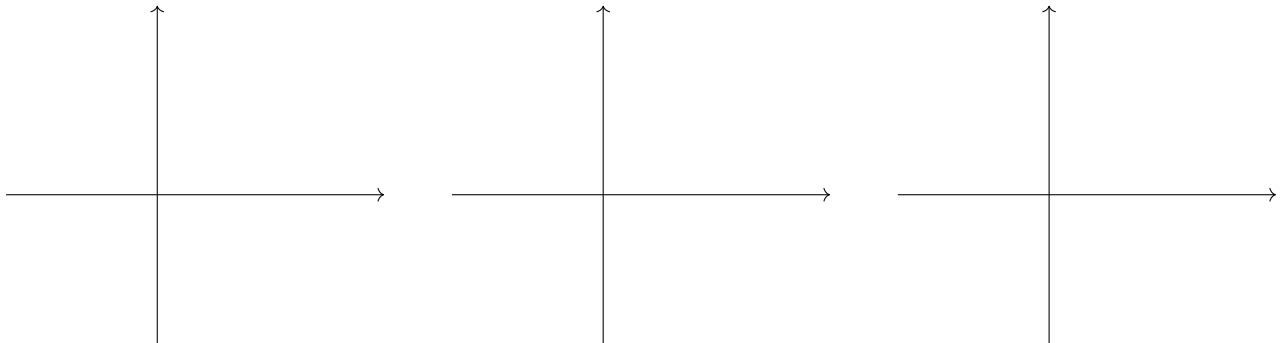


Définition :

Soit A une partie de E et $f : A \rightarrow F$.

Un prolongement de f à E est une application $\tilde{f} : E \rightarrow F$ qui vérifie :

⚠ Il n'y a pas un seul prolongement possible mais une infinité !



2.d Images directes, images réciproques

Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ et A une partie de E .

On appelle image directe de A par f , et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A :

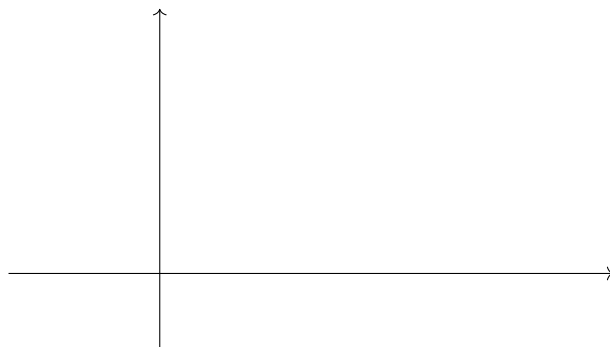
$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

C'est une partie de F .

Cela revient à dire, pour $y \in F$:

$$y \in f(A) \iff$$

C'est ce qu'il faut retenir en priorité !

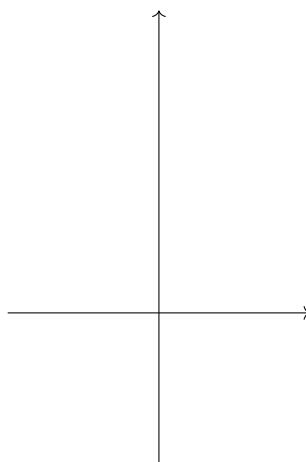


Exemple : Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$$f([0, 2]) =$$

$$f(\mathbb{R}) =$$

$$f([-1, 2]) =$$



Exemple : Lorsque $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante avec I intervalle, on a déjà vu comment obtenir $f(I)$:

si $I = [a, b]$, c'est $[f(a), f(b)]$; si $I =]a, b]$, c'est $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$

si $I = [a, b[$, c'est $[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$; si $I =]a, b[$, c'est $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$

Dans le cas où f est strictement décroissante, il suffit d'inverser les bornes.

Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ et B une partie de F .

On appelle image réciproque de B par f , et on note *provisoirement* $f^{\leftarrow}(B)$, l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

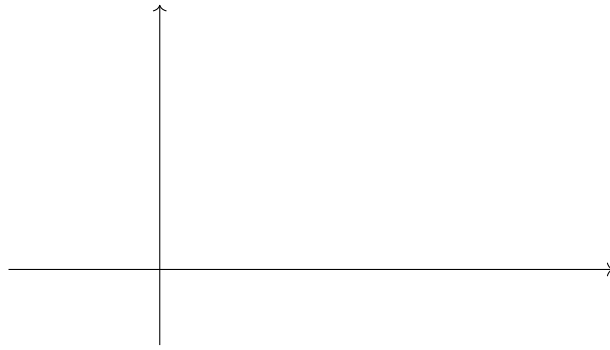
C'est une partie de E .

Cela revient à dire, pour $x \in E$:

$$x \in f^{\leftarrow}(B) \iff$$

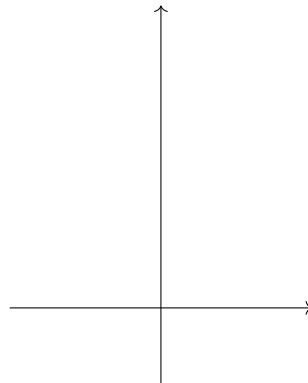
C'est ce qu'il faut retenir en priorité !

La notation officielle sera $f^{-1}(B)$, on en reparlera dans la partie 3.



Exemple : Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}([0, 4]) &= \\ f^{\leftarrow}(]-\infty, -1]) &= \\ f^{\leftarrow}(\{3\}) &= \\ f^{\leftarrow}([-3, 1]) &= \end{aligned}$$



Remarque : Soit $y \in F$; $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est

Désormais, en particulier dans les exercices, on se force à utiliser la notation $f^{-1}(B)$ au lieu de $f^{\leftarrow}(B)$.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

3.a Injectivité

Définition :

On dit que $f : E \rightarrow F$ est injective (ou : est une injection) si

Autrement dit :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Illustration :

Méthodes :

- C'est la dernière équivalence qu'on utilise le plus souvent.
- Prouver que f n'est pas injective, c'est

Exemples :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{i\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z+i}{z-i} \end{aligned}$$

Traduction en termes d'équations :

f injective \iff Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

3.b Surjectivité

Définition :

On dit que $f: E \rightarrow F$ est surjective (ou : est une surjection) si

Autrement dit :

$$f \text{ surjective} \iff$$

Remarque : Dire que $f: E \rightarrow F$ est surjective, c'est dire que $f(E) = F$.

Illustration :

Traduction en termes d'équations :

f surjective \iff Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

Méthode :

Prouver que f n'est pas surjective, c'est

Exemples :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\ln(x^2), y + 2) \end{aligned}$$

3.c Bijectivité, réciproque

Définition :

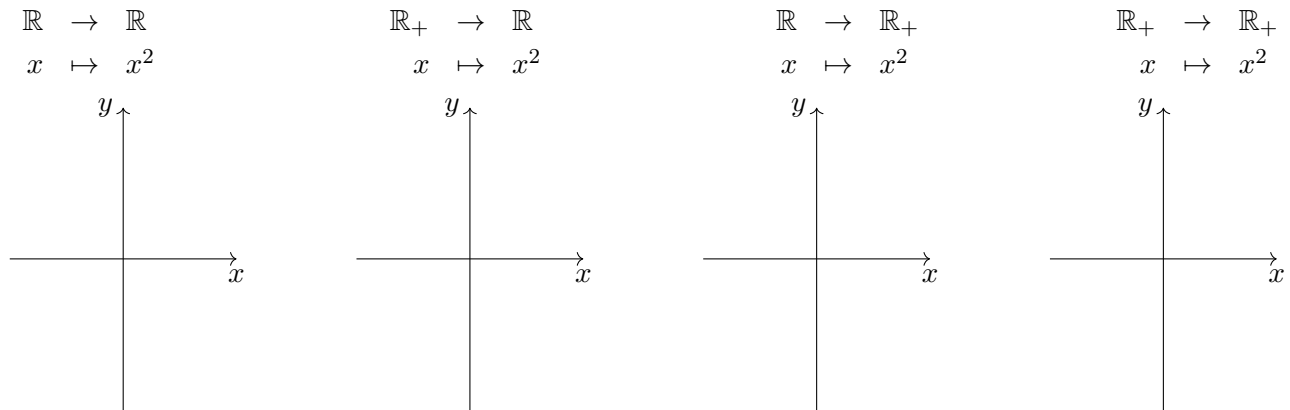
On dit que $f: E \rightarrow F$ est bijective (ou : est une bijection) si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

Autrement dit :

$$f \text{ bijective} \iff$$

Illustration :

Exemples : Récapitulons avec :



Traduction en termes d'équations

f bijective \iff Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

Exemples :

- Pour tout ensemble E , id_E est bijective.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (y, x + 2)$

- Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Montrer que f est bijective.

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3}.$$



Démonstration 4

Si l'exercice avait été :

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ f est-elle bijective ?

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3}.$$



Démonstration 5

Définition :

Soit f une application bijective de E dans F .

L'application qui à tout $y \in F$, associe son unique antécédent par f , s'appelle l'application réciproque de f . On la note f^{-1} .

On a donc :

Illustration :

Remarques :

- Si $f : E \rightarrow F$ est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Par définition, pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$, et pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$. Ainsi :

Exemples :

Pour tout ensemble E , l'application réciproque de id_E est

L'application réciproque de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est

$$x \mapsto x^2$$

L'application réciproque de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est

$$x \mapsto \cos x$$

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$(x, y) \mapsto (y, x + 2)$$

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$$

Retenir :

Pour montrer qu'une fonction est bijective et trouver la réciproque, une bonne méthode est de résoudre, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Si pour tout $y \in F$, on trouve une unique solution, alors on peut affirmer que f est bijective...
et l'unique solution obtenue, qui s'exprime en fonction de y , est $f^{-1}(y)$!

Si vous trouvez ne serait-ce qu'une valeur de y pour laquelle on n'a pas de solution ou plusieurs solutions, alors f n'est pas bijective.

Notation pour l'image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction bijective, notons $g = f^{-1}$, on a $g : F \rightarrow E$. Soit B une partie de F .

- On peut considérer l'image directe de B par g , c'est $g(B) = f^{-1}(B)$, l'ensemble des images par f^{-1} des éléments de B .
- Comme B est une partie de l'ensemble d'arrivée de f , on peut aussi considérer l'image réciproque de B par f , notée $f^{-1}(B)$ (ou, avec la notation provisoire, $f^{\leftarrow}(B)$) : c'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B . Or, pour $y \in B$, l'antécédent de y par f est $f^{-1}(y)$, c'est bien une image d'un élément y de B par la fonction f^{-1} .
- Conclusion : la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambiguë lorsque f est bijective, cela désigne indifféremment l'image réciproque de B par f ou l'image directe de B par f^{-1} .

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ existe même si f n'est pas bijective !

3.d Liens avec la composition

On a vu que si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$. Il y a une réciproque :

Théorème :

(Caractérisation des fonctions bijectives)

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

Si c'est le cas, une telle application g est unique, c'est f^{-1} .



Démonstration 6

Cela donne une bonne méthode dans les exercices abstraits pour montrer qu'une fonction est bijective :

trouver une application $g : F \rightarrow E$ telle que
$$\begin{cases} g \circ f = \text{id}_E \\ f \circ g = \text{id}_F. \end{cases}$$

On peut alors affirmer que f est bijective et que $f^{-1} = g$ (dans cet ordre).

Proposition :

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Si f et g sont bijectives, alors :

- la fonction $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective
- et sa réciproque est :



Démonstration 7

Illustration :

Proposition :

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.



Démonstration 8

4 Quelques notions de plus au programme

4.a Fonction indicatrice

Définition :

Soit E un ensemble et A une partie de E .

La fonction indicatrice de A (ou fonction caractéristique de A) est la fonction de E dans $\{0, 1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$: $x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \notin A \iff \mathbb{1}_A(x) = 0$.

Connaître $\mathbb{1}_A$, c'est connaître exactement pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 0$; autrement dit, cela revient à connaître exactement quels sont les éléments de E qui constituent la partie A . On peut dire que la partie A est caractérisée par sa fonction indicatrice.

Si A et B sont des parties de E , $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de

4.b Familles indexées

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des éléments d'un ensemble E , $(x_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ désigne la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de E . On peut en fait voir cela comme une application de l'ensemble des indices vers E :

$$\begin{aligned}x : \{1, 2, \dots, n\} &\rightarrow E \\ i &\mapsto x(i) = x_i\end{aligned}$$

Par exemple une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est en fait une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , d'où la notation pour l'ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Plus généralement, si I et E sont des ensembles, une famille d'éléments de E indexée par I est en fait une application de I dans E :

$$\begin{aligned}x : I &\rightarrow E \\ i &\mapsto x(i)\end{aligned}$$

On note cette famille $\boxed{(x_i)_{i \in I}}$.

Exemple :

On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $f_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(|a|x).$$

Alors $(f_a)_{a \in \mathbb{R}^*}$ est une famille de fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , indexée par \mathbb{R}^* .

Plan du cours

1	Ensembles	1
1.a	Définition d'un ensemble	1
1.b	Inclusion	2
1.c	Réunion, intersection, différence, complémentaire	3
1.d	Parties disjointes, recouvrements disjoints, partitions	5
1.e	Produit cartésien	6
2	Applications : quelques notions générales	7
2.a	Définition	7
2.b	Composition	9
2.c	Restriction, prolongements	10
2.d	Images directes, images réciproques	10
3	Injectivité, surjectivité et bijectivité	12
3.a	Injectivité	12
3.b	Surjectivité	13
3.c	Bijectivité, réciproque	14
3.d	Liens avec la composition	17
4	Quelques notions de plus au programme	18
4.a	Fonction indicatrice	18
4.b	Familles indexées	18