
TD 19. Espaces probabilisés finis, variables aléatoires.

Exercice 1. 1) Mon voisin a deux enfants dont une fille.

Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

2) Un autre voisin a deux enfants. Le plus jeune est une fille.

Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 2. Dix paires de chaussures toutes différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1) d'obtenir deux paires de chaussures ?

2) d'obtenir au moins une paire de chaussures ?

3) d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 3. Une classe est constituée de r élèves. Quelle est la probabilité pour que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire ?

Exercice 4. Une galette des rois est découpée en n parts. Elle ne contient qu'une seule fève. On a n convives qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Calculer la probabilité que le k ième convive ait la fève. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux ?

Exercice 5. On considère n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne numéro i , il y a i boules rouges et $n + 1 - i$ boules vertes. On choisit une urne au hasard et on y effectue le tirage d'une boule.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?

b) On a obtenu une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne numéro i ?

Exercice 6. On considère deux urnes numérotées 1 et 2.

On note n_1 le nombre de boules noires de l'urne n° 1, et b_1 le nombre de boules blanches de l'urne n° 1.

On définit de façon similaires les nombres n_2 et b_2 .

On choisit une des deux urnes au hasard, puis on effectue deux tirages successifs et avec remise d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement "on obtient une boule noire au premier tirage" et B l'événement "on obtient une boule noire au deuxième tirage". On posera $\alpha_i = \frac{n_i}{n_i + b_i}$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

1) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7. Une première boîte contient 3 boules rouges et 5 boules blanches. Une seconde boîte, 4 boules rouges et 2 boules blanches.

On tire au hasard une boule de la première boîte et on la place dans la seconde sans repérer sa couleur.

On tire alors une boule de la seconde boîte. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Exercice 8. Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété
- Lorsque la personne est en état d'ébriété, l'alcootest est positif 99 fois sur 100.
- Lorsque la personne est sobre, l'alcootest est négatif 95 fois sur 100.
- a) On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
- b) Déterminer la probabilité que l'appareil donne un résultat faux ?

Exercice 9. (Le téléphone arabe) On considère n personnes numérotées de 1 à n .

La personne n° 1 possède la bonne réponse à la dernière question du DM de maths, qui est soit "oui", soit "non" ; elle tente de la transmettre à la personne n° 2, mais l'information ne passe bien qu'avec probabilité α , avec $\alpha \in]0, 1[$ fixé : avec probabilité $1 - \alpha$, la personne n° 2 comprend le contraire. Cette dernière tente à son tour de transmettre ce qu'elle a compris à la personne n° 3, avec les mêmes probabilités de se faire comprendre, et ainsi de suite jusqu'à la personne n° n . À la fin, la personne n° n annonce ce qu'elle a compris.

- a) On note p_k la probabilité que la personne n° k ait la bonne réponse. Exprimer p_k en fonction de p_{k-1} , pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$.
- b) En déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$, interpréter.

Exercice 10. Soient deux points A et B sur lesquels une puce saute.

Lorsqu'elle est en A , la probabilité qu'elle atterrisse en B à l'instant suivant est $p \in]0, 1[$ et la probabilité qu'elle reste en A est $1 - p$.

De même pour B avec q et $1 - q$. On note a_n la probabilité qu'elle soit en A à l'instant n . De même, b_n est la probabilité qu'elle soit en B à l'instant n .

On suppose que la puce est en A à l'instant initial 0.

- 1) Déterminer une relation entre a_{n+1} , a_n et b_n , puis entre a_{n+1} et a_n seulement.
- 2) Déterminer a_n puis b_n en fonction de n .

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Camille lance une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité a (avec $0 < a < 1$). Elle marque un point si elle obtient pile et marque deux points si elle obtient face. Le jeu s'arrête dès qu'elle atteint ou dépasse un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de points fixé.

On note p_n la probabilité qu'elle s'arrête en ayant marqué exactement n points.

- 1) Calculer p_1 et p_2 .
- 2) Montrer : $\forall n \geq 1, p_{n+2} = ap_{n+1} + (1 - a)p_n$.
- 3) En déduire p_n en fonction de n et a .

Exercice 12. Soit $n \geq 3$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire les jetons au hasard successivement, sans remise, jusqu'à ce que l'urne soit vide.

- 1°) Modéliser l'univers Ω .
- 2°) On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, le jeton tiré est inférieur au jeton précédemment tiré. Si cela n'arrive pas, on pose $X = n + 1$.
Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X > k) = \frac{1}{k!}$.
- 3°) En déduire la loi de X .

Exercice 13. Pour chaque question, reconnaître la loi de X et préciser les paramètres.

- 1°) Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
- 2°) On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
- 3°) Un pré contient 5 lamas, 5 dromadaires et 5 chameaux. On sort un animal au hasard de ce pré et on note X le nombre de bosses.
- 4°) On pose n questions à un élève. Pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. L'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.
- 5°) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéroté 1 et on note X le nombre de tirages effectués.

Exercice 14. 1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 20\}$.

Déterminer la loi de $\max(X, 2) - 1$.

2) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$. Déterminer la loi de $\min(X, 1)$.

Exercice 15. Une commode possède trois tiroirs A , B , C . On a trois chemises distinctes, que l'on place au hasard dans la commode. Notons X le nombre de chemises placées dans le tiroir A , et N le nombre de tiroirs vides.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, N) .
- 2) En déduire les lois marginales de X et de N .
- 3) Montrer que les variables aléatoires X et N ne sont pas indépendantes.

Exercice 16. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Pierre et Paul jouent à Pile ou face : ils lancent chacun n fois une pièce et le gagnant est celui qui obtient le plus de piles.

- a) Déterminer la loi du nombre de piles obtenus par Pierre.
- b) Déterminer la probabilité d'un ex-aequo ?
- c) Quelle est la probabilité que Pierre gagne ?

Exercice 17. Dans un jeu télévisé, un candidat est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le candidat désigne d'abord une porte. Puis le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre une des deux portes qui n'a pas été choisie par le candidat et qui cachait une chèvre.

Le présentateur laisse alors le choix au candidat de garder son choix initial ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Quelle est la meilleure stratégie ?