Chapitre 26. Fonctions de plusieurs variables.

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel et de la norme associée :
$\forall\, u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\, v=(x',y')\in\mathbb{R}^2,\quad u\cdot v = xx'+yy' \quad \text{et} \quad ||u|| = \sqrt{x^2+y^2},\quad ||u||^2 = x^2+y^2.$

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$, continuité

1.a Définitions

Définition :

Soit $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$.
On appelle boule ouverte (ou bien disque ouvert) de centre a et de rayon r la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$B(a,r) = \left\{u\in\mathbb{R}^2 \ / \ ||u-a|| < r\right\}.$$

Définition :

On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est ouverte (ou que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) si :

$$\forall\, a\in U,\quad \exists\, r>0,\quad B(a,r)\subset U.$$

Rappelons la définition de la continuité en un $a\in I$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$ d'une fonction $f: I\to\mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, r>0,\quad \forall\, x\in I\cap[a-r,a+r],\quad |f(x)-f(a)|\leq\varepsilon.$$

Comment adapter cette définition si on remplace $I\subset\mathbb{R}$ par $U\subset\mathbb{R}^2$?

- Au lieu de $a\in I$, on prend $a=(x_0,y_0)\in U$, et le "petit intervalle $[a-r,a+r]$ centré en a" va être remplacé par "la petite boule $B\left((x_0,y_0),r\right)$ centrée en (x_0,y_0)" ;
- On va imposer que U soit un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ce qui permet d'être sûr qu'en prenant r suffisamment petit, $B(a,r)\subset U$, donc pas besoin d'écrire $U\cap B(a,r)$!

Définition :

Soit $f: U\to\mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est continue en $(x_0,y_0)\in U$ si :

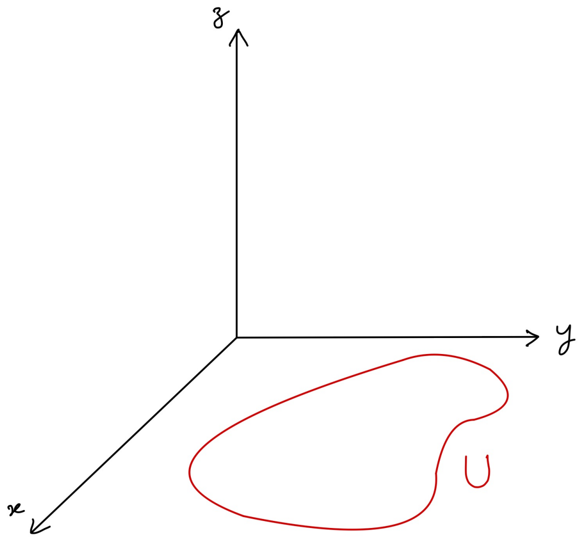
1.b Représentation graphique d'une fonction de deux variables, à valeurs réelles

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$, et $f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$

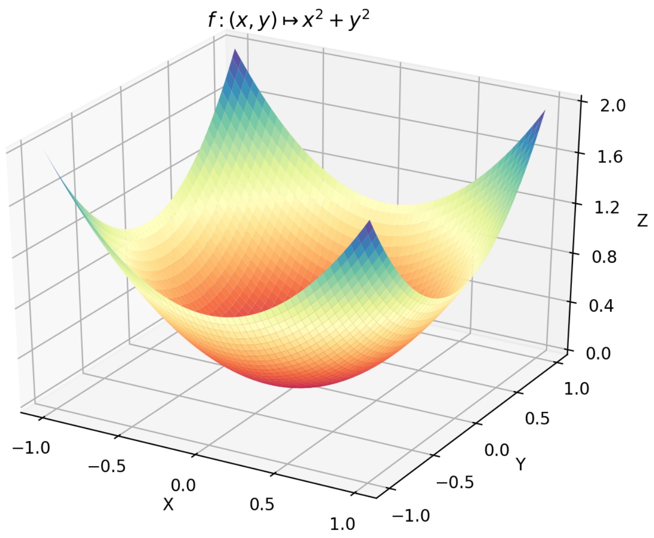
Le graphe de f est la $\boxed{\text{surface d'équation } z = f(x,y)}$ avec $(x,y) \in U$.

Autrement dit, c'est la partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ suivante :

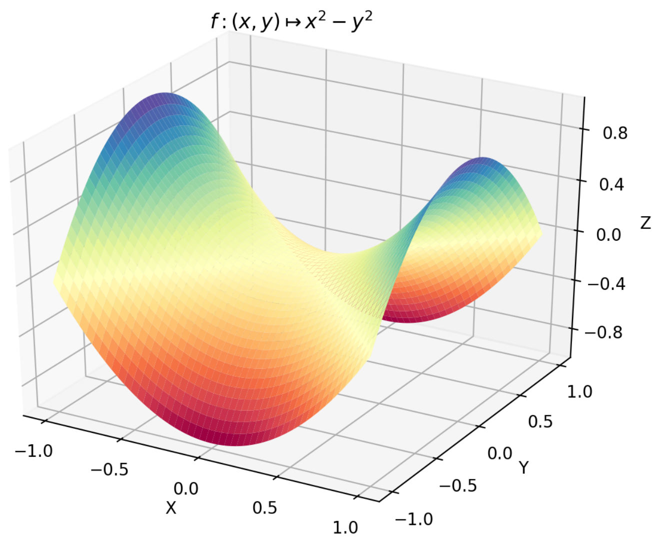
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\right\} \\ &= \{(x,y,f(x,y)) \ / \ (x,y) \in U\} \end{aligned}$$



Voici quelques exemples de représentations :

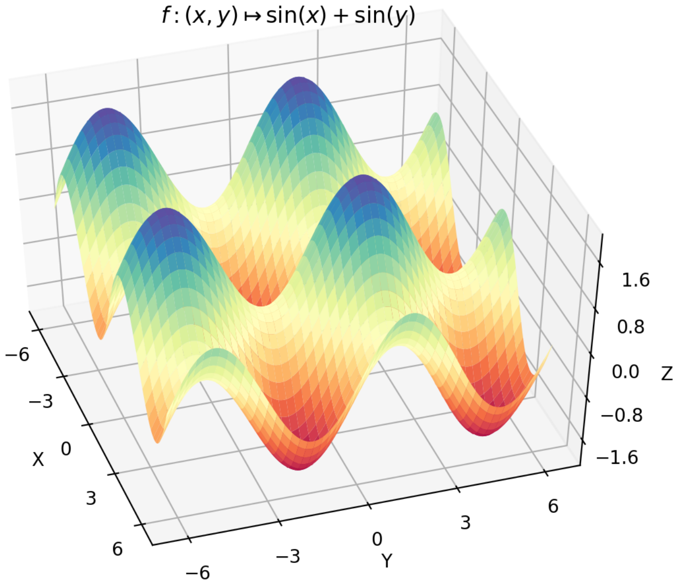


$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $U = [-1,1]^2$

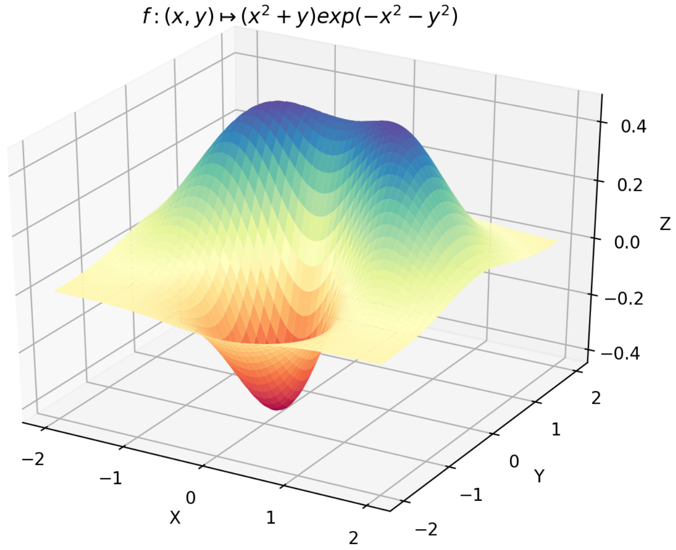


$f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $U = [-1,1]^2$

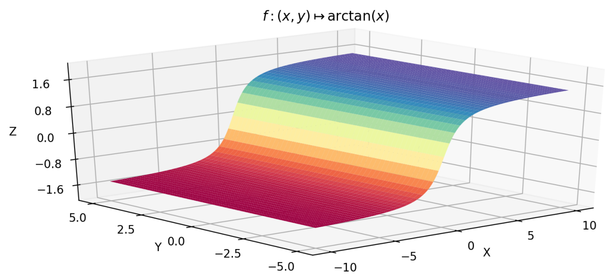
Sur $U = [-2\pi, 2\pi]^2$:



Sur $U = [-2, 2]^2$:

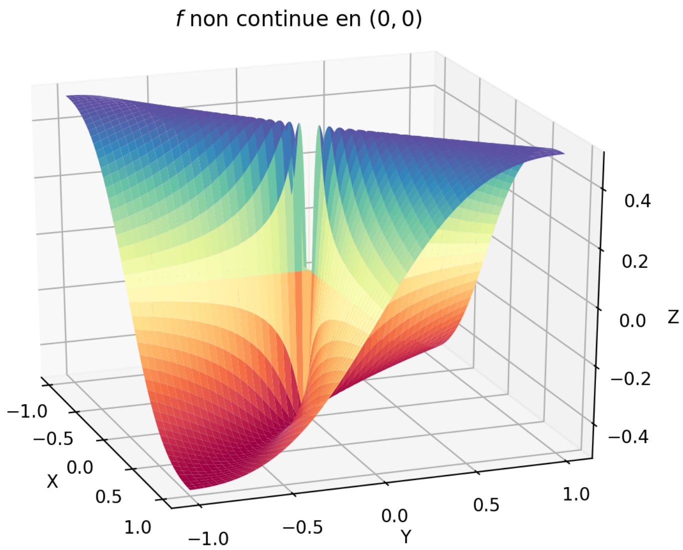


$f : (x, y) \mapsto \text{Arctan}(x)$ sur $U = [-10, 10] \times [-5, 5]$



Un exemple de fonction non continue :

Posons
$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

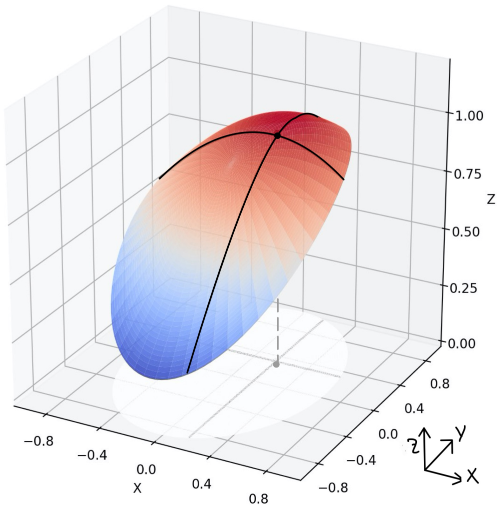


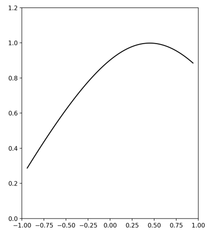
Dans tout le reste du chapitre, f désigne une fonction à valeurs réelles, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = f(x, y)$.

2 Dérivées partielles

2.a Définitions, exemples

On s'intéresse souvent aux applications partielles de f : ce sont les fonctions d'une seule variable réelle que l'on obtient en fixant l'autre variable :





Définition :

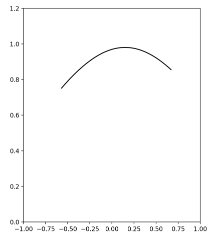
Soit $(x_0, y_0) \in U$.

- La <u>1ère application partielle de f</u> en y_0 est l'application $x \mapsto f(x, y_0)$.

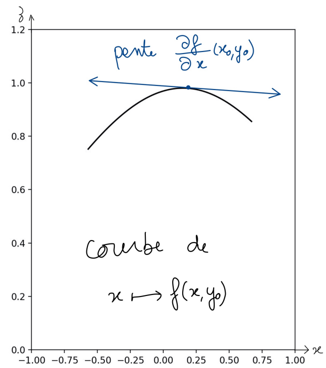
  On la notera parfois $f(., y_0)$.

- La <u>2ème application partielle de f</u> en x_0 est l'application $y \mapsto f(x_0, y)$.

  On la notera parfois $f(x_0, .)$.



Définition :



Soit $(x_0, y_0) \in U$.

- La <u>première dérivée partielle de f en (x_0, y_0)</u>, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, est, si elle existe, la dérivée en x_0 de la première application partielle de f en y_0.
  Autrement dit, on note :

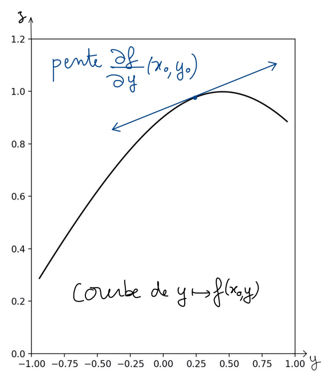
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

  si cette limite existe et est finie.

- De même, la <u>deuxième dérivée partielle de f en (x_0, y_0)</u>, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, est, si elle existe, la dérivée en y_0 de la deuxième application partielle de f en x_0.
  Autrement dit, on note :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

  si cette limite existe et est finie.



Exemples de calcul :

- $f : (x,y) \mapsto xy^2 - \dfrac{1}{x}$

- $f : (x,y) \mapsto \sin(x-y)$

- $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

  Nous allons voir qu'en tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, même en $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent :

Mais pourtant f n'était pas continue partout ![1]
Ainsi, l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur U ne suffit pas pour conclure que f est continue sur U. Cependant :

Définition :

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, en tout $(x_0,y_0) \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent, et si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

Proposition :

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle est continue sur U.

1. Ce qui peut être surprenant, car pour les fonctions d'une variable réelle, la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.

2.b Formule de Taylor à l'ordre 1

Lorsqu'on a une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on a un développement limité d'ordre 1 en tout point grâce à la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 suivante :

Proposition :

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$.

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) \underset{||(h,k)||\to 0}{=} f(x_0,y_0) + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\big(||(h,k)||\big)}$$

Comparons à la formule de Taylor-Young pour une fonction f d'une seule variable, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; on écrivait, pour $a \in I$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Faisons les analogies :

- Le point a de I est remplacé par un point $A = (x_0, y_0)$ de U
- Le réel h qui va tendre vers 0 est remplacé par un petit vecteur $\overrightarrow{u} = (h, k)$ de $\mathbb{R}^2$.
  On peut alors écrire $(x_0+h, y_0+k) = A + \overrightarrow{u}$.
  On fait "tendre ce vecteur vers $\overrightarrow{0}$" au sens suivant : $||\overrightarrow{u}|| \to 0$.
- Et le terme $hf'(a)$?
  On aimerait voir les termes $h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ comme un produit scalaire.
  On définit pour cela un vecteur appelé gradient de f en A :

Définition :

Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent.
Le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ est appelé gradient de f en (x_0, y_0), il est noté $\nabla f(x_0, y_0)$.

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Avec les mêmes notations que plus haut :

$$\overrightarrow{u} \cdot \nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ comme espéré !}$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 se réécrit :

$$\boxed{f(A+\overrightarrow{u}) \underset{||\overrightarrow{u}||\to 0}{=} f(A) + \overrightarrow{u} \cdot \nabla f(A) + o\big(||\overrightarrow{u}||\big)}$$

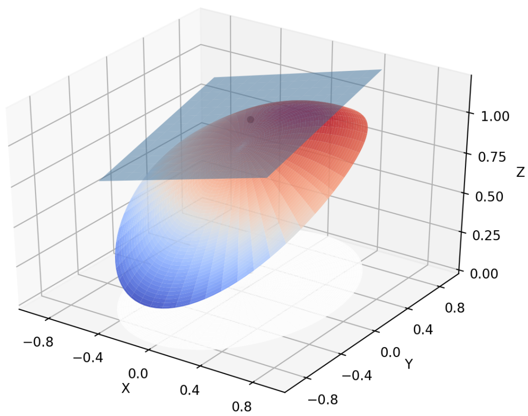
2.c Plan tangent

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

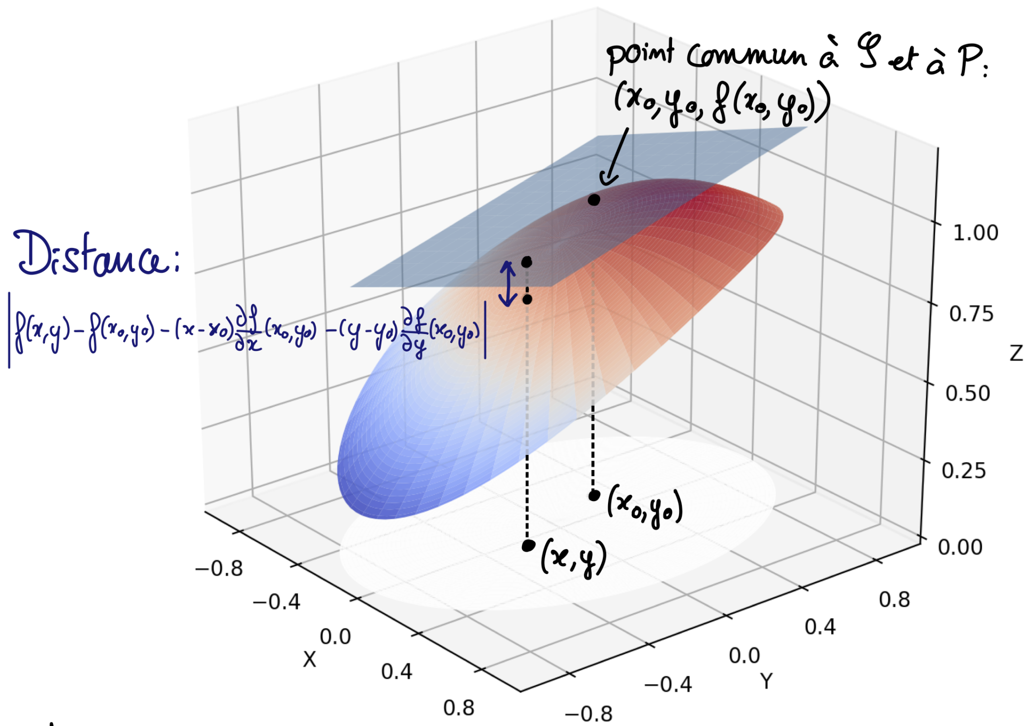
En notant $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$, la formule de Taylor-Young se réécrit :

$$f(x,y) \underset{||(x-x0,y-y_0)||\to 0}{=} f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\big(||(x-x_0,y-y_0)||\big)$$

Notons P le plan d'équation $z = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$: on l'appelle le plan tangent à $\mathcal{S}$ en (x_0, y_0).



La formule nous dit qu'un point $((x, y, f(x, y))$ de $\mathcal{S}$, si (x, y) est "proche" de (x_0, y_0), est "très" proche du point (x, y, z) du plan P. Plus précisément, la distance entre les deux points est négligeable devant la longueur $||(x - x_0, y - y_0)||$:



Les deux autres points sont $(x, y, f(x,y))$ (le plus bas, sur $\mathcal{S}$) et $\left(x, y, f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ (sur P)

3 Composition

3.a Dérivée selon un vecteur

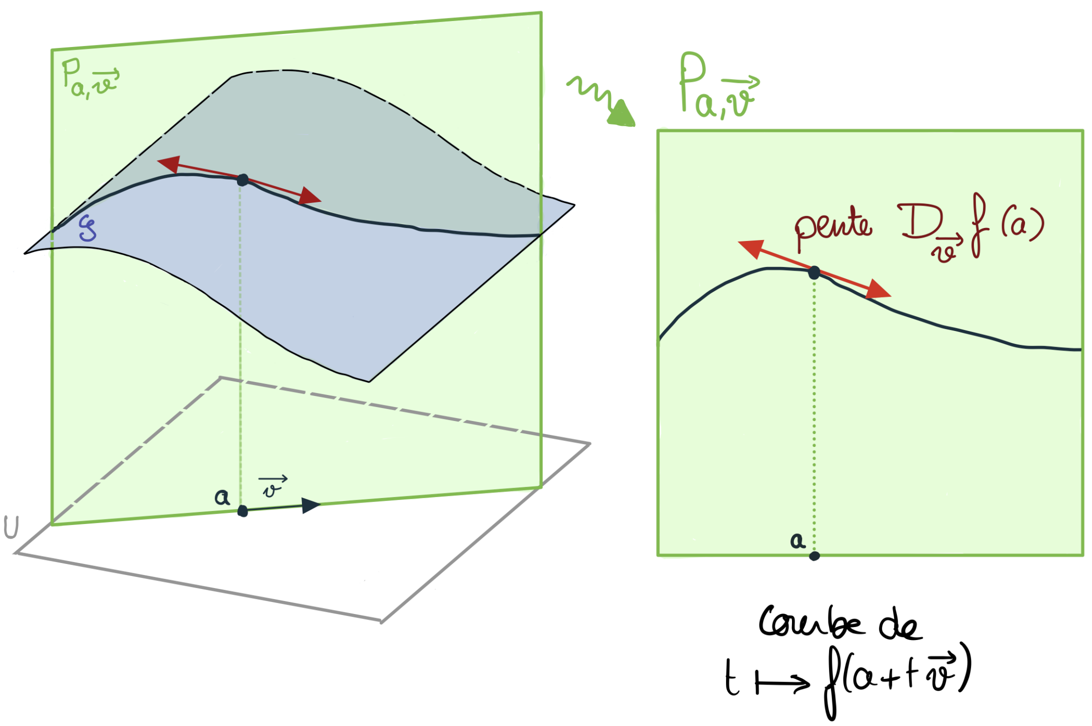
Définition :

Soit $a = (x_0, y_0) \in U$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
La dérivée de f selon le vecteur $\overrightarrow{v}$ en $a = (x_0, y_0)$, notée $D_{\overrightarrow{v}}f(x_0, y_0)$, est, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + t.\overrightarrow{v})$.
Autrement dit, si la limite existe et est finie :

$$\boxed{D_{\overrightarrow{v}}f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)}{t}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{D_{\overrightarrow{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}}$$

en notant $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$.

Interprétation graphique :



Si on note $P_{a,\overrightarrow{v}}$ le plan orthogonal au plan xOy, contenant a et $\overrightarrow{v}$, la courbe de $t \mapsto f(a + t.\overrightarrow{v})$ apparaît comme intersection entre la surface $\mathcal{S}$ et le plan $P_{a,\overrightarrow{v}}$. Le nombre $D_{\overrightarrow{v}}f(a)$ est la pente de cette courbe au niveau du point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Remarque :
Avec $\overrightarrow{v} = (1, 0)$, on reconnaît la définition de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$; graphiquement, on intersecte la surface avec le plan d'équation $y = y_0$.

Avec $\overrightarrow{v} = (0, 1)$, on reconnaît la définition de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$; graphiquement, on intersecte la surface avec le plan d'équation $x = x_0$.

Expression à l'aide du gradient

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, en notant $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, on a $||(t\alpha, t\beta)|| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et un $o\left(||(t\alpha, t\beta)||\right) = o(t)$, donc d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

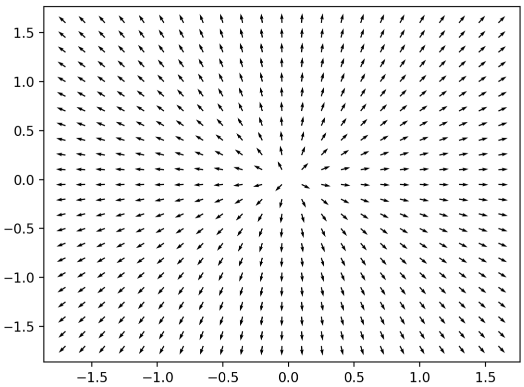
$$\frac{f(x_0+t\alpha, y_0+t\beta)-f(x_0,y_0)}{t} \underset{t\to 0}{=} \frac{f(x_0,y_0)+t\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+t\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+o(t)-f(x_0,y_0)}{t}$$
$$\underset{t\to 0}{=} \alpha\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\beta\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+o(1)$$

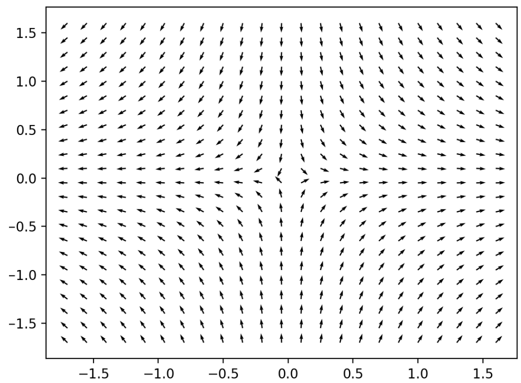
La limite en 0 est donc $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$: on reconnaît le produit scalaire $\overrightarrow{v}\cdot\nabla f(x0,y_0)$!
Ainsi :

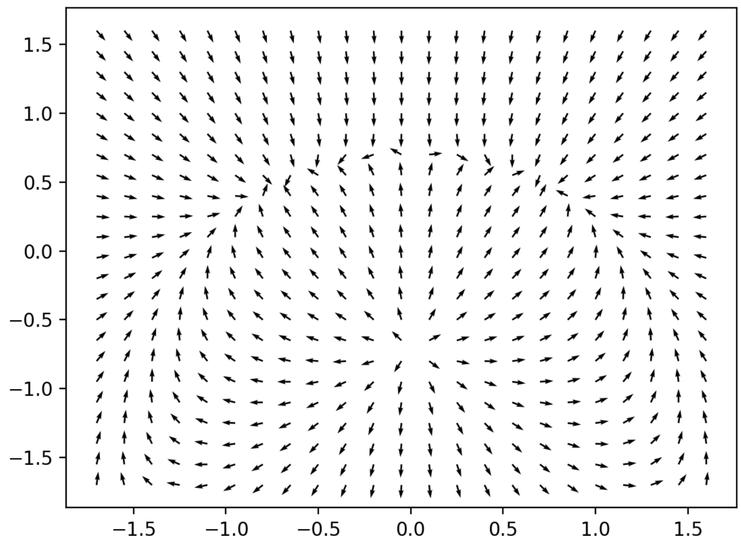
$$\boxed{\text{Pour } f \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \quad D_{\overrightarrow{v}} f(x_0,y_0) = \overrightarrow{v}\cdot\nabla f(x_0,y_0)}$$

Fixons $(x_0,y_0)\in U$.
Si on fait varier $\overrightarrow{v}$ tout en imposant $\overrightarrow{v}$ unitaire, comme la norme de $\nabla f(x_0,y_0)$ est fixée, cette quantité est maximale quand les vecteurs $\nabla f(x_0,y_0)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens.
Donc la dérivée $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0,y_0)$ est maximale dans la direction indiquée par le vecteur $\nabla f(x_0,y_0)$.
Ainsi, $\boxed{\text{Le gradient } \nabla f(x_0,y_0) \text{ indique la direction dans laquelle } f \text{ croît le plus vite !}}$

Il est alors intéressant de représenter, sur la surface $U\subset\mathbb{R}^2$ (donc dans le plan), les vecteurs $\nabla f(x_0,y_0)$ en tout (x_0,y_0) : on peut deviner la forme de la surface $\mathcal{S}$... Voici le champ de gradient [2] de fonctions dont on a représenté les surfaces en 1.b. Sauriez-vous retrouver desquelles il s'agit ?







2. On a normé les vecteurs pour plus de lisibilité.

3.b Dérivée le long d'un arc paramétré

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
On se donne deux fonction d'une variable réelle, définies sur un même intervalle I, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in U$.
Autrement dit, on se donne une courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$, incluse dans U.

Cela permet de définir :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f\left(x(t), y(t)\right) \end{array}$$

Avec ces notations et hypothèses :
Proposition :

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $t \in I$,

Exemple : Prenons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et intéressons-nous à $\varphi : t \mapsto f(t^2, \cos t)$.

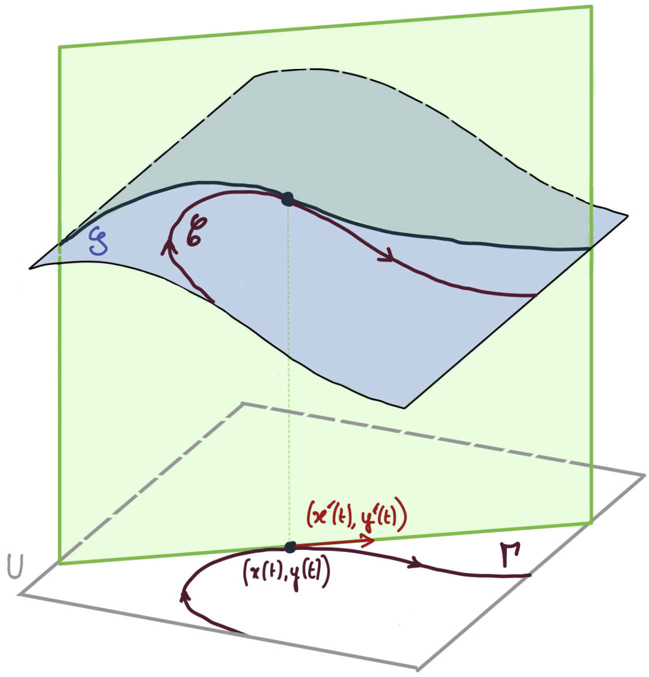
Lien avec le gradient, interprétation géométrique :
La courbe plane Γ, paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$, peut être tracée sur U dans le plan horizontal.
Cela correspond à la trajectoire d'un point mobile se trouvant en $(x(t), y(t))$ à l'instant t.

On peut poser $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, de sorte que $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t)$;
et $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$: ce dernier vecteur est le vecteur vitesse à l'instant t.

La proposition dit alors que $\varphi'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f\left(x(t), y(t)\right)$, ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\forall\, t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f\left(\gamma(t)\right)}$$

On reconnaît la dérivée de f selon le vecteur vitesse $(x'(t), y'(t))$, au point $(x(t), y(t))$...



On peut définir la courbe de l'espace $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f\left(x(t), y(t)\right) \end{cases}$, $t \in I$.

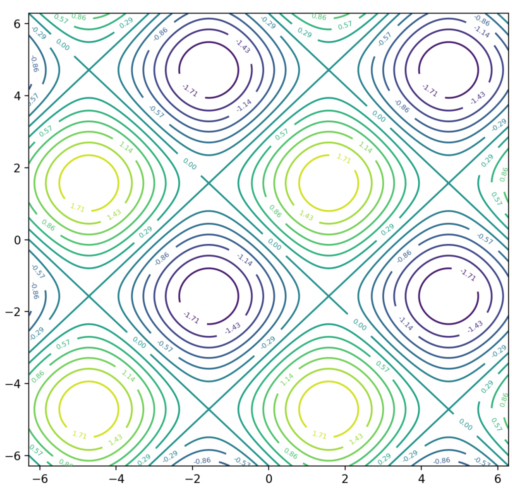
Cette courbe est tracée sur la surface $\mathcal{S}$.
$\varphi'(t)$ donne la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ au point t, dans le plan vertical contenant le point $(x(t), y(t))$ et le vecteur vitesse $(x'(t), y'(t))$.

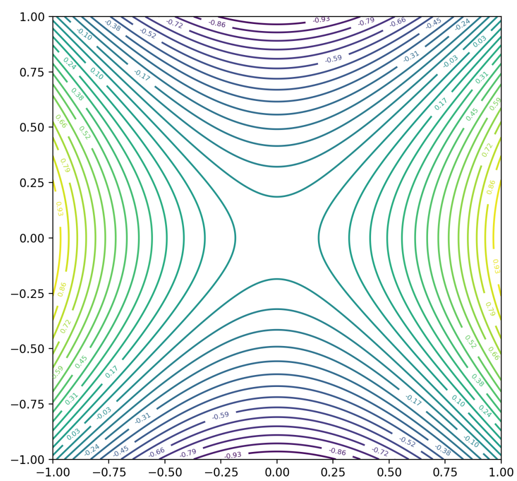
3.c Lignes de niveau et gradient

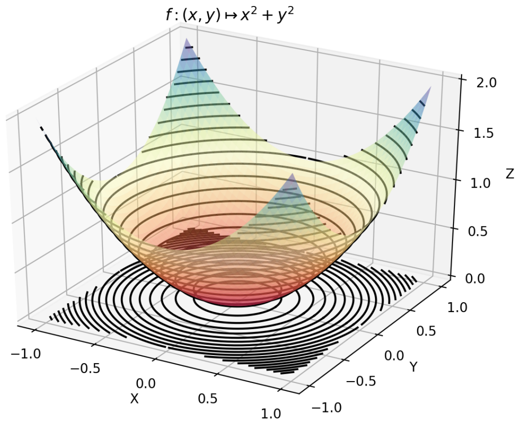
Définition :

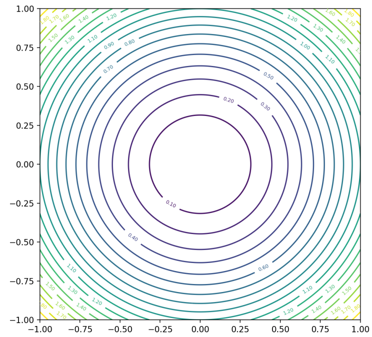
> On appelle lignes de niveau de f les courbes planes d'équation $f(x, y) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$ constante.

Pour $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$ sur $U =]-2\pi, 2\pi[^2$ et pour $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $U =]-1, 1[^2$, voici quelques lignes de niveau :

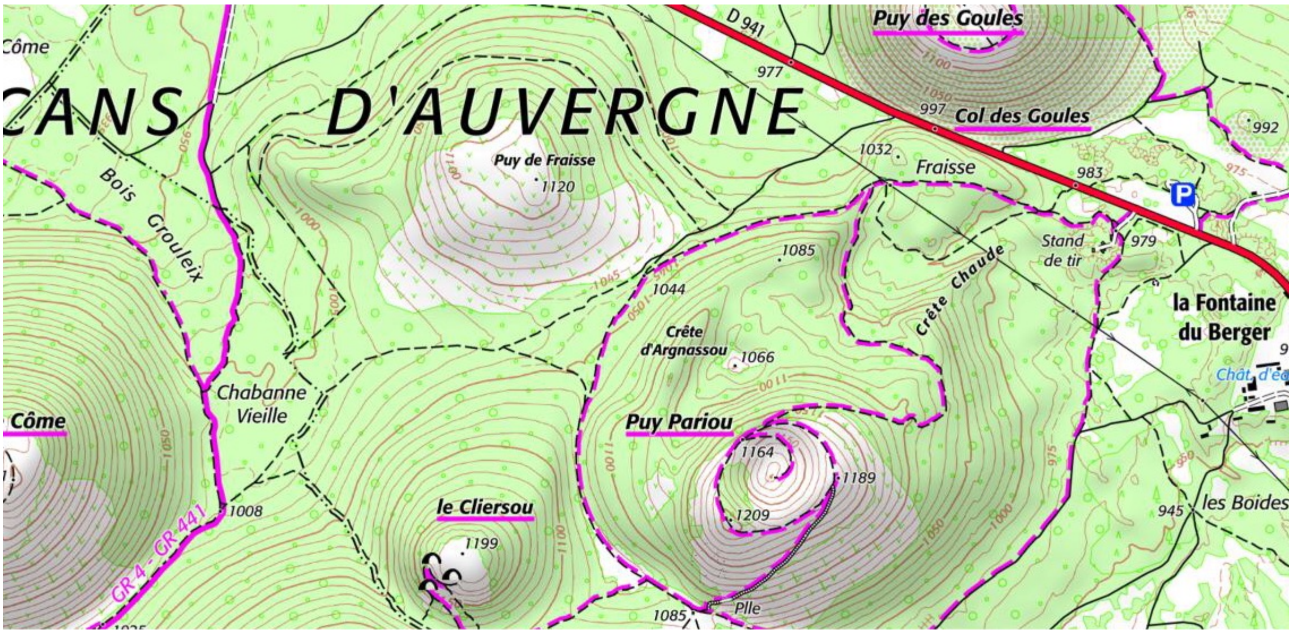








Sur une carte de randonnée, on trouve les lignes de niveau pour l'altitude : $f(x,y)$ étant l'altitude au point de la surface de coordonnées (x,y)...



Admettons que les lignes de niveau de f puissent être paramétrées ; fixons $k \in \mathbb{R}$ et considérons un paramétrage $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour $t \in I$, de la ligne de niveau Γ_k d'équation $f(x,y) = k$, et supposons que x et y soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

Pour tout $t \in I$, $f(x(t), y(t)) = k$; en reprenant les notations de la partie 3.b, cela signifie que la fonction φ est constante sur I !

Elle est dérivable donc on peut affirmer que sa dérivée est nulle :

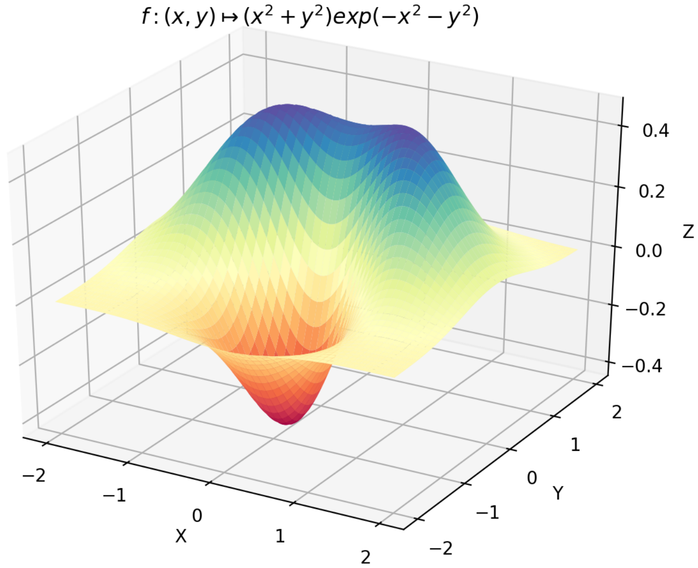
$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = 0 \text{ i.e. } \gamma'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t)) = 0$$

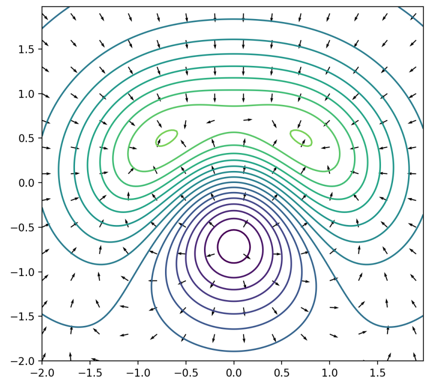
Ainsi, pour tout $t \in I$, le gradient de f au point $(x(t), y(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, qui le vecteur tangent à Γ_k au point $(x(t), y(t))$... c'est le sens d'être orthogonal à la courbe !

Finalement :

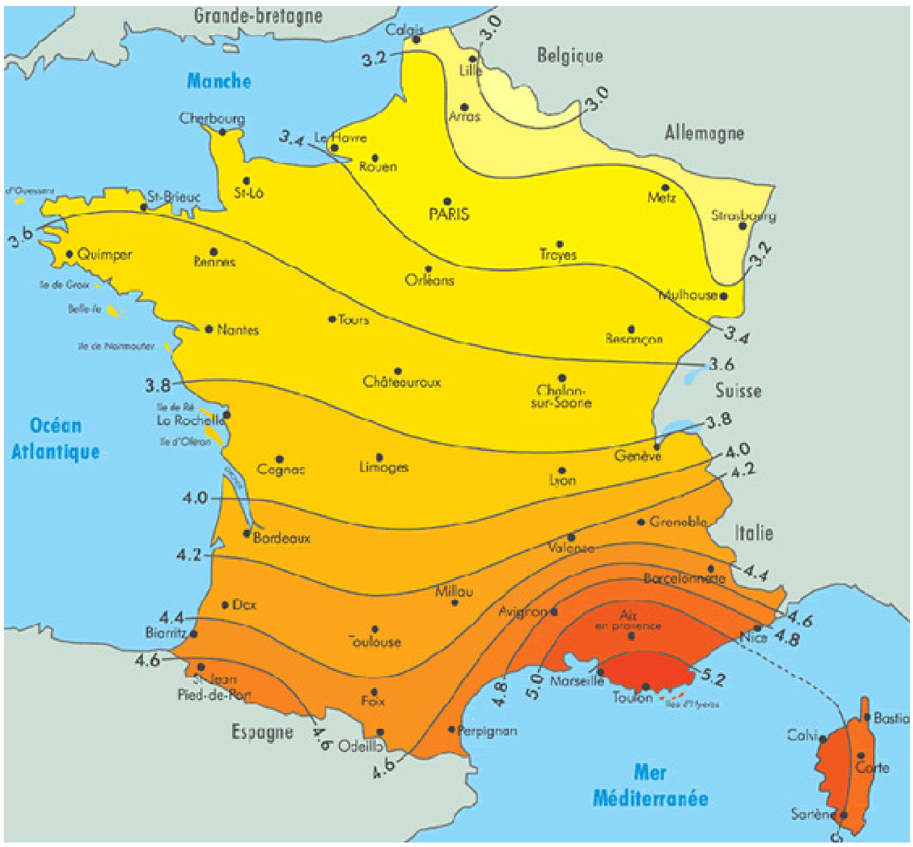
$$\boxed{\text{Le gradient de } f \text{ est orthogonal aux lignes de niveau de } f.}$$

Rappelons que le gradient est dans la direction où la fonction f croît le plus vite ; il est alors intéressant de tracer sur un même graphique les lignes de niveau et le champ des vecteurs gradients. Reprenons un exemple précédent :





Plaçons les vecteurs gradients sur cette carte, qui donne quelques lignes de niveau pour l'ensoleillement en France (en $kWh.m^2$/jour) :



3.d Changement de variables

Soit V un autre ouvert de $\mathbb{R}^2$, et φ, ψ, deux fonctions de deux variables, à valeurs réelles, définies sur V, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.
On suppose que :

$$\forall (u,v) \in V, \quad (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in U$$

Donc la fonction suivante est bien définie :

$$\begin{array}{rccl} g : & V & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \end{array}$$

Lorsque l'on fixe $v = v_0$, autrement dit lorsqu'on s'intéresse à la première application partielle de g, on constate qu'on est dans le cadre de la partie 3.b, en remplaçant $t \mapsto x(t)$ par $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ et $t \mapsto y(t)$ par $u \mapsto \psi(u, v_0)$. Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ et leurs dérivées sont $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$. Donc le résultat de 3.b s'applique et nous donne :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right)$$

Pour alléger, on écrit souvent :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Allons encore plus loin dans l'abus de langage : on ira jusqu'à écrire "$x = \varphi(u,v)$" et "$y = \psi(u,v)$", d'où l'écriture "physicienne"[3] :

De même :

Exemples

- Avec $U = V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v) = u^2 v$, $\psi(u,v) = u - v$: on s'intéresse à $g : (u,v) \mapsto f(u^2 v, u - v)$.

- Avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(r,\theta) = r\cos\theta$ et $\psi(r,\theta) = r\sin\theta$: cela revient à passer en coordonnées polaires $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$, $g(r,\theta) = f(x,y)$.

3. Les physiciens vont encore plus loin en ne donnant pas un autre nom à la fonction g, i.e. en la notant encore f...

4 Extremas

On rappelle que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et qu'on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Définition :

Soit $a = (x_0, y_0) \in U$.

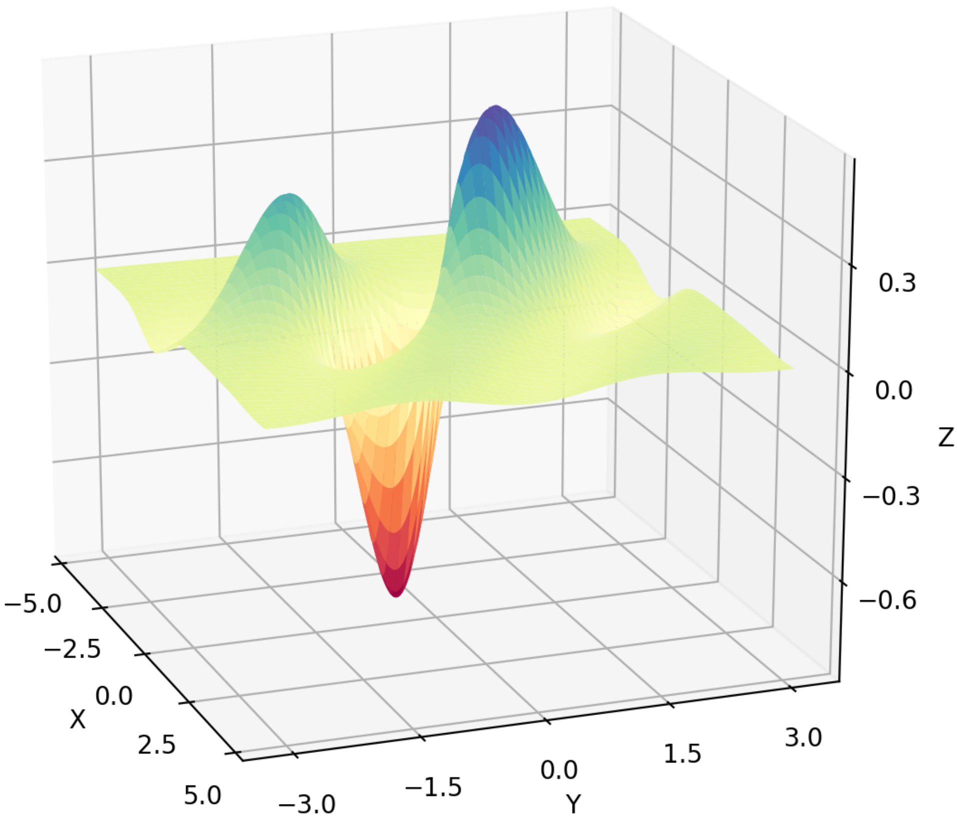
- On dit que f admet un maximum global en (x_0, y_0) si :

- On dit que f admet un minimum global en (x_0, y_0) si :

- On dit que f admet un extremum global en (x_0, y_0) si elle admet un minimum global ou un maximum global en ce point.
- On dit que f admet un maximum (local) en (x_0, y_0) si :

- On dit que f admet un minimum (local) en (x_0, y_0) si :

- On dit que f admet un extremum (local) en (x_0, y_0) si elle admet un minimum local ou un maximum local en ce point.



Théorème :

> Soit $(x_0, y_0) \in U$.
>
> Si f admet un extremum (local) en (x_0, y_0), alors $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ (i.e. : $\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$).

Preuve rapide : Il suffit de se rappeler le résultat pour les fonctions d'une variable, c.f. Ch 12 ! Supposons que f ait un extremum local en (x_0, y_0). Les applications partielles admettent aussi un extremum local, en un point t_0 (x_0 pour l'une, y_0 pour l'autre) qui est bien intérieur à leur domaine de définition (grâce à l'hypothèse que U est un ouvert). Comme elles sont dérivables grâce à l'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^1$, leurs dérivées respectives s'annulent au point considéré, ce qui correspond exactement à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

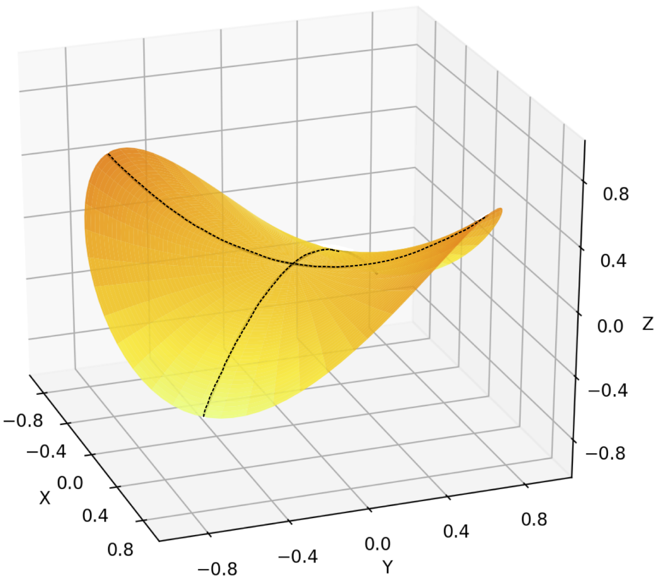
Définition :

> On dit que (x_0, y_0) est un <u>point critique</u> de f si $\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$, i.e. si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

Le théorème affirme donc que les points où f admet un extremum sont nécessairement des points critiques de f.

⚠ La réciproque est fausse ! Avoir un point critique ne suffit pas pour conclure qu'on a un extremum...

La fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ fournit un contre-exemple...



Montrons que $(0, 0)$ est un point critique mais que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$:

Exemples d'études d'extremum :

- $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
- $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - 2x - y + 2$

Plan du cours