Programme de la semaine 25 (du 29/04 au 05/04).

Espaces vectoriels de dimension finie

Reprise en insistant sur la fin.

Matrices, déterminants

- Matrice d'un vecteur de E de dim n dans une base donnée. Isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Matrice d'une famille de vecteurs de E de dim n dans une base donnée. Une matrice est la matrice de la famille de ses colonnes dans la base canonique. Lien inversibilité/base.
- Matrice d'une application linéaire dans des bases. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$. Traduction matricielle de $y = u(x)$.
- Lien entre composition et produit matriciel, entre bijectivité et inversibilité.
- Matrices de passage, propriétés, formules de changement de base pour un vecteur, pour une application linéaire, cas d'un endomorphisme. Notion de matrices semblables.
- Noyau, image, rang d'une matrice. Propriétés, lien avec le rang d'une famille de vecteur, d'une application linéaire, d'un système, calcul pratique du rang (*attention : la notion de matrice échelonnée et de pivot n'est plus au programme*).
- Définition du déterminant d'une matrice comme l'unique forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes et qui envoie I_n sur 1. Propriétés : cas de deux colonnes identiques, d'une colonne nulle, déterminant de $\lambda.A$, de A^T, effet des opérations élémentaires. Développement par rapport à une ligne, à une colonne. Cas d'une matrice triangulaire ou diagonale. Déterminant d'un produit, traduction de l'inversibilité et déterminant de l'inverse.

Questions de cours

Demander :

— une définition ou un énoncé du cours ;

— une petite décomposition en éléments simple dans le cadre du programme (fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0).

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Lemme "Forme géométrique du théorème du rang" + théorème du rang (cf poly).
- Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E ; F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{C}$ une base de E, avec $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. u est bijective ssi $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u)$ est inversible, et dans ce cas, expression de la matrice de la réciproque.
- Calcul de $\det(A - \lambda I_3)$ directement sous forme factorisée, pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Semaine suivante : Matrices.