Chapitre 11. Limites et continuité.

1 Limites : définitions

Sauf mention contraire :

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un singleton $\{a\}$.
- a désigne un élément de I ou une borne de I.
  Par exemple si $I =]1, +\infty[$, a peut désigner un élément de $]1, +\infty[$ mais aussi 1 ou $+\infty$.

Rappel : Notion de voisinage

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ une propriété.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a si : $\exists\, \eta > 0$, f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]a - \eta, a + \eta[$.

  Par exemple, cos est positive au voisinage de 0 car

  Illustration :

- On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$ si : $\exists\, A \in \mathbb{R}$, f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]A, +\infty[$.

  Par exemple, $f : x \mapsto (x - m)^2$ est croissante au voisinage de $+\infty$ car

  Illustration :

- On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$ si : $\exists\, B \in \mathbb{R}$, f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]-\infty, B[$.

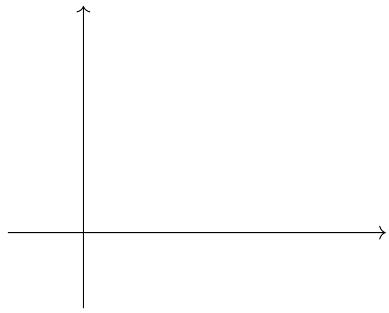
1.a Limite finie

Définition :

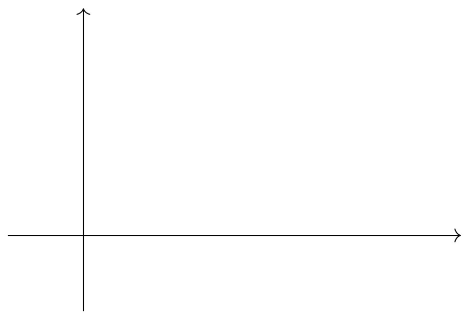
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\boxed{\ell \in \mathbb{R}}$.

On dit que f admet ℓ comme limite en a si :

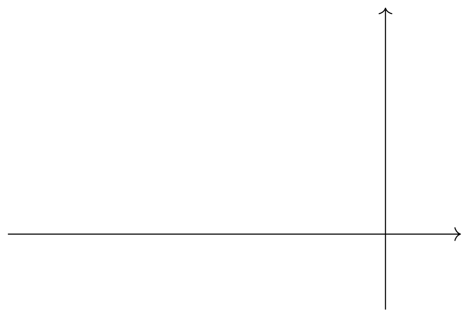
- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:



- Dans le cas $a = +\infty$:



- Dans le cas $a = -\infty$:



Notation : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques :

- Par définition, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) - \ell \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

  Donc, comme une fonction qui tend vers 0 en a se note $o(1)$:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff$$

- Si $a \in I$ (i.e. si f est définie en a), et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est nécessairement égal à $f(a)$.

  ✎ **Démonstration** 1

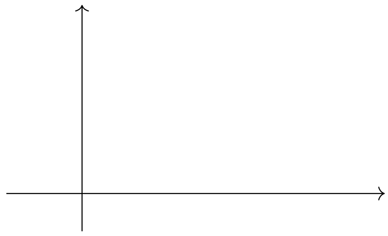
  ⚠ Cela n'est plus vrai si ℓ est seulement une limite à gauche ou une limite à droite, c.f. 1.c.

1.b Limites infinies

Définition :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si :

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:

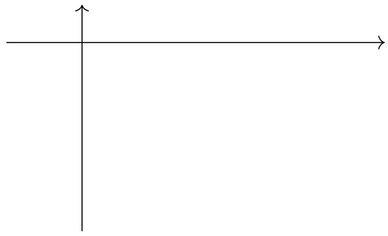


- Dans le cas $a = +\infty$:

- Dans le cas $a = -\infty$:

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ comme limite en a si :

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$:



- Dans le cas $a = +\infty$:

- Dans le cas $a = -\infty$:

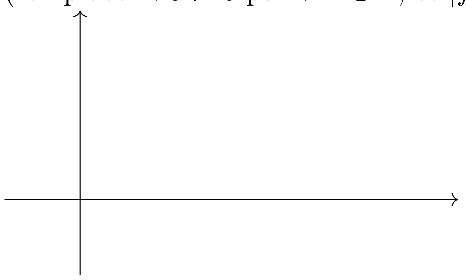
Notations : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

1.c Limite à gauche, limite à droite, et limite en a lorsque f est définie sur $I\backslash\{a\}$

Définition :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$; on suppose que a est un réel, élément ou extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f admet ℓ comme <u>limite à gauche en a</u> si la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$ admet pour limite ℓ en a.
Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, cela revient à :

Idem dans les cas $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$
(remplacer $\forall\, \varepsilon > 0$ par $\forall\, A \in \mathbb{R}$, et $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ par $f(x) \geq A$ ou $f(x) \leq A$).



On a bien sûr des définitions similaires pour la limite à droite en parlant de la restriction de f à $]a, +\infty[\cap I$ (en remplaçant $]a - \eta, a[$ par $]a, a + \eta[$).

Notations :

Exemple : $f\ x \mapsto \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Définition :

(Extension de la définition de limite lorsque f n'est pas définie au point $a \in \mathbb{R}$)
Soit $a \in I$ qui ne soit pas une extrémité de I, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet ℓ pour limite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.

Exemple : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$

2 Propriétés et théorèmes autour de la notion de limite

2.a Premières propriétés

Proposition :

(Unicité de la limite) Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.

Démonstration 2

Les notations $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$ ont donc un sens.

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration 3

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, qui admet une limite finie $\ell > 0$ en a.
Alors, f est minorée au voisinage de a par $\ell/2$.
En particulier, elle est strictement positive au voisinage de a.

Démonstration 4

On a bien sûr une propriété similaire pour $\ell < 0$.

Proposition :

Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Conséquence : Pour démontrer que f admet une limite finie ℓ en a, on peut majorer $|f(x) - \ell|$ par une fonction qui tend vers 0 en a.

2.b Limite et suite

Proposition :

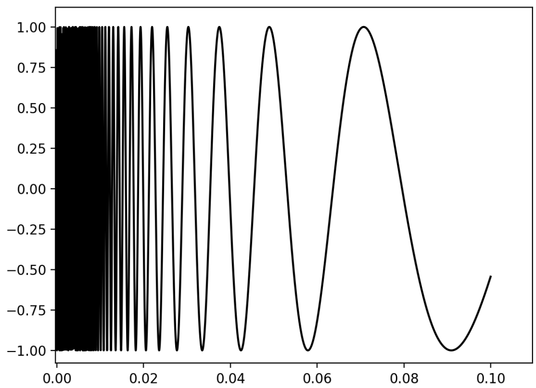
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelles à valeurs dans I telle que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Alors $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration 5

Utilisation : pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a.

- Il suffit de trouver, par exemple, une suite (u_n) qui tend vers a mais telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
  Exemple : cos en $+\infty$.

- Il suffit de trouver, par exemple, deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a mais telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes.
  Exemple : $f : x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ en 0.



2.c Opérations

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
  En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \implies |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$.

Proposition :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Proposition :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$
- Si $\ell + \ell'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(f+g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$

  $\to$ *Formes indéterminées :* $\infty - \infty$
- Si $\ell\ell'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(fg)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

  $\to$ *Formes indéterminées :* $0 \times \infty$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) < 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Proposition :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose $f(I) \subset J$.
Soit a un élément ou une extrémité de I, et b un élément ou une extrémité de J.
On suppose : $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ g(X) \underset{X\to b}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$. Alors, $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration 6

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2}$ existe et la calculer.

2.d Limites et inégalités

Proposition :

(Passage à la limite) Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, et ℓ, ℓ' des réels. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$.

- Si, au voisinage de a, $f(x) \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.
- Si, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.

⚠ Les inégalités strictes deviennent des inégalités larges lors d'un passage à la limite !
Par exemple, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$, mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$...

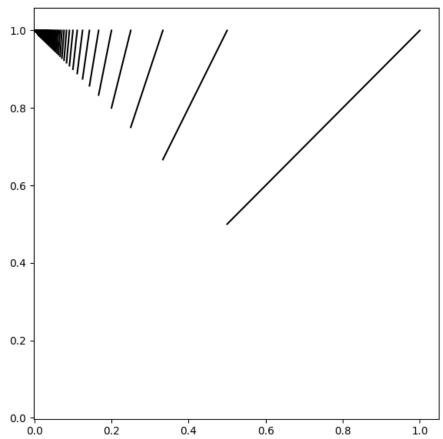
Théorème :

(Théorème d'encadrement/des gendarmes)
Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et que $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

⚠ C'est un théorème d'existence de limite : on ne suppose pas que f a une limite en a.
Bien faire la différence avec un simple passage à la limite dans l'inégalité $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
Exemple : $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^+.



Théorème :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :

$$f(x) \leq g(x)$$

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

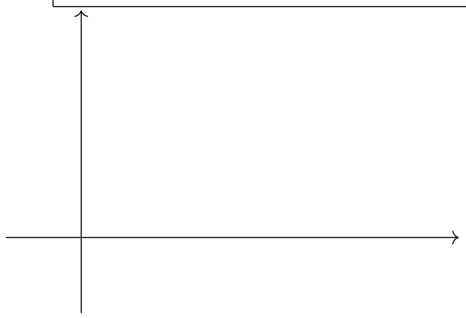
2.e Limites et monotonie

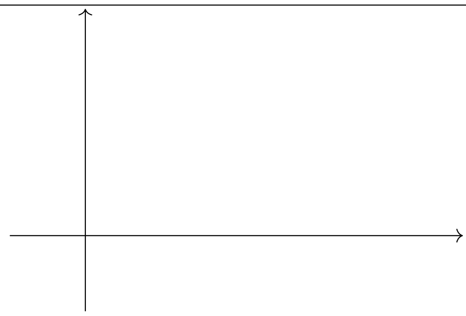
Théorème :

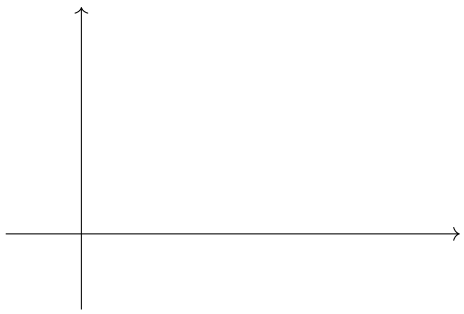
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $a < b$ (donc $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). On pose $I =]a,b[$ ou $[a,b[$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante sur I.

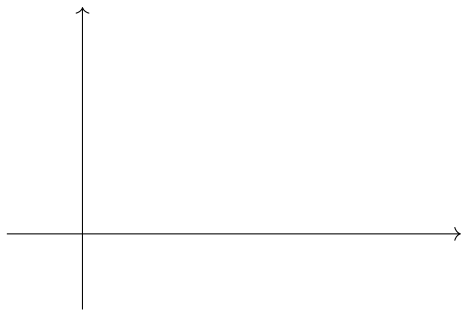
- Si f est majorée sur I, alors f admet une limite finie en b.
  (Et on a $\lim\limits_{x \to b} f(x) =$

- Si f n'est pas majorée sur I, alors

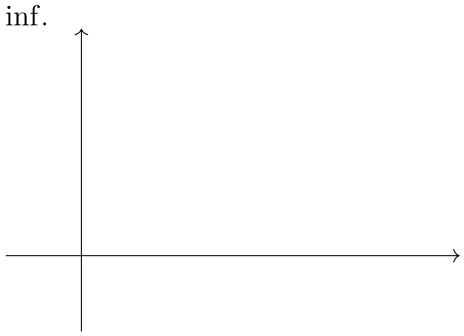


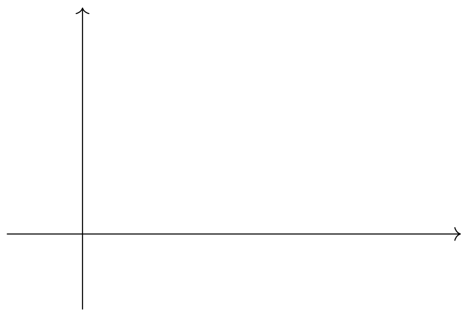






Ce théorème s'adapte pour les fonctions décroissantes : changer "majorée" en "minorée", et sup en inf.





Ce théorème s'adapte également pour la borne gauche de l'intervalle :

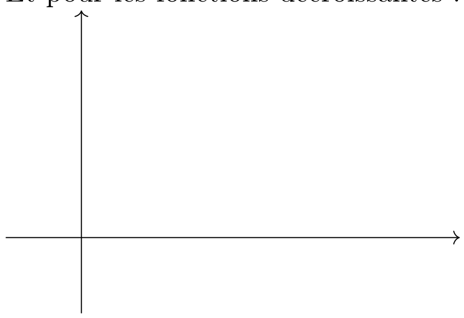
Théorème :

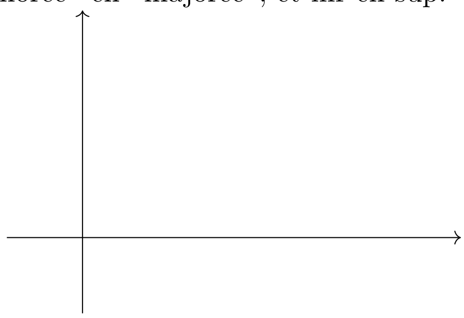
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $a < b$ (donc $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$). On pose $I =]a,b[$ ou $]a,b]$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante sur I.

- Si f est minorée sur I, alors f admet une limite finie en a.
  (Et on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$

- Si f n'est pas minorée sur I, alors

Et pour les fonctions décroissantes : changer "minorée" en "majorée", et inf en sup.





3 Continuité : généralités

3.a Définitions

Définition :

(Continuité en un point) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est continue en a si :

Autrement dit, f est continue en a si et seulement si
Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Définition :

(Continuité sur un intervalle) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Exemples : Toutes les fonctions usuelles, sauf la partie entière...
Remarque : Une fonction continue en a est bornée au voisinage de a.

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que a n'est pas l'extrémité droite de I.

On dit que $\underline{f \text{ est continue à droite en } a}$ si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Cela revient à dire que la restriction de f à $[a, +\infty[\cap I$ est continue en a.

On définit de manière similaire la continuité à gauche en a.

Proposition :

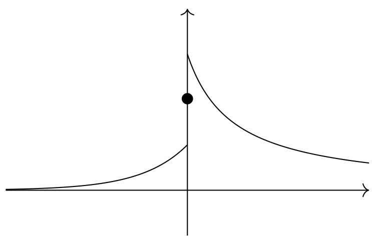
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une extrémité de I.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } a &\iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } a \\ &\iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \end{aligned}$$

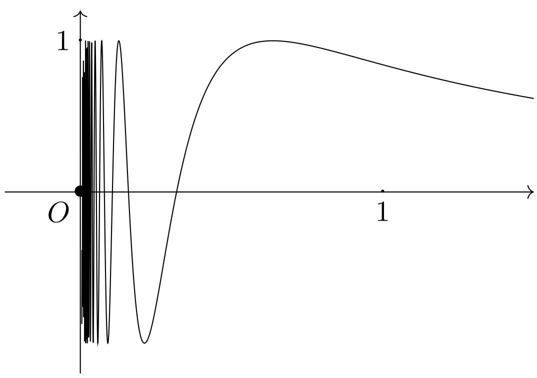
Exemples d'études :

La fonction partie entière.

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$



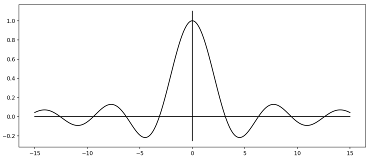
$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$



3.b Prolongement par continuité

Si $a \in I$ et si f n'est définie que sur $I \backslash \{a\}$, on cherche s'il existe un prolongement de f à I entier, qui soit continu en a, c'est-à-dire une application $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que :
$\forall x \in I \setminus \{a\}, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Exemple : la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.



Définition :

On dit que $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en a si f a une limite finie ℓ en a.
Dans ce cas, l'unique prolongement sur I qui soit continu en a est : $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array}$

Remarque : Souvent, on commet l'abus d'appeler encore f le prolongement $\tilde{f}$, et on dit qu'on a prolongé f par continuité en a.

Exemple : Reprenons l'exemple de la fonction sinus cardinal :

3.c Opérations

Proposition :

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$, continues en a (respectivement sur I). Alors :

- λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg, $|f|$, sont continues en a (resp. sur I).
- Si $f(a) \neq 0$ (resp. si f ne s'annule pas sur I), alors $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de a (resp. sur I) et est continue en a (resp. sur I).

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$.
On suppose $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ soit bien définie.

- Si f est continue en $a \in I$ et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.
- Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $a \in I$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, qui converge vers a. Alors on a $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

4 Continuité : théorèmes fondamentaux

4.a Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

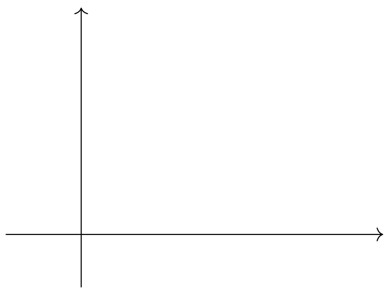
(TVI) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :

Corollaire :

Si I est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle
(Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).

Démonstration 7

Graphiquement :



Remarque : Lorsque f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, on sait facilement donner l'intervalle $f(I)$:

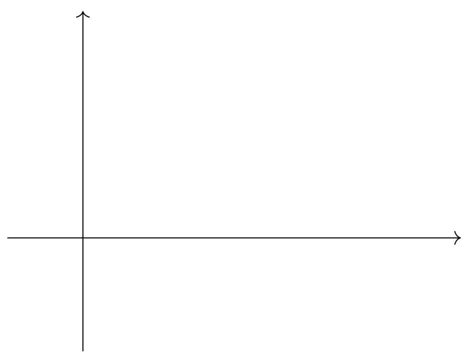
I	$[a,b]$	$]a,b]$	$[a,b[$	$]a,b[$
cas f str. croissante	$[f(a),f(b)]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$	$[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$
cas f str. décroissante	$[f(b),f(a)]$	$[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$

Utilisation classique : Existence d'un zéro.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$: le TVI montre l'existence d'un zéro :

$$\exists\, x_0 \in [a,b], \quad f(x_0) = 0.$$

⚠ Cela ne montre pas l'unicité d'un zéro.
Pour avoir l'unicité, penser plutôt au théorème de la bijection...



Corollaire à redémontrer à chaque fois : si une fonction continue ne s'annule pas sur un intervalle, alors elle garde un signe constant (c'est la contraposée).

Exercice 1 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$.

Démonstration 8

Exercice 2 : Montrer que toute fonction polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration 9

Le théorème de la bijection est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires et des théorèmes d'existence de limite pour les fonctions monotones. Rappel :

Théorème :

> (de la bijection) Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.
> Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et la réciproque f^{-1} est continue, de même stricte monotonie que f.

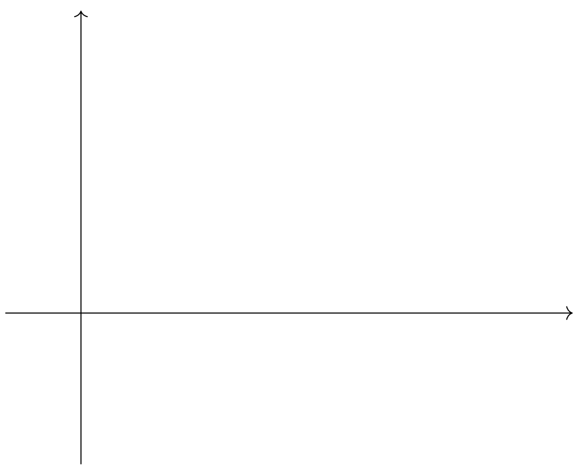
4.b Théorème des bornes atteintes

Théorème :

> Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
> Alors
> Autrement dit :
>
> Autrement dit :

On résume ce théorème par : "L'image d'un segment par une fonction continue est un segment."

Illustration graphique



Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que f est bornée.

Démonstration 10

5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

Rappelons quelques définitions :

$$\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \qquad |f| : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}$$

f est dite bornée sur I si : $\exists\, K \in \mathbb{R}^+, \forall\, x \in I, |f(x)| \leq K$.

Définition :

Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).
On dit que f admet ℓ pour limite en a si

$$\text{cas } a \in \mathbb{R} : \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\text{cas } a = +\infty : \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\text{cas } a = -\infty : \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On définit aussi les notions de continuité en $a \in I$ et de continuité sur I.

Proposition :

(Caractérisation de la limite à l'aide de $\mathrm{Re}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Soit a un élément ou une extrémité de l'intervalle I.
La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ont pour limites respectives $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$ en a.

Ce résultat est intéressant car il permet de ramener l'étude d'une limite complexe à celle de deux limites réelles.

Corollaire :

On suppose $a \in I$. f est continue en a (respectivement sur I) si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a (resp. sur I).

Proposition :

Si f admet une limite finie en a (en particulier si f est continue en a) alors f est bornée au voisinage de a.

Opérations sur les limites (somme, produit, multiplication par un scalaire, quotient)
Elles sont similaires au cas réel, sauf qu'il n'y a jamais de limite infinie (en particulier pas de résultat pour $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$).

Plan du cours