Devoir maison 12.

À rendre le mardi 9 mai 2023

Exercice Un problème de mathématiques agricoles

Oral X, filière MP

Un fermier possède $2n+1$ poussins (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ poussins peut se partager en 2 groupes de n poussins de même masse totale. Montrer que tous les poussins ont même masse.

Cet oral est proposé à l'X sans aide. Voici une résolution possible, détaillée en plusieurs questions.

Prérequis : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont entiers).

- ✧ On peut démontrer par récurrence (*en effectuant un développement par rapport à une colonne ou une ligne)* que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont des entiers relatifs.
- ✧ Si pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{i,j} = b_{i,j}$ $[2]$, alors on note $A = B$ $[2]$, et on peut montrer (*aussi par récurrence*) qu'on a alors $\det(A) = \det(B)$ $[2]$.

  Rappel : Pour deux entiers x et y : $x = y$ $[2] \iff 2$ divise $x - y$.

1°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A_p la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ définie par :

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A_p)$.

2°) On considère les matrices B de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{Z})$ de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \pm 1 & \dots & \dots & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le ± 1 signifie que le coefficient correspondant vaut 1 ou -1.

On numérote arbitrairement les poussins de 1 à $2n+1$, et pour tout $i \in \{1,\dots,2n+1\}$, on note m_i la masse du poussin numéro i.

On pose alors $X_0 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{2n+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que l'hypothèse de l'énoncé peut s'écrire $BX_0 = 0$, où B est l'une des matrices du type précédent, vérifiant <u>une contrainte supplémentaire sur chacune de ses lignes</u> (on explicitera cette contrainte).

Dans la suite, B désigne cette matrice particulière, et on note (S) le système $BX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$.

3°) Donner une solution non nulle Y simple du système (S).
Qu'en déduit-on sur la dimension du noyau de B ?

4°) On note M la matrice issue de B en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.
En utilisant la question 1 et le prérequis, justifier que M est inversible.

5°) Déduire des questions précédentes que $\text{rg}(B) = 2n$.

6°) Conclure.