Corrigé du devoir maison 3.

Exercice 1

1°) $(E_2) : z^2 + z + 1 = 0$.

Le trinôme a pour discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

$\boxed{\text{Les solutions sont } \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$, c'est-à-dire j et $\overline{j}$, ou encore $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$\boxed{\text{Les 2 solutions sont de module égal à 1 donc de module strictement inférieur à 2.}}$

2°) a) ★ *Étude de f*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$.

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Explication de la limite en $-\infty$: $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t(t^2 + 1) + 1$, donc $f(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

★ *Lien avec (E_3)*

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 0 \iff t$ est solution de (E_3).

— $\mathbb{R}$ est un intervalle

— f est continue sur $\mathbb{R}$

— f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle image $\left]\lim\limits_{t \to -\infty} f(t), \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\right[= \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet un unique antécédent r dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } (E_3) \text{ admet une unique racine réelle } r.}$

★ *Encadrons r*

Montrons que $-1 < r < -\dfrac{1}{2}$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$-1 < r < -\dfrac{1}{2} \iff f(-1) < f(r) < f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

$f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{-1 - 4 + 8}{8} = \dfrac{3}{8} > 0$.

Comme $f(r) = 0$, on a bien : $f(-1) < f(r) < f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{-1 < r < -\dfrac{1}{2}}$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-r)(z-z_1)(z-z_2) = z^3 - (r+z_1+z_2)z^2 + (z_1r + z_2r + z_1z_2)z - rz_1z_2$.
Or $P(z) = z^3 + z + 1$ donc, par unicité des coefficients du polynôme P :

$$r + z_1 + z_2 = 0 \qquad rz_1z_2 = -1$$

Donc, $\boxed{z_1 + z_2 = -r}$ et, puisque $r \neq 0$, $\boxed{z_1z_2 = -\dfrac{1}{r}}$.

c) $z_1 + z_2 = -r$ donc $|z_1 + z_2| = |r|$.
Or $-1 < r < -\dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} < |r| < 1$. Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1}$.
Par l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.
Or $|z_1| - |z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$ donc $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ d'où $|z_1| - |z_2| < 1$.
Ce qui s'écrit : $\boxed{|z_1| < 1 + |z_2|}$.

d) Par 2b, $z_1z_2 = \dfrac{1}{r}$ donc $|z_1z_2| = \dfrac{1}{|r|}$.
Or $\dfrac{1}{2} < |r| < 1$. Comme les nombres sont strictement positifs, on a : $1 < \dfrac{1}{|r|} < 2$.
Ainsi, $\boxed{1 < |z_1z_2| < 2}$.

e) On suppose $2 \leq |z_1|$.
Multiplions cette inégalité par $|z_2|$ qui est bien positif : $2|z_2| \leq |z_1| \times |z_2|$ ie $2|z_2| \leq |z_1z_2|$.
Or, par la question précédente, $|z_1z_2| < 2$ donc $2|z_2| < 2$ ie $\boxed{|z_2| < 1.}$
Or on sait, par 2c, que $|z_1| < 1 + |z_2|$.
On en tire que : $|z_1| < 2$. $\boxed{\text{Ceci est absurde}}$ (puisqu'on a supposé $|z_1| \geq 2$).

f) En supposant $|z_1| \geq 2$, on arrive à une absurdité ; on en déduit que $|z_1| < 2$.
Puisque les rôles de z_1 et z_2 sont symétriques, on a aussi $|z_2| < 2$.
De plus, on sait que $|r| < 1$ donc $|r| < 2$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les solutions de } (E_3) \text{ ont un module strictement inférieur à } 2.}$

3°) a) φ est une fonction dérivable sur $[2, +\infty[$ comme fonction polynomiale.
$\forall t \in [2, +\infty[$, $\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1$.
Ainsi, pour $t \geq 2$, on a $t^{n-1} \geq 2$ puisque $n - 1 \geq 1$; d'où $\varphi'(t) \geq 2n - 1 \geq 3 > 0$.

t	2	$+\infty$
$\varphi'(t)$	$+$	
φ	$\varphi(2) \nearrow$	$+\infty$

$\varphi(2) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3$.
Comme $n \geq 2$, $2^n \geq 4$ donc $\varphi(2) > 0$.
Or φ est croissante sur $[2, +\infty[$, donc $\varphi(2)$ est le minimum de φ sur cet intervalle.
Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [2, +\infty[}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.
Supposons que $z^n + z + 1 = 0$. Cherchons le signe de $\varphi(|z|) = |z|^n - |z| - 1$.

On sait que $z^n = -z-1$ donc $|z^n| = |-z-1|$, ce qui s'écrit aussi : $|z|^n = |z+1|$.
Or, par l'inégalité triangulaire, $|z+1| \leq |z|+1$.
On a donc $|z|^n \leq |z|+1$ ie $|z|^n - |z| - 1 \leq 0$. Ainsi, $\varphi(|z|) \leq 0$.
Si le réel $|z|$ était dans $[2,+\infty[$, d'après la question précédente, on aurait $\varphi(|z|) > 0$. Ce n'est pas le cas.
On en déduit donc que $|z| < 2$.
On a bien montré, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{z^n + z + 1 = 0 \implies |z| < 2}$.

c) La réciproque, si elle était vraie, s'écrirait : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| < 2 \implies z^n + z + 1 = 0)$.
Pour montrer qu'elle est fausse, montrons que : $\exists z \in \mathbb{C},\ |z| < 2$ et $z^n + z + 1 \neq 0$.
Il suffit de poser $z = 0$. On a bien : $|0| < 2$ et $0^n + 0 + 1 \neq 0$.
$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

Exercice 2

1°) Comme le coefficient de z^2 dans $P(z)$ est 1, $-(z_1+z_2)$ est le coefficient de z dans $P(z)$, et z_1z_2 est le coefficient constant :

$$\boxed{z_1 + z_2 = i - 2 \qquad z_1z_2 = 2 + 2i}$$

2°) Le discriminant vaut $\Delta = (2-i)^2 - 4(2+2i) = 4 - 1 - 4i - 8 - 8i = -5 - 12i$.
Cherchons un nombre $\delta = x + iy$, avec x et y réels, tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \iff & \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta^2| = |\Delta| \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} (x+iy)^2 = -5 - 12i \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x^2 - y^2 + i2xy = -5 - 12i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \quad {\scriptstyle (1)} \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 13 \quad {\scriptstyle (3)} \end{cases} \qquad \text{par unicité des parties réelles et imaginaires} \\
\iff & \begin{array}{l} {\scriptstyle (1)+(3)} \\ \\ {\scriptstyle (3)-(1)} \end{array} \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ xy = -6 \\ 2y^2 = 18 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = -6 \\ y^2 = 9 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On choisit $\delta = 2 - 3i$.
Les solutions de (E) sont donc : $\dfrac{-2+i+2-3i}{2} = -i$ et $\dfrac{-2+i-2+3i}{2} = -2+2i$.
Comme z_2 doit être celle de partie imaginaire strictement négative, $z_2 = -i$ i.e. $\boxed{z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$,
et $z_1 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, i.e. $\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

3°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$P(z^3) = 0 \Longleftrightarrow z^3 = z_1 \text{ ou } z^3 = z_2.$$

On résout séparément :

$$\begin{aligned}
z^3 = z_1 &\Longleftrightarrow z^3 = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&\Longleftrightarrow z^3 = \left(2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,1,2\}, \quad \frac{z}{2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,1,2\}, \quad z = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{(3+8k)\pi}{12}}
\end{aligned}$$

D'où les solutions $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, et $\sqrt{2}e^{i\frac{18\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
z^3 = z_2 &\Longleftrightarrow z^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,1,2\}, \quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,1,2\}, \quad z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{(3+4k)\pi}{6}}
\end{aligned}$$

D'où les solutions $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Au final, l'ensemble des solutions de $P(z^3) = 0$ est :

$$\boxed{\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}},\ -i\sqrt{2},\ i,\ e^{i\frac{7\pi}{6}},\ e^{i\frac{11\pi}{6}}\right\}}$$