Pour le fun... premier exemple

$x : t \mapsto t^2 - 3t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = 2t - 3$
$= 2\left(t - \frac{3}{2}\right)$

d'où le tableau de variation de x et y ensembles:

t	$-\infty$		-1		0		1		$3/2$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{97}{36}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	

pour $t = -1$,
on obtient le point de coordonnées $(4,2)$
et comme $\begin{cases} x'(-1) \neq 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases}$:
tangente horizontale

pour $t = 1$,
point $(-2, 2)$,
tangente horizontale

pour $t = 3/2$:
point $\left(-\frac{9}{2}, \frac{97}{36}\right)$
tangente verticale
car $\begin{cases} x'(3/2) = 0 \\ y'(3/2) \neq 0 \end{cases}$

Lorsque $t \to 0$: $x(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$
$y(t) \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$

il y a une asymptote verticale...

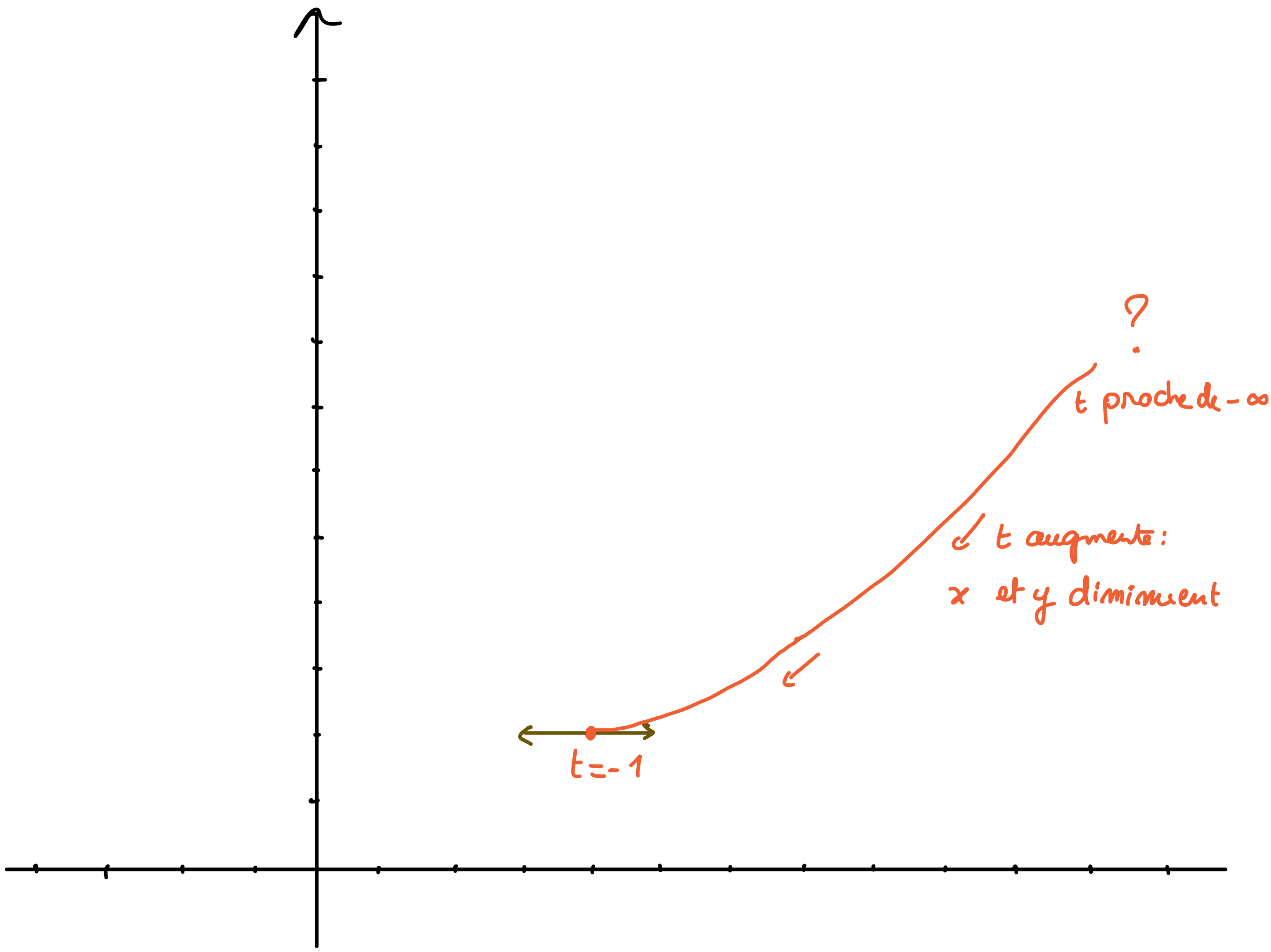
Tracé pas à pas de la courbe paramétrée :

- De t proche de $-\infty$ à $t = -1$:

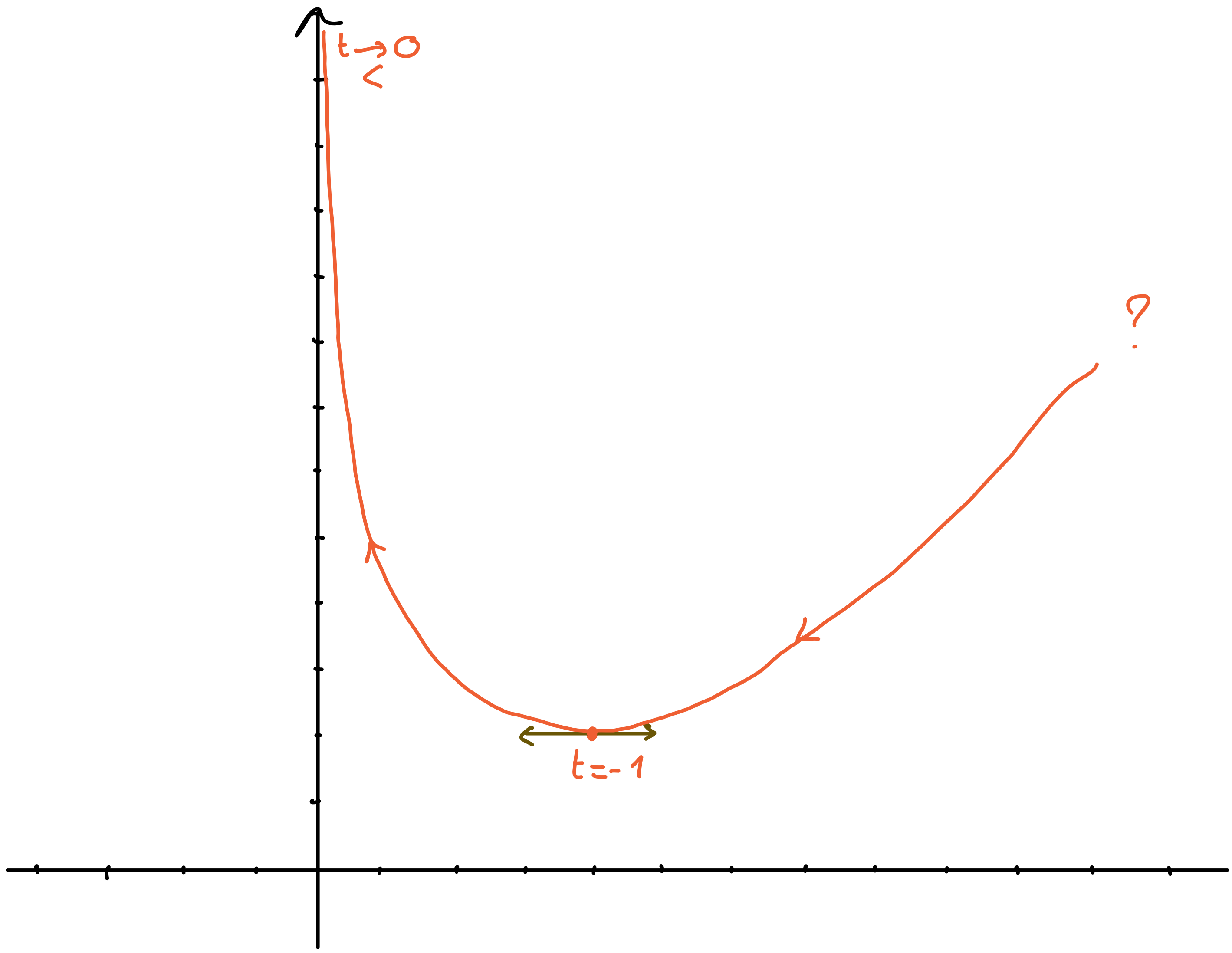
  x part d'une très grande valeur et diminue jusqu'à 4

  y part d'une très grande valeur et diminue jusqu'à 2

  et en $(4, 2)$, tangente horizontale



• De $t = -1$ à t proche de 0 en restant négatif
x part de 4 et diminue jusqu'à s'approcher de 0
y part de 2 et augmente, $y(t) \xrightarrow[t \to 0^-]{} +\infty$

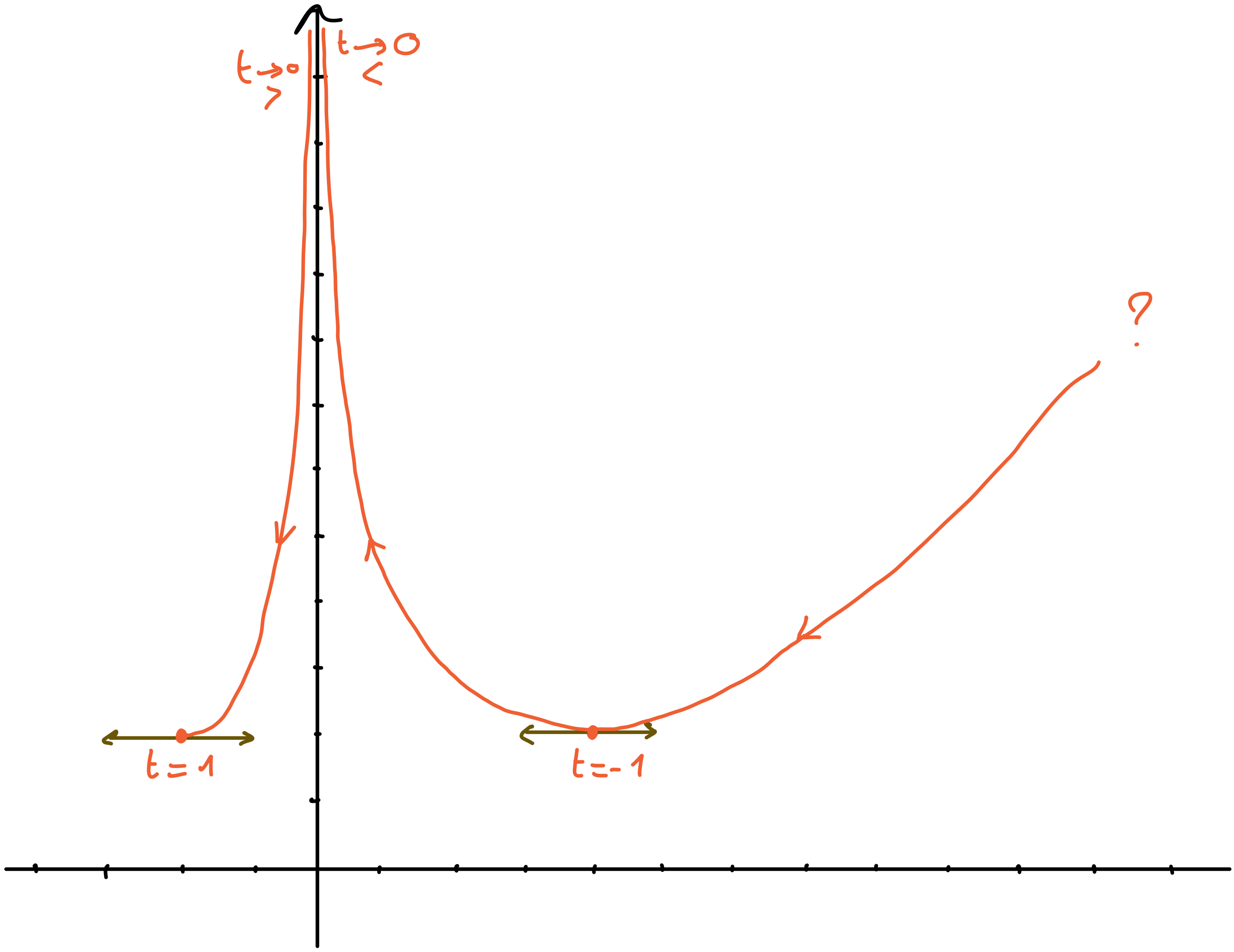


• De t proche de 0 en étant positif à $t = 1$

x part de 0 en étant négatif et diminue jusqu'à -2

y part de $+\infty$ et diminue jusqu'à 2

et en $(-2, 2)$, tangente horizontale

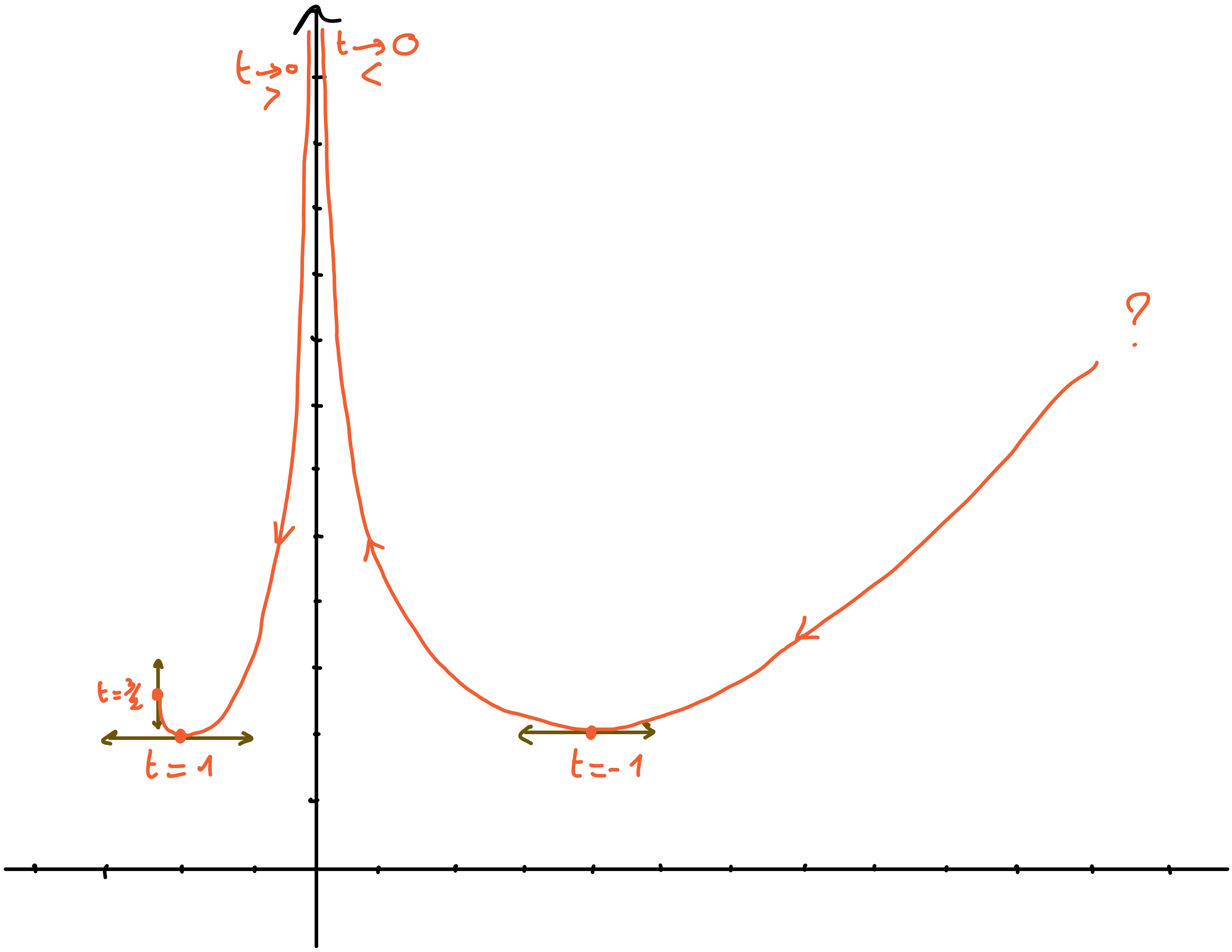


- De $t = 1$ à $t = 3/2$

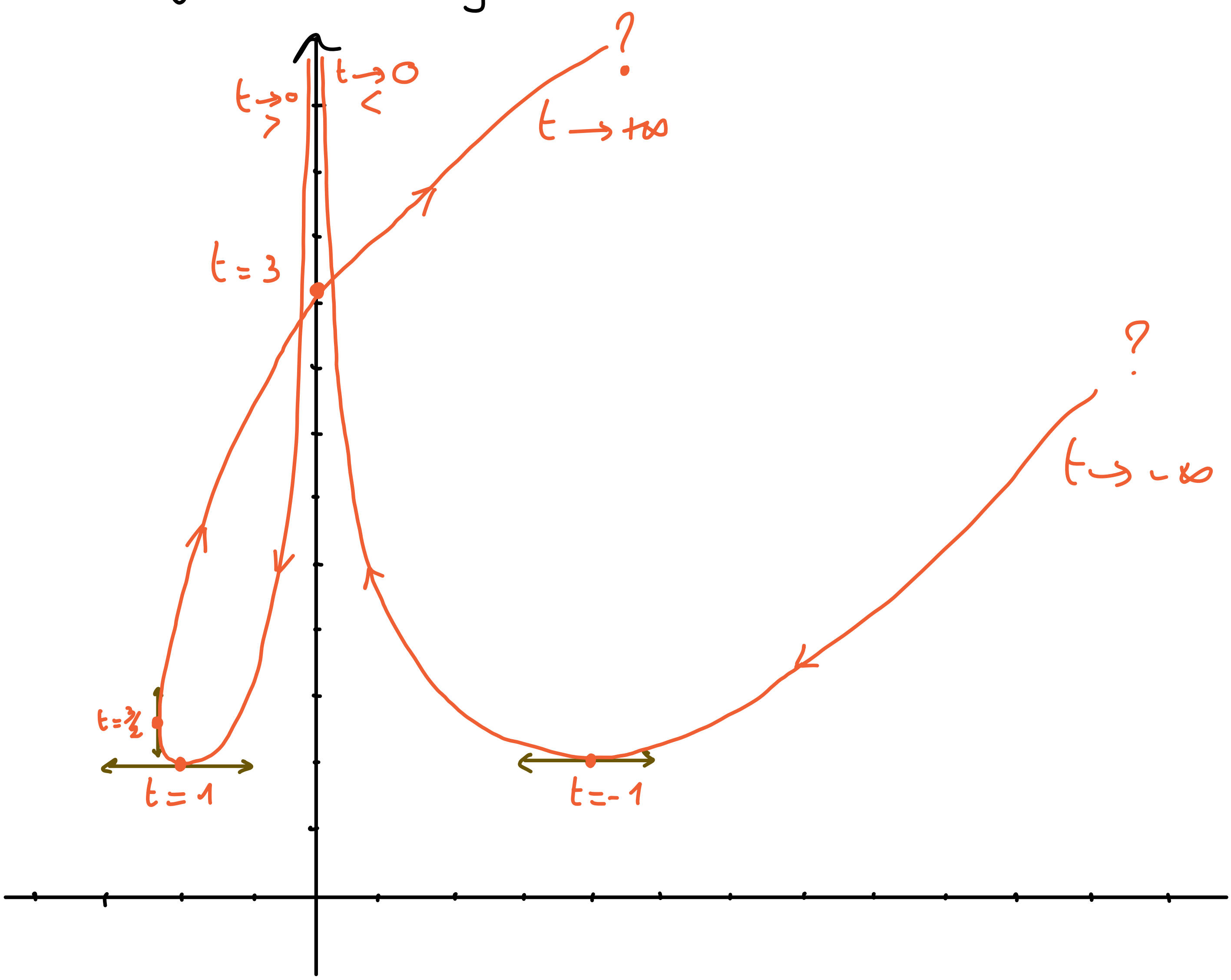
  x diminue encore de -2 à $-9/4$

  y augmente légèrement de 2 à $97/36 \simeq 2{,}7$

  et en ce point, tangente verticale



- Enfin, à partir de $t = \frac{3}{2}$ jusqu'à $+\infty$, x et y augmentent tous les deux jusqu'à prendre de très grandes valeurs…
  On peut remarquer que x s'annule pour $t = 3$, et alors y vaut $9 + \frac{1}{9}$, proche de 9.



Ce n'est pas facile de savoir comment est la courbe pour t proche de $-\infty$ et de $+\infty$.
On peut montrer que $y(t) - \left(x(t) + 3\sqrt{x(t)} + \frac{9}{2}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$,

ce qui signifie que la courbe se rapproche de la courbe représentative de $f : x \mapsto x + 3\sqrt{x} + \frac{9}{2}$; et en $-\infty$, c'est
$g : x \mapsto x - 3\sqrt{x} + \frac{9}{2}$

Pour le fun... deuxième exemple

- $x : t \longmapsto 3\cos(t) - \cos(3t)$ est dérivable par somme et composition sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
  et : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = -3\sin(t) + 3\sin(3t)$

$$x'(t) = 3\left(\sin(2t+t) - \sin(2t-t)\right)$$
$$= 3\left[\sin(2t)\cos(t) + \cos(2t)\sin(t) - \left(\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t)\right)\right]$$
$$x'(t) = 6\cos(2t)\sin(t)$$

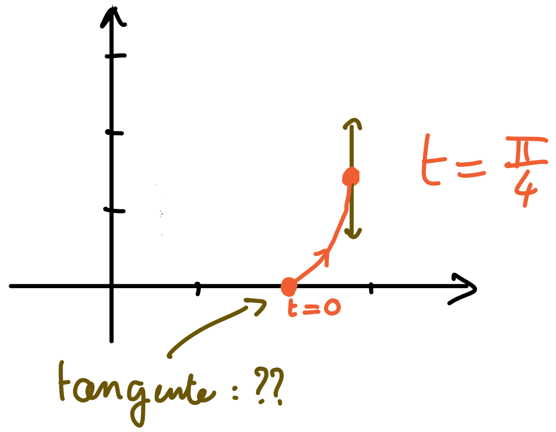
or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geqslant 0$, annulation uniquement en 0
et $t \mapsto \cos(2t)$ est ↘↘ sur cet intervalle,
$\cos(\frac{\pi}{4}) = 0$ d'où le signe de $\cos(2t)$ et donc de $x'(t)$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
x	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0
y	0	↗	$\sqrt{2}$	↗	4
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0

y a-t-il une tangente en $(2,0)$?
pas clair...

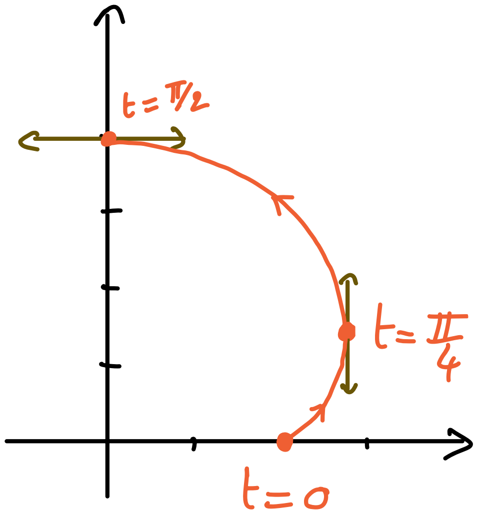
point $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$:
$\begin{cases} x'(\frac{\pi}{4}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{4}) \neq 0 \end{cases}$
d'où une tangente verticale en ce point

point $(0,4)$:
$\begin{cases} x'(\pi/2) \neq 0 \\ y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$
d'où une tangente horizontale en ce point



De $t=0$ à $t=\frac{\pi}{4}$,

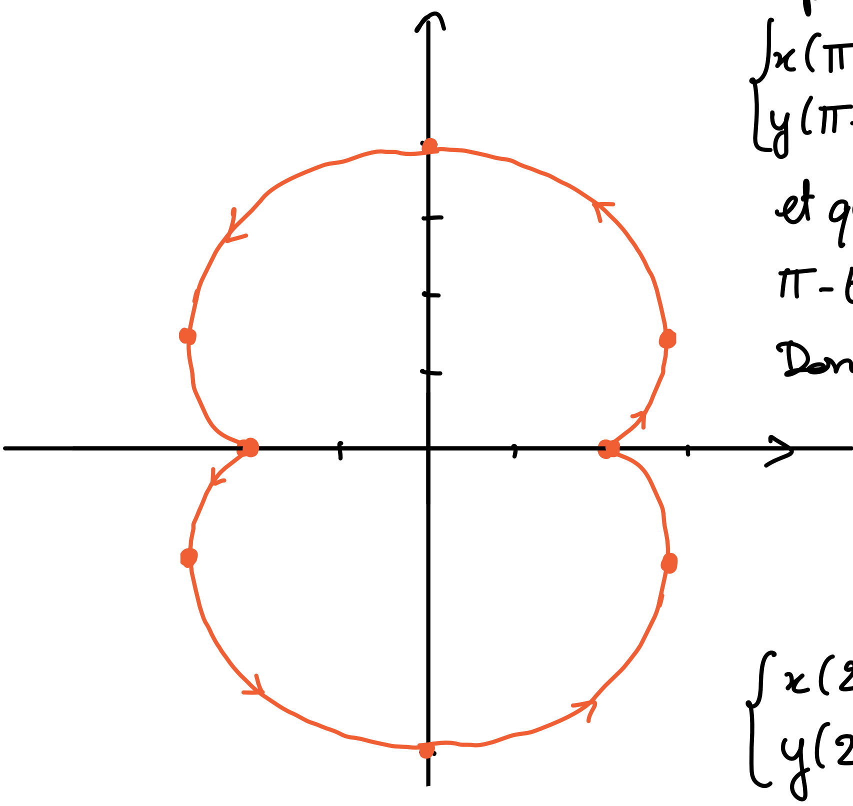
x et y augmentent



De $t=\frac{\pi}{4}$ à $t=\frac{\pi}{2}$,

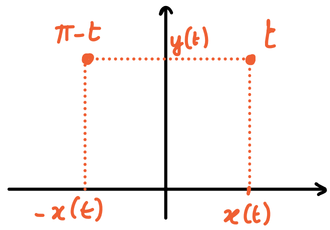
y continue d'augmenter mais x diminue jusqu'à 0.

- Courbe sur $[0,2\pi]$, avec l'aide de l'énoncé :



Explications :

$$\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases}$$



et quand t varie dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\pi-t$ varie dans $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
Donc la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ s'obtient par symétrie par rapport à Oy

$$\begin{cases} x(2\pi-t) = x(-t) = x(t) \\ y(2\pi-t) = y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

De même, on en tire que la courbe sur $[\pi,2\pi]$ s'obtient par symétrie par rapport à Ox