Chapitre 18. Ensembles finis et dénombrement.

1 Ensembles finis, cardinal

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ peut se noter $[\![1, n]\!]$.

1.a Cardinal d'un ensemble fini

Nous savons tous intuitivement ce qu'est un ensemble E fini : composé d'un nombre fini d'éléments.
Cela signifie qu'on peut énumérer ses éléments, en écrivant $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
L'application $k \mapsto e_k$ est alors une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans E.

La définition rigoureuse est en lien avec cela : on dit qu'un ensemble E est fini s'il est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, qui est alors unique (c'est son nombre d'éléments). On rajoute bien sûr le cas particulier $E = \emptyset$.

Définition :

Soit E un ensemble fini.
Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E, et il est noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$.
C'est donc un élément de $\mathbb{N}$ (le cardinal de l'ensemble vide est 0).

Illustration :

Exemples : $\{1, \ldots, n\}$ est fini de cardinal n.
La classe de PTSI2 est finie de cardinal 41.
Si a et b sont des entiers tels que $a \leq b$, $\{a, \ldots, b\}$ est fini de cardinal

1.b Quelques propriétés

Théorème :

Soient E et F des ensembles non vides. On suppose que E est fini.

$$\text{Il existe une bijection de } E \text{ sur } F \iff F \text{ est fini de même cardinal que } E$$

Proposition :

Soit E un ensemble fini.
Si A est une partie de E, alors A est un ensemble fini, et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
De plus, on a : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \Longleftrightarrow A = E$.

Proposition :

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.
Si f est injective et si F est fini, alors E est également fini, et $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.

Conséquence : le principe des tiroirs
Une application f de E dans F avec $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$ ne peut donc pas être injective : il existe alors deux éléments distincts de E qui ont la même image.
C'est le principe des tiroirs : si l'on range $n+1$ chemises dans n tiroirs alors, nécessairement, il y a au moins un tiroir contenant au moins deux chemises.
(Ici c'est l'application qui à une chemise associe le tiroir où on la range qui ne peut être injective !)

Exemple : Montrer que, dans un village de 700 habitants, deux personnes au moins ont les mêmes initiales (on ne prend en compte que la première lettre en cas de noms ou prénoms composés).

Proposition :

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.
Si f est <u>surjective</u> et si E est fini, alors F est également fini, et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.

Proposition :

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\boxed{\text{Card}(E) = \text{Card}(F)}$, et $f : E \to F$.

- Si f est injective, alors f est bijective.
- Si f est surjective, alors f est bijective.

On a donc : f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.

2 Opérations et cardinal

2.a Cardinal d'une réunion disjointe, principe multiplicatif

Proposition :

Soient A et B deux ensembles finis $\boxed{\text{disjoints}}$.

L'ensemble $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) =$

Généralisation : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis $\boxed{\text{deux à deux disjoints}}$.

L'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est fini et $\text{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$

Démonstration 1

En particulier, lorsque tous les ensembles A_k ont même cardinal p, on obtient que le résultat suivant :

Une réunion disjointe de n ensembles de même cardinal p est de cardinal

C'est le "lemme des bergers".

Cela justifie le "principe multiplicatif" que nous utiliserons dans de nombreux raisonnements de dénombrement, c'est-à-dire lorsque nous voudrons calculer le cardinal d'un certain ensemble E.

Exemple : Un restaurant propose un menu "Entrée-plat", avec 3 choix d'entrées et 4 choix de plats. Combien peut-on composer de menus différents ?

De façon général, le principe multiplicatif s'applique quand on peut expliciter une <u>méthode de construction</u> des éléments de E, permettant d'obtenir <u>une et une seule fois chaque élément de E</u>.
Les étapes doivent pouvoir s'enchaîner avec des "et" (ou des "puis"), et le nombre de possibilités à chaque étape doit être indépendant des étapes précédentes.
Il suffit alors de faire le produit des nombres de possibilités de toutes les étapes.

2.b Cardinal du complémentaire et d'une réunion quelconque

Proposition :

- Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

  $\text{Card}(\complement_E^A) =$

- Soient A et B des parties d'un ensemble fini E.

  $\text{Card}(A \backslash B) =$

Démonstration 2

Corollaire :

Soient A et B deux ensembles finis.
Alors $A \cup B$ est fini et

$\text{Card}(A \cup B) =$

Démonstration 3

Exemple : Soient A l'ensemble des élèves de la classe qui aiment le français, et B l'ensemble de ceux qui aiment la LV1.
Combien d'élèves aiment au moins une des matières littéraires obligatoires ?

Cette formule se généralise à trois ensembles, à quatre ensembles ... :

2.c Produit cartésien

Proposition :

> Soient E et F deux ensembles finis.
> Alors $E \times F$ est fini et
>
> $$\text{Card}(E \times F) =$$

Démonstration 4

En conséquence, $\text{Card}(E^n) =$

2.d Nombres de parties d'un ensemble fini

Proposition :

> Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
> Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et
>
> $$\text{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n$$

Démonstration 5

Traduction :

Exemple : pour $E = \{a, b, c\}$, $n = 3$, et les parties de E sont :

3 Dénombrement : listes, arrangements, permutations, combinaisons

On va s'intéresser à quelques "structures" obtenues avec les éléments d'un ensemble fini E, selon divers critères : si les répétitions sont autorisées, si l'ordre est important...

3.a Listes

Définition :

> Soit E un ensemble fini non vide et $p \in \mathbb{N}^*$.
> On appelle <u>p-liste</u> toute suite $(x_1, \ldots, x_p)$ où chaque x_i est dans E.

On parle aussi de <u>p-uplet</u> ou de famille d'éléments de E indexée par $I = \{1, \ldots, n\}$.
L'ensemble des p-listes de E est donc E^p.

- L'ordre compte
- Les répétitions sont autorisées

Exemples :

- Une 4-liste de $\{1, \dots, 10\}$ est, par exemple, $(8, 8, 3, 6)$.

- Le digicode d'un immeuble est composé de 5 symboles parmi les chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B : c'est une 5-liste de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$.

- **Tirages successifs avec remise** : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

Théorème :

> Si E est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de p-listes de E est

✎ **Démonstration** 6

Exemples :

- Combien y a-t-il de suites de 5 lancers de dé possibles ?

- Soient E et F des ensembles finis non vides. Une application u de E dans F est entièrement déterminée par la liste des images des éléments de E :

3.b Arrangements

Définition :

Soit E un ensemble fini non vide et $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle p-arrangement de E toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ où les x_i sont des éléments de E deux à deux distincts.

- L'ordre compte
- Les répétitions ne sont pas autorisées

Exemples :

- Un 4-arrangement de $\{1, \dots, 10\}$ est, par exemple, $(8, 9, 3, 6)$.
- Une course hippique met en jeu 20 chevaux. Un tiercé est un 3-arrangement de l'ensemble des chevaux.
- **Tirages successifs sans remise** : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

Théorème :

Si E est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

Démonstration 7

Exemples :

- Combien y a-t-il de suites de 4 lancers de dé où les 4 chiffres obtenus sont 2 à 2 distincts ?

- Soient E et F des ensembles finis non vides. Une application u de E dans F est entièrement déterminée par la liste des images des éléments de E, et u est injective si et seulement si ces éléments sont deux à deux distincts :

3.c Permutations

Définition :

Soit E un ensemble fini non vide, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E.
Il y a donc $\frac{n!}{0!} = \boxed{n!}$ permutations de E.

Une permutation de E est donc une suite de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où les x_i constituent tous les éléments de E (sans répétition), rangés dans un certain ordre.

- L'ordre compte
- Les répétitions ne sont pas autorisées

Exemples :

- Les $3! = 6$ permutations de $E = \{a, b, c\}$:
- Quatres personnes veulent s'asseoir sur les quatres tabourets alignés d'un bar. Combien y a-t-il de placements possibles ?
- Soit E un ensemble fini non vide, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
  Le nombre d'applications bijectives de E dans E est $n!$.

3.d Combinaisons

Tirages simultanés : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On tire simultanément p boules $(0 \leq p \leq n)$:

Définition :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{N}$.
On appelle p-combinaison de E toute partie de E à p éléments.

- L'ordre ne compte pas
- Les répétitions ne sont pas autorisées

Si $p > n$, il n'y a bien sûr aucune p-combinaison.

Exemple : Les 2-combinaisons de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont :

Théorème :

Si E est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de p-combinaisons de E est :

✎ **Démonstration** 8

Exemples :

- Six amis s'apprêtent à trinquer. Combien entendra-t-on de "tchin" ?

- 90 voitures vont se garer dans un parking disposant de 300 places. Une lumière verte se trouve au dessus des places libres, et la lumière devient rouge pour les places occupées. Combien y a-t-il de configurations de lumières possibles ?

Les propriétés des coefficients binomiaux peuvent ainsi se démontrer autrement que par des calculs en revenant aux factorielles. Donnons des preuves combinatoires :

Proposition :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}*$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \{1, \ldots, n\}$ $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

e) $\forall n \geq 2$, $\forall p \in \{1, \ldots, n-1\}$ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (Formule du triangle de Pascal)

f) (Formule du binôme de Newton) : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

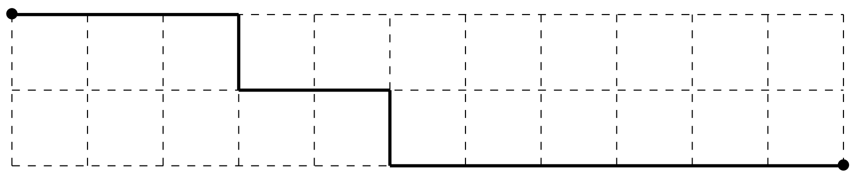
Démonstration 9

4 Bilan : conseils et méthodes pour les exercices de dénombrement

Les exercices de dénombrement demandent en général "combien y a-t-il de situations telles que... ", autrement dit on doit calculer le cardinal de l'ensemble A des situations possibles.

- Il y aura souvent une étape de **modélisation** : on représentera les situations que l'on souhaite dénombrer par un objet "simplifié".

  Exemple :
  Une chenille se déplace le long d'un quadrillage, de hauteur 2 carreaux et de longueur n carreaux. Elle démarre en haut à gauche et doit arriver en bas à droite.
  Combien y a-t-il de chemins de longueur minimale pour cette chenille ?



- Dans les exercices les plus faciles, on reconnaîtra directement l'une des structures du cours (liste, arrangement, permutation, combinaison). Pour détecter s'il s'agit d'une liste, d'un arrangement, d'une permutation, d'une combinaison, il faudra se poser les questions suivantes :
  — *A-t-on droit aux répétitions ?*
  — *Est-ce que l'ordre est important ?*

- Beaucoup d'exercices utiliseront le **principe multiplicatif**.
  Les structures liste/arrangement/permutation/combinaison apparaitront lors des différentes étapes de construction des situations à dénombrer.

  Exemple :
  Combien y a-t-il de mots (ayant un sens ou non) de 7 lettres contenant la séquence "ptsi" ?

- Il est parfois plus simple de **trouver le cardinal du complémentaire** $\overline{A}$.

  Exemple :
  Combien y a-t-il de mots (ayant un sens ou non) de 3 lettres avec au moins un "w" ?

- **Utilisation d'une réunion d'ensembles disjoints :**
  Lorsqu'on constate que "soit c'est comme ceci, soit c'est comme cela", c'est que l'ensemble A à dénombrer peut s'écrire comme une réunion de deux parties disjointes, lesquelles peuvent être plus faciles à dénombrer.
  Plus généralement, lorsqu'il y a n cas distincts, cela signifie que A s'écrit comme une réunion disjointe $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, avec A_k l'ensemble des situations correspondant au cas n° k.

  Exemple :
  Combien y a-t-il de mots de 3 lettres avec au plus un "w" ?

- Une source fréquente d'erreur est de compter plusieurs fois certaines situations (ou bien en oublier certaines). En particulier, lorsqu'on utilise le principe multiplicatif (qui correspond à un arbre de choix), il faut s'assurer qu'il n'y a pas deux chemins qui construisent une situation identique !

Plan du cours