Devoir surveillé 6.

Samedi 5 avril 2025, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Ainsi, $\mathrm{Tr}(M)$ est la somme des coefficients diagonaux de la matrice M. C'est donc un réel.

$\mathrm{Tr}(M)$ est appelée *trace de la matrice* M.

On définit ainsi une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M). \end{array}$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A. \end{array}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Partie 1 : questions préliminaires

1°) Montrer que Tr est linéaire.
Comme Tr est à valeurs dans $\mathbb{R}$, de quel type d'application linéaire s'agit-il ?

2°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 2 : étude d'un exemple

Dans cette partie, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3°) Vérifier que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

4°) Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5°) En déduire des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Partie 3 : Cas général

Dans cette partie, on retourne au cas général, on a $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

6°) Montrer que si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$, alors $M \in \mathrm{Vect}(A)$.

7°) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$.

8°) Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ puis en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

9°) En déduire alors que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

10°) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Tr}(A)$ pour que f soit un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.

On considère l'application $\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

$P(X+1)$ désigne la composée et non le produit des polynômes P et $X+1$.

Partie 1 : Étude d'un endomorphisme

1°) **a)** Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $\deg(\Delta(X^k))$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2°) **a)** Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.
En utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, aboutir à une contradiction.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

3°) **a)** Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer, en utilisant la question 1, que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

b) En déduire, pour $n \geq 1$, que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

4°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire $\Delta_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array}$.
Déterminer $\mathrm{Ker}\,(\Delta_n)$ puis en déduire que $\mathrm{Im}\,(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5°) En déduire que l'endomorphisme Δ est surjectif.

6°) On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$.
Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\,(\Delta)$.

7°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

a) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \Delta(P) = Q \\ P(0) = 0 \end{cases}$.

b) Montrer l'unicité de P.
Préciser le degré de P en fonction de celui de Q lorsque $Q \neq 0$.

Partie 2 : Étude d'une suite de polynômes

On pose $P_0 = 1$.
Par la question 7, on peut définir par récurrence une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n-1} = \Delta(P_n)$ et $P_n(0) = 0$.

8°) Expliciter P_1.

9°) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

10°) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

11°) Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de P_0, P_1, P_2 et P_3.

12°) **Application :** Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} k^n = 1^n + 2^n + \cdots + p^n.$$

a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\Delta(A_n) = X^n$ et $A_n(0) = 0$.

b) En revenant à la définition de Δ, montrer que pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $S_{n,p} = A_n(p+1)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de X^n dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$: $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.

Justifier que $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.

d) Déterminer les expressions de A_2 et A_3 en fonction des P_k.

e) Donner alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

1°) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{id}_E$.
Rappel : $f^2 = f \circ f$.
On pose $p = f - 2\,\mathrm{id}_E$ et $q = -f + 3\,\mathrm{id}_E$.

a) Montrer que p et q sont des projecteurs de E.

b) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) Exprimer f en fonction de p et q.

d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + 2^n q$.

2°) *Un exemple concret*
On définit une application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+4y). \end{array}$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

c) On pose $p = f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Déterminer $p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de la projection p, c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels qui la caractérisent (on les écrira sous forme de Vect).

e) Expliciter $q = -f + 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et donner les éléments caractéristiques de cette projection.

f) *Application* : On note (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n. \end{cases}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.