Chapitre 8. Suites numériques.

1 Généralités sur les suites réelles

1.a Définition

Définition :

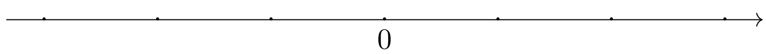
Une suite réelle est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$

Conventions et vocabulaire :

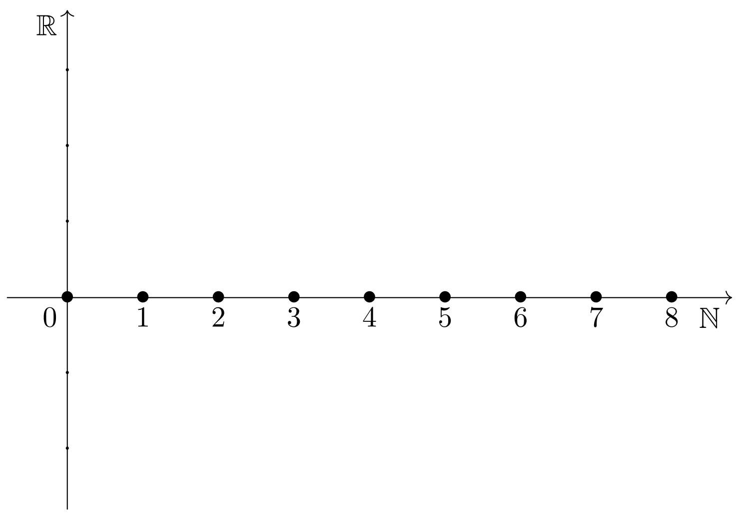
- L'image $u(n)$ de l'entier n est plutôt noté u_n, et on l'appelle le $n$ième terme de la suite u.
  On l'appelle aussi le terme général de la suite.
- La suite se note u, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_n$, ou (u_n)...
  ⚠ En tout cas pas u_n qui est un réel !!
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  On écrit par exemple : $(3^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La définition s'étend aux suites définies seulement à partir de 1, ou à partir d'un $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
  La suite est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Représentations graphiques possibles

Sur l'axe des réels :



Représentation comme fonction :



1.b Opérations sur les suites, relation d'ordre

Soient u et v des suites réelles. On définit :

- La suite somme $u + v$ comme la suite de terme général $u_n + v_n$
- La suite produit $u \times v$ comme la suite de terme général $u_n \times v_n$
- La suite $\lambda.u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, comme la suite de terme général λu_n
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, la suite quotient $\dfrac{u}{v}$ comme la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$

Les lois $+$ et $\times$ ainsi définies sur l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ont de bonnes propriétés : commutativité, associativité, distributivité... mais attention ! Ce n'est pas toujours comme dans $\mathbb{R}$:

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors on note : $u \leq v$.

1.c Caractéristiques éventuelles d'une suite

Définition :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit qu'elle est :

- constante si
- stationnaire si
- majorée si
- minorée si
- bornée si
- croissante si
- strictement croissante si
- décroissante si
- strictement décroissante si
- monotone si
- strictement monotone si

⚠ Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes : par exemple

Deux méthodes (parmi d'autres) pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ou strictement monotone :

-
- .

Exemples : Étudier la monotonie des suites de termes généraux : $u_n = \sum_{k=0}^{n} e^k \qquad v_n = \dfrac{2^n}{n!}$

✎ **Démonstration** 1

Remarque :
Les deux suites précédentes sont définies explicitement : on donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n uniquement. Mais une suite peut aussi être définie :

- implicitement : par exemple,
  "On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à n qui soient premiers"
  "On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n l'unique solution de l'équation $x - \ln(x) = n$ dans $[1, +\infty[$"
- par récurrence : on donne une relation entre u_{n+1} et u_n (ou bien entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n ; entre u_{n+1} et tous les u_k avec $k \leq n$...) ; et on donne aussi les valeurs d'un ou plusieurs premiers termes ; de sorte que l'on pourrait calculer les termes successifs de la suite de proche en proche...

1.d Suites récurrentes

Définition :

On appelle suite récurrente simple toute suite u définie par la donnée de u_0 et d'une relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n} \end{cases}$

⚠ L'existence d'une telle suite n'est pas évidente a priori.
Considérons par exemple : $\begin{cases} v_0 = -3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1 - v_n} \end{cases}$

Montrons cependant que dans notre premier exemple, la suite (u_n) est bien définie :
✎ **Démonstration** 2

De façon plus générale, on essaye de trouver un intervalle I qui soit stable par f et tel que $u_0 \in I$...
Définition :

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.
On dit qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est stable par f si

Par exemple, avec $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$:

On peut alors redémontrer que la suite (u_n) est bien définie à l'aide d'une récurrence très rapide, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathcal{P}_n : \text{"le réel } u_n \text{ existe, et il est dans } I\text{"}}$.

1.e Les exemples classiques de suites récurrentes simples à connaître

- S'il existe un réel (ou un complexe...) r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$:
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

  Une récurrence sur n permet d'obtenir le terme général de façon explicite :

- S'il existe un réel (ou un complexe...) q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$:
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

  Une récurrence sur n permet d'obtenir le terme général de façon explicite :
  Si la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
  On verra qu'elle converge si et seulement si

- S'il existe des réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = au_n + b}$:
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométique.

  Méthode à connaître : $\boxed{\text{Résoudre } \ell = a\ell + b}$. La suite $(u_n - \ell)$ sera alors géométrique, ce qui permet d'en tirer u_n en fonction de n.

  Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n\ +\ 1}{2}$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
  ✎ **Démonstration** 3

- S'il existe des réels a et b, avec $b \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$:
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double/d'ordre 2.

  La donnée d'une telle relation et de u_0 et u_1 détermine tous les termes de la suite.
  Avec ces notations :
  Théorème :

  > On note (E) : , et on l'appelle l'équation caractéristique de la suite u.
  >
  > - Si (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors
  > - Si (E) a une racine réelle double r_1, alors
  > - Si (E) a deux racines non réelles distinctes r_1 et r_2, alors ces racines sont non nulles et conjuguées l'une de l'autre ; on les écrit sous forme trigonométrique

  Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
  ✎ **Démonstration** 4

2 Limite d'une suite réelle

2.a Limite finie, définition de la convergence

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Soit ℓ un réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

  On note cela
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge/est divergente.

Le réel strictement positif quelconque ε est non nul mais aussi petit que l'on veut ; il représente l'erreur commise lorsqu'on prend u_n comme valeur approchée de ℓ.

Remarques sur l'inégalité "$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$" :

- Elle s'écrit aussi :
- On peut la remplacer, dans la définition, par "$|u_n - \ell| < \varepsilon$".

Exemple Montrons que $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration 5

Proposition :

(unicité de la limite)
Si une suite est convergente, alors elle admet une unique limite.

Démonstration 6

Ceci nous autorise à utiliser la notation lim : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on peut noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition :

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration 7

⚠ La réciproque est fausse :

2.b Suites convergentes vers 0

Proposition :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ $\Longleftrightarrow$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 $\Longleftrightarrow$

En effet :

Proposition :

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) :

$$|u_n - \ell| \leq M_n$$

On suppose que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration 8

Méthode à retenir :

Exemples :

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite à préciser.
Même question avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{2n}{n-\mathrm{Arctan}(n)}$.

Démonstration 9

Corollaire :

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

Démonstration 10

⚠ La réciproque est fausse : contre-exemple

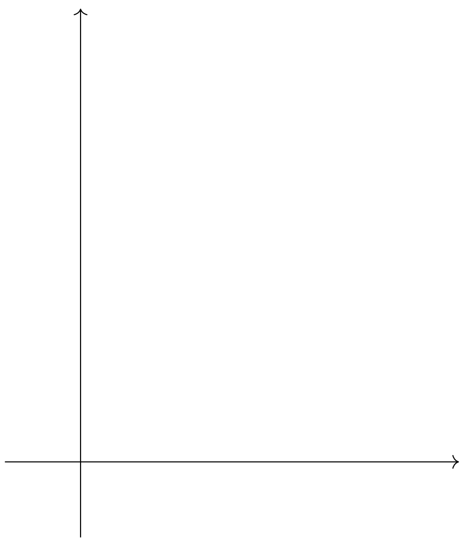
2.c Divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$

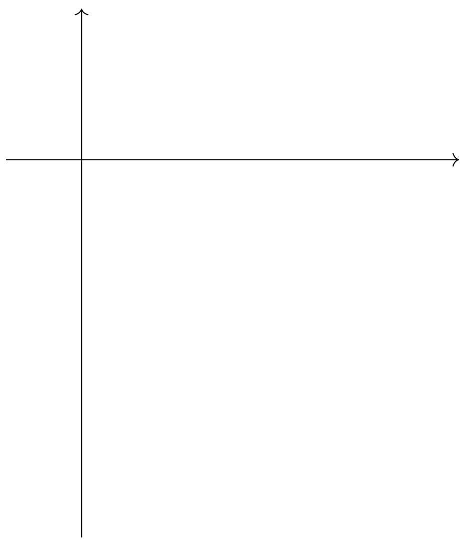
Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  et on note   si :

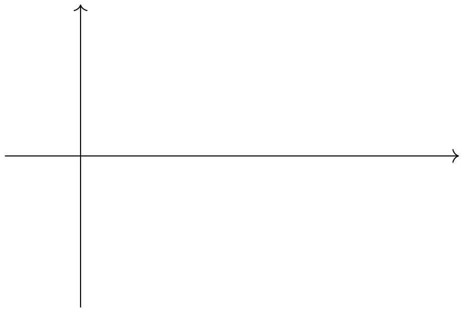
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  et on note   si :

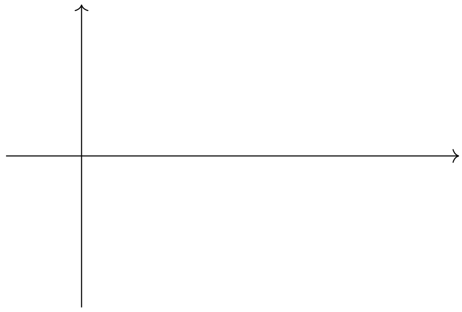




Remarques :

- Dans les définitions, on peut remplacer "$\forall\, A \in \mathbb{R}$" par "$\forall\, A \in \mathbb{R}^+$" ; "$\forall\, B \in \mathbb{R}$" par "$\forall\, B \in \mathbb{R}^-$" ; $u_n \leq B$ par $u_n < B$; $u_N \geq A$ par $u_n > A$.
- ⚠ une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ ou $-\infty$; elle peut avoir d'autres types de comportements.
  Exemples :





Exemple : Montrer que la suite u définie par $u_n = \sqrt{n+4}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration 11

Proposition :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors (u_n) n'est pas , mais elle est
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors (u_n) n'est pas , mais elle est

Démonstration 12

Conséquences :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien divergente : elle ne converge pas vers un réel ℓ. En effet,
- Une suite ne admettre à la fois $+\infty$ et $-\infty$ comme limite.
- On en déduit qu'il y a encore unicité de la limite, et qu'on peut utiliser la notation lim.

⚠ Les réciproques sont fausses :

3 Opérations sur les limites

Pour simplifier les énoncés, on va étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R}$ auquel on adjoint $-\infty$ et $+\infty$. Lorsque l'opération ne peut être définie, on parle de "forme indéterminée" (FI) ; il faudra faire une étude au cas par cas.

$+$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$			
$\ell' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			

$\times$	$-\infty$				$+\infty$
$-\infty$					
$+\infty$					

	$\ell = -\infty$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell > 0$	$\ell = +\infty$
$\frac{1}{\ell}$					

Dans la suite, u et v désignent deux suites réelles, et ℓ, ℓ' des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

3.a Somme et mutiplication par un scalaire

Proposition :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors

Démonstration 13

3.b Produit, inverse

Proposition :

(Produit dans un cas particulier)

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et si alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration 14

Exemple : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

Proposition :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors

Démonstration 15

Résultats importants, à connaître et à savoir redémontrer :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell > 0$, alors

  Plus précisément,
- De même, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell < 0$, alors
- En conséquence, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors

Démonstration 16

Proposition :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \neq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang, et $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il y a trois cas :
  - Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (ou bien à partir d'un certain rang) :
  - Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ (ou bien à partir d'un certain rang) :
  - Sinon,

Démonstration 17

On en déduit les résultats pour les quotients : $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

⚠ Avec le quotient, les formes indéterminées sont

Exemples : Montrer que les suites suivantes convergent, et déterminer leurs limites :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^2+3n+8}{3n^2+n+1} \quad v_n = 3n^2 - \sqrt{n}$$

Démonstration 18

3.c Composition par une fonction, applications : limites à connaître

Proposition :

(Composition) Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et a, ℓ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que

Si et si , alors

En particulier, si $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors :

Exemples :

-
-

Proposition :

(Croissances comparées)

Soient α et β des réels, avec $\alpha > 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}$

Proposition :

Soit u une suite qui converge vers 0.

Exemples : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^n \sin(e^{-n})$; $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

✎ **Démonstration** 19

⚠ Ne pas inventer de "formule" pour les puissances, et toujours revenir à la forme exponentielle de la puissance.
Par exemple, "1^∞" est une FI, ce n'est pas 1...

4 Limites et inégalités

4.a Passage à la limite

Théorème :

- Soit u une suite réelle $\boxed{\text{convergente}}$.
  On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou bien à partir d'un certain rang) : $u_n \geq 0$.
  Alors
- Soient u et v deux suites réelles $\boxed{\text{convergentes}}$.
  On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou bien à partir d'un certain rang) : $u_n \leq v_n$.
  Alors

✎ **Démonstration** 20

⚠ Cela ne marche plus en général pour les inégalités strictes.

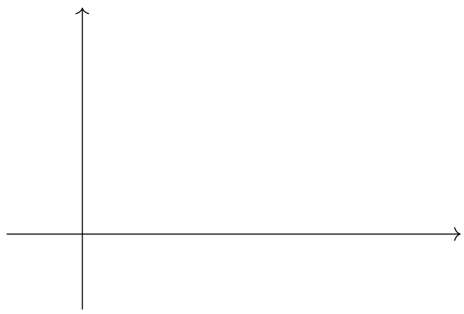
On retiendra donc : "le passage à la limite transforme toute inégalité en inégalités larges".

4.b Théorèmes d'existence

Théorème :

(Théorème d'encadrement ou "théorème des gendarmes")
Soient u, v, w des suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) :

On $\boxed{\text{suppose}}$ que (u_n) et (w_n) sont



Alors :

-
-

Démonstration 21

Exemple : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Théorème :

Soient u, v des suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) :

$$\boxed{u_n \leq v_n}$$

- (théorème d'existence de limite par)
  Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$
- (théorème d'existence de limite par)
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$

Démonstration 22

5 Théorèmes fondamentaux

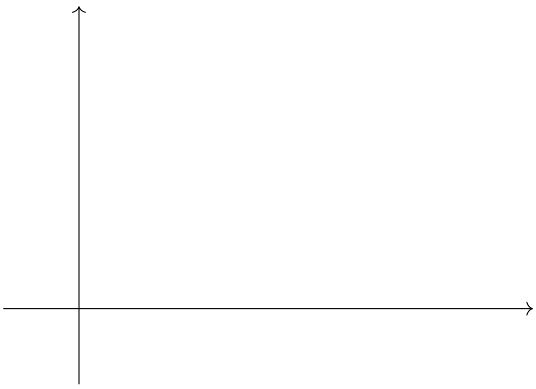
5.a Suites monotones

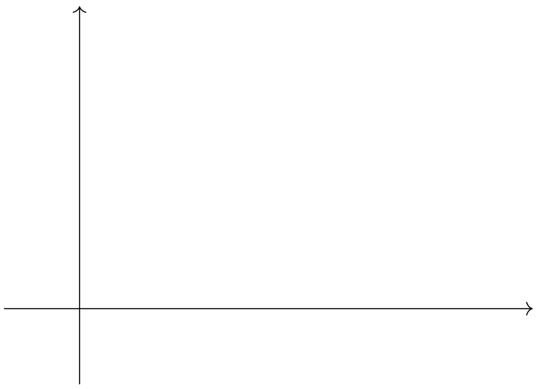
Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas alors

Démonstration 23



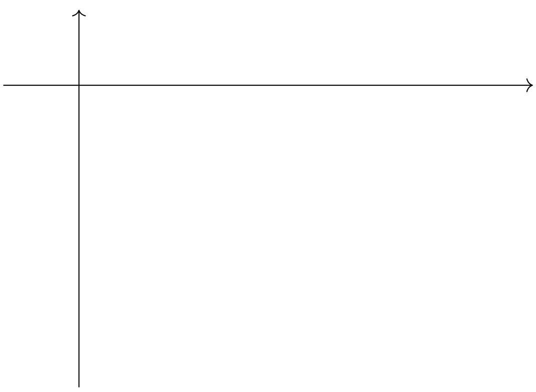


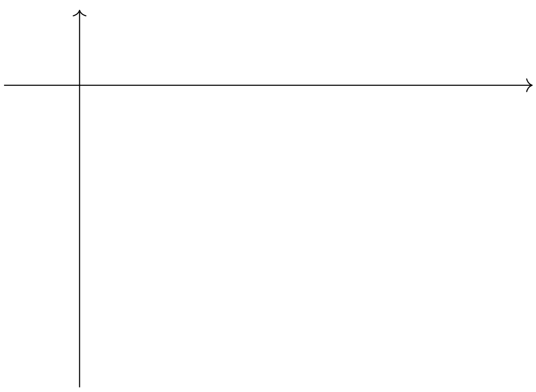
Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas alors

Démonstration 24





Ainsi, une suite monotone admet toujours une limite, finie ou infinie.

Exemple : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrons que u converge.

Démonstration 25

⚠ (Tarte à la crème) Le majorant obtenu, dans le cas croissant majorée, n'est pas (a priori) la limite !

On a cependant les résultats faciles suivants :

Proposition :

- Si u est croissante et si elle converge vers un réel ℓ, alors
- Si u est strictement croissante et si elle converge vers un réel ℓ, alors

Démonstration 26

Résultats adaptables pour la décroissance et la stricte décroissance.

5.b Suites adjacentes

Définition :

Soient u et v deux suites réelles.

On dit qu'elles sont <u>adjacentes</u> si :

-
-
-

Exemple : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

Montrer que u et v sont adjacentes.

Démonstration 27

Théorème :

Soient u et v deux suites adjacentes.

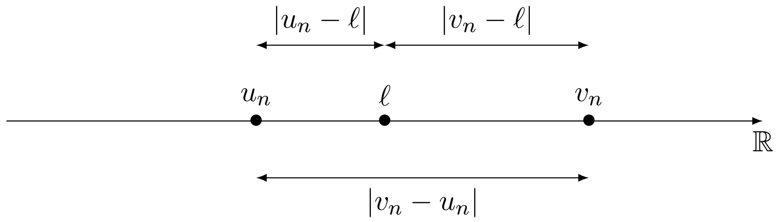
Alors

De plus, si u est la suite croissante et v la suite décroissante, en notant ℓ leur limite commune :

Démonstration 28

Si les monotonies de u et v sont strictes, les inégalités sont même strictes :

Remarque :
On sait qu'il y a une limite commune ℓ, mais trouver ℓ est un autre problème.
En informatique, les suites adjacentes peuvent servir de valeurs approchées de la limite commune ℓ.
L'avantage est qu'on a une majoration de l'erreur commise :



Exemple : Notons ℓ la limite commune des suites u et v de la démonstration 27.

6 Suites extraites

6.a Définition

Exemple introductif :

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \quad u_{10}$$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On appelle suite extraite de u toute suite de la forme

Exemples :

6.b Liens avec les limites et la convergence

Théorème :

On suppose que u a pour limite ℓ, avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors

Démonstration 29

Utilisation très importante : montrer qu'une suite diverge ou qu'elle n'a pas de limite

- Si on trouve une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui
  alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

  En effet :

- Si on trouve deux suites extraites qui
  alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

  En effet :

Exemples : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \quad v_n = (-1)^n n$

Démonstration 30

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration 31

6.c Conséquence : à propos des suites géométriques

Proposition :

Soit $q \in \mathbb{R}$. $\qquad (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$

Précisons les limites éventuelles :

$q \leq -1$	$q \in]-1, 1[$	$q = 1$	$q > 1$

Démonstration 32

7 Exemples d'études de suites récurrentes générales

Nous allons voir la méthode pour étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence :

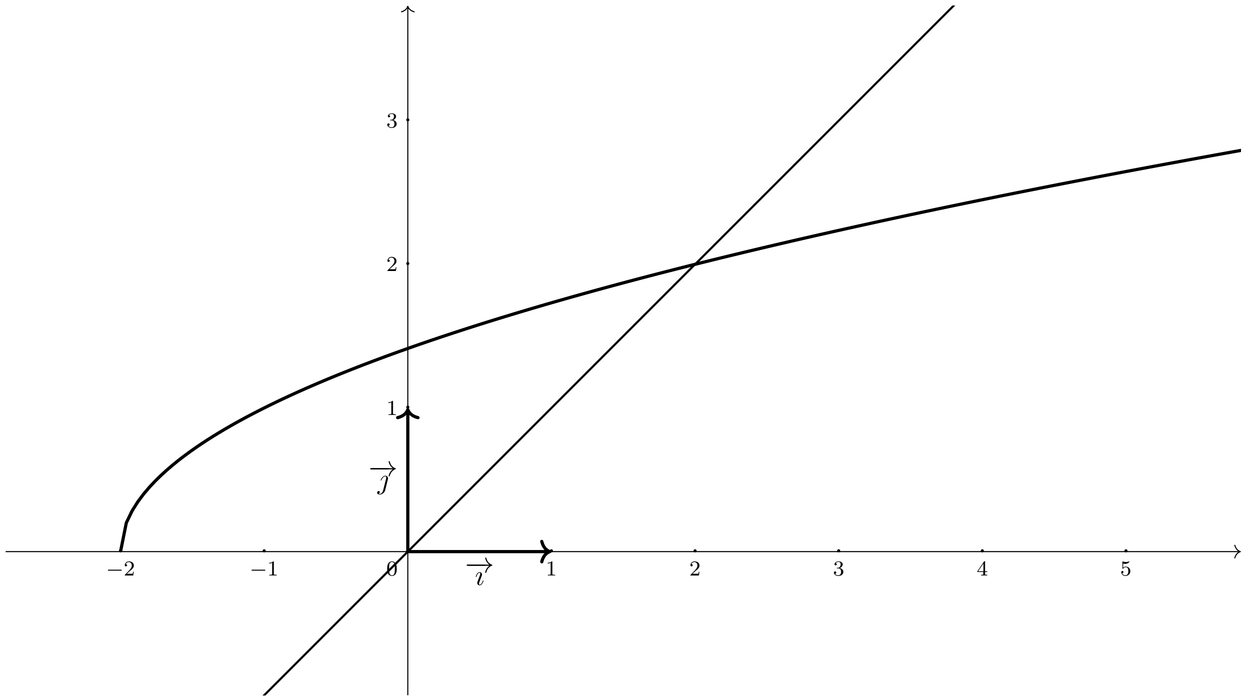
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)}$$

7.a Représentation graphique

On commencera toujours par tracer, au brouillon, l'allure du graphe de f, avec la droite d'équation $y = x$. Cela permet de placer de proche en proche les termes de la suite.

Prenons l'exemple d'une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \geq -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

Ici on a $f : \begin{array}{ccc} [-2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+2}. \end{array}$



7.b Limites éventuelles

Théorème :

> Soit u une suite telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie sur un intervalle.
> $\boxed{\text{Si}}$ u converge vers un réel $\boxed{\ell \text{ en lequel } f \text{ est continue}}$, alors

Démonstration 33

Sur l'exemple ci-dessus, on "voit" graphiquement qu'il n'y a qu'un seul point fixe, 2, pour f (un seul point d'intersection entre la courbe représentative de f et la première bissectrice). Autrement dit, si on arrive à prouver que la suite converge, c'est forcément vers 2 !
Il faudra donc d'abord montrer que la suite converge, ce qui se fait habituellement avec les théorèmes sur les suites monotones (toute suite croissante majorée converge...)

7.c Exemples

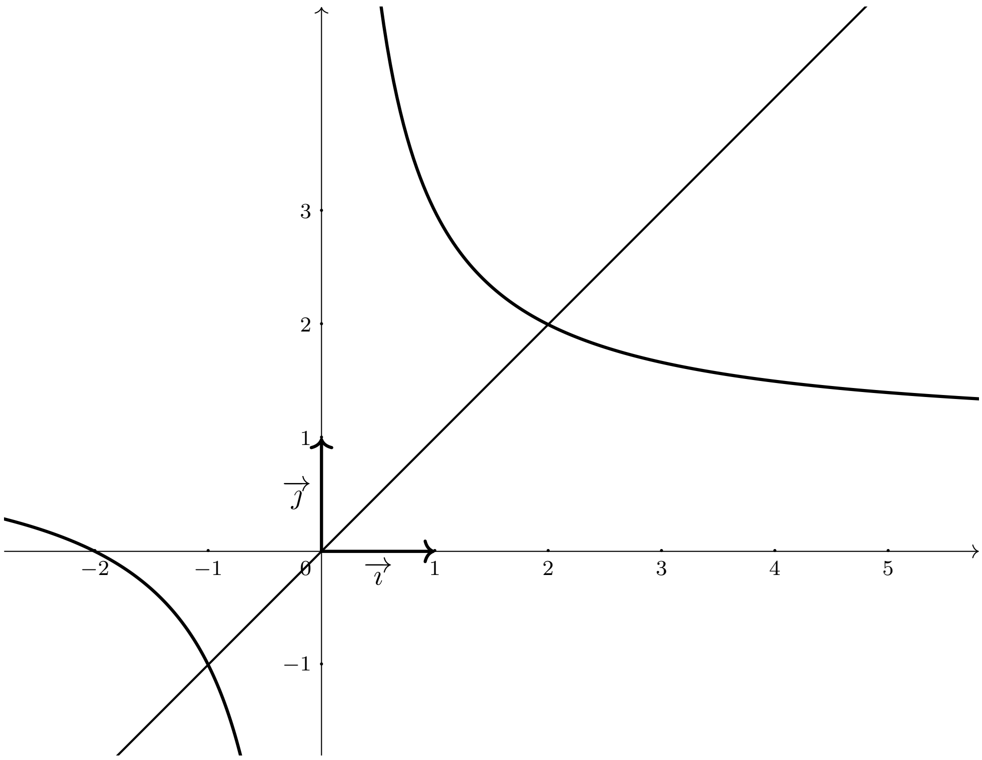
Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1) En notant $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$, étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[-2, +\infty[$.
   En déduire deux intervalles I_1 et I_2 stables par f, tels que $I_1 \cup I_2 = [-2, +\infty[$.
2) On suppose que $u_0 \in I_1$ (celui contenant les valeurs les plus petites).
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et appartient à I_1.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3) Reprendre la question précédente avec I_2.

Démonstration 34

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

Voici le graphe de $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x}$.



a) À l'aide d'un intervalle I stable par f, justifier que la suite est bien définie.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
Montrer que v et w sont des suites récurrentes simples associées à la fonction $g = f \circ f$:

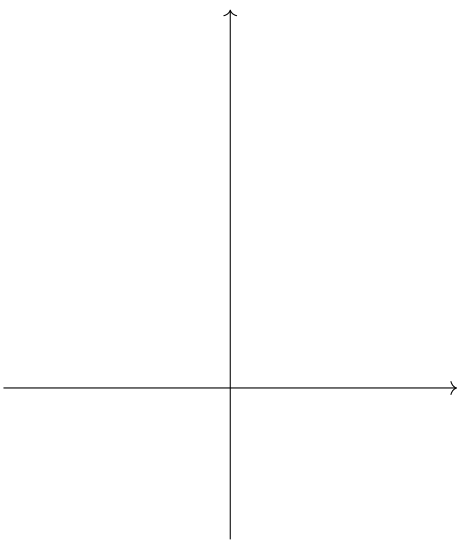
$$\forall\, n \in \mathbb{N},$$

c) Quelle est la monotonie de $g = f \circ f$ sur I ?

d) Montrer que v et w sont monotones de sens contraire.

e) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration 35



Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration 36

Idées à retenir pour prouver la monotonie de (u_n) :

- Utiliser le signe de $f(x) - x$. Cela marche si les termes de la suite sont dans un intervalle stable où le signe de $f(x) - x$ est toujours le même.
- Utiliser le fait que la fonction est croissante : selon que $u_0 \leq u_1$ ou $u_0 \geq u_1$, une récurrence montrera que (u_n) est croissante ou décroissante. C'est ce qu'on a fait dans l'exemple 2, mais avec la fonction g, croissante ; comme $v_0 < v_1$, la suite (v_n) était croissante ; comme $w_0 > w_1$, la suite (w_n) était décroissante.

8 Suites complexes

8.a Définitions

Une suite complexe est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Voici trois suites réelles définies à partir de u :

- la suite $\mathrm{Re}(u) = (\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathrm{Re}(u)$ est appelée partie réelle de u.
- la suite $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathrm{Im}(u)$ est appelée partie imaginaire de u.
- la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (module).

⚠ Les notions de majorant, de minorant, de monotonie ne sont pas définies pour une suite complexe.
Cependant :

Définition :

Soit u une suite complexe. On dit que u est bornée si :

$$\exists\, K \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K$$

8.b Convergence

Définition :

Soit $\ell \in \mathbb{C}$. Soit u une suite complexe. On dit que u converge vers ℓ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Cela revient à dire que la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Remarques :

- En particulier, dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est équivalent à dire que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Il y a encore unicité de la limite. On note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Si une suite complexe ne converge pas alors on dit qu'elle diverge.
- ⚠ Pour une suite complexe non réelle, il n'y a pas de définition possible pour des limites $\pm\infty$.

Proposition :

Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Démonstration 37

Exemples :

1) Etudier la convergence de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n} + \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) i$.
2) Etudier la convergence de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + ni$.
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$. Montrer que u converge vers 0.

Démonstration 38

Proposition :

Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Démonstration 39

Corollaire :

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration 40

La réciproque est bien sûr encore fausse.

Proposition :

Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\boxed{|q| < 1 \text{ ou } q = 1}$.
Dans le cas $|q| < 1$, la limite est 0 ; dans le cas $q = 1$, la limite est 1.

Démonstration 41

Proposition :

Soient u et v deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors λu converge vers $\lambda\ell$; $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$; uv converge vers $\ell\ell'$;
et si, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

Remarque :
On peut aussi définir la notion de suite extraite et les résultats concernant les suites extraites réelles restent valables dans le domaine complexe.

Plan du cours