
TD 20. Esperance, Variance.

Exercice 1. Un enseignant pose une question à ses n élèves. Il y a 2 élèves qui savent la réponse, mais l'enseignant ne sait pas lesquels ; les $n - 2$ autres ne savent pas la réponse. L'enseignant interroge ses élèves un à un, au hasard.

On note X la variable aléatoire égale au rang du premier élève capable de donner la bonne réponse.

1) Déterminer la loi de X , son espérance.

2) On note Y la variable aléatoire égale au rang du second élève capable de donner la bonne réponse.

Par une considération de symétrie, montrer que $n + 1 - Y$ a même loi que X . En déduire $E(Y)$.

Exercice 2. Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par α avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou par β avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. On fixe n dans \mathbb{N}^* . On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n .

Déterminer l'espérance et la variance de S .

Indication : on pensera à introduire une autre variable qui suit une loi usuelle.

Exercice 3. Soient X_1, \dots, X_m des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

1°) Calculer, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

2°) On suppose désormais que $m = 2$.

On a donc $Y = \max(X_1, X_2)$, et on pose également $Z = \min(X_1, X_2)$.

a) Calculer $E(Y)$.

b) Presque sans calculs, déterminer $E(Z)$.

c) Presque sans calculs, déterminer $E(YZ)$.

d) Calculer $\text{cov}(Y, Z)$. Qu'en déduire ?

Exercice 4. 1) Montrer que si les entiers k, l et n vérifient $0 \leq l \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$

2) On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches et d'une pièce donnant pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$.

On tire n boules de l'urne avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Lorsqu'on obtient k boules blanches ($k \in \mathbb{N}$), on lance k fois la pièce et on note Y le nombre piles obtenus.

a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .

b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y .

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne numérotée k contient k boules, elles-mêmes numérotées de 1 à k .

On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule de cette urne.

On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

1) Déterminer l'espérance de Y .

2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p . On dispose pour cela de deux méthodes :

- **Méthode 1** : On analyse le sang de chacune des N personnes.
- **Méthode 2** : On regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

- 1°) Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
- 2°) Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n, p .
- 3°) Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000, n = 100, p = 0,01$.

Exercice 7. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 < n < 100$).

A l'aide de l'inégalité de Bienanymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 8. On reprend l'exercice 15 du TD 19. Calculer $\text{cov}(X, N)$. Commentaire ?