

TD 9. Introduction aux développements limités.

Exercice 1. « Nettoyer » les expressions suivantes :

$$1^\circ) u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$2^\circ) f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln x + x^2 + o(x^2) + 4 - 5x + o(x)$$

Exercice 2.

1°) Classer par ordre de négligeabilité (chaque suite doit être négligeable devant la suivante) :

$$n! ; n^{0,1} ; n^2 ; e^n ; (\ln n)^{12} ; \sqrt{n} \ln n ; 5^n$$

2°) Même exercice avec : $\frac{1}{n^2} ; \frac{1}{n} ; \frac{\ln n}{n^2} ; \frac{\ln n}{n} ; \frac{1}{n \ln n} ; \sqrt{\ln n} ; 2 ; (\ln 2)^n$

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{1}{1-x+2x^2}$. Déterminer : **1)** le $DL_1(0)$ de f ; **2)** le $DL_2(0)$ de f .

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 de f à l'ordre n demandé :

$$1^\circ) f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, \quad n = 2$$

$$5^\circ) f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right), \quad n = 4$$

$$2^\circ) f(x) = \frac{xe^{-x}}{2x + 1}, \quad n = 3$$

$$6^\circ) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad n = 2$$

$$3^\circ) f(x) = (\ln(1+x))^2, \quad n = 4$$

$$7^\circ) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}, \quad n = 2$$

$$4^\circ) f(x) = e^{\cos x}, \quad n = 2$$

Exercice 5. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n demandé, au point a demandé :

$$1^\circ) f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 3, \quad n = 2$$

$$2^\circ) f(x) = \sin(\pi \cos x), \quad a = \frac{\pi}{3}, \quad n = 2$$

Exercice 6. Calculer, si elle existe, la limite de la fonction f au point demandé :

$$1^\circ) f(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ en } +\infty$$

$$4^\circ) f(x) = \frac{\sin x - \sin(5x)}{\sin x + \sin(5x)} \text{ en } 0$$

$$2^\circ) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \text{ en } +\infty$$

$$5^\circ) f(x) = x \left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right) \text{ en } +\infty$$

$$3^\circ) f(x) = \frac{x \ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln x} \text{ en } 1$$

Exercice 7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Montrer qu'il existe des réels a, b que l'on déterminera tels que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 8. On pose, pour tout $x > 1$, $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$. Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera tels que : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a \ln(x) + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Donner une interprétation graphique.

Exercice 9. Montrer, dans chacun des cas suivants, que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$1^\circ) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$2^\circ) f(x) = (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$