Correction du devoir surveillé 5.

Exercice 1

1°) a) Prenons $x = y = 0$ dans l'égalité $(*)$:

$$\left[1 - f(0)^2\right] f(0) = 2f(0) \text{ i.e. } f(0)\left(1 + f(0)^2\right) = 0.$$

Comme f est à valeurs réelles, $1 + f(0)^2$ n'est pas nul, et $\boxed{f(0) = 0}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$; prenons $y = -x$ dans l'égalité $(*)$:

$$[1 - f(x)f(-x)]\, f(0) = f(x) + f(-x) \text{ i.e. } 0 = f(x) + f(-x).$$

On a donc $f(-x) = -f(x)$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2°) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre $y = x$ dans $(*)$. On a bien : $\boxed{(1 - f(x)^2)f(2x) = 2f(x)}$.

b) Supposons par exemple que f ait $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
Alors, par composition, $f(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1 - f^2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Par produit $f(2x)(1 - f(x)^2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Donc, d'après la question précédente, $2f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$: contradiction.
Le cas où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ est similaire.

Donc, $\boxed{f \text{ ne peut pas admettre de limite infinie en } +\infty.}$

c) Supposons que f admette une limite en $+\infty$ alors, par la question précédente, f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
Par opérations, $(1 - f(x)^2)f(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} (1 - \ell)^2\ell$ et $2f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ell$.
Ainsi, par unicité de la limite dans l'égalité de 2a :

$$(1 - \ell^2)\ell = 2\ell \text{ donc } \ell(1 + \ell^2) = 0$$

Puisque $1 + \ell^2 \neq 0$, il vient : $\boxed{\ell = 0}$.

3°) a) Par 1a, $f(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} \neq \varnothing}$.

b) Soit $x \in \mathcal{S}$. Posons, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}_m$: $mx \in \mathcal{S}$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $0.x = 0 \in \mathcal{S}$.
- Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_m$ soit vraie.
  Par $(*)$ appliquée avec x et mx : $(1 - f(x)f(mx))f(mx + x) = f(mx) + f(x)$.
  Puisque $x \in \mathcal{S}$ et aussi $mx \in \mathcal{S}$ par $\mathcal{P}_m$, on a : $f(x) = f(mx) = 0$.
  D'où, $f((m + 1)x) = 0$ ie $(m + 1)x \in \mathcal{S}$.
  Donc $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.
- Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N},\ mx \in \mathcal{S}}$.

c) Soit $x \in \mathcal{S}$. Appliquons la propriété $(*)$ à $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x}{2}$:

$$\left[1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or $x \in \mathcal{S}$ donc $f(x) = 0$, d'où $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$. Ainsi $\boxed{\dfrac{x}{2} \in \mathcal{S}.}$

4°) a) Supposons par l'absurde que f n'ait pas un signe constant strict sur $\mathbb{R}_+^*$:
$\exists(a,b) \in]0;+\infty[^2$, $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$.
Donc 0 est dans l'intervalle $[f(b), f(a)]$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1 donc est continue sur le segment de bornes a et b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$; donc $c \in \mathcal{S}$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$, contradiction du fait que $\mathcal{S} = \{0\}$.
Donc $\boxed{f \text{ a un signe constant strict sur l'intervalle }]0;+\infty[.}$

b) Soit x et y deux réels strictement positifs.
Appliquons la relation $(*)$ avec y et $-x$:

$$[1 - f(y)f(-x)]\, f(y-x) = f(y) + f(-x)$$
$$\text{i.e. } [1 + f(y)f(x)]\, f(y-x) = f(y) - f(x) \text{ puisque } f \text{ est impaire.}$$

Comme f garde un signe constant strict sur $]0,+\infty[$ et que x et y sont dans cet intervalle, on a $f(x)f(y) > 0$. Donc $1 + f(x)f(y) > 0$, ce qui implique que $\underline{f(y) - f(x) \text{ et } f(y-x)}$ $\underline{\text{ont même signe au sens strict}}$ ce qui signifie :

$$\begin{cases} f(y-x) > 0 \iff f(y) - f(x) > 0 \\ f(y-x) = 0 \iff f(y) - f(x) = 0 \end{cases}$$

c)
- Cas où $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tels que $x < y$. On a $y - x > 0$ donc $f(y-x) > 0$. Donc $f(y) - f(x) > 0$.
Ainsi, dans ce cas, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il nous reste à voir que si $x > 0$ alors $f(x) > f(0)$. Comme $f(0) = 0$, c'est évident.
Finalement, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.
- Cas où $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$: on montre de même que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

d)
- Cas où f strictement croissante sur $[0,+\infty[$:
Par le théorème de la limite monotone, f admet donc une limite finie ou infinie en $+\infty$.
Par la question 2c, on en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$. Donc 0 est un majorant de f par croissance de f.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors :
pour tout $x > 0$, $f(0) = 0 < f(x) \leq 0$. Exclu.
- Cas où f strictement décroissante sur $[0,+\infty[$:
Par le théorème de la limite monotone, f admet donc une limite finie ou infinie en $+\infty$.
Par la question 2c, on en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$. 0 est donc un minorant de f par décroissance de f.
Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors :
pour tout $x > 0$, $f(0) = 0 > f(x) \geq 0$. Exclu.
- Dans tous les cas, on arrive à une contradiction.
On en déduit que $\boxed{\mathcal{S} \neq \{0\}}$.

5°) a) On sait que $\mathcal{S} \neq \varnothing$ et, par la question précédente, $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Donc il existe un réel a_0 non nul qui est dans $\mathcal{S}$.
Si $a_0 > 0$, on prend $a = a_0$.
Si $a_0 < 0$, alors $-a_0 > 0$ et $f(-a_0) = -f(a_0)$ par imparité de f d'où $f(-a_0) = 0$. On prend alors $a = -a_0$.
Dans les deux cas, $\boxed{a > 0 \text{ et } a \in \mathcal{S}}$.

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{Q}_n$: $\dfrac{a}{2^n} \in \mathcal{S}$.
- $\mathcal{Q}_0$ est vraie puisque $\dfrac{a}{2^0} = a \in \mathcal{S}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}_n$ soit vraie.

  Appliquons la propriété de 3.c à $\dfrac{a}{2^n} \in \mathcal{S}$: $\dfrac{\frac{a}{2^n}}{2} = \dfrac{a}{2^{n+1}} \in \mathcal{S}$.
  Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a}{2^n} \in \mathcal{S}}$.

Appliquons maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la propriété de 3.b à $\dfrac{a}{2^n}$: on obtient bien :

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \frac{ma}{2^n} \in \mathcal{S}}.$$

c) - Par définition de la partie entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor \leq \frac{2^n x}{a} < \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor + 1$$

D'où

$$\frac{2^n x}{a} - 1 < \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor \leq \frac{2^n x}{a}.$$

Comme $\dfrac{a}{2^n} > 0$, on en déduit :

$$x - \frac{a}{2^n} < u_n \leq x.$$

Or $\dfrac{a}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ car $2 > 1$; par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } x}$.

- Appliquons le résultat de la question précédente avec $n \in \mathbb{N}$ et $m = \left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ (car $a > 0$ et $x \geq 0$). On obtient que $u_n \in \mathcal{S}$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0.$$

Or f est continue en x et (u_n) converge vers x donc $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$ donc, par unicité de la limite, on obtient : $f(x) = 0$.
Ainsi $\boxed{x \in \mathcal{S}}$.

6°) - On a montré que si f vérifie les hypothèses demandées, alors pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 0$. Comme f est impaire, on en tire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
- Réciproquement, la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie bien la relation $(*)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- On en conclut qu'<u>il y a une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie la relation $(*)$: c'est la fonction constante nulle.</u>

Exercice 2

1°) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x + o(x)}{x + o(x)} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$, donc $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.
Comme il s'agit d'une limite finie, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

2°) - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, car elle l'est sur $\mathbb{R}^*$ par quotient, et parce qu'on l'a prolongée par continuité en 0.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par quotient.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(x)\operatorname{sh}(x) - \sin(x)\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{(1+o(x))(x+o(x^2)) - (1+o(x))(x+o(x^2))}{(x+o(x))^2} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{(x+o(x^2)) - (x+o(x^2))}{(x+o(x))\,(x+o(x))} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{o(1)}{1+o(1)}
\end{aligned}$$

Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{0}{1} = 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on a donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Cela signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
L'information $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ se réécrit : $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$. Ainsi la fonction f' est continue en 0. Comme f est par ailleurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient, on peut conclure que $\boxed{f \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 3

Partie 1 : Étude de f et de sa réciproque

1°) ★ $\mathbb{R}$ est un intervalle

★ f est continue sur $\mathbb{R}$

★ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes

Donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ dans l'intervalle image $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) = x(x^2+1) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ donc $f'(x) \neq 0$.
On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \dfrac{1}{3g(y)^2+1}}$.

3°) g est dérivable en 0 donc g admet un $DL_1(0)$:

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0) + g'(0)x + o(x)$$

Comme $f(0) = 0$, il vient $g(0) = 0$. D'autre part, $g'(0) = \dfrac{1}{3g(0)^2+1}$. donc $g'(0) = 1$.

Ainsi, $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)}$.

4°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = x$ puisque $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)^3 + g(x) = x$ ie $g(x) = x - g(x)^3$.

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x\to 0}{=} x - (x + o(x))^3 \\ &\underset{x\to 0}{=} x - (x + o(x))(x + o(x))(x + o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - (x^3 + o(x^3)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + o(x^3)}$.
On recommence :

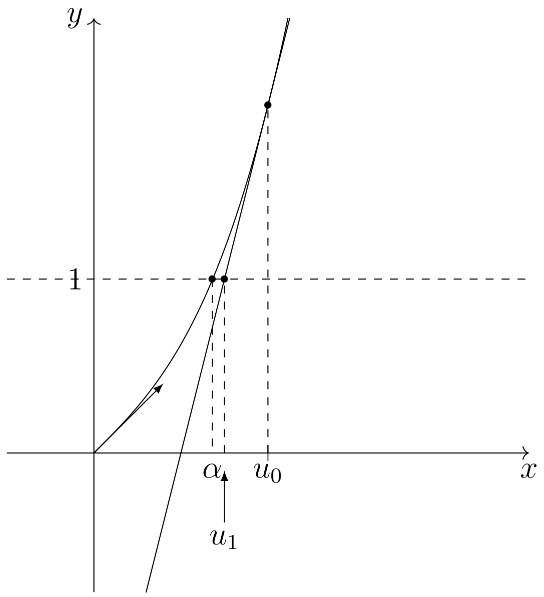
$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x\to 0}{=} x - g(x)^3 = x - (x - x^3 + o(x^3))^3 \\ &\underset{x\to 0}{=} x - (x - x^3 + o(x^3))(x - x^3 + o(x^3))(x - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - (x^3 + x^5(-1 - 1 - 1) + o(x^5)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + 3x^5 + o(x^5)}$

Partie 2 : Approximation de $g(1)$

5°) $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$. Or $f(\alpha) = 1$ donc $f(0) < f(\alpha) < f(1)$.
Comme f est croissante, il vient : $\boxed{0 < \alpha < 1}$.

6°) Tracé de la courbe de f, de u_0 et u_1 :



7°) Soit $n \in \mathbb{N}$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n a pour équation :

$$y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$$

u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = 1$

donc :

$$\begin{aligned}
1 &= f'(u_n)(u_{n+1}-u_n)+f(u_n) \\
f'(u_n)(u_{n+1}-u_n) &= 1-f(u_n) \\
u_{n+1}-u_n &= \frac{1-f(u_n)}{f'(u_n)} \qquad \text{car } f'(u_n)\neq 0 \\
u_{n+1} &= \frac{1-u_n^3-u_n}{3u_n^2+1}+u_n \\
u_{n+1} &= \frac{1-u_n^3-u_n+3u_n^3+u_n}{3u_n^2+1} \\
&\boxed{u_{n+1} = \frac{2u_n^3+1}{3u_n^2+1}}
\end{aligned}$$

Remarque : cette méthode de construction de la suite (u_n) s'appelle *méthode de Newton.*

8°)

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha)=\alpha &\iff \frac{2\alpha^3+1}{3\alpha^2+1}=\alpha \\
&\iff 2\alpha^3+1=3\alpha^3+\alpha \\
&\iff 1=\alpha^3+\alpha \\
&\iff 1=f(\alpha)
\end{aligned}$$

Or, on a bien $f(\alpha)=1$ donc $\boxed{\varphi(\alpha)=\alpha}$.

9°) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{6x^2(3x^2+1)-6x(2x^3+1)}{(3x^2+1)^2} \\
&= \frac{18x^4+6x^2-12x^4-6x}{(3x^2+1)^2} \\
&= \frac{6x^4+6x^2-6x}{(3x^2+1)^2} \\
\varphi'(x) &= \frac{6x(x^3+x-1)}{(3x^2+1)^2} \\
&\boxed{\varphi'(x) = \frac{6x(f(x)-1)}{(3x^2+1)^2}}
\end{aligned}$$

10°) Soit $x\in[\alpha,1]$ ie $\alpha\leq x\leq 1$.
On rappelle que : $\varphi'(x)=\dfrac{6x(f(x)-1)}{(3x^2+1)^2}$.
f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(\alpha)\leq f(x)$ ie $1\leq f(x)$.
Comme $x>0$ (puisque $\alpha>0$), on a : $\varphi'(x)\geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [\alpha,1]}$.

11°) Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose : $H_n : \alpha\leq u_n\leq 1$.

★ $u_0=1$ donc H_0 est vraie.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.
$\alpha\leq u_n\leq 1$ et φ est croissante sur $[\alpha,1]$ donc $\varphi(\alpha)\leq\varphi(u_n)\leq\varphi(1)$.
Or $\varphi(\alpha)=\alpha$, $\varphi(1)=\dfrac{3}{4}$, $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ donc $\alpha\leq u_{n+1}\leq 1$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n \leq 1}$.

12°) Soit $x \in [\alpha, 1]$, on sait déjà que $\varphi'(x) \geq 0$ par 10.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) \leq \frac{2}{3} &\iff \frac{6x(x^3+x-1)}{(3x^2+1)^2} \leq \frac{2}{3} \\
&\iff 18x(x^3+x-1) \leq 2(3x^2+1)^2 \qquad \text{car } (3x^2+1)^2 > 0 \text{ et } 3 > 0 \\
&\iff 18x^4 + 18x^2 - 18x \leq 2(9x^4+6x^2+1) \\
&\iff 6x^2 - 18x - 2 \leq 0 \\
&\iff 3x^2 - 9x - 1 \leq 0
\end{aligned}$$

Or, $3x^2 - 9x - 1 = 3x(x-3) - 1$. Comme $x \leq 1$, $3x^2 - 9x - 1 \leq 0$.

Ainsi, $\varphi'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

On a montré : $\boxed{\forall x \in [\alpha, 1],\ 0 \leq \varphi'(x) \leq \dfrac{2}{3}}$.

13°) φ est dérivable sur $[\alpha, 1]$ et, pour tout $x \in [\alpha, 1]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis : $\forall (x,y) \in [\alpha,1]^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \dfrac{2}{3}|x-y|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = u_n$ et $y = \alpha$. Alors x et y sont des éléments de $[\alpha, 1]$.

Donc, $|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$ ie $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|}$.

14°) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

★ H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$ donc, par H_n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|}$.

Or $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

Exercice 4

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$, on doit résoudre : $f(z) = -2 \iff z - z^2 = -2 \iff z^2 - z - 2 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 9 = 3^2$, donc ses racines, autrement dit $\boxed{\text{les antécédents de } -2, \text{ sont } \dfrac{1+3}{2} = 2 \text{ et } \dfrac{1-3}{2} = -1}$.

Comme il existe un élément de $\mathbb{C}$ avec plusieurs antécédents, on en tire que $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

2°) Soit z_1 et z_2 deux complexes distincts.

$$\begin{aligned}
f(z_1) = f(z_2) &\Longleftrightarrow z_1 - z_1^2 = z_2 - z_2^2 \\
&\Longleftrightarrow z_1 - z_2 - \left(z_1^2 - z_2^2\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (z_1 - z_2)\left(1 - (z_1 + z_2)\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow 1 - (z_1 + z_2) = 0 \qquad \text{car } z_1 - z_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(z_1) = f(z_2) \Longleftrightarrow z_1 + z_2 = 1}$$

La condition s'écrit : $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{1}{2}$. En notant M_1 le point d'affixe z_1, M_2 le point d'affixe z_2, et A le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$, cette condition revient à dire que $\boxed{A \text{ est le milieu du segment } [M_1M_2]}$.

3°) Soit $w \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = w \Longleftrightarrow -z^2 + z - w = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients complexes, donc elle admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.
L'équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(-w)(-1) = 1 - 4w$, donc $\Delta = 0 \Longleftrightarrow w = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a un seul élément de } \mathbb{C} \text{ qui admet un seul antécédent, c'est } \dfrac{1}{4}}$.

4°) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.
Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
On a $f(z) = (x+iy)(1-x-iy)$ donc $\mathrm{Im}(f(z)) = y(1-x) - xy = y - 2xy = y(1-2x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\Longleftrightarrow y(1-2x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\frac{1}{2} + iy / y \in \mathbb{R}\}}$. Géométriquement, il s'agit de la réunion de l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) et de la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

5°) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) &= \left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2} - e^{i\theta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right)\left(\frac{1}{2} - e^{i\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) = \frac{1}{4} - e^{i2\theta}}$$

b) Par définition, $\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} \;/\; \left|z - \dfrac{1}{2}\right| = 1\right\}$; mais comme les complexes de module 1 sont les nombres s'écrivant $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on peut obtenir une forme paramétrée :

$$\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} \;/\; \exists \theta \in \mathbb{R},\; z - \frac{1}{2} = e^{i\theta}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + e^{i\theta} \;/\; \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Cela permet d'affirmer que $f(\Gamma) = \left\{ f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

D'après la question a, on a donc $f(\Gamma) = \left\{ \frac{1}{4} - e^{i2\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{1}{4} + e^{i(\pi+2\theta)} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$;

et comme $\pi + 2\theta$ décrit $\mathbb{R}$ quand θ décrit $\mathbb{R}$, $f(\Gamma) = \left\{ \frac{1}{4} + e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme plus haut, on peut réécrire : $\boxed{f(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ \left| z - \frac{1}{4} \right| = 1 \right\}}$.

Il s'agit du $\boxed{\text{cercle } \Gamma' \text{ de centre } \frac{1}{4} \text{ et de rayon } 1}$.