Correction du devoir surveillé 1.

Exercice 1

1°) Notons (E) : $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \iff x \geq 1.$$
Donc le domaine de définition de (E) est $[1, +\infty[$.
- Soit $x \in [1, +\infty[$.
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff \sqrt{2x+5} = 1 + \sqrt{x-1} \\ &\iff 2x+5 = (1+\sqrt{x-1})^2 \qquad \text{car } \begin{cases} \sqrt{2x+5} \geq 0 \\ 1+\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ &\iff 2x+5 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1 \\ &\iff x+5 = 2\sqrt{x-1} \\ &\iff (x+5)^2 = (2\sqrt{x-1})^2 \qquad \text{car } \begin{cases} x+5 \geq 0 \text{ puisque } x \geq 1 \\ 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ &\iff x^2 + 10x + 25 = 4(x-1) \\ &\iff x^2 + 6x + 29 = 0 \end{aligned}$$
Le trinôme réel du second degré obtenu a pour discriminant $\Delta = 36 - 4 \times 29 < 0$, donc il n'a pas de racine réelle.
Donc $\boxed{(E) \text{ n'a pas de solution.}}$

2°) Notons (I) l'inéquation $e^{-x}(2e^{-x} - 1) \leq 3$.
(I) est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = e^{-x}$.
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (I) &\iff 2e^{-2x} - e^{-x} - 3 \leq 0 \\ &\iff 2X^2 - X - 3 \leq 0 \end{aligned}$$
Le discriminant du trinôme du second degré $2X^2 - X - 3$ est $\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 3 = 25 = 5^2$.
Les racines du trinôme sont donc : $\dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1-5}{4} = -1$.
Ainsi,
$$2X^2 - X - 3 \leq 0 \iff X \in \left[-1, \frac{3}{2}\right] \qquad \text{car le coefficient de } X^2 \text{ est strictement positif}$$
d'où
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (I) &\iff -1 \leq e^{-x} \leq \frac{3}{2} \\ &\iff e^{-x} \leq \frac{3}{2} \qquad \text{car } e^{-x} > 0 \\ &\iff -x \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \qquad \text{car ln est strictement croissante} \\ &\iff x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ est } \left[\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[}$.

Exercice 2

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_0(x) = x$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_0 \text{ est une demi-droite, incluse dans première bissectrice } i.e. \text{ la droite d'équation } y = x}$.

2°) Pour $x > 0$, $\dfrac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = \dfrac{x - k\sqrt{x}}{x} = 1 - \dfrac{k}{\sqrt{x}}$ donc, comme k est non nul :

$$\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

On en tire que $\boxed{f_k \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ et que $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ admet une tangente verticale en l'origine}}$.

3°) Soit $k \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = x\left(1 - \dfrac{k}{\sqrt{x}}\right)$ donc $\boxed{f_k(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

4°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$f_k(x) - f_{k'}(x) = x - k\sqrt{x} - (x - k'\sqrt{x}) = (k' - k)\sqrt{x} \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ est en-dessous de } \mathcal{C}_{k'}.}$

5°) a) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, $f_k'(x) = 1 - \dfrac{k}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f_k'(x) > 0 &\iff \sqrt{x} > \frac{k}{2} \\ &\iff x > \frac{k^2}{4} \quad \text{car } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \dfrac{k}{2} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et de même, $f_k'(x) = 0 \iff x = \dfrac{k^2}{4}$.

x	0		$\frac{k^2}{4}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	$\Vert$	-	0	$+$	
f_k	0	$\searrow$	$-\frac{k^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $\boxed{f_k \text{ admet un minimum atteint en } a_k = \frac{k^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} f_k(a_k) = f_k\left(\frac{k^2}{4}\right) &= \frac{k^2}{4} - k\sqrt{\frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{k^2}{4} - k\frac{k}{2} \quad \text{car } k \geq 0 \\ &= -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La valeur du minimum est } -\frac{k^2}{4}}$.

b) Pour tout $k > 0$, $A_k\left(\dfrac{k^2}{4}, -\dfrac{k^2}{4}\right)$.

On en déduit que $\boxed{\text{tous les points } A_k \text{ sont situés sur la droite d'équation } y = -x.}$

c) $\mathcal{C}_k$ passe bien par l'origine puisque $f_k(0) = 0$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f_k(x) = 0 &\iff x = k\sqrt{x} \\
&\iff x^2 = k^2 x \qquad \text{car } \begin{cases} x \geq 0 \\ k\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \\
&\iff x(x - k^2) = 0 \\
&\iff x = k^2 \qquad \text{car } x \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, en-dehors de l'origine, $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ rencontre l'axe des abscisses en un unique point } B_k}$.

Son abscisse est $\boxed{b_k = k^2 = 4a_k}$.

d) Soit $k > 0$. Comme $b_k > 0$, f_k est dérivable en b_k et la pente de la tangente à $\mathcal{C}_k$ en B_k est donnée par :

$$\begin{aligned}
f_k'(b_k) &= 1 - \frac{k}{2\sqrt{k^2}} \\
&= 1 - \frac{k}{2k} \qquad \text{car } k > 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la tangente à } \mathcal{C}_k \text{ en } B_k \text{ a une direction indépendante de } k}$ puisque cette pente est constante.

6°) a) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f_k'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}} > 0$ car $2\sqrt{x} \geq 0$ et $-k > 0$.

x	0	$+\infty$
f_k	0 $\nearrow$	$+\infty$

b) Soit $k < 0$.
La tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse $x > 0$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$ si et seulement si $f_k'(x) = 2$; on doit donc résoudre, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f_k'(x) = 2 &\iff \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}} = 2 \\
&\iff 2\sqrt{x} - k = 4\sqrt{x} \\
&\iff 2\sqrt{x} = -k \\
&\iff 4x = k^2 \qquad \text{car } \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ -k \geq 0 \end{cases} \\
&\iff x = \frac{k^2}{4}
\end{aligned}$$

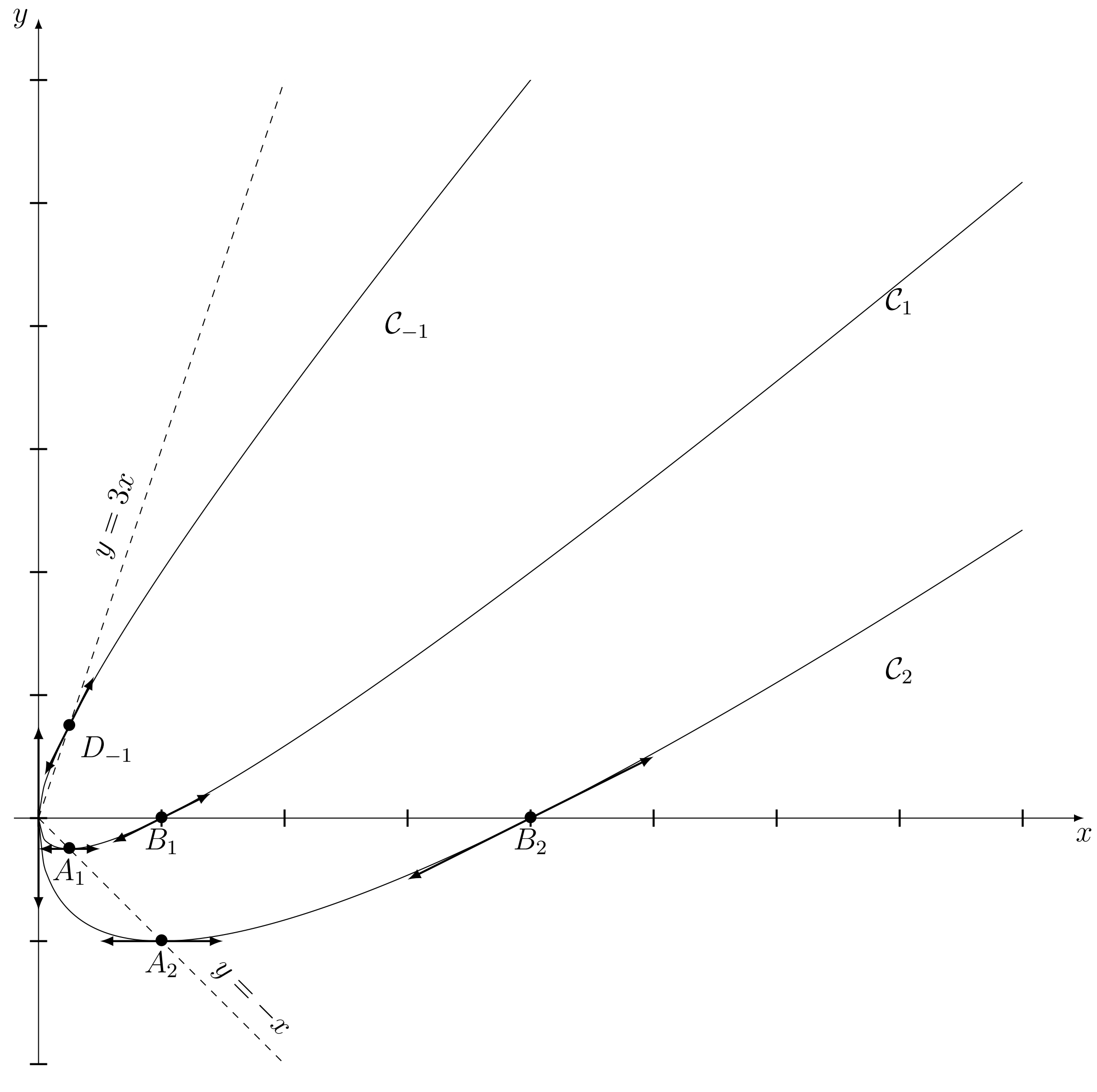
De plus,

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{k^2}{4}\right) &= \frac{k^2}{4} - k\sqrt{\frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} \quad \text{car } k \leq 0 \\ &= \frac{3k^2}{4} \end{aligned}$$

Le point $D_k\left(\frac{k^2}{4}, \frac{3k^2}{4}\right)$ est le seul point de $\mathcal{C}_k$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Les points D_k appartiennent à la droite d'équation $y = 3x$.

7°) Points et tangentes remarquables :
- Les trois courbes passent par l'origine et ont une tangente verticale en ce point.
- Pour $\mathcal{C}_{-1}$: $D_{-1}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ (tangente de pente 2), D_{-1} est sur la droite d'équation $y = 3x$.
- Pour $\mathcal{C}_1$: $A_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ (tangente horizontale) et $B_1(1, 0)$ (tangente de pente $\frac{1}{2}$).
- pour $\mathcal{C}_2$: $A_2(1, -1)$ (tangente horizontale) et $B_2(4, 0)$ (tangente de pente $\frac{1}{2}$).
- A_1 et A_2 sont sur la droite d'équation $y = -x$.

La courbe $\mathcal{C}_{-1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$ qui est elle-même au dessus de $\mathcal{C}_2$.



Exercice 3

1°) a) $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme différence, produit et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}}$$

b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[}$.
De plus, pour tout $x > 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x^2(1+x)^2}\left(-(1+x)^2 + x(1+x) - x^2\right) \\ &= \frac{-1-2x-x^2+x+x^2-x^2}{x^2(1+x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f''(x) = -\frac{x^2+x+1}{x^2(1+x)^2}}$$

Donc, f'' est de la forme demandée pour $\boxed{a = b = c = 1}$.

c) Soit $x > 0$. Alors $x^2 + x + 1 > 0$. Ainsi, $f''(x) < 0$.
Donc, $\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

d) Pour tout $x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x+1}$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{u\to 0} \ln(1+u) = 0$ donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.
Finalement, par somme, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$.

e) f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ donc, pour tout $x > 0, f'(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Justifions les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

★ Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln x - x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln x - x\ln(x+1) + x\ln x$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées.

Donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

★ Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = 1$.

Finalement, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

f)

$$\begin{aligned} f(2) &= \ln 2 - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 \\ &= 3\ln 2 - 2\ln 3 \\ &= \ln 8 - \ln 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(3) &= \ln 3 - 3\ln\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \ln 3 - 3\ln 4 + 3\ln 3 \\ &= 4\ln 3 - 3\ln 4 \\ &= \ln 81 - \ln 64 \end{aligned}$$

Comme ln est strictement croissante, il vient : $\boxed{f(2) < 0 < f(3)}$.

2°) a) ★ $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle

★ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

★ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans }]\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}.}$

$\boxed{g \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+^*, \text{ elle est continue, strictement croissante.}}$

b) $f(2) < 0 < f(3)$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $g(f(2)) < g(0) < g(f(3))$.

Or $g = f^{-1}$ donc $\boxed{2 < g(0) < 3}$.

3°) a) g est définie sur $\mathbb{R}$. Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$\boxed{\varphi = g \circ \ln \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

b) • Soit $x > 0$. $1 + \dfrac{1}{x} > 1$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$ d'où $\boxed{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \geq 0}$ puisque $x > 0$.

• Preuve de $\ln(1+t) \leq t$ pour $t \geq 0$: pour cela, on pose $a(t) = \ln(1+t) - t$ pour $t \geq 0$. Par somme et composition de fonctions dérivables, a est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geq 0$:

$$a'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} \leq 0$$

Donc a est décroissante. Comme $a(0) = 0$, on en tire que pour tout $t \geq 0$, $a(t) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+t) \leq t$.

• En appliquant avec $t = \dfrac{1}{x} > 0$, on obtient : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$.

Finalement, $\boxed{0 \leq x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq 1}$ puisque $x > 0$.

c) Soit $x > 0$. Il vient alors : $f(x) = \ln x - x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq \ln x$ car, par la question précédente $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$.

D'autre part, $f(ex) = \ln(ex) - ex\ln\left(1+\dfrac{1}{ex}\right) = 1 + \ln x - ex\ln\left(1+\dfrac{1}{ex}\right)$.

Comme $ex > 0$, on a donc : $ex\ln\left(1+\dfrac{1}{ex}\right) \leq 1$ par la question précédente.

Ainsi, $f(ex) = 1 + \ln x - ex\ln\left(1+\dfrac{1}{ex}\right) \geq \ln x$.

On a bien obtenu : $\boxed{f(x) \leq \ln x \leq f(ex)}$.

d) Soit $x > 0$.
$f(x) \leq \ln x \leq f(ex)$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, $g(f(x)) \leq \varphi(x) \leq g(f(ex))$.
Comme $g = f^{-1}$, il vient : $\boxed{x \leq \varphi(x) \leq ex}$.

4°) a) Soit $x > 0$. $f(x) = \ln x - x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln x - x\ln(x+1) + x\ln(x)$.

Donc $\boxed{f(x) = (x+1)\ln x - x\ln(x+1)}$.

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x^{x+1} > 10(x+1)^x &\iff \ln(x^{x+1}) > \ln(10(x+1)^x) \qquad \text{car ln est strictement croissante}\\
&\iff (x+1)\ln x > \ln 10 + x\ln(x+1)\\
&\iff f(x) > \ln 10\\
&\iff g(f(x)) > g(\ln 10) \qquad \text{car } g \text{ est strictement croissante}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x^{x+1} > 10(x+1)^x \iff x > \varphi(10)}$$

c) Soit n un entier tel que $n \geq 28$.
On a donc $n > 27,2$ i.e. $n > 10 \times 2,72$, donc $n > 10e$ puisque $2,72 > e$.
En utilisant la question 3d avec $x = 10$, on a $10e \geq \varphi(10)$ donc $n > \varphi(10)$.
Par la question précédente, $n^{n+1} > 10(n+1)^n$.
Notons k le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de $(n+1)^n$, et notons $a_1, \ldots, a_k$ les chiffres de cette écriture : $(n+1)^n$ s'écrit "$a_1a_2\ldots a_k$".
Alors $10(n+1)^n$ s'écrit nécessairement "$a_1a_2\ldots a_k0$", il possède un chiffre de plus dans son écriture en base 10.
Puisque $n^{n+1} > 10(n+1)^n$, $\boxed{\text{le nombre de chiffres de } n^{n+1} \text{ est}}$ au moins de $k+1$, c'est-à-dire $\boxed{\text{au moins un chiffre de plus que } (n+1)^n}$.

Exercice 4 equationloietoile.tex 2020

1°) Soit des réels a, b, c.

$$\begin{aligned}
(a*b)*c &= \ln(e^{a*b} + e^c)\\
&= \ln(e^{\ln(e^a+e^b)} + e^c)\\
&= \ln(e^a + e^b + e^c)
\end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= \ln(e^a + e^{b*c}) \\ &= \ln(e^a + e^{\ln(e^b+e^c)}) \\ &= \ln(e^a + e^b + e^c) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{(a * b) * c = a * (b * c)}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x * (x * x) = 0 &\iff \ln(3e^x) = 0 \qquad \text{en utilisant le calcul précédent} \\ &\iff \ln 3 + \ln(e^x) = 0 \\ &\iff x = -\ln 3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \{-\ln 3\}}$.

3°) Soit a et b deux réels fixés. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a = b * x &\iff a = \ln(e^b + e^x) \\ &\iff e^a = e^b + e^x \qquad \text{car exp est bijective} \\ &\iff e^x = e^a - e^b \end{aligned}$$

Distinguons des cas selon la valeur des paramètres a et b :

★ $\boxed{\text{Si } a \leq b}$ alors $e^a - e^b \leq 0$.
Donc, $\boxed{\text{l'équation n'a pas de solution}}$.

★ $\boxed{\text{Si } a > b}$ alors $a = b * x \iff x = \ln(e^a - e^b)$ car exp est bijective.
Donc, $\boxed{\text{il y a une unique solution, } \ln(e^a - e^b)}$.

4°) Soit des réels a, b, c.

$$\begin{aligned} (a + b) * (a + c) &= \ln(e^{a+b} + e^{a+c}) \\ &= \ln(e^a(e^b + e^c)) \\ &= \ln(e^a) + \ln(e^b + e^c) \end{aligned}$$

$$\boxed{(a + b) * (a + c) = a + (b * c)}$$