Chapitre 4. Complexes : fiche découverte.

Introduction

Pour résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c réels fixés et $a \neq 0$, on calcule le discriminant de l'équation $b^2 - 4ac$, noté Δ.

- Si $\Delta \geq 0$:
  Les solutions, éventuellement confondues, sont $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, autrement dit, $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ en posant $\delta = \sqrt{\Delta}$.
  Cependant, en posant $\delta = -\sqrt{\Delta}$, les solutions sont également les nombres $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$...

  Bref, les solutions sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, avec δ désignant n'importe quel nombre vérifiant $\delta^2 = \Delta$ (c'est ce qu'on appelle une racine carrée de Δ).

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle...

D'où l'idée d'introduire de nouveaux nombres dont le carré serait négatif, pour traiter le cas $\Delta < 0$.

On va montrer qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet toujours deux racines dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues).
Mieux : nous verrons plus tard dans l'année que tout polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$...

1 Présentation de i, de $\mathbb{C}$, de la forme algébrique

On admet l'existence d'un nombre noté i vérifiant :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

et $\mathbb{C}$ désigne alors l'ensemble des nombres de la forme :

$$\boxed{x + iy} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

On utilise souvent la lettre z pour désigner un nombre complexe, mais ce n'est pas une obligation.

Dans l'écriture ci-dessus, on peut prendre $y = 0$, donc tous les réels x sont dans $\mathbb{C}$: ainsi l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.

L'écriture d'un complexe z sous la forme $x + iy$ avec x et y réels s'appelle la forme algébrique de z, elle est unique ; le réel x s'appelle la partie réelle de z et le réel y s'appelle la partie imaginaire de z.

Somme et produit

Dans $\mathbb{C}$, on a une loi $+$ et une loi $\times$, avec les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$. Par exemple :

$$(2+3i)+(-1+4i)=1+7i$$

Pour le produit, c'est tout aussi facile, en faisant attention au fait que $i^2=-1$:

$$\begin{aligned}(2+3i)\times(-1+4i) &= 2\times(-1)\ +\ 2\times 4i\ +\ 3i\times(-1)\ +\ 3i\times 4i\\ &= -2+8i-3i+12i^2\\ &= -2+5i-12\\ &= -14+5i\end{aligned}$$

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°) $(2+6i)(5+i)$

2°) $(1+i)^2$

3°) $(1-2i)(1+2i)$

4°) $(2-3i)^3$

Inverse

De façon générale, pour x et y réels, $(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$.
Cela permet de calculer l'inverse de $x+iy$ sous forme algébrique, en multipliant au numérateur et au dénominateur par $x-iy$:

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\qquad \text{(c'est bien la forme algébrique : }\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\text{réel}}+i\,\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\text{réel}}\text{)}$$

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°) $\dfrac{1}{3-i}$

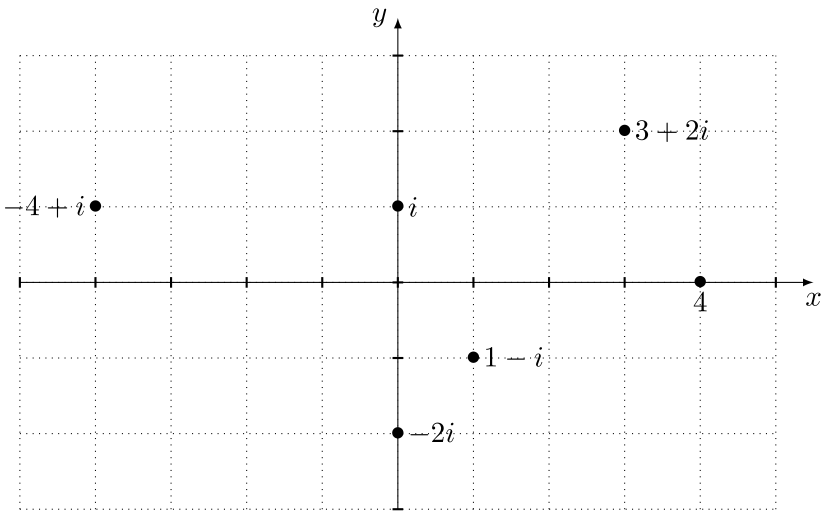
2°) $\dfrac{2-3i}{5+2i}$

3°) $\dfrac{1}{i}$

4°) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$

Interprétation géométrique

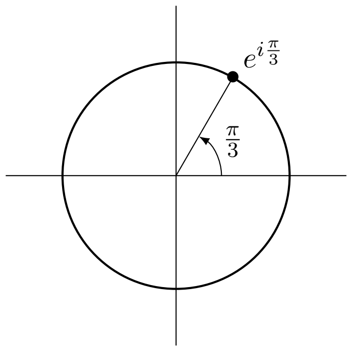
Tout complexe z s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z=x+iy$ avec x et y des réels, ce qui permet de lui associer le point M du plan de coordonnées (x,y).
Ainsi, $\boxed{\text{on peut même identifier l'ensemble } \mathbb{C} \text{ et le plan}}$.
Voici quelques exemples :



2 Présentation des nombres $e^{i\theta}$ et de la forme trigonométrique

Si on identifie encore les points du plan et les nombres complexes, on peut s'intéresser aux points du cercle trigonométrique : leurs coordonnées sont de la forme $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le complexe associé sera alors $\cos(\theta) \; + \; i\sin(\theta)$; de façon étrange au premier abord, on va noter ce nombre $e^{i\theta}$! !

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on note : } \; e^{i\theta} = \cos(\theta) \; + \; i\sin(\theta)}$$



Par exemple, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3. Compléter les égalités suivantes, et placer les nombres correspondants sur le cercle trigonométrique :

1°) $e^{i\frac{\pi}{4}} =$

2°) $e^{i\frac{\pi}{6}} =$

3°) $e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

4°) $e^{i\frac{\pi}{2}} =$

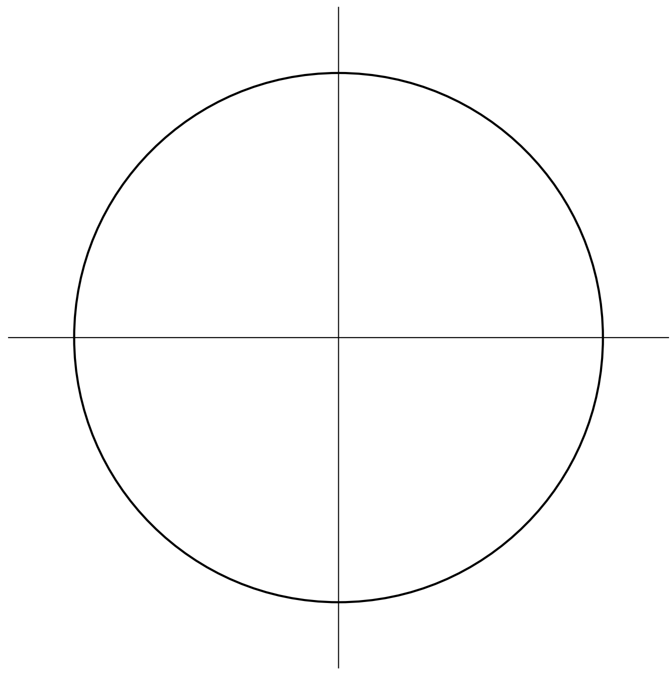
5°) $e^{i0} =$

6°) $\quad = -1$

7°) $\quad = -i$

8°) $\quad = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

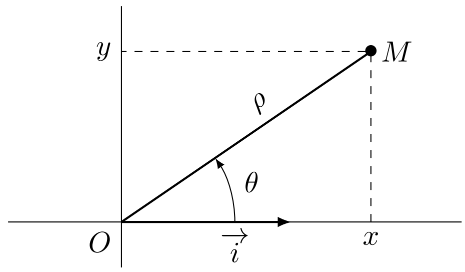
9°) $\quad = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$



Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Soit z un complexe non nul, il s'écrit sous forme algébrique $z = x + iy$, avec x et y réels, qui sont les coordonnées du point M associé.
La distance OM vaut donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et en notant θ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$



Donc $z = \rho\cos(\theta) \ + \ i\rho\sin(\theta)$

Ainsi le complexe non nul z peut s'écrire sous la forme dite trigonométrique :

$$\boxed{z = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.}$$

Par exemple, avec $z = 1 + i\sqrt{3}$, on a $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Méthode

Dans cet exemple, la valeur de ρ se trouvait "à vue" en essayant de faire apparaître un nombre $e^{i\theta}$ "connu". Mais on aurait pu procéder ainsi :

- On trouve la valeur de ρ grâce à la formule $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, avec x la partie réelle de z et y la partie imaginaire de z.
- Puis on met artificiellement ρ en facteur dans l'écriture algébrique de z, et on espère reconnaître $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec un angle θ remarquable.

Exercice 4. Déterminer la forme trigonométrique des complexes non nuls suivants :

1°) $4\sqrt{3} + 4i$

2°) $1 - i$

3°) $-\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$

4°) $2i$

5°) $-5i$

6°) 7

7°) -3