Devoir maison 8.

À rendre le lundi 23 février 2026

Exercice 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

On note alors E l'ensemble des matrices de cette forme :

$$E = \{M(a) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$$

On notera $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) *Calcul de $M(a)^n$*

- **a)** On pose $J = M(0)$.
  Calculer J^2, en déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **b)** Soit $a \in \mathbb{R}$.
  Exprimer $M(a)$ en fonction de I et de J, et en déduire $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on l'écrira explicitement avec ses quatre coefficients).

2°) *Diagonalisation de $M(a)$*
[2mm] On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
- **b)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $D(a) = P^{-1}M(a)P$.

3°) *Une application : étude d'une suite*
[2mm] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = M(n) \times M(n-1) \times \cdots \times M(1)$.

- **a)** Justifiez, à l'aide de la question 2b, que $P^{-1}A_nP = \begin{pmatrix} n! & 0 \\ 0 & (n+1)! \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  En déduire A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **b)** On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0, \quad \text{et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = (n-1)u_{n-1} - v_{n-1} \\ v_n = 2u_{n-1} + (n+2)v_{n-1} \end{cases}$$

  On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
  Traduire les relations de récurrence vérifiées par (u_n) et (v_n) par une égalité matricielle mettant en jeu une matrice $M(a)$ bien choisie.
  En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :

(i) f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha f(x) \leq f''(x)$.

1°) Étude de la monotonie de f

a) Justifier que f' possède une limite en $+\infty$ (finie ou infinie).

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in \left]\frac{x}{2}, x\right[$ tel que : $f'(c_x) = \dfrac{2}{x}\left(f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

d) Conclure que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Détermination de la limite de f en $+\infty$

a) Justifier que f admet nécessairement une limite finie en $+\infty$.
On notera ℓ cette limite.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\alpha\ell \leq f''(x)$.

c) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $f'(0) + \alpha\ell x \leq f'(x)$.

d) Montrer que $\ell = 0$.