Chapitre 3. Nouvelles fonctions usuelles.

1 Fonctions hyperboliques ch et sh

Définition :

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \qquad\qquad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) =$$

Ceci définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées aussi cosh et sinh.

Proposition :

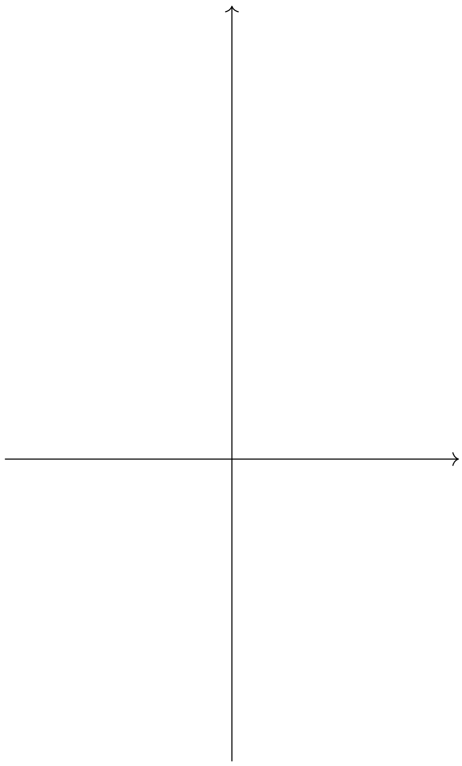
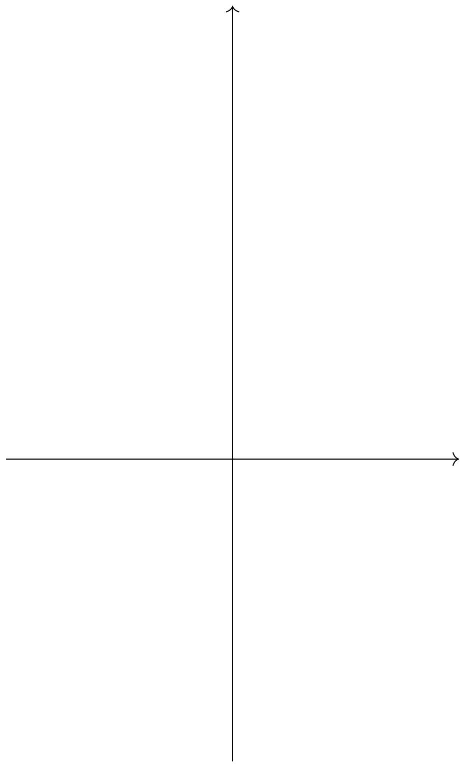
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) =$
- ch est , sh est
- $\forall\, x \in \mathbb{R},$.
- ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\mathrm{ch}' =$ $\mathrm{sh}' =$

Démonstration 1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$			
$\mathrm{sh}(x)$			

Retenir les informations et conséquences de ce tableau :

- Pour ch :
  - — Minimum, signe :
  - — Limites :
  - — Variations :
  - — Tangentes remarquables :
- Pour sh :
  - — Signe :
  - — Limites :
  - — Variations :
  - — Tangente remarquable :

2 Rappels et compléments : bijectivité et dérivabilité

Théorème : de la bijection

> Soit f une fonction à valeurs réelles,
> - définie sur un intervalle I
> - continue
> - strictement monotone
>
> Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
> De plus, la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f.

Rappel : $f(I) = \{f(x) \ / \ x \in I\}$, et on l'obtient à l'aide des valeurs ou limites de f aux bornes de I.
La phrase "f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$" signifie :

Méthode pour appliquer le théorème de la bijection (en apportant les justifications nécessaires !) :

- Dire que f est bien continue sur I et que I est un intervalle
- Dire que f est strictement monotone (souvent en passant par la dérivée)
- Dire "D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I)$".
- Si $f(I)$ n'est pas immédiat à déterminer, trouver les valeurs de f ou les limites de f aux bornes de I, ce qui permet de connaître $f(I)$.
- Ensuite, si on s'intéressait par exemple à l'équation $f(x) = 2$, il faut vérifier que $2 \in f(I)$, et en déduire : "il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = 2$".

Théorème : de la dérivée de la réciproque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Notons $J = f(I)$; d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J.

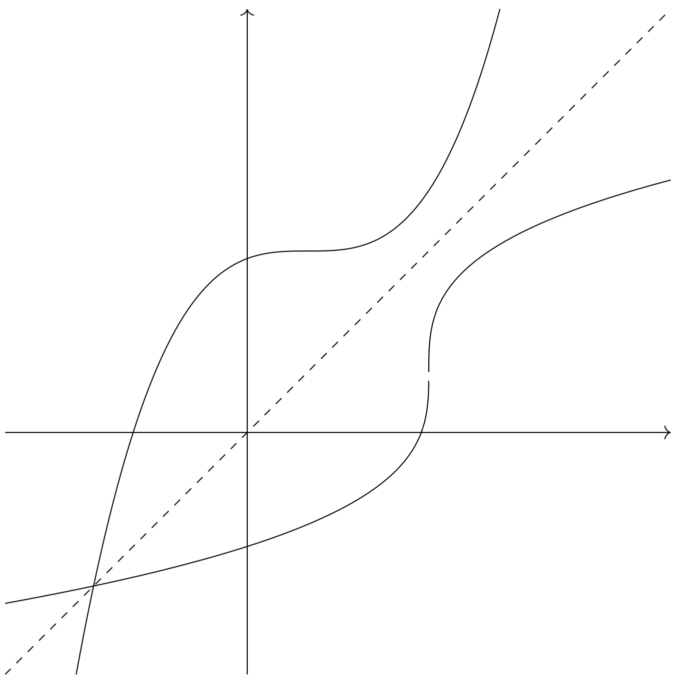
$\boxed{\text{Soit } y \in J}$. $\boxed{\text{On pose } x = f^{-1}(y)}$ (de sorte que $y = f(x)$).
On suppose f dérivable en x, alors :

$$\boxed{f^{-1} \text{ dérivable en } y \iff \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

et dans ce cas, on a $\left(f^{-1}\right)'(y) =$ i.e. $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \qquad\qquad .}$

En particulier, si f est dérivable sur I et que f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' =$

Interprétation graphique



- Si $f(x) = y$ et $f'(x) \neq 0$:

- Si $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = 0$:

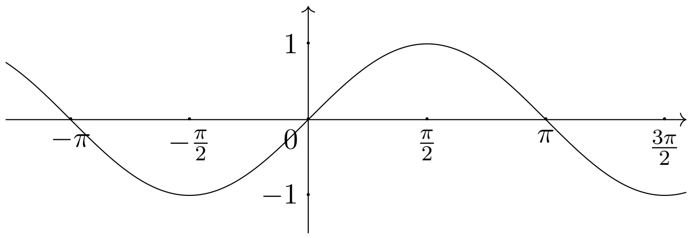
Premier exemple d'application : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

✎ **Démonstration 2**

3 Fonctions trigonométriques réciproques

3.a Arcsin

La fonction sinus n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $\begin{array}{rccc} f : & & \to & \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ réalise une bijection de

  (⚠ f n'est pas la fonction sinus).

  Sa réciproque f^{-1} est appelée arcsinus, et notée Arcsin.
- La fonction Arcsin est

Démonstration 3

- On a donc :

  $$\boxed{\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall y \in [-1,1], y = \sin x \iff}$$

  $\operatorname{Arcsin} y$ est l'angle x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est égal à y.

  Par exemple,

  $$\operatorname{Arcsin}(0) = \qquad \operatorname{Arcsin}(1) =$$

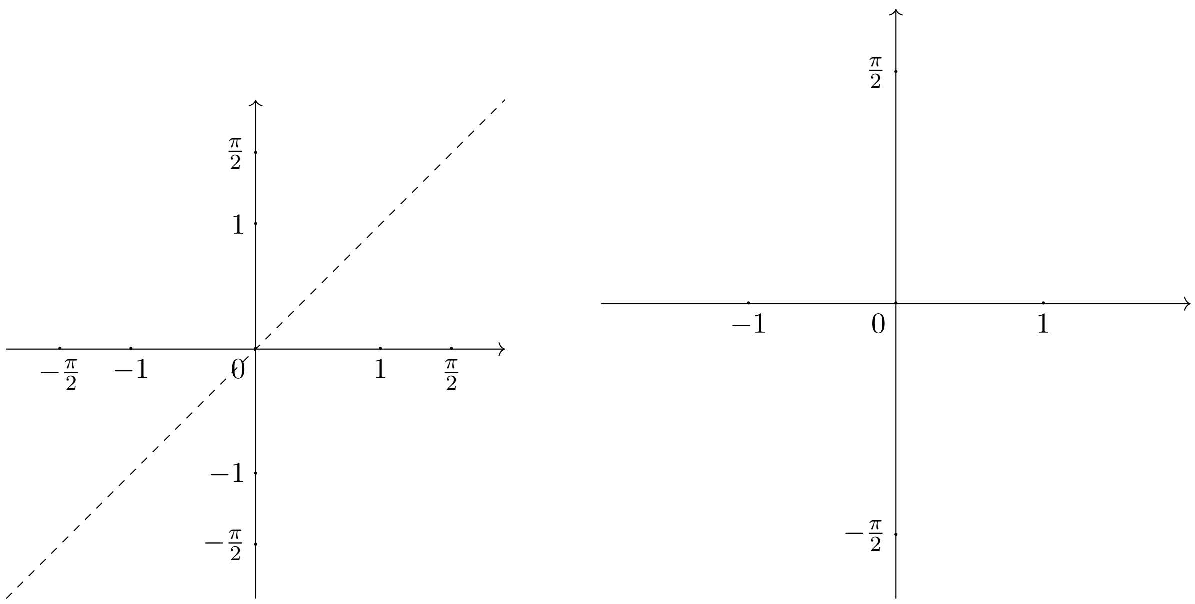
  $$\operatorname{Arcsin}(-1) = \qquad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

  $$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \qquad \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

- On a donc : $\forall\, y \in [-1,1],\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ c'est-à-dire :

  A-t-on $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x$ pour tout x ?

- La courbe de Arcsin s'obtient à partir de l'arc de courbe de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :



Proposition :

La fonction Arcsin est impaire.

Démonstration 4

Théorème :

Arcsin n'est dérivable que sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\mathrm{Arcsin}'(x) =$$

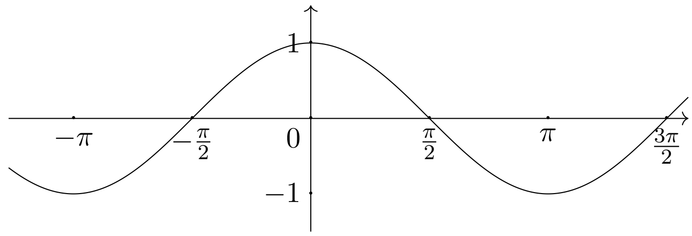
Démonstration 5

Au passage, lors de la démonstration, on a obtenu le résultat intéressant suivant :

$$\forall\, y \in [-1,1],\ \cos(\mathrm{Arcsin}(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

3.b Arccos

La fonction cosinus n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $\begin{array}{rccc} f : & & \to & \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ réalise une bijection de sur

  (⚠ f n'est pas la fonction cosinus).

  Sa réciproque f^{-1} est appelée arccosinus, et notée Arccos.
- La fonction Arccos est

Démonstration 6

- On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi]\,,\ \forall y \in [-1, 1], y = \cos x \iff \qquad\qquad}$$

  $\operatorname{Arccos} y$ est l'angle x de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à y.

  Par exemple,

$$\operatorname{Arccos}(0) = \qquad\qquad \operatorname{Arccos}(1) =$$

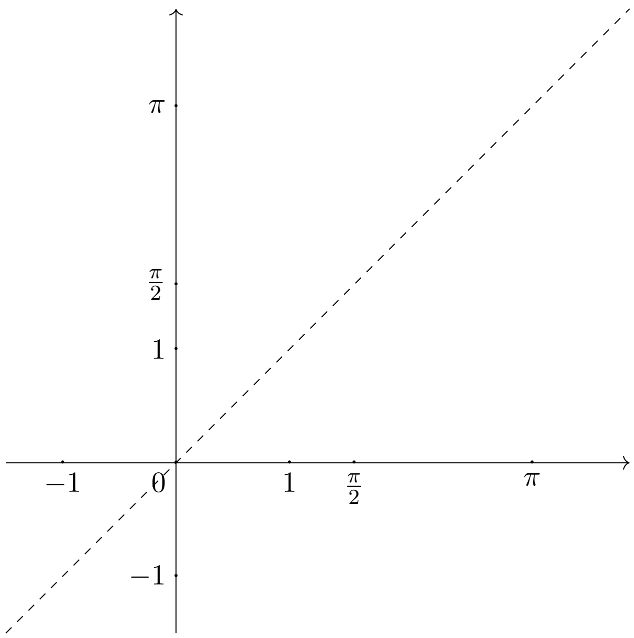
$$\operatorname{Arccos}(-1) = \qquad\qquad \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

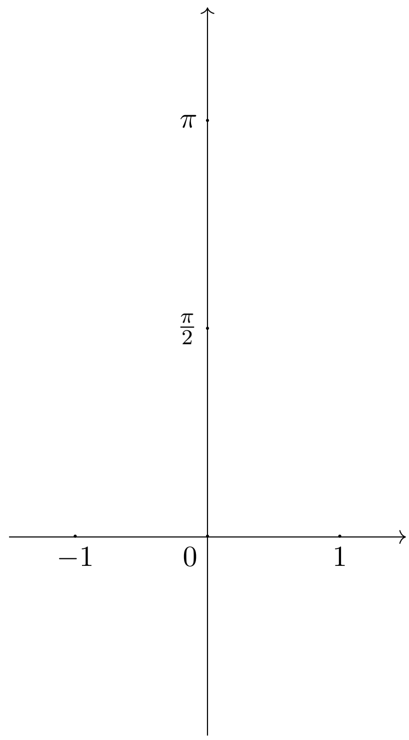
$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \qquad\qquad \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

- On a donc : $\forall\, y \in [-1, 1],\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ c'est-à-dire :

  A-t-on $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$ pour tout x ?

- La courbe de Arccos s'obtient à partir de l'arc de courbe de cos sur $[0, \pi]$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :





Théorème :

Arccos n'est dérivable que sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\text{Arccos}'(x) =$$

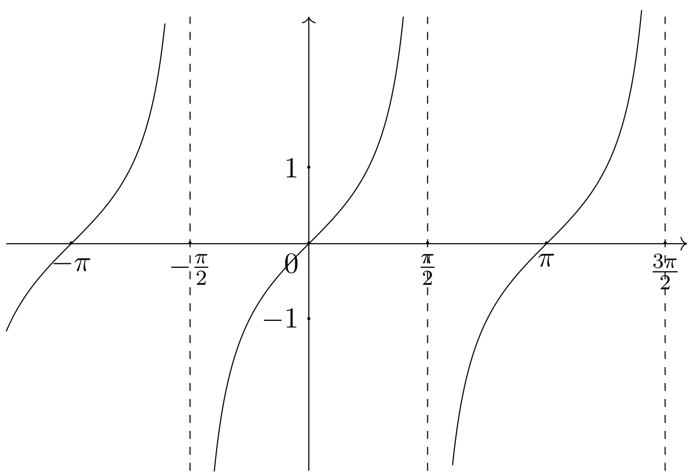
Démonstration 7

Au passage, lors de la démonstration, on a obtenu le résultat intéressant suivant :

$$\forall\, y \in [-1,1],\ \sin(\text{Arccos}(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

3.c Arctan

La fonction tangente n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $f: \begin{array}{ccc}]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ réalise une bijection de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

  (⚠ f n'est pas la fonction tangente).

  Sa réciproque f^{-1} est appelée arctangente, et notée Arctan.
- La fonction Arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et strictement croissante.
- On a $\lim\limits_{y \to -\infty} \operatorname{Arctan} y =$, et $\lim\limits_{y \to +\infty} \operatorname{Arctan} y =$

Démonstration 8

- On a donc : $\boxed{\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \forall y \in \mathbb{R}, y = \tan x \iff \qquad\qquad}$

  $\operatorname{Arctan} y$ est l'angle x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égal à y. Par exemple,

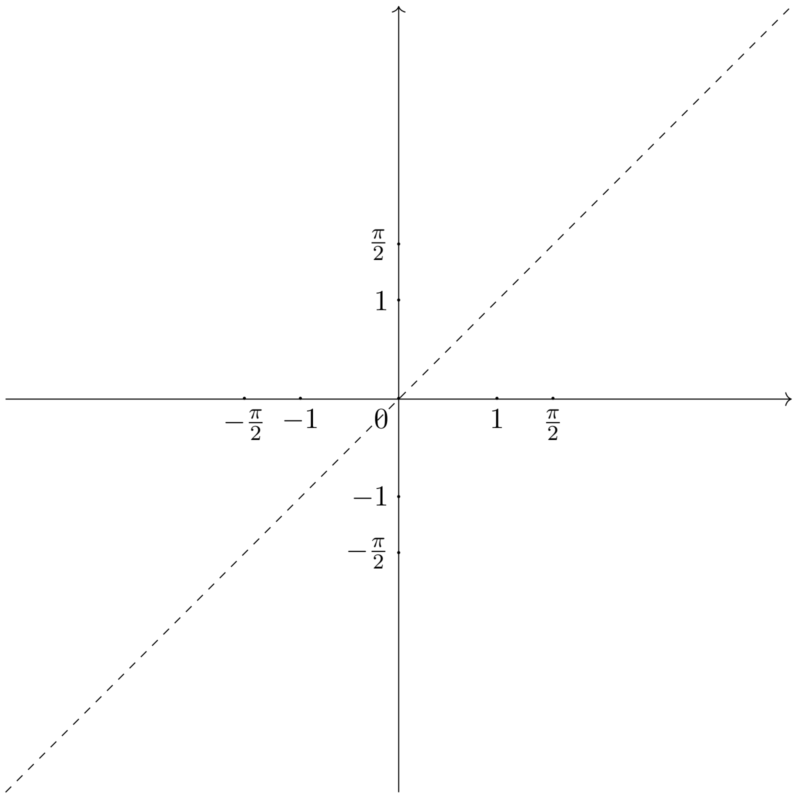
$$\operatorname{Arctan}(0) = \qquad\qquad \operatorname{Arctan}(1) =$$

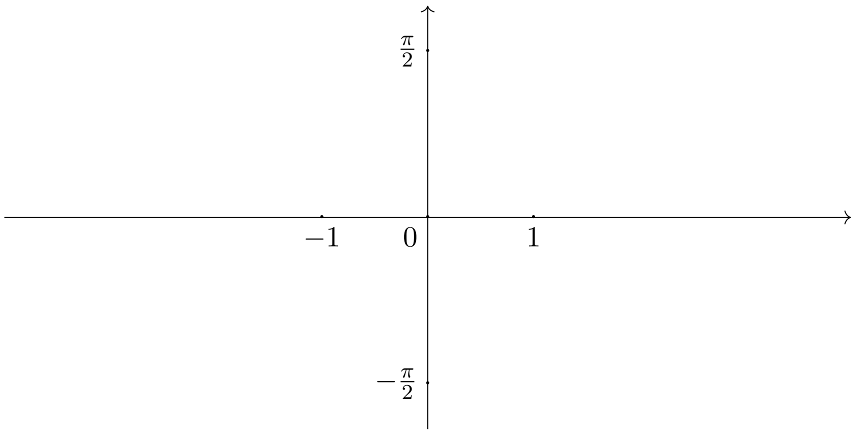
$$\operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \qquad\qquad \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{3}\right) =$$

- On a donc : :

  On n'a pas $\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour tout x mais :

- La courbe de Arctan s'obtient à partir de l'arc de courbe de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :





Proposition :

La fonction Arctan est

Théorème :

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Arctan}'(x) =$$

Démonstration 9

Proposition : Résultat très classique à savoir impérativement redémondrer

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} =$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} =$$

Démonstration 10

Plan du cours