TD 10. Ensembles et applications.

Exercice 1. Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Montrer :

$$(A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C) \Longrightarrow B \subset C.$$

Exercice 2. Soit E un ensemble, A et B des parties de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \subset B$
(ii) $\overline{B} \subset \overline{A}$
(iii) $B \cup \overline{A} = E$

Exercice 3. Déterminer les ensembles demandés (on ne demande pas de justifier) :

a) Pour $f = \cos$:

$$f(\mathbb{R}) \quad ; \quad f^{-1}(\mathbb{R}) \quad ; \quad f([0,2\pi[) \quad ; \quad f^{-1}(\{1\}) \quad ; \quad f^{-1}(]-1,2]) \quad ; \quad f^{-1}(f([0,\pi])) \quad ; \quad f^{-1}(\mathbb{Z})$$

b) Pour f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$:

$$f\left(]-1,0[\cup]0,1[\right) \; ; \; f^{-1}(]-2,2]) \; ; \; f^{-1}\left(]-\infty,0[\right)$$

Exercice 4. Discuter de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \quad ; \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x-3y \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \quad ; \quad f_4 : \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \to & [-1,1]^2 \\ x & \mapsto & (\cos x, \sin x) \end{array}$$

Exercice 5. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$

Discuter de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité des applications f, g, $f \circ g$, $g \circ f$.

Exercice 6. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$: $\operatorname{ch} x = y$.
Interpréter le résultat.

Exercice 7. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ sur un ensemble à déterminer, et expliciter la réciproque, que l'on notera f^{-1}.

b) *On identifiera les complexes avec les points du plan.*
Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Déterminer $f(P)$.
Indication : traduire la proposition "$y \in f(P)$" à l'aide de la fonction f^{-1}.

Exercice 8. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{2\overline{z}}{\overline{z}+i} \end{array}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ sur un ensemble à déterminer, et expliciter la réciproque, que l'on notera g^{-1}.

b) *On identifiera les complexes avec les points du plan.*
On note Γ le cercle de rayon 2 et de centre i.
Déterminer $g(\Gamma)$.

Exercice 9. On pose $f(x) = \ln\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter f^{-1}.

Exercice 10. Soient E, F, G et H des ensembles non vides, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
a) Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective et que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.
b) Application : soit $h : G \to H$. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont toutes trois bijectives.

Exercice 11. *Sans se servir de l'exercice précédent.*
Soient E, F et G des ensembles non vides, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 12. Soit E un ensemble. On note 1 la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{P}(E)$.

a) Montrer que pour toutes parties A, B de E,

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$$

b) On rappelle que pour toutes parties A, B de E, $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
Se servir des fonctions indicatrices pour montrer que, pour toutes parties A, B de E,

$$(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Cette partie de E dont on vient de donner deux "expressions" s'appelle la différence symétrique de A et de B, elle est notée $A\Delta B$. Sauriez-vous la représenter avec des "patates" ?