Devoir maison 6.

À rendre le lundi 5 janvier 2026

Exercice

On s'intéresse ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'équation

$$(E_n) : \quad e^{-\frac{x}{n}} = x$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
Pour l'étudier, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = x - e^{-\frac{x}{n}}$.

Remarque : on traitera bien sûr les questions 3 et 4 de façon indépendante.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

2°) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$.

3°) Montrer que (x_n) converge vers 1.

4°) **a)** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

b) En déduire que (x_n) est croissante.

c) Retrouver que (x_n) converge vers 1.

5°) Traduire le fait que (x_n) converge vers 1 à l'aide d'un o, puis déterminer un réel a tel que $x_n = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

6°) Montrer qu'il existe un réel b que l'on déterminera tel que :

$$x_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$