TD 8. Suites numériques.

Exercice 1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et de u_0, dans les cas suivants :

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + n + 1.$$

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{u_n}{n+2}.$$

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

On souhaite déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, par deux méthodes.

1) Méthode 1
   Montrer que la suite (u_n) est récurrente linéaire double.
   En déduire u_n puis v_n en fonction de n.
2) Méthode 2
   Que pouvez-vous dire de $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 3. Montrer qu'une suite convergente d'entiers est stationnaire.

Exercice 4. Les suites de termes généraux suivants admettent-elles une limite ? Si oui, la calculer :

$$\text{a) } u_n = \frac{\sin(an)}{n}\ (a \in \mathbb{R}) \quad \text{b) } u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \quad \text{c) } u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n} \quad \text{d) } u_n = \sqrt[n]{n^2}$$

Exercice 5. **1°)** Soit u une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.
On suppose que $\dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2°) Soit u une suite réelle, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.
On suppose u bornée ; montrer que si v tend vers 0, alors u tend vers 0.
Qu'en est-il si on ne suppose plus u bornée ?

Exercice 6. Montrer que les suites de termes généraux suivants admettent une limite et la calculer :

$$\text{a) } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{b) } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad \text{c) } u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+n} \quad \text{d) } u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \ (\text{où } x \in \mathbb{R} \text{ fixé})$$

Exercice 7. a) Montrer que : $\forall x \geq 0,\ \ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer (S_n) a une limite.

Exercice 9. **1°)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^2 + \ln(x) = n$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera u_n.

2°) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n - \dfrac{1}{2}\ln(n)} \leq u_n \leq \sqrt{n}$.

Exercice 10. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $[0, 1]$ par :
$P_n(x) = x^n - (1 - x)a$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

b) Déterminer le signe de $P_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.

c) Notons l la limite de la suite (u_n). Montrer par l'absurde que $l = 1$.

Exercice 11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.
Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 12. Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que sa limite l est irrationnelle (pour cela, on écrira $l = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et on obtiendra un encadrement de $(2n + 1)!\dfrac{p}{q}$ pour tout n).

Exercice 13. Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$ et $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$u_0 = a, \; v_0 = b, \quad \text{et} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et $0 < u_n \leq v_n$.

b) Montrer que $(u_n)_n$ est croissante, et que $(v_n)_n$ est décroissante.

c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

d) Montrer que les deux suites ont la même limite.

Exercice 14. (Vrai/Faux)
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n). Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.

1°) Une suite (u_n) ne tendant ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ est bornée.

2°) Soit (u_n) une suite de réels tels que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Alors, (u_n) converge.

3°) Si (u_n) a une limite non nulle, alors à partir d'un certain rang, u_n est non nul.

4°) Si $(|u_n|)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers ℓ ou $-\ell$.

5°) Si (u_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 15. (La série harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) (Une autre "série" plus simple)
Montrer que la suite de terme général $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.
Indication : on pourra utiliser que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^2 \geq k(k-1)$.

2) (Divergence de la série harmonique)

   On souhaite montrer par l'absurde que (S_n) diverge vers $+\infty$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$.

   b) On suppose que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que cela conduit à une absurdité.

   c) Conclure.

Exercice 16. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n \cos(n\pi/2)$. La suite u admet-elle une limite ?

Exercice 17. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 18. Déterminer si les suites suivantes admettent une limite, si oui la déterminer :

a) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ *Indications* : Justifier qu'il suffit de traiter le cas où $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

b) $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$ *Indications* : Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Faire un tracé. En déduire un découpage de $\mathbb{R}^+$ en trois intervalles stables par f.

c) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1-u_n)^2 \end{cases}$ *Indications* : justifier que que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire, et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 19. Soit (z_n) la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} z_0 = z_1 = 1 + i \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ z_{n+2} = z_{n+1} - z_n + \overline{z_{n+1} - 3z_n} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de z_n en fonction de n. La suite (z_n) converge-t-elle ?