

---

## TD 11. Limites et continuité.

---

**Exercice 1.** VRAI ou FAUX ?

- a) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $f$  croît au voisinage de  $+\infty$ .
- b) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  alors  $f \leq g$  au voisinage de  $a$ .
- c) Si  $f$  a une limite finie en  $a$  et si  $g$  n'a pas de limite en  $a$  alors  $f + g$  n'a pas de limite en  $a$ .
- d) Si  $f$  a une limite infinie en  $a$  et si  $g$  n'a pas de limite en  $a$  alors  $f + g$  n'a pas de limite en  $a$ .
- e) Si  $f$  et  $g$  ne sont pas continues en  $a$  alors  $f + g$  non plus.
- f) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement positive, alors  $\exists c > 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq c$ .
- g) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
- h) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- i) L'image d'un intervalle borné par une fonction continue est un intervalle borné.

**Exercice 2.** Calcul des limites suivantes :

<b>1°)</b> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$	<b>4°)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x + \cos x}$	<b>7°)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2 \right)$
<b>2°)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$	<b>5°)</b> $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$	<b>8°)</b> $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \tan(2x)$
<b>3°)</b> $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \sin \left( \frac{1}{x} \right)$	<b>6°)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\ln x)^2 e^{-x}$	<b>9°)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

**Exercice 3.** Montrer qu'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  périodique et non constante n'a pas de limite en  $+\infty$ .**Exercice 4.** Étudier la continuité en tout point de  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .

**Exercice 5.** On pose :  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ .

- a) Donner le domaine de définition et de continuité de  $f$ .
- b) Peut-on prolonger  $f$  par continuité ?

**Exercice 6.** Montrer que  $f : \left]0, \frac{\pi}{4}\right[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie et qu'elle est prolongeable par continuité en 0.

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue en 0, et telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2x) + f(x) = 0$ .

- a) Que vaut  $f(0)$  ?
- b) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_0) = (-1)^n f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ .
- c) En déduire que  $f$  est constante.

**Exercice 8.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

- a) Que vaut  $f(0)$  ? Montrer que  $f$  est impaire.
- b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
- c) Notons  $a = f(1)$ . Exprimer, pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x)$  en fonction de  $x$  et de  $a$ .
- d) En déduire  $f$ .

**Exercice 9.** Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant lequel il parcourt exactement 15 km.

Indication : introduire la fonction  $d : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui, à  $t \in [0; 1]$  (temps exprimé en heure), associe la distance  $d(t)$  parcourue (en km) entre l'instant 0 et l'instant  $t$ .

**Exercice 10.** Soit  $f$  une fonction de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , continue. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Montrer :  $\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = (1 - x_0)^n$ .
- Montrer l'unicité dans le cas où  $f$  est croissante.

**Exercice 11.** Déterminer les applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 - 2f(x) - 1 = 0$$

**Exercice 12.** Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ayant une limite finie en  $+\infty$ .

- Montrer que  $f$  est bornée.
- $f$  atteint-elle ses bornes ?

**Exercice 13.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\sin x)}{x} = 0$ .