Devoir maison 10.

Exercice 1

Partie 1

1°)

- $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ car $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$. Montrons que $x = 0_E$.
  On a : $(f+\mathrm{id}_E)(x) = 0_E$ et $(f^2+\mathrm{id}_E)(x) = 0_E$ donc $f(x)+x = 0_E$ et $f^2(x)+x = 0_E$.
  $f(x) = -x$ donc, en appliquant f, $f(f(x)) = f(-x) = -f(x)$ puisque f est linéaire. Cela se réécrit $f^2(x) = -f(x)$ et comme $f(x)+x = 0_E$, on en tire $f^2(x) = -(-x) = x$.
  Mais on a aussi $f^2(x) = -x$ par hypothèse, donc $-x = x$, donc $2x = 0_E$ donc $x = 0_E$.
  On a donc : $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E) \subset \{0_E\}$.
- Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E) = \{0_E\}}$.
  Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E) \text{ et } \operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E) \text{ sont en somme directe}}$.

2°) a) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{id}_E)(y) &= f(y)+y\\ &= f(f^2(x)+x)+f^2(x)+x\\ &= f^3(x)+f(x)+f^2(x)+x \qquad \text{par linéarité de } f\\ &= 0_E \qquad \text{par } (*)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{y \in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)}$.

$$\begin{aligned}(f^2+\mathrm{id}_E)(z) &= f^2(z)+z\\ &= f^2(x-f^2(x))+x-f^2(x)\\ &= f^2(x)-f^4(x)+x-f^2(x) \qquad \text{par linéarité de } f^2\\ &= x-f^4(x)\end{aligned}$$

Calculons f^4 :

$$\begin{aligned}f^3 &= -f^2-f-\mathrm{id}_E\\ f^3\circ f &= (-f^2-f-\mathrm{id}_E)\circ f\\ f^4 &= -f^3-f^2-f\\ f^4 &= \mathrm{id}_E \qquad \text{car } f^3+f^2+f = -\mathrm{id}_E\end{aligned}$$

On en déduit que : $(f^2+\mathrm{id}_E)(z) = 0_E$.
Ainsi, $\boxed{z \in \operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)}$.

b) Soit $x \in E$. On pose $y = f^2(x)+x$ et $z = x-f^2(x)$.
Alors, $x = \dfrac{1}{2}(y+z)$ donc $x = \dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z$.
Par la question précédente, $y \in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$.
Donc, $\dfrac{1}{2}y \in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)$ et $\dfrac{1}{2}z \in \operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ car un noyau est stable par combinaison linéaire (c'est un sous-espace vectoriel de E).
On a montré que tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$. Ainsi, $\boxed{E = \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_E)+\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)}$.

3°) On a démontré que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ et $E=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)+\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$.

Donc, $\boxed{E=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)}$.

Cela signifie que $\boxed{\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E) \text{ et } \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E) \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle

4°)
- $E\subset C^\infty(\mathbb{R})$.
- La fonction nulle appartient à E donc $E\neq\varnothing$
- Soit $(y_1,y_2)\in E^2,\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $\lambda y_1+y_2\in E$.
  Tout d'abord, λy_1+y_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
  De plus, en notant $y=\lambda y_1+y_2$,

$$\begin{aligned}
y^{(3)}+y''+y'+y &= (\lambda y_1+y_2)^{(3)}+(\lambda y_1+y_2)''+(\lambda y_1+y_2)'+\lambda y_1+y_2\\
&= \lambda y_1^{(3)}+y_2^{(3)}+\lambda y_1''+y_2''+\lambda y_1'+y_2'+\lambda y_1+y_2 \text{ par linéarité de la dérivation}\\
&= \lambda(y_1^{(3)}+y_1''+y_1'+y_1)+y_2^{(3)}+y_2''+y_2'+y_2\\
&= 0 \qquad \text{car } y_1\in E, y_2\in E
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\lambda y_1+y_2\in E$

On a montré que $\boxed{E \text{ est un sev de } C^\infty(\mathbb{R}) \text{ donc est un } \mathbb{R}\text{-ev}}$.

5°) Pour tout $(y,z)\in E^2$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda y+z)=(\lambda y+z)'=\lambda y'+z'=\lambda\varphi(y)+\varphi(z)$, donc φ est linéaire.

Soit $y\in E$. Montrons que $\varphi(y)\in E$.

On note $z=\varphi(y)$ i.e. $z=y'$.

On sait que $y^{(3)}+y''+y'+y=0$ donc, en dérivant (puisque les fonctions concernées sont toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
(y^{(3)}+y''+y'+y)'&=0\\
y^{(4)}+y^{(3)}+y''+y'&=0 \qquad \text{par linéarité de la dérivation}\\
z^{(3)}+z''+z'+z&=0
\end{aligned}$$

Donc, $z\in E$. Ainsi, $\varphi(y)\in E$.

On a montré que $\boxed{\varphi\in\mathcal{L}(E)}$.

6°) $\forall y\in E$,

$$\begin{aligned}
y^{(3)}+y''+y'+y&=0\\
\varphi^3(y)+\varphi^2(y)+\varphi(y)+\mathrm{id}_E(y)&=0\\
(\varphi^3+\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_E)(y)&=0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi^3+\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_E=0}$.

7°)
- Soit $y\in E$.

$$\begin{aligned}
y\in\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{id}_E) &\iff (\varphi+\mathrm{id}_E)(y)=0\\
&\iff \varphi(y)+y=0\\
&\iff y'+y=0
\end{aligned}$$

  On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène, définie sur $\mathbb{R}$.
  Une primitive de $x\mapsto 1$ est $x\mapsto x$ donc l'ensemble des solutions est $x\mapsto\lambda e^{-x}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.
  On note $Y_1 : x\mapsto e^{-x}$. Alors, $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{id}_E)=\mathrm{Vect}(\,Y_1\,)}$.

- Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E) &\iff (\varphi^2 + \mathrm{id}_E)(y) = 0 \\ &\iff \varphi^2(y) + y = 0 \\ &\iff y'' + y = 0 \end{aligned}$$

  On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, définie sur $\mathbb{R}$, à coefficients constants.
  L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0 \iff r = i$ ou $r = -i$.
  Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)}$.

8°) $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_E = 0$.
Donc, par la partie 1, $E = \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E)$.
On en déduit que, l'ensemble E est exactement l'ensemble de toutes les fonctions s'écrivant :

$$\boxed{x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta\cos(x) + \gamma\sin(x) \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3}$$

On peut aussi écrire E sous la forme : $\boxed{E = \operatorname{Vect}(Y_1, \cos, \sin)}$.

Remarque : Pour décrire l'ensemble E, on a en fait juste besoin du fait que $E = \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 2

1°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

★ Si Q est constant, on a bien sûr $Q(X+1) = Q(X)$.

★ Supposons maintenant que $Q(X+1) = Q(X)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que Q est un polynôme non constant. Alors il aurait une racine dans $\mathbb{C}$, notons-en une λ.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k : $\lambda + k$ est racine de Q.
- H_0 est vraie par hypothèse.
- Si H_k est vraie pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé, alors $Q(\lambda + k) = 0$; en évaluant l'égalité $Q(X+1) = Q(X)$ en $\lambda + k$, on obtient $Q(\lambda + k + 1) = 0$, donc H_{k+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda + k$ est racine de Q.

Cela fait une infinité de racines, donc $Q = 0$: contradiction avec l'hypothèse que Q était non constant.

Finalement, on a montré que $\boxed{Q(X+1) = Q(X) \text{ si et seulement si } Q \text{ est constant}}$.

2°) a) On pose, pour tout $k \in \{0, \dots, 2022\}$, H_k : $P(-k) = 0$.
- En évaluant l'égalité $(X+2023)P(X) = XP(X+1)$ en 0, on obtient $2023P(0) = 0P(1) = 0$, donc $P(0) = 0$: H_0 est vraie.
- Supposons H_k est vraie pour un $k \in \{0, \dots, 2021\}$ fixé.
  Évaluons l'égalité $(X+2023)P(X) = XP(X+1)$ en $-(k+1)$, on obtient :

$$(2023 - k - 1)P(-k-1) = -(k+1)P(-k) = 0 \quad \text{par HR}$$

  Or $k \leq 2021$ donc $k+1 \leq 2022$ et donc $2023-k-1 \neq 0$. Nécessairement, $P(-(k+1)) = 0$, donc donc H_{k+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \{0, \dots, 2022\},\ -k \text{ est racine de } P}$.

b) Comme il s'agit de racines deux à deux distinctes, il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\boxed{P(X) = Q(X)\prod_{k=0}^{2022}(X+k)}$.

3°) D'après la question 2, on peut chercher les solutions sous la forme $P(X)=Q(X)\displaystyle\prod_{k=0}^{2022}(X+k)$, où $Q\in\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (*) &\iff (X+2023)Q(X)\prod_{k=0}^{2022}(X+k)=XQ(X+1)\prod_{k=0}^{2022}(X+1+k)\\
&\iff Q(X)\prod_{k=0}^{2023}(X+k)=XQ(X+1)\prod_{j=1}^{2023}(X+j) \quad \text{(changement d'indice } j=k+1)\\
&\iff Q(X)\prod_{k=0}^{2023}(X+k)=Q(X+1)\prod_{j=0}^{2023}(X+j)\\
&\iff Q(X)\prod_{k=0}^{2023}(X+k)=Q(X+1)\prod_{k=0}^{2023}(X+k)\\
&\iff Q(X)=Q(X+1) \quad \text{car le polynôme } \prod_{k=0}^{2023}(X+k) \text{ n'est pas le polynôme nul}\\
&\iff Q \text{ constant} \quad \text{d'après la question 1}
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $R(X)=\displaystyle\prod_{k=0}^{2022}(X+k)$, l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$\boxed{\{\lambda R\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(R)}$$