Chapitre 14. Espaces vectoriels, applications linéaires.

Deuxième partie : applications linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, E, F, G, H désignent des $\mathbb{K}$-ev.

1 Applications linéaires

1.a Définitions et exemples

Définition :

Soit $f : E \to F$, où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que f est une application linéaire si

Remarques

- On peut aussi prendre comme définition :

- Bien repérer quelles sont les lois $+$ et $.$ en jeu :

Proposition :

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$$

Démonstration 17

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
- Si $F = E$ et que $f : E \to E$ est linéaire, on dit que f est un endomorphisme de E.
  Leur ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ est noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \to \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une forme linéaire sur E.

- Si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un isomorphisme de E dans F.
- Si $f : E \to E$ est linéaire et bijective, on dit que f est un automorphisme de E, autrement dit

  Leur ensemble est noté $GL(E)$

Exemples

1°)

2°)

3°) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit l'homothétie de rapport λ :

4°) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x - y \end{array}$

5°) $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y, 2x-y) \end{array}$$

6°) $$\varphi: \begin{array}{rcl} \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

7°) $$\psi: \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

8°) $$f: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$$

1.b Image, noyau

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On définit :

- Le noyau de f :

- L'image de f :

Avec les notations du chapitre "Ensembles et applications" :

$\text{Ker}(f) =$

$\text{Im}(f) =$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors, pour tout sev A de E, $f(A)$ est un sev de F, et pour tout sev B de F, $f^{-1}(B)$ est un sev de E.
En particulier, $\boxed{\text{Ker}(f) \text{ est un sev de } E}$ et $\boxed{\text{Im}(f) \text{ est un sev de } F}$.

Démonstration 18

Retenir les méthodes :

- Pour montrer que $x \in \text{Ker}(f)$:

- Pour déterminer $\text{Ker}(f)$:

- Pour montrer que $y \in \text{Im}(f)$:

- Pour déterminer $\text{Im}(f)$, il y a des méthodes plus variées.
  c.f. après l'exemple 4 pour une première méthode.

Exemples

1°) Pour $f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array}$ (application nulle) :

2°) Pour $\mathrm{id}_E: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$:

3°) Pour $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$:

4°) Pour $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y, 2x-y) \end{array}$:

Résultat général :

Proposition :

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille génératrice de E, alors $((f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration 19

5°) Pour $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

Théorème :

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

$$f \text{ injective } \iff$$
$$f \text{ surjective } \iff$$

Démonstration 20

Exemples :

- $$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

- $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y, 2x-y) \end{array}$$

1.c Équations linéaires

Une équation linéaire est une équation de la forme $\boxed{f(x) = b}$, où f est une application linéaire d'un ev E vers un ev F et $b \in F$, et où $x \in E$ est l'inconnue.
L'équation homogène associée est $f(x) = 0_F$.
Exemples :

- $x - y = 2$ est une équation linéaire car $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$ est linéaire.
- De manière générale, pour $a_1, \dots a_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ fixés, $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & a_1x_1 + \cdots + a_px_p \end{array}$ est une application linéaire, donc pour $b \in \mathbb{K}$ fixé, ceci est une équation linéaire :
$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$$
- De même, un système linéaire $(S) : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$
revient à une équation linéaire $f(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}^p$, avec $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ et
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ & x & \mapsto & (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p,\ \dots,\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p) \end{array}$$

- Une équation différentielle linéaire, par exemple pour l'ordre 1 :

$$(E)\ :\ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \qquad \text{avec } a, b, c \text{ continues d'un intervalle } I \text{ sur } \mathbb{K}$$

revient à une équation linéaire

Proposition :

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $f(x) = b$, $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $f(x) = 0_F$. Alors :

- $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(f)$; c'est donc un sev de E.
- Pour $\mathcal{S}$, il y a deux cas :
  - soit $\mathcal{S} = \emptyset$
  - soit $\mathcal{S} \neq \emptyset$, en prenant x_0 une solution particulière,

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_H, \quad \text{c'est-à-dire } \mathcal{S} = \{x_0 + x \ / \ x \in \mathcal{S}_H\}$$

Démonstration 21

2 Opérations sur les applications linéaires

2.a Addition et multiplication par un scalaire

Nous avons vu que pour n'importe quel ensemble Ω, $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est encore vrai en remplaçant $\mathbb{K}$ par un $\mathbb{K}$-ev, par exemple F. Prenons $\Omega = E$.
On a donc que $\mathcal{F}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Rappelons les lois + et . pour $f, g \in \mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \end{array} \qquad \qquad \lambda.f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \end{array}$$

Proposition :

Soient f et g des applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors

Démonstration 22

Corollaire :

En particulier : .

2.b Composition

Proposition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires.
Alors $g \circ f$ est une application linéaire (de E dans G).

Démonstration 23

Proposition :

- Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ des applications linéaires, soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

$$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1 (g_1 \circ f) + \lambda_2 (g_2 \circ f)$$

- Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires, soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g \circ f_1) + \lambda_2 (g \circ f_2)$$

Démonstration 24

Ces propriétés de distributivité vont en particulier servir lorsque $E = F = G$: toutes les applications sont alors dans $\mathcal{L}(E)$ (des endomorphismes de E).

$\boxed{\text{Pour } f \in \mathcal{L}(E)}$, on peut donc définir : $\begin{cases} f^0 = \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = \end{cases}$

Les calculs avec la composition et les puissances se font alors assez naturellement dans $\mathcal{L}(E)$ (comme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec le produit et les puissances) ; par exemple, pour n et $p \in \mathbb{N}$, $f^{n+p} = f^n \circ f^p = f^p \circ f^n$...

⚠ $\circ$ n'est pas commutative : en général, $f \circ g \neq g \circ f$
⚠ le rôle de l'unité (qui était I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est joué par id_E.

$$⚠ \quad \begin{aligned} (f+g)^2 &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Cependant :

Proposition :

(Formule du binôme de Newton) Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Si $\boxed{f \circ g = g \circ f}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n =$$

2.c Bijectivité, réciproque

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On sait que :
si f et g sont linéaires alors $g \circ f$ est linéaire ; si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.
D'où :

Proposition :

En particulier lorsque $E = F = G$:

Proposition :

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme.
Alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire ; c'est donc

Démonstration 25

En particulier lorsque $E = F$:

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) Supposons que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $f \in GL(E)$ et donner f^{-1}.
2) En remarquant que $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, déterminer des endomorphismes g et h tels que $g \circ h = h \circ g = f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E$.

Démonstration 26

2.d Intermède : les $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$, des noyaux très importants

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Comme $\lambda\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$, on sait que $f - \lambda\mathrm{id}_E$ est aussi un endomorphisme de E. Pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E) &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E) =$
En particulier :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) =$$
$$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) =$$

Comme un noyau est un sev, cela peut-être un moyen efficace de justifier qu'une partie de E est un sev de E.
Par exemple, l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de taille n est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car

3 Projections et symétries

3.a Projections

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $\boxed{F, G \text{ des sev supplémentaires dans } E}$: $E = F \oplus G$.
On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
On définit la projection sur F parallèlement à G comme

On parle aussi de projecteur.

Illustration :

⚠ Il faut savoir $F \oplus G = E$

⚠ Écrire $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & u \end{array}$ n'a de sens que si l'on explique bien ce que u désigne : pour chaque $x \in E$, c'est l'unique vecteur vérifiant $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Avec ces notations, la projection sur G parallèlement à F est : $q : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & v \end{array}$

On dit que p et q sont des projecteurs associés.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1))$.
Justifier que $F \oplus G = E$ et déterminer les projecteurs associés à cette décomposition.

✎ **Démonstration** 27

Remarque : Pour E quelconque, on a $E = E \oplus \{0_E\}$; les projecteurs associés sont alors

Proposition :

Avec les notations de la définition, et en notant p la projection sur F parallèlement à G :

a)

b)

c)

Démonstration 28

Quelques conséquences très importantes :

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors ...

- $\boxed{\forall\, x \in F, \quad p(x) = x}$ et $\boxed{\forall\, x \in G, \quad p(x) = 0}$
- $\mathrm{Im} p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$, puisque $F = \mathrm{Im} p$ et $G = \mathrm{Ker} p$
- La décomposition d'un vecteur x dans $E = F \oplus G$ est $\boxed{x = p(x) + x - p(x)}$

- Si la décomposition $E = F \oplus G$ ne revient pas à $E = E \oplus \{0_E\}$:

Théorème :

Soit $\boxed{p \in \mathcal{L}(E)}$ telle que $\boxed{p \circ p = p}$.

Alors p est un projecteur.

Plus précisément,

Démonstration 29

Retenir : Pour $p : E \to E$, $\iff$

3.b Symétries

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $\boxed{F, G \text{ des sev supplémentaires dans } E}$: $E = F \oplus G$.
On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
On définit la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme

Illustration :

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1))$.
La symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

Lien avec la projection p sur F parallèlement à G :

Proposition :

Avec les notations de la définition, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G :

a)
b)
c)

Démonstration 30

Quelques conséquences très importantes :
Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors ...

- $\boxed{\forall\, x \in F, \quad s(x) = x}$ et $\boxed{\forall\, x \in G, \quad s(x) = -x}$
- $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$
- s est bijective et $s^{-1} = s$

Théorème :

> Soit $\boxed{s \in \mathcal{L}(E)}$ telle que $\boxed{s \circ s = \mathrm{id}_E}$.
> Alors p est une symétrie.
> Plus précisément,

Démonstration 31

Retenir : Pour $s : E \to E$, $\qquad\qquad \Longleftrightarrow$

Plan du cours

1 Applications linéaires **1**

1.a Définitions et exemples 1

1.b Image, noyau 4

1.c Équations linéaires 6

2 Opérations sur les applications linéaires **7**

2.a Addition et multiplication par un scalaire 7

2.b Composition 8

2.c Bijectivité, réciproque 9

2.d Intermède : les $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$, des noyaux très importants 9

3 Projections et symétries **10**

3.a Projections 10

3.b Symétries 12