

## Chapitre 23. Géométrie plane : droites et cercles.

Dans la suite du cours, on se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathcal{P}$ .

### 1 Droites du plan

Soit  $A$  un point et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

On rappelle la définition de la droite passant par le point  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  : c'est  $A + \text{Vect}(\vec{u})$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme  $A + \lambda \vec{u}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire les points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ .

#### 1.a Représentations d'une droites

##### 1.a.i Paramétrage

Remarque préliminaire :

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles définies sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ , la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$

est l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points du plan dont les coordonnées peuvent se mettre sous la forme  $(f(t), g(t))$  avec un  $t \in I$ . Ainsi  $\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)) \mid t \in I\}$  et, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \exists t \in I, \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

On parle de paramétrage de la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Théorème :**

Les droites  $D$  du plan sont les ensembles admettant un paramétrage de la forme :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Un point de la droite  $D$  est alors  $A(x_0, y_0)$ , et un vecteur directeur est alors  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ .



**Démonstration 1**

Avec les notations ci-dessus et en notant  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$ , le paramétrage signifie exactement  $M = A + t\vec{u}$  en passant aux coordonnées !

C'est donc une simple traduction de la définition :  $D = A + \text{Vect}(\vec{u})$ .

Par exemple, la droite passant par le point  $(3, 2)$  et dirigée par  $(4, -1)$  a pour paramétrage :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



⚠ Il n'y a pas unicité du paramétrage d'une droite ! Ne serait-ce que parce qu'il y a une infinité de choix possibles pour le point  $(x_0, y_0)$  et le vecteur directeur  $(\alpha, \beta)$ .

Pire, il ne faut pas croire que tous les paramétrages d'une droite  $D$  sont nécessairement de cette forme.

Par exemple, voici un autre paramétrage de la droite précédente :  $\begin{cases} x = 11 - 3 \operatorname{sh} t - e^t + \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

⚠ Toujours bien préciser le paramètre.

Par exemple, si  $E : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in [0, 1]$

alors  $E$  n'est pas une droite, c'est

### 1.a.ii Équation cartésienne

**Théorème :**

Les droites du plan sont les ensembles admettant une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

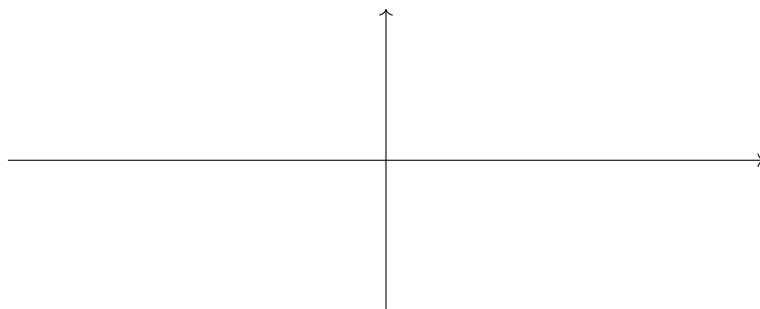
Un vecteur normal à la droite est alors  $\vec{n} = (a, b)$

Un vecteur directeur de la droite est alors  $\vec{u} = (-b, a)$




#### Démonstration 2

Représentons par exemple la droite d'équation  $x + 2y + 1 = 0$  :




**Remarque :** Si  $D$  et  $D'$  ont pour équations respectives  $ax + by + c = 0$  et  $ax + by + c' = 0$ , alors

 Se sortir de la tête que toute droite du plan a une équation de la forme  $y = mx + p$  : c'est faux!!  
Cela ne donne pas les droites verticales dont une équation est  $x = k$ .

Précisons : si  $D : ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors

- soit  $b \neq 0$  et une équation est
- soit  $b = 0$  et  $a \neq 0$ , une équation est

 Une équation cartésienne n'est pas unique ! Ne serait-ce que parce qu'on peut la multiplier par une constante non nulle, voire par une fonction qui ne s'annule jamais ; cela représentera toujours le même ensemble.

## 1.b Méthodes de base

### 1.b.i Obtenir un paramétrage d'une droite $D$

Il suffit, à l'aide de la partie précédente, de déterminer un point et un vecteur directeur de  $D$ .  
On peut aussi introduire artificiellement un paramètre bien choisi.

*Exemple : passage d'une équation cartésienne à un paramétrage*

Soit  $D : -x + 2y + 3 = 0$ . Déterminer un paramétrage de  $D$ .



**Démonstration 3**

### 1.b.ii Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Soit  $D$  la droite passant par  $A(x_0, y_0)$  et dirigée par  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$ .

Notre outil pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs :

$$M \in D \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

*Exemple :*

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A(3, 2)$  et dirigée par  $\vec{u} = (4, -1)$ .



**Démonstration 4**

Remarque : S'il s'agit du passage d'un paramétrage à une équation cartésienne, on peut aussi utiliser la méthode "élimination du paramètre" :

Soit  $D : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ . Déterminer une équation cartésienne de  $D$ .



**Démonstration 5**

Une variante : si on cherche une équation cartésienne d'une droite  $D$  donnée par deux points distincts, on se ramène à ce cas en prenant  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

### 1.b.iii Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal

Soit  $D$  la droite passant par  $A(x_0, y_0)$  et normale à  $\vec{n} = (a, b)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$ .

Notre outil pour exprimer l'orthogonalité de deux vecteurs :

$$M \in D \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

*Exemple :*

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A(3, 2)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = (-1, 2)$ .



**Démonstration 6**

## 1.c Lignes de niveau, régionnement du plan

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  des vecteurs non nuls et  $A$  un point du plan.

- Nous avons vu que l'ensemble des points  $M$  tels que  $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = 0$  est une droite  $D_0$ , celle dirigée par  $\vec{u}$  et qui passe par  $A$ .

Plus généralement, pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $D_k$  des points  $M$  tels que  $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = k$  est une droite également, qui sera parallèle à  $D_0$  i.e. dirigée par  $\vec{u}$ .

En faisant varier  $k$ , on obtient toutes les droites dirigées par  $\vec{u}$ .

(En effet, en développant  $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = k$ , les coefficients devant  $x$  et  $y$  seront les mêmes que dans l'équation de  $D_0$ ).

- De même, l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est une droite  $\Delta_0$ , celle normale à  $\vec{n}$  et qui passe par  $A$ .

Plus généralement, pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\Delta_k$  des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k$  est une droite également, qui sera parallèle à  $\Delta_0$  i.e. normale à  $\vec{n}$ .

En faisant varier  $k$ , on obtient toutes les droites normales à  $\vec{n}$ .

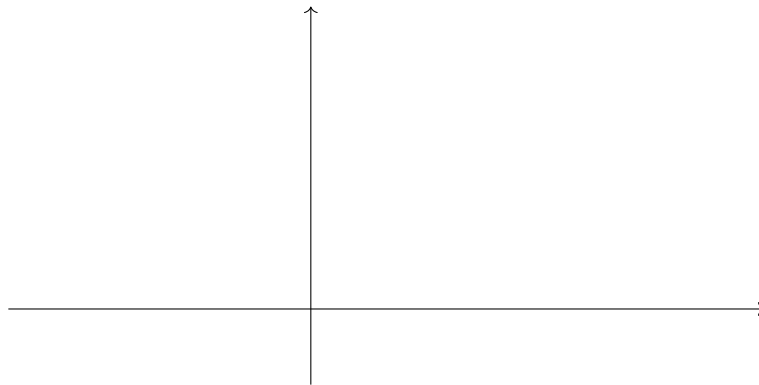
Fixons  $k \in \mathbb{R}^*$ , et notons  $H$  le point de la droite  $A + \text{Vect}(\vec{n})$  tel que  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = k$ .

Le point  $H$  se situe dans l'un des demi-plans délimités par la droite  $\Delta_0$  : celui qui contient le vecteur  $\vec{n}$  (tracé à partir de  $A$ ) si  $k > 0$ , ou bien l'autre si  $k < 0$  :

La condition  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k$  se réécrit  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$ , ce qui revient à dire que le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $A + \text{Vect}(\vec{n})$  est  $H$ . Le point  $M$  se situe alors dans le même demi-plan que  $H$  !

Ainsi, les deux demi-plans sont donnés par des inéquations :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$  et  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} < 0$ .

Traçons par exemple le demi-plan d'inéquation  $-x + 2y - 1 \geq 0$  :



## 1.d Exercice de base : détermination d'un projeté orthogonal

### Définition :

Soit  $D$  une droite et  $A$  un point extérieur à  $D$ .

La droite orthogonale à  $D$  et passant par  $A$  coupe  $D$  en un unique point, appelé projeté orthogonal de  $A$  sur  $D$ .

La longueur  $AH$  (c'est-à-dire  $||\overrightarrow{AH}||$ ) s'appelle alors la distance de  $A$  à  $D$ .

Soit  $D$  la droite d'équation  $x + 2y - 3 = 0$  et  $A$  le point de coordonnées  $(1, -2)$ .

Déterminer les coordonnées de  $H$  de deux façons. Quelle est la distance du point  $A$  à la droite  $D$  ?



### Démonstration 7

## 2 Cercles du plan

**Définition :**

On appelle cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$  l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \Omega M = R\}$$

### 2.a Équation cartésienne

Notons  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de  $\Omega$ . Soit  $M$  un point de  $\mathcal{P}$ , de coordonnées  $(x, y)$ .

$$M \in D \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Remarque : en développant, on obtient une équation de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

**⚠** Une équation de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  ne représente pas toujours un cercle. Cela peut aussi représenter

Pour le savoir, il faut faire apparaître des carrés à l'aide des termes en  $x^2$ ,  $x$ ,  $y^2$ ,  $y$  et de constantes.

*Exemple :* Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 - x + y^2 + 2y = 0$  :

### 2.b Paramétrage

Le cercle trigonométrique (i.e. le cercle de centre  $O$  et de rayon 1), a un paramétrage bien connu :

Plus généralement :

### Proposition :

Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(a, b)$  et de rayon  $R > 0$  admet pour paramétrage :



### Démonstration 8

## 2.c Problèmes d'intersection

Lorsque c'est possible, pour étudier l'intersection d'un cercle et d'une autre courbe, on injectera un paramétrage de la courbe dans une équation du cercle.

*Exemple :* Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega(1, 1)$  et de rayon 2, et  $D$  la droite passant par  $A(-2, 0)$  et dirigée par  $\vec{u} = (1, 1)$ . Déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $D$ .



### Démonstration 9

## 2.d Cercle de diamètre donné

### Proposition :

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $E$ .

L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est



### Démonstration 10

## Plan du cours

<b>1</b>	<b>Droites du plan</b>	<b>1</b>
1.a	Représentations d'une droites . . . . .	1
1.a.i	Paramétrage . . . . .	1
1.a.ii	Équation cartésienne . . . . .	2
1.b	Méthodes de base . . . . .	3
1.b.i	Obtenir un paramétrage d'une droite $D$ . . . . .	3
1.b.ii	Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur	3
1.b.iii	Obtenir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal .	4
1.c	Lignes de niveau, régionnement du plan . . . . .	4
1.d	Exercice de base : détermination d'un projeté orthogonal . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Cercles du plan</b>	<b>6</b>
2.a	Équation cartésienne . . . . .	6
2.b	Paramétrage . . . . .	6
2.c	Problèmes d'intersection . . . . .	7
2.d	Cercle de diamètre donné . . . . .	7