Devoir surveillé 4.

Samedi 10 janvier 2026, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \quad : \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient (E).

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$(L_1) \ : \ xy'(x) + y(x) = 0.$$

2°) *Obtention d'une équation différentielle linéaire*

a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est solution de (E).
Justifier que f est deux fois dérivable, et montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(L) \quad : \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

b) Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (L), mais pas de (E).

3°) *Résolution de* (L)

a) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f est solution de (L) si et seulement si g' est solution de l'équation (L_1).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

4°) *Résolution de* (E)
Montrer que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \mu x, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Partie 1 : La constante d'Euler

On définit la suite réelle (H_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = H_n - \ln(n+1), \quad b_n = H_n - \ln n$.

1°) Démontrer l'inégalité : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

2°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \qquad\qquad \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$$

3°) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite que l'on notera γ (appelée *constante d'Euler*).
On ne cherchera pas à calculer γ.

4°) Justifier : $1 - \ln(2) \leq \gamma \leq 1$.

5°) Montrer que : $H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

Partie 2 : Une première application

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On souhaite démontrer que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

6°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

- **a)** Étudier la monotonie de la suite (K_n).
- **b)** En déduire que (K_n) converge.
- **c)** Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, K_n à l'aide d'éléments de la suite (H_n).
- **d)** En utilisant la question 5, en déduire que la suite (K_n) converge vers $\ln 2$.

7°) **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = K_n$.

- **b)** En déduire que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3 : Une deuxième application

On définit les deux suites (v_n) et (S_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

8°) Rappeler la valeur de v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

9°) Déterminer des réels a, b, c vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

10°) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n - 1$

Indication : On séparera la somme définissant H_{2n+1} selon les indices pairs/impairs.

11°) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide d'éléments de la suite (H_n).

12°) En utilisant la question 5, montrer que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 18 - 24 \ln(2)$.

Aspect culturel : Introduite par le mathématicien suisse Euler (1707-1783), la constante d'Euler γ est donc la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Une valeur approchée est : $\gamma \approx 0,5772156649\ldots$. On ne sait toujours pas à l'heure actuelle si γ est un nombre rationnel ou pas.

Cette constante joue un rôle essentiel dans des domaines très variés (sommes infinies, produits, probabilités, intégrales). Par exemple, elle intervient en arithmétique. On peut démontrer que le nombre moyen de diviseurs de tous les nombres compris entre 1 et n est très proche de $\ln n + 2\gamma - 1$.

Exercice 3

Pour tout entier $n \geq 3$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - 1 \end{array}$.

1°) Soit $n \geq 3$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1,+\infty[$. On notera u_n cette unique solution.

2°) Déterminer, pour $n \geq 3$, le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3°) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

4°) **a)** À l'aide de la formule du binôme, montrer : $\forall n \geq 3,\ f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$.

b) En déduire que $\ell = 1$.

5°) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_n = \exp\left(\dfrac{\ln(1+u_n)}{n}\right)$.

En déduire que : $u_n = 1 + \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(1+\ln(1+x)) + \dfrac{x}{x+1}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{\tan^2(x)}$.

3°) Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote que l'on déterminera et étudier les positions relatives.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ FIN ∗ ∗ ∗ ∗ ∗