
Devoir maison 3.

À rendre le lundi 16 octobre 2023

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de calculer $A_n = \sum_{k=1}^n k2^k$, de deux manières différentes.

1°) Première méthode

On pose f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

- a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et donner une expression de f' sur \mathbb{R} .
- b) Donner une autre expression de f , qui ne sera valable que sur \mathbb{R} privé d'un point, en déduire une autre expression de f' valable sur ce domaine.
- c) À l'aide des deux expressions de f' , déterminer la valeur de A_n .

2°) Deuxième méthode

On note $S_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j$.

- a) Exprimer S_n de deux façons différentes comme somme double.
- b) En calculant chacune des deux expressions trouvées, montrer que $S_n = A_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.