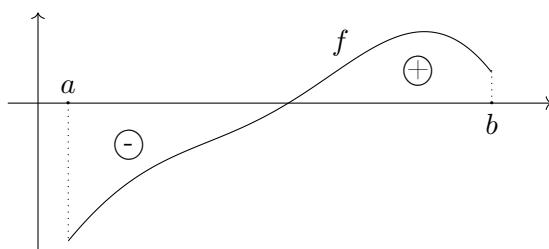


Chapitre 5. Primitives.

Prérequis de Terminale sur la notion d'intégrale

Pour I intervalle de \mathbb{R} , f continue sur I à valeurs dans \mathbb{R} , et a et b des éléments de I , l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est "définie" provisoirement de la manière suivante :

- Si $a < b$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire algébrique sous la courbe représentative de f :



- Si $a = b$, $\int_a^a f(x) dx = 0$
- Si $a > b$, $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Le nom de la variable d'intégration est muet : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

Pour une fonction à valeurs dans \mathbb{C} , l'intégrale est définie en passant par les parties réelle et imaginaire : c.f. ch 4.

Il y a quatre propriétés de base pour l'intégrale :

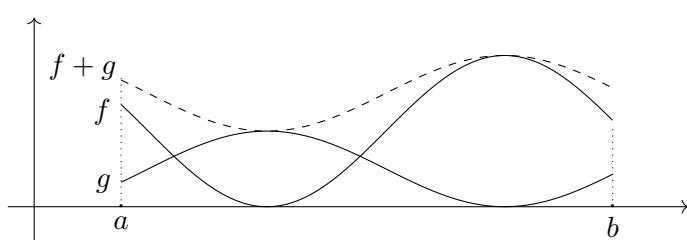
Proposition :

Linéarité

Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et des fonctions f et g continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Encore valable pour $a > b$ et des fonctions continues sur $[b, a]$.



Proposition :

Positivité

Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et une fonction f continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0.}$$

Δ faux si $a > b$!

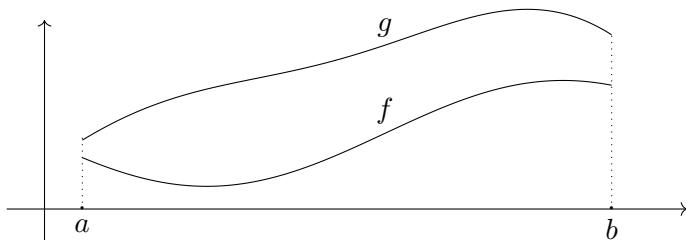
Proposition :

Croissance

Soient a et b des réels tels que $a \leq b$, et des fonctions f et g continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.}$$

Δ faux si $a > b$!



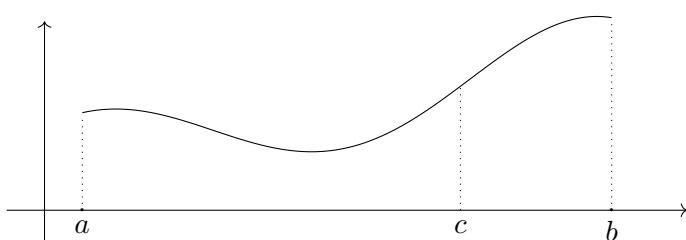
Proposition :

• Relation de Chasles

Soient a , b et c des réels tels que $a \leq c \leq b$, et une fonction f continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.}$$

C'est encore valable dès que les trois intégrales existent, i.e. f continue sur le segment formé par a et b , sur le segment formé par a et c et par le segment formé par c et b .



Nouvel outil pour montrer des inégalités

Avec la propriété de croissance de l'intégrale ; par exemple, partons du fait que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$:

Remarque : justification de l'existence d'une intégrale

Parfois, on vous demandera de justifier qu'une intégrale existe. Il y a deux points fréquemment oubliés :

- Bien dire que la fonction sous l'intégrale est continue...
- et ce, sur tout le segment formé par les deux bornes !

Par exemple, justifions que pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ existe :

1 Généralités sur les primitives, lien primitive-intégrale

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.a Définition des primitives

Définition :

Soit D une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que $F : D \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur D si

Exemples :

- La fonction $-\cos$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée \sin , donc une primitive de \sin sur \mathbb{R} est $-\cos$.
- Une primitive de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} est
- À connaître : $f : x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Autrement dit,



Démonstration 1

Proposition :

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors :

- L'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{K}$ constante.
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.



Démonstration 2

En particulier, lorsqu'on fixe $x_0 \in I$ et qu'on sait que f a des primitives sur I , alors on peut affirmer qu'il y en a une et une seule qui s'annule en x_0 .

⚠ Il peut ne pas y avoir de primitives : certaines fonctions définies sur \mathbb{R} n'admettent pas de primitives.

⚠ On ne dit jamais "la" primitive mais "une" primitive. En effet, sur un intervalle : s'il existe une primitive, alors il en existe une infinité et toutes les primitives sont égales à une constante près.

⚠ La proposition n'est plus valable si on n'est pas sur un intervalle.

Par exemple, voici deux primitives de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

- $F : x \mapsto \frac{1}{x}$

- $G : x \mapsto$

Pourtant, F et G ne sont pas égales à une constante près : $G(x) - F(x) =$

Méthode : "primitiver une égalité"

Complétons : pour une fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable,

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff$$
$$\iff$$

1.b Primitives usuelles

À partir des dérivées "usuelles", on tire des primitives "usuelles", à parfaitement connaître : c.f. fiche.

Exemples :

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{5+3 \cos x}}$.

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de \tan .

1.c Existence de primitives pour les fonctions continues

Théorème :

(Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Soit $a \in I$.

Autrement dit,

Conséquence : Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Exemples :

- Nous avions défini la fonction \ln comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$

autrement dit :

- Soit $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Méthode

Lorsqu'on vous demande de calculer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle :

- Ou bien c'est direct (c.f. fiches primitives usuelles)
- Ou bien on fixe une constante a dans I , et on calcule une intégrale $\int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in I$.
Le choix du $a \in I$ importe peu : si on prend un $a \in I$ différent, on aura simplement une constante différente à la fin du calcul. Pour cette raison, on trouve parfois l'écriture $\int f(t) dt$.
On trouve aussi $\int f(x) dx$, à éviter.

2 Outils pour calculer une intégrale

2.a Calcul direct à l'aide d'une primitive

En conséquence du théorème fondamental de l'analyse :

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur I et a, b des éléments de I .

Alors, en notant F une primitive de f sur I ,

$$\int_a^b f(t) dt =$$



Démonstration 3

Exemples :

$$\begin{array}{lll} I_1 = \int_a^b e^{2x} dx \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 & I_2 = \int_0^\pi \sin t dt & I_3 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du & I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv & I_6 = \int_0^3 \frac{x}{1+x} dx \quad I_7 = \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)} dx \end{array}$$

 **Démonstration 4**

Retenir la "technique de l'apparition-disparition" dans les derniers exemples qui permet de simplifier beaucoup de situations (cela peut être $-1 + 1$, $-2 + 2$, $-x + x\dots$).

2.b Intégration Par Parties (IPP)

Définition :

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D si f est dérivable sur D et si f' est continue sur D .

Exemples :

Remarque : Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors toute primitive de f sur I est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I . En effet :

Théorème :

Soit I un intervalle, et a, b des éléments de I . Soient f, g de classe \mathcal{C}^1 sur I .

 **Démonstration 5**

Exemples :

- Calculer $I = \int_0^1 te^{2t} dt$.
- Les primitives de \ln sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions de la forme

 **Démonstration 6**

⚠ Les phrases suivantes n'ont pas le même sens et sont insuffisantes :

"Les primitives de \ln sur \mathbb{R}_+^* sont de la forme $x \mapsto x \ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$ "

"Les fonctions de la forme $x \mapsto x \ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$ sont des primitives de \ln sur \mathbb{R}_+^* "

Autres manières de le dire :

L'ensemble des primitives de \ln sur \mathbb{R}_+^* est $\{x \mapsto x \ln x - x + C / C \in \mathbb{R}\}$

⚠ Ne pas écrire : $\{x \ln x - x + C / C \in \mathbb{R}\}$

F primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* $\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = x \ln(x) - x + C$

⚠ Ne pas écrire : F primitive de \ln sur $\mathbb{R}_+^* \iff F(x) = x \ln(x) - x + C, C \in \mathbb{R}$

2.c Changement de variable

Théorème :

Soient I et J des intervalles, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 , et α, β des éléments de J .

☞ **Démonstration 7**

Cette formule complète est à connaître, elle sert dans certains exercices.

Sur les calculs d'intégrale ou de primitive, on a des moyens "simples" pour l'appliquer. Pour calculer une intégrale I , on l'identifie soit au membre de gauche de l'égalité, soit au membre de droite de l'égalité.

Exemples :

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t}{1+4t^4} dt \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

☞ **Démonstration 8**

Ainsi, retenir qu'on écrit formellement :

- On pose $x = \varphi(t)$; la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur J .
- On a $dx = \varphi'(t) dt$.
- Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$;
- Si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$.

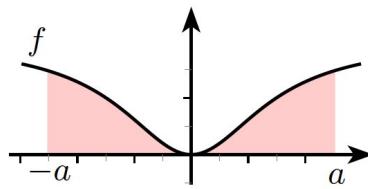
2.d Conséquences du changement de variable

Proposition :

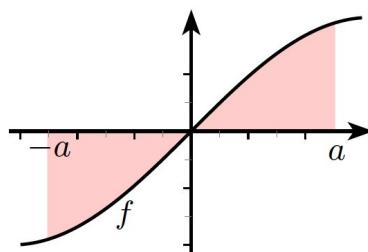
Pour f continue et $a \in \mathbb{R}$:

- Si f est paire,

$$\int_{-a}^a f(x) dx =$$



- Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x) dx =$

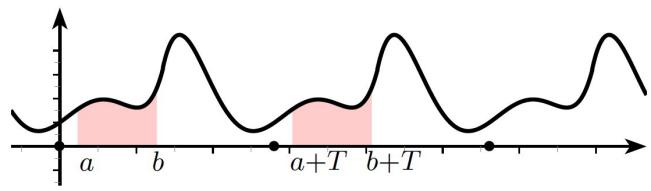


Démonstration 9

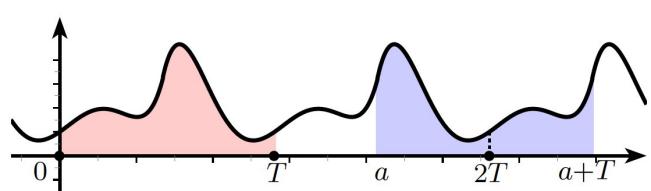
Proposition :

Si f est périodique de période $T > 0$,

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx =$



- $\underbrace{\int_a^{a+T} f(x) dx}_{\text{intégrale de } f \text{ sur...}} =$



Démonstration 10

Exemple : Calculons $\int_0^{2\pi} \cos(3t) \sin(t) dt$

3 Des exemples à savoir traiter

3.a $\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\omega x), \int_a^b e^{\alpha x} \sin(\omega x)$

Il y a deux méthodes, à connaître : double intégration par parties ou passage par les complexes (plus rapide).

Exemple : $I = \int_0^\pi e^{3t} \cos(t) dt.$



Démonstration 11

3.b $\int_a^b P(x) \cos(\omega x), \int_a^b P(x) \sin(\omega x), \int_a^b P(x) e^{\omega x}$... avec P polynôme

On effectue des intégrations par parties successives pour se ramener à un polynôme de degré de plus en plus petit, jusqu'à une constante.

Exemple : Déterminer les primitives de $x \mapsto x^2 \cos(x)$ sur \mathbb{R} .



Démonstration 12

3.c Primitives de quelques fractions rationnelles particulières

Une fraction rationnelle est une expression de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec P et Q des polynômes.

Cherchons une primitive F de f (sur I intervalle à préciser), dans quelques cas particuliers :

3.c.i $f(x) = \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$

3.c.ii $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1$

Exemples : $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^3} :$$

Plus généralement, si $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ avec $n \neq 1$:

3.c.iii $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a \neq 0$, a , b , c réels

Méthode : il faut déterminer si le polynôme $ax^2 + bx + c$ a des racines réelles ou non. On peut par exemple calculer son discriminant.

- Si $\Delta = 0$, on a une unique racine x_0 , et $f(x) = \frac{\text{cste}}{(x - x_0)^2}$, on est ramené au cas précédent.
- Si $\Delta > 0$, on a des racines réelles distinctes x_1 et x_2 , et on est ramené à $f(x) = \frac{\text{cste}}{(x - x_1)(x - x_2)}$

On "décompose en éléments simples", i.e. on trouve des constantes a et b telles que :

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} \quad \text{pour tout } x \text{ différent de } x_1 \text{ et } x_2.$$

Exemples : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$; $g(x) = \frac{1}{x(x - 1)}$.

☞ Démonstration 13

- Si $\Delta < 0$:
 - Un cas particulier : $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ avec $\alpha > 0$

— Si on n'est pas dans ce cas particulier, on s'y ramène en mettant $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique.

Méthode :

Factoriser par a , puis de voir les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début d'une identité remarquable ;
On obtient la forme $a(X^2 + \text{cste}^2)$, factoriser encore pour avoir $\lambda(Y^2 + 1)$ avec λ cste.

Exemples : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$; $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$.

☞ Démonstration 14

3.d Des pistes pour trouver un changement de variable "qui marche"

On souhaite calculer $\int_a^b f(x) dx$.

À maîtriser :

- Si $f(x)$ est un polynôme en cos, sin : on peut linéariser.

Exemples : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$; $I_2 = \int_0^{\pi} \cos^3(x) \sin(x) dx$.

☞ Démonstration 15

- Cependant, de façon plus générale avec un polynôme ou une fraction rationnelle en cos, sin, tan, il y a souvent un changement de variable naturel parmi :

$$\begin{array}{lll} u = \cos(x) & u = \sin(x) & u = \tan x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ du = -\sin(x) dx & du = \cos(x) dx & du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

Par exemple, dans l'intégrale I_2 précédente :

☞ Démonstration 16

Exemple : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(2x)} dx$.

☞ Démonstration 17

Pour aller plus loin :

- Si $f(x)$ ne fait intervenir que des e^x , e^{-x} , $e^{2x} \dots$ (pas de x seul ou d'autres fonctions), poser $u = e^x$ (ou $u = e^{-x} \dots$)
- Si $f(x)$ ne fait intervenir que x et $\sqrt{ax + b}$, poser $u = \sqrt{ax + b}$
- Si $f(x)$ ne fait intervenir que x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:
 - Exemple vu : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
 - On met $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, en voyant $ax^2 + bx$ comme le début d'un carré $a(x + cste)^2$.

On trouvera toujours l'une des trois formes canoniques suivantes :

$$\lambda(1 - X^2) \quad ; \quad \lambda(1 + X^2) \quad ; \quad \lambda(X^2 - 1) \quad \text{avec } \lambda > 0$$

— Selon le cas, on pose $X = \cos u$ ou $X = \sin u$ ou $X = \operatorname{sh} u$ ou $X = \operatorname{ch} u \dots$

Le but étant d'utiliser la relation $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ou $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ pour obtenir $\sqrt{(truc)^2}$ qui se simplifie...

Plan du cours

1	Généralités sur les primitives, lien primitive-intégrale	3
1.a	Définition des primitives	3
1.b	Primitives usuelles	4
1.c	Existence de primitives pour les fonctions continues	5
2	Outils pour calculer une intégrale	5
2.a	Calcul direct à l'aide d'une primitive	5
2.b	Intégration Par Parties (IPP)	6
2.c	Changement de variable	7
2.d	Conséquences du changement de variable	8
3	Des exemples à savoir traiter	9
3.a	$\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\omega x), \int_a^b e^{\alpha x} \sin(\omega x)$	9
3.b	$\int_a^b P(x) \cos(\omega x), \int_a^b P(x) \sin(\omega x), \int_a^b P(x)e^{\omega x}$... avec P polynôme	9
3.c	Primitives de quelques fractions rationnelles particulières	9
3.c.i	$f(x) = \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$	9
3.c.ii	$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1$	9
3.c.iii	$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a \neq 0, a, b, c$ réels	10
3.d	Des pistes pour trouver un changement de variable "qui marche"	11