Corrigé du devoir maison 1.

Exercice

1°) a) On a $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$, donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$, on en tire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Comme $0 = f(0)$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

b) Par produit et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$
$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2+x+1\right)}.$$

c) Pour tout $h > 0$,
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h+1}{h}e^{-\frac{1}{h}} = e^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h}}.$$

Or (c.f. a)) on sait que $\lim\limits_{h\to 0^+} e^{-\frac{1}{h}} = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h} = +\infty$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h}e^{-\frac{1}{h}} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = 0$.

Cela signifie que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = 0.}$

d) Pour tout $x > 0$:
$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2+x+1\right)$$

Or exp est strictement positive et $x^2+x+1 > 0$ car $x > 0$ donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. f étant continue sur $[0,+\infty[$ d'après la question a, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $[0,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{X\to 0} e^X = e^0 = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

2°) a) Par somme, produit, composée de fonctions dérivables, φ est bien dérivable sur $[0,+\infty[$, et pour tout $t \in [0,+\infty[$: $\varphi'(t) = -(1+t)(-e^{-t}) - 1 \times e^{-t}$ i.e. $\boxed{\varphi'(t) = te^{-t}}$.

b) Soit $t \geq 0$. On a donc $-t \leq 0$; comme exp est croissante et positive, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 \leq \exp(-t) &\leq \exp(0) \\ 0 \leq t\exp(-t) &\leq t\exp(0) \qquad \text{car } t \geq 0 \\ &\boxed{0 \leq \varphi'(t) \leq t} \end{aligned}$$

c) Soit $u \in [0,+\infty[$. D'après la question précédente, pour tout $t \in [0,u]$, $0 \leq \varphi'(t) \leq t$. D'après la propriété rappelée, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^u 0\,\mathrm{d}t \leq \quad & \int_0^u \varphi'(t)\,\mathrm{d}t && \leq \int_0^u t\,\mathrm{d}t \\ 0 \quad & \leq [\varphi(t)]_0^u && \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^u \\ 0 \quad & \leq \varphi(u) - \varphi(0) && \leq \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

Or $\varphi(0) = 1 - \exp(0) = 0$ donc $\boxed{0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2}.}$

3°) a) Soit $x > 0$. $\dfrac{1}{x}$ est un réel positif, donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & 0 \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2x^2} \\ & 0 \leq x - (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2x} \qquad \text{en multipliant par } x \text{ qui est bien strictement positif} \\ & \boxed{0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x}} \end{aligned}$$

b) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$, donc par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - f(x) = 0$, soit encore $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C}.}$

Comme la quantité $f(x) - x$ est négative, on en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } \Delta.}$

4°) La tangente au point d'abscisse 0 est horizontale puisque $f'(0) = 0$.