Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 5.

1°) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, et pour tout x dans cet ensemble :

$$f_1'(x) = \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}(x^2-1) - e^{x-\frac{1}{x}}2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\left((x^2+1)(x^2-1)-2x^3\right)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f_1'(x) = \frac{\left(x^4-2x^3-1\right)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}}$$

2°) f_2 est définie et dérivable sur $]-\infty,-\dfrac{2}{\pi}[$, sur $]\dfrac{2}{\pi},+\infty[$, et sur tous les intervalles de la forme $\left]\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right[$ ou $\left]\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-2k\pi},\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\right[$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.
Pour x dans l'un de ces ensembles,

$$f_2'(x) = \frac{\dfrac{-1}{x^2}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)}{\cos\dfrac{1}{x}} = \boxed{\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}}$$

3°) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x>0$, $f_3'(x) = \exp\left(x^x\ln(x)\right) = \exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)$.
Donc pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
f_3'(x) &= \left(\exp(x\ln x)\frac{1}{x} + \left(x\frac{1}{x}+1.\ln(x)\right)\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\\
&= \left(\frac{1}{x}+\ln(x)+\ln^2(x)\right)\exp(x\ln x)\exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\\
&= \left(\frac{1}{x}+\ln(x)+\ln^2(x)\right)x^x x^{(x^x)}\\
&= \boxed{\left(\frac{1}{x}+\ln(x)+\ln^2(x)\right)x^{x+x^x}}
\end{aligned}$$

4°) Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $(x-1)^2\geq 0$ et $(x-1)^3\geq 0$ donc $f_4(x)$ existe.
On peut d'ailleurs écrire $f_4(x) = \left((x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} + \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}$.
La fonction $x\mapsto x^{\frac{2}{3}} = \exp\left(\frac{2}{3}\ln x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $x\mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. De même $x\mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x\mapsto x-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle, donc par composition et somme, $\boxed{f_4 \text{ est dérivable sur }]1,+\infty[}$, et pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$$\boxed{f_4'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

5°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f_5 \text{ définie en } x \iff 2-\sqrt{x} \geq 0 \iff 2 \geq \sqrt{x} \iff 4 \geq x \text{ car } \sqrt{x} \geq 0 \text{ et } 4 \geq 0$$

Donc f_5 est $\boxed{\text{définie sur } [0,4]}$.
$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$x \mapsto 2-\sqrt{x}$ est donc dérivable sur $]0,4]$, et ne s'annule qu'en 4, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2-\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,4[$.
Par produit avec la fonction polynomiale $x \mapsto x$, f_5 est donc $\boxed{\text{dérivable sur }]0,4[}$, et pour tout $x \in]0,4[$,

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \sqrt{2-\sqrt{x}} + x\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \frac{4(2-\sqrt{x})-\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \boxed{\frac{8-5\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}}} \end{aligned}$$

• Étude de la dérivabilité en 0 : pour tout $x \in]0,4]$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{2-\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

Donc $\boxed{f_5 \text{ est dérivable en 0 et } f_5'(0) = \sqrt{2}}$. On peut remarquer que l'expression encadrée plus haut pour $x \in]0,4[$ est donc encore valable en 0 (puisqu'elle vaut $\sqrt{2}$ en 0 après simplifications...).

• Étude de la dérivabilité en 4 : pour tout $x \in [0,4[$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(4)}{x-4} = \frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4} = -\frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{2^2-\sqrt{x}^2} = -\frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = -\frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}$$

Or $-\dfrac{x}{(2+\sqrt{x})} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} -1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{f_5(x)-f_5(4)}{x-4} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi $\boxed{f_5 \text{ n'est pas dérivable en 4.}}$