Devoir maison 9.

Exercice

Partie 1 : Étude de A

1°) Nous allons procéder par opérations élémentaires sur les lignes.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls donc Q est inversible. D'où P est inversible.
Poursuivons le calcul.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

2°)

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

D est bien diagonale.
Comme $P^{-1}AP = D$, en multipliant à gauche par P, $AP = PD$ puis on multiplie à droite par P^{-1} d'où $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Partie 2 : Résolution d'un système différentiel

1°) On constate que : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)}$.

2°) Soit $t \in \mathbb{R}$. $Y(t) = P^{-1}X(t)$ s'écrit : $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a : $u = x + y - 2z$. Donc $\boxed{u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. De même, $\boxed{v \text{ et } w \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}.}$
De plus, par propriétés de la dérivation, on a :
$u' = x' + y' - 2z',\ v' = x' - z',\ w' - x' - y' + 3z'$.
Donc, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t).}$

3°) On sait : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.
Or $A = PDP^{-1}$ d'où :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) &= PDP^{-1}X(t) \\ P^{-1}X'(t) &= D(P^{-1}X(t)) \\ Y'(t) &= DY(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 4v(t) \\ w'(t) = -4w(t) \end{cases}}$.

4°) On connaît $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or $Y(0) = P^{-1}X(0)$ donc $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc, $\boxed{u(0) = 3, v(0) = 1, w(0) = -3}$.

5°) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 4v(t) \\ w'(t) = -4w(t) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \alpha \\ \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, v(t) = \beta e^{4t} \\ \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, w(t) = \gamma e^{-4t} \end{cases}$.

Or $u(0) = 3, v(0) = 1, w(0) = -3$ donc $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = -3$.
Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = 3,\ v(t) = e^{4t},\ w(t) = -3e^{-4t}}$.

6°) On a : $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = P^{-1}X(t)$ donc $X(t) = PY(t)$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ e^{4t} \\ -3e^{-4t} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \left\{ x(t) = 3 + e^{4t} - 3e^{-4t},\ y(t) = 6 - e^{4t} - 3e^{-4t},\ z(t) = 3 - 3e^{-4t} \right.}$.