
Devoir maison 4.

À rendre le lundi 6 novembre 2023

Exercice 1

1°) Justifier l'égalité : $\frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{1+i}{2}$.

2°) Montrer que pour tout réel a strictement positif, $\text{Arg}(a+i) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) (2\pi)$.

3°) En déduire l'égalité : $2 \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $Z = (1+i\sqrt{2})^n + (1-i\sqrt{2})^n$.

1°) Justifier, sans le calculer, que Z est un réel.

2°) Que vaut $i^k + (-i)^k$ selon les valeurs de $k \in \mathbb{N}$?

3°) On rappelle qu'un coefficient binomial est un entier.

Montrer, en écrivant Z sous une autre forme, que Z est un entier.

Exercice 3

Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation

$$z^2 + (1-4i)z + i - 5 = 0$$