Entraînement pour le DS 4.

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \end{cases}$$

1°) Montrer que la suite est bien définie et que tous ses termes sont strictement positifs.

2°) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de (u_n).

3°) **a)** Montrer que pour tout réel x positif : $\sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

c) En déduire successivement l'existence et les valeurs des limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

4°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

a) Justifier que : $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$.
En est-il de même pour w_{n-1} ?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la relation :

$$(*) \qquad w_n\left(w_n + 2\sqrt{n}\right) = w_{n-1} + \sqrt{n-1}.$$

c) En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

5°) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 - u_n^2$ en fonction de u_n et u_{n-1}, puis de w_n et de w_{n-1}.
En déduire la limite de $(u_{n+1}^2 - u_n^2)$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)^{x^2}$.

DL en 0 à l'ordre 2 de $\dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$.