Chapitre 10. Ensembles et applications.

1 Ensembles

1.a Définition d'un ensemble

Un ensemble E est par définition une collection d'objets (en nombre fini ou infini). Ces objets sont appelés les éléments de E.
Si x est un élément de E, on note : $x \in E$.
Représentations intuitive :

Exemples :

Il y a deux façons de définir un ensemble :

- en énumérant ses éléments.
  Par exemple $E_1 = \{2, 4, 6, 8\}$, $E_2 = \{n\pi \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$
- en donnant une propriété qui caractérise les éléments de E ;
  autrement dit on écrit $E = \{x \in ... \ / \ P(x)\}$.
  Par exemple $E_1 =$ et $E_2 =$

Remarque : Lorsqu'on résout une équation (E), c'est en fait qu'on passe de la forme "propriété" à la forme "énumération" pour l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:
Pour (E) : $z^2 = -2$ d'inconnue le complexe z :

$$\mathcal{S} =$$

Pour (E) : $x + y = 0$ d'inconnue le couple (x, y) :

$$\mathcal{S} =$$

Pour (E) : $y' = y$ d'inconnue une fonction dérivable y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} =$$

Quelques ensembles particuliers :

- L'ensemble vide, noté $\emptyset$: il ne contient aucun élément.
- Un ensemble avec un seul élément s'appelle un singleton : $\{x\}$.
  Un ensemble avec deux éléments s'appelle une paire : $\{x, y\}$ avec $x \neq y$.

1.b Inclusion

Définition :

Soient E et F des ensembles.
On dit que F est inclus dans E ou que F est une partie de E si :

$$\forall\, x \in F, \quad x \in E.$$

On note $F \subset E$.

Exemples :

Remarques :

- Si $F \subset E$ mais que $F \neq E$, on note parfois $F \subsetneq E$.

- $\emptyset$ est inclus dans l'importe quel ensemble E

- $F \not\subset E$ signifie donc : .

Méthode :

- Pour montrer que $F \subset E$, on écrit :

- Pour montrer que $E = F$:
  $E = F$ signifie que $\boxed{x \in E \Longleftrightarrow x \in F}$.

  D'où deux possibilités :
  — Soit on arrive à montrer directement $x \in E \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow x \in F$.
  Parfois facile, parfois difficile, parfois infaisable.
  — Soit on raisonne par double inclusion :

Définition :

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, si E et F sont des ensembles,

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\emptyset$ et E.

Exemple : Pour $E = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(E) = \{ \qquad \}$$

1.c Réunion, intersection, différence, complémentaire

Dans cette partie, E désigne un ensemble et A, B, C des parties de E.

Définition :

- Réunion de A et B : c'est l'ensemble des éléments de E appartenant à A $\boxed{\text{ou}}$ à B :

  $A \cup B =$

- Intersection de A et B : c'est l'ensemble des éléments de E appartenant à A $\boxed{\text{et}}$ à B :

  $A \cap B =$

Ces définitions se généralisent au cas de plus de 2 ensembles :
Si I est un ensemble d'indices (fini ou infini) et si pour tout $i \in I$, A_i est une partie de E, on définit :

$\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i =$

$\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i =$

Exemples :

— Le domaine de définition de tan est

— $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1, 2 + \frac{1}{n}\right[=$

Proposition :

- (Propriétés élémentaires)

$$A \cup A = \qquad A \cup E = \qquad A \cup \emptyset =$$
$$A \cap A = \qquad A \cap E = \qquad A \cap \emptyset =$$

- (Distributivité de $\cap$ sur $\cup$ et de $\cup$ sur $\cap$)

Démonstration 1

Généralisation : $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) =$ $\qquad$ $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) =$

Définition :

- Différence de A par B : c'est l'ensemble des éléments x de E appartenant à A mais pas à B :

$$A \backslash B =$$

- Complémentaire de A dans E : c'est l'ensemble des éléments x de E n'appartenant pas à A ; autrement dit, c'est $E \backslash A$.
  Souvent, il n'y a pas d'ambiguïté sur E, et le complémentaire de A dans E est alors noté $\overline{A}$ ou A^c.

$$\overline{A} =$$

Exemple : le domaine de définition de tan est

Proposition :

$$\overline{\emptyset} = \qquad A \cup \overline{A} = \qquad \overline{A \cup B} =$$

$$\overline{E} = \qquad A \cap \overline{A} = \qquad \overline{A \cap B} =$$

Démonstration 2

Généralisation : $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} =$ $\qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} =$

1.d Parties disjointes, recouvrements disjoints, partitions

Définition :

On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont <u>disjointes</u> si

Exemples :

Si I est un ensemble d'indices et si pour tout $i \in I$, A_i est une partie d'un ensemble E, on dit que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints si :

Définition :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des parties d'un ensemble E.
On dit que les A_i forment un <u>recouvrement disjoint</u> de E
si les A_i sont deux à deux disjoints, et si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.
Si de plus les A_i sont tous non vides, on dit plutôt que les A_i forment une <u>partition</u> de E.

Exemples :

- Avec $E = \mathbb{Z}$:

- Avec $E = \mathbb{R}$:

- Avec E l'ensemble des prénoms des élèves de la PTSI2 :

1.e Produit cartésien

Définition :

Soient E et F des ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble des couples d'un élément de E et d'un élément de F :

$$E \times F =$$

Une égalité entre deux éléments de $E \times F$ revient à une égalité dans E et une égalité dans F : $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

⚠ L'ordre compte ! $(0, 1) \neq (1, 0)$.
⚠ Ne pas confondre avec $\{x, y\}$ qui désigne un ensemble.
Par exemple, $\{x, y\}$ est réduit à $\{x\}$ si $x = y$, alors que (x, x) a un sens différent de x.

Illustration :

Cette définition se généralise à un nombre fini quelconque d'ensembles :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n =$$

En particulier, $E \times E \times \cdots \times E$ (où E apparaît n fois) est noté E^n.

Exemples :

2 Applications : quelques notions générales

2.a Définition

Définition :

On appelle application (ou fonction) la donnée de trois choses :

- Un ensemble de départ E non vide
- Un ensemble d'arrivée F non vide
- Pour tout $x \in E$, la donnée d'un unique élément $f(x)$ de F associé, noté $f(x)$.

Notations :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : E \to F \qquad \text{ou} \qquad E \xrightarrow{f} F.$$

On dit que f est une application :

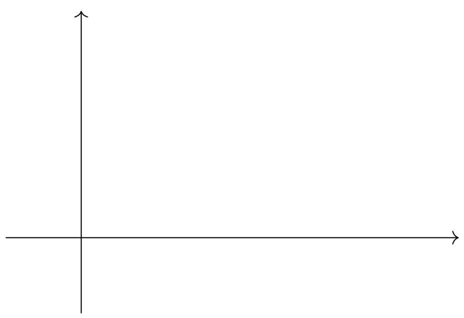
"de E dans F" ou bien " de E sur F" ou bien "définie sur E à valeurs dans F"

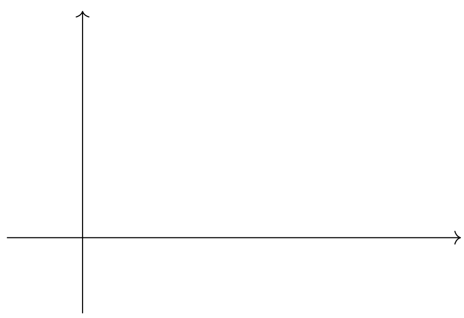
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\boxed{F^E \text{ ou } \mathcal{F}(E,F)}$.

Vocabulaire :

- Si $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par f.
- Si $y \in F$, tout élément $x \in E$ qui vérifie $f(x) = y$ s'appelle un antécédent de y par f.
  Il peut y avoir plusieurs antécédents pour un même y !
- Le graphe de f est .
  Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, c'est une partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on appelle courbe représentative de f.

Exemples :



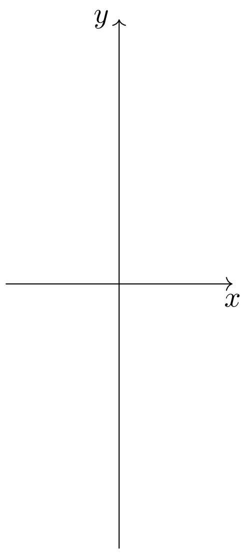


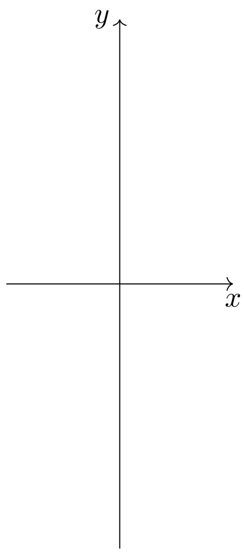
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

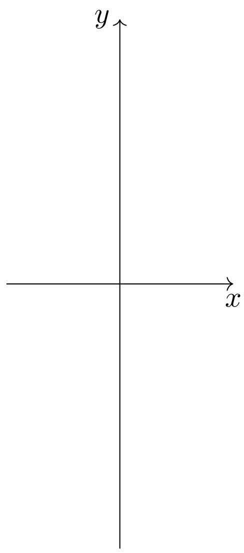
$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & \text{élève} & \mapsto & \text{prénom} \end{array}$$ où $E =$ PTSI2 et $F =$ ensemble des prénoms écrits dans notre alphabet.

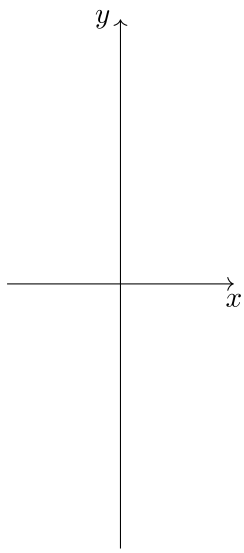
$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

sont 4 applications distinctes.









Montrer l'égalité de deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$, c'est donc :

- Vérifier que $E = E'$ (mêmes ensembles de départ)
- Vérifier que $F = F'$ (mêmes ensembles d'arrivée)
- Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

2.b Composition

Définition :

Soient E, F, G des ensembles, et des applications $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$.
On appelle composée de f par g l'application notée $g \circ f$ définie par :

Illustration :

Proposition :

(Associativité) Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$. Alors :

On peut donc écrire

⚠ Il n'y a pas de commutativité en général ! !
Des contre-exemples :

Proposition :

Soit $f : E \to F$.

$$f \circ \quad = f \qquad \quad \circ f = f$$

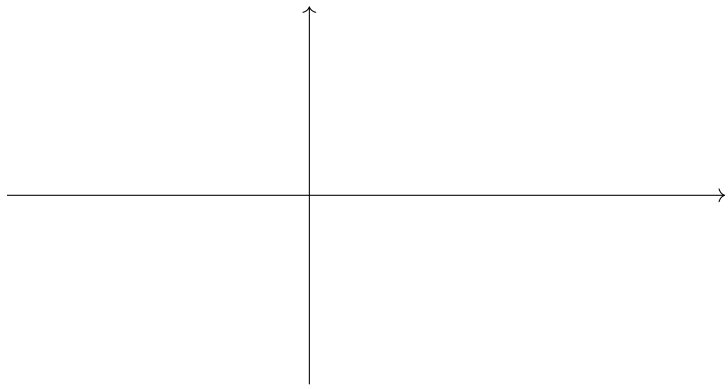
✎ **Démonstration** 3

2.c Restriction, prolongements

Définition :

> Soit $f : E \to F$ et A une partie de E.
> On appelle restriction de f à A l'application $f|_A$ définie par :

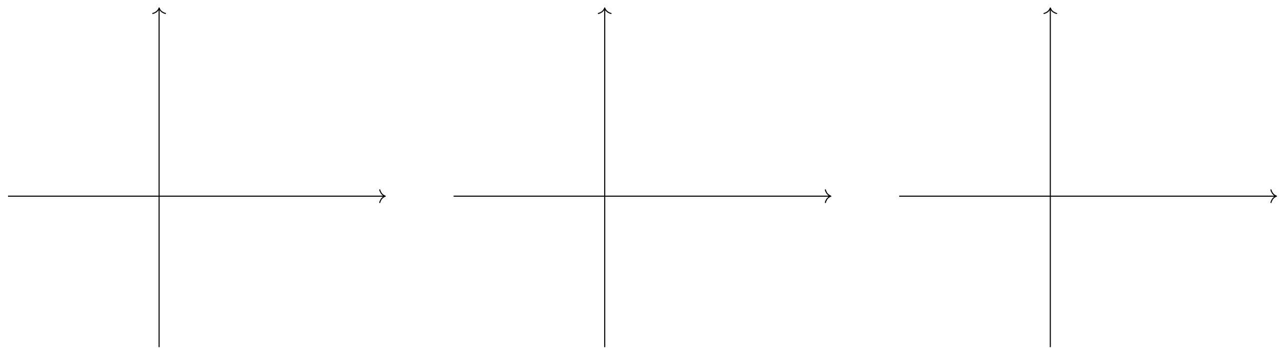
Ce sont bien deux applications distinctes :
elles n'ont pas le même graphe !
Exemple : cos et $\cos|_{[0,\pi]}$:



Définition :

> Soit A une partie de E et $f : A \to F$.
> Un prolongement de f à E est une application $\tilde{f} : E \to F$ qui vérifie :

⚠ Il n'y a pas un seul prolongement possible mais une infinité !



2.d Images directes, images réciproques

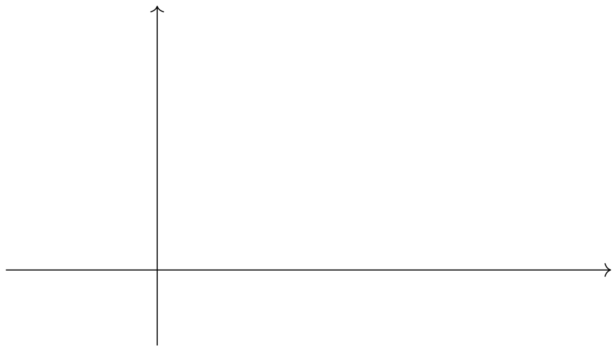
Définition :

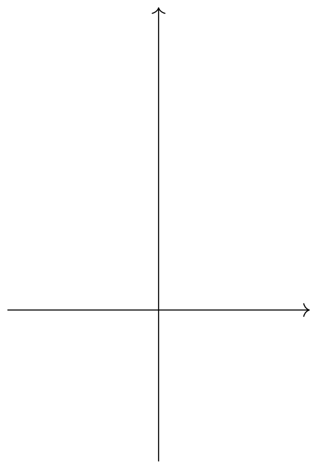
> Soit $f : E \to F$ et A une partie de E.
> On appelle image directe de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A :
> $$f(A) = \{f(x)/\ x \in A\}$$
> C'est une partie de F.

Cela revient à dire, pour $y \in F$:

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow$$

C'est ce qu'il faut retenir en priorité !





Exemple : Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

$f([0,2]) =$
$f(\mathbb{R}) =$
$f([-1,2]) =$

Exemple : Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante avec I intervalle, on a déjà vu comment obtenir $f(I)$:

si $I = [a, b]$, c'est $[f(a), f(b)]$; si $I =]a, b]$, c'est $]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$

si $I = [a, b[$, c'est $[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$; si $I =]a, b[$, c'est $]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$

Dans le cas où f est strictement décroissante, il suffit d'inverser les bornes.

Définition :

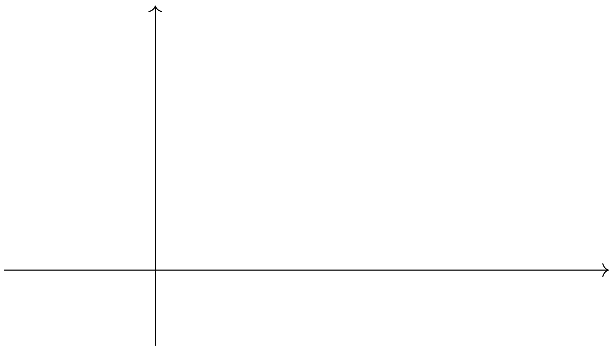
> Soit $f : E \to F$ et B une partie de F.
> On appelle image réciproque de B par f, et on note *provisoirement* $f^{\leftarrow}(B)$, l'ensemble des antécédents des éléments de B :
>
> $$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\}$$
>
> C'est une partie de E.

Cela revient à dire, pour $x \in E$:

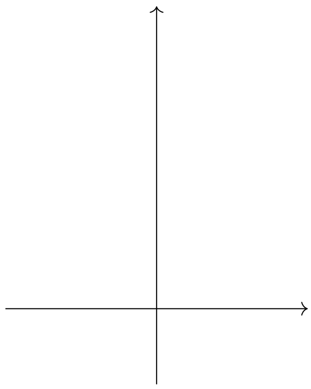
$$x \in f^{\leftarrow}(B) \Longleftrightarrow$$

C'est ce qu'il faut retenir en priorité !

La notation officielle sera $f^{-1}(B)$, on en reparlera dans la partie 3.



Exemple : Pour $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$



$f^{\leftarrow}([0,4]) =$
$f^{\leftarrow}(]-\infty,-1]) =$
$f^{\leftarrow}(\{3\}) =$
$f^{\leftarrow}([-3,1]) =$

Remarque : Soit $y \in F$; $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est

Désormais, en particulier dans les exercices, on se force à utiliser la notation $f^{-1}(B)$ au lieu de $f^{\leftarrow}(B)$.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

3.a Injectivité

Définition :

On dit que $f : E \to F$ est injective (ou : est une injection) si

Autrement dit :

$$f \text{ injective} \iff$$
$$\iff$$

Illustration :

Méthodes :

- C'est la dernière équivalence qu'on utilise le plus souvent.
- Prouver que f n'est pas injective, c'est

Exemples :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$$

Traduction en termes d'équations :

f injective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

3.b Surjectivité

Définition :

On dit que $f : E \to F$ est surjective (ou : est une surjection) si

Autrement dit :

$$f \text{ surjective} \iff$$

Remarque : Dire que $f : E \to F$ est surjective, c'est dire que $f(E) = F$.

Illustration :

Traduction en termes d'équations :

f surjective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

Méthode :
Prouver que f n'est pas surjective, c'est

Exemples :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \big(\ln(x^2), y + 2\big) \end{array}$$

3.c Bijectivité, réciproque

Définition :

On dit que $f : E \to F$ est <u>bijective</u> (ou : est une bijection) si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

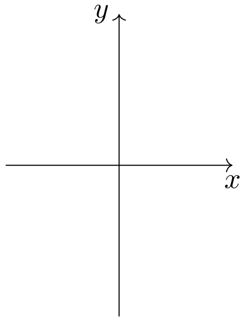
Autrement dit :

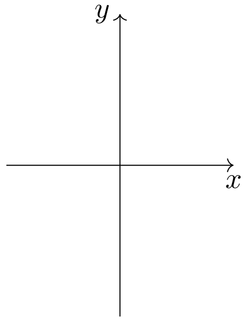
f bijective $\iff$

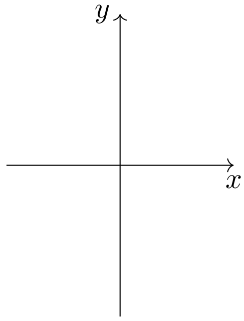
Illustration :

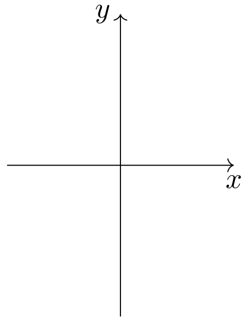
Exemples : Récapitulons avec :

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$









Traduction en termes d'équations

f bijective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

Exemples :

- Pour tout ensemble E, id_E est bijective.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+2) \end{array}$

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3}. \end{array}$ Montrer que f est bijective.

  Démonstration 4

  Si l'exercice avait été :

  Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3}. \end{array}$ f est-elle bijective ?

  Démonstration 5

Définition :

Soit f une application bijective de E dans F.
L'application qui à tout $y \in F$, associe son unique antécédent par f, s'appelle l'application réciproque de f. On la note f^{-1}.
On a donc :

Illustration :

Remarques :

- Si $f : E \to F$ est bijective alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Par définition, pour tout $x \in E$, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, et pour tout $y \in F$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$. Ainsi :

Exemples :

Pour tout ensemble E, l'application réciproque de id_E est

L'application réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est

L'application réciproque de $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ est

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+2) \end{array}$ est

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3} \end{array}$ est

> **Retenir** :
>
> Pour montrer qu'une fonction est bijective et trouver la réciproque, une bonne méthode est de résoudre, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
>
> Si pour tout $y \in F$, on trouve une unique solution, alors on peut affirmer que f est bijective...
> et l'unique solution obtenue, qui s'exprime en fonction de y, est $f^{-1}(y)$!
>
> Si vous trouvez ne serait-ce qu'une valeur de y pour laquelle on n'a pas de solution ou plusieurs solutions, alors f n'est pas bijective.

Notation pour l'image réciproque

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective, notons $g = f^{-1}$, on a $g : F \to E$. Soit B une partie de F.

- On peut considérer l'image directe de B par g, c'est $g(B) = f^{-1}(B)$, l'ensemble des images par f^{-1} des éléments de B.
- Comme B est une partie de l'ensemble d'arrivée de f, on peut aussi considérer l'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ (ou, avec la notation provisoire, $f^{\leftarrow}(B)$) : c'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B. Or, pour $y \in B$, l'antécédent de y par f est $f^{-1}(y)$, c'est bien une image d'un élément y de B par la fonction f^{-1}.
- Conclusion : la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambigüe lorsque f est bijective, cela désigne indifféremment l'image réciproque de B par f ou l'image directe de B par f^{-1}.

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ existe même si f n'est pas bijective !

3.d Liens avec la composition

On a vu que si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Il y a une réciproque :

Théorème :

(Caractérisation des fonctions bijectives)
Soit $f : E \to F$.
L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que

Si c'est le cas, une telle application g est unique, c'est f^{-1}.

Démonstration 6

Cela donne une bonne méthode dans les exercices abstraits pour montrer qu'une fonction est bijective : trouver une application $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F. \end{cases}$
On peut alors affirmer que f est bijective et que $f^{-1} = g$ (dans cet ordre).

Proposition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si f et g sont bijectives, alors :
- la fonction $g \circ f : E \to G$ est bijective
- et sa réciproque est :

Démonstration 7

Illustration :

Proposition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.

Démonstration 8

4 Quelques notions de plus au programme

4.a Fonction indicatrice

Définition :

Soit E un ensemble et A une partie de E.
La fonction indicatrice de A (ou fonction caractéristique de A) est la fonction de E dans $\{0,1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$: $x \in A \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \notin A \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 0$.

Connaître $\mathbb{1}_A$, c'est connaître exactement pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 0$; autrement dit, cela revient à connaître exactement quels sont les éléments de E qui constituent la partie A. On peut dire que la partie A est caractérisée par sa fonction indicatrice.

Si A et B sont des parties de E, $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de

4.b Familles indexées

Si x_1, x_2, ..., x_n sont des éléments d'un ensemble E, $(x_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ désigne la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de E. On peut en fait voir cela comme une application de l'ensemble des indices vers E :

$$x : \begin{array}{rcl} \{1,2,\dots,n\} & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) = x_i \end{array}$$

Par exemple une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, d'où la notation pour l'ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Plus généralement, si I et E sont des ensembles, une famille d'éléments de E indexée par I est en fait une application de I dans E :

$$x : \begin{array}{rcl} I & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) \end{array}$$

On note cette famille $\boxed{(x_i)_{i\in I}.}$

Exemple :
On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|a|x). \end{array}$

Alors $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^*}$ est une famille de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{R}^*$.

Plan du cours