Devoir maison 6.

À rendre le mardi 3 janvier 2023

`L'exercice 2 est facultatif.`

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \geq 0, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

1°) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2°) Montrer que, pour tout $n \geq 0, u_n$ et v_n sont des réels strictement positifs.

3°) Déterminer la monotonie de (u_n) et (v_n).

4°) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

5°) Montrer que, pour tout $n \geq 0,\ v_n > u_n$. Qu'en déduit-on pour la suite (v_n) ?

6°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n^2 - v_n^2 = (-1)^n$.

7°) En déduire que, pour tout $n \geq 0, \left| \dfrac{v_n}{u_n} - \sqrt{2} \right| \leq \dfrac{1}{2u_n^2}$.

8°) Quelle est la limite de $\dfrac{v_n}{u_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

9°) Déterminer, à l'aide des résultats précédents, une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Exercice 2

On veut déterminer toutes les fonctions f définies sur $[0,1]$ et vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (P1) : & \forall x \in [0,1], 2x - f(x) \in [0,1] \\ (P2) : & \forall x \in [0,1], f(2x - f(x)) = x \end{cases}$$

1°) Soit f une solution au problème.

Soit un réel $\alpha \in [0,1]$ et la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = 2v_n - f(v_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que la suite (v_n) existe et que tous les termes sont dans $[0,1]$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

c) En déduire une expression de v_n en fonction de α et $f(\alpha)$.

d) En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

2°) Conclure.