Devoir maison 1.

À rendre le jeudi 11 septembre 2025

CONSIGNES POUR LES DM

★ Ne pas commencer le DM la veille du jour où vous devez le rendre. Anticipez !

Travailler sérieusement les DM est indispensable pour progresser. Il faut vous mettre au travail sur le DM dès que je vous le donne. Le but n'est pas de le faire d'un seul coup mais d'étaler le travail pour avoir un temps de réflexion suffisant.

★ Il faut s'entraîner à chercher seul. C'est normal de ne pas trouver du premier coup et c'est en "séchant" sur les problèmes qu'on arrive, petit à petit, à progresser (d'où encore l'intérêt de s'y prendre suffisamment à l'avance).

Si vous n'arrivez pas à vous débloquer, vous pouvez me poser des questions et vous pouvez aussi en discuter avec vos camarades. La phase de rédaction doit en revanche être complètement personnelle. Cela n'a aucun intérêt de recopier le DM du voisin.

★ La copie que vous rendez doit être écrite lisiblement, avec soin, sans ratures. Les résultats doivent être encadrés. Si ceci n'est pas respecté, je ne corrigerai pas votre copie.

Utilisez des copies doubles que ce soit en DM ou en DS et évitez les encres pâles.

★ Aucun retard dans le rendu des DM ne sera accepté.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) a) Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

d) Dresser le tableau de variations de f (on fera apparaître les limites éventuelles).

2°) On considère la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t)=1-(1+t)e^{-t}$.

a) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour tout $t\geqslant 0$, $\quad 0\leqslant \varphi'(t)\leqslant t$.

c) Soit $u\in[0,+\infty[$.
On rappelle que si g et h sont des fonctions définies et continues sur $[0,u]$ à valeurs réelles vérifiant $g(t)\leq h(t)$ pour tout $t\in[0,u]$, alors :

$$\int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^u h(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que : $0\leqslant \varphi(u)\leqslant \dfrac{u^2}{2}$.

3°) a) En déduire que pour tout $x>0$, $\quad 0\leqslant x-f(x)\leqslant \dfrac{1}{2x}$.

b) Établir que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ à déterminer en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

4°) Construire $\mathcal{C}$.