Déterminer la nature d'une série numérique.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels ou de complexes.
On souhaite déterminer la nature de la **série** $\sum u_n$:

$\boxed{1}$ Si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$\boxed{2}$ $\sum u_n$ peut être un exemple de référence du cours :

série géométrique, série de Riemann, série exponentielle.

$\boxed{3}$ $\sum u_n$ peut être une série télescopique : calculer S_N, étudier si $(S_N)_N$ a une limite finie, ou pas.

$\boxed{4}$ Si à partir d'un certain rang ou pour tout n, $\boxed{u_n \geq 0}$: Essayer...

a. Trouver un équivalent simple de u_n : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec $\sum v_n$ plus simple à étudier ; appliquer le théorème d'équivalence.

b. Trouver v_n telle que $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ convergente, ou $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum v_n$ divergente ; appliquer le théorème de majoration/minoration.
Si on trouve un o ou O, traduire en termes de majoration ou minoration.

c. En particulier : règle du $n^\alpha u_n$, à redémontrer à chaque fois.

d. Comparaison série-intégrale

e. Règle de d'Alembert si pour tout n, $u_n > 0$.

f. Si rien ne marche, étudier la convergence de (S_n)... (majorée ou pas ?)

$\boxed{5}$ Si à partir d'un certain rang ou pour tout n, $u_n \leq 0$:

Étudier $\sum -u_n$, on est ramené au cas 4.

$\boxed{6}$ Si le signe de la suite $(u_n)_n$ n'est pas constant. Essayer...

a. Montrer que $\sum |u_n|$ converge (convergence absolue, qui implique la convergence), on se ramène au cas 4.

b. CSSA.

c. Faire un DL de u_n pour voir la série comme somme de plusieurs séries plus simples.

d. En dernier recours : étude directe de S_n

$\boxed{7}$ (rare) Repérer le produit de Cauchy de deux autres séries plus simples à étudier...