Devoir surveillé 3.

Samedi 22 novembre 2025, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Le but de l'exercice est le calcul par radicaux (c'est-à-dire à l'aide de « racines carrées ») de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ par plusieurs approches.

Les parties 1, 2, 3 sont indépendantes entre elles : on n'utilisera pas les résultats de l'une des méthodes pour obtenir le résultat dans une autre !

Partie 1 : Première méthode de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1°) Montrer que si un nombre complexe z est de module 1, alors $z + \frac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \ z^5 + 1 = 0$$

Vérifier que toutes les solutions sont de module 1 et que $e^{i\frac{\pi}{5}}$ fait partie des solutions.

3°) **a)** Sans utiliser la question 2, déterminer une fonction polynomiale Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$$

b) Vérifier que 0 n'est pas solution de $Q(z) = 0$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $Z = z + \frac{1}{z}$.
Montrer que :

$$Q(z) = 0 \iff (F) : \ Z^2 - Z - 1 = 0.$$

c) Déduire des questions précédentes une expression par radicaux de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

d) En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 2 : Deuxième méthode de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

4°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, 2\pi[$. On pose $C = \cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi)$.
Montrer, en utilisant les complexes, que :

$$C = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

5°) On pose $\theta = \frac{\pi}{5}$. En prenant $a = \theta$ et en choisissant judicieusement la valeur de φ, en déduire :

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}$$

6°) Après avoir linéarisé $\cos(\theta)\cos(3\theta)$, déduire de la question précédente que : $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.

7°) Déterminer alors une équation du second degré dont $\cos(\theta)$ est solution. En déduire $\cos(\theta)$.

Partie 3 : Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Ici, on se propose de calculer $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *de manière directe sans calculer* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On pose pour z complexe : $P(z) = \dfrac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

8°) À l'aide des racines $5^{\text{èmes}}$ de l'unité, déterminer les solutions de l'équation $(G)\ :\ P(z) = 0$. Vérifier qu'elles sont toutes réelles, les exprimer en fonction de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

9°) Développer $P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que :

$$(G) \iff 5Z^2 - 10Z + 1 = 0 \qquad \text{en posant } Z = z^2$$

10°) En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

On les écrira sous la forme $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ où a, b, c sont des entiers naturels à déterminer.

Exercice 2

On pose :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$$

1°) Justifier que f et g sont bien définies et dérivables, et donner leurs dérivées.

2°) En effectuant le changement de variables $u = \sin t$, montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

3°) Montrer que f est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

4°) **a)** Montrer que : $\forall a > 0,\ \operatorname{ch}(\ln a) = \dfrac{a^2+1}{2a}$.

b) En déduire, en utilisant aussi les questions 1 et 2, que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = \operatorname{ch}(f(x))$.

5°) En déduire l'expression de $(g \circ f)'$, puis que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $(g \circ f)(x) = x$.

6°) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = f^{-1}(y)$.

7°) Justifier l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \iff x = \int_0^y \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 2\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t + x^2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1°) Résoudre l'équation (E) : $xy'(x) - y(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) On note $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner F'.

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ xf(x) = x^3 + 2F(x)$.

c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pourquoi est-ce aussi valable en 0 ?

3°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.

$*****$ FIN $*****$