Corrigé du devoir maison 12.

Exercice Un problème de mathématiques agricoles

1°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p-1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p-1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ p-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en effectuant } C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{p} C_j$$

$$= (p-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{par linéarité par rapport à } C_1$$

$$= (p-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{en effectuant : } \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_p \leftarrow L_p - L_1 \end{array}$$

On reconnaît le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure donc

$$\boxed{\det(A_p) = (-1)^{p-1}(p-1)}$$

2°) Considérons une matrice B du type indiqué.
En multipliant par X_0, on obtient par exemple, pour la première ligne, une somme de la forme

$$\pm m_2 \pm m_3 \pm \cdots \pm m_{2n+1},$$

la masse m_j (pour $j \neq 1$) étant affectée du signe $+$ si le j-ème coefficient de la ligne L_1 de B était $+1$, du signe $-$ s'il valait -1.
Cela correspond à un partage des $2n$ poussins numérotés de 2 à $2n+1$ en deux groupes de n poussins si et seulement si il y a exactement n coefficients de L_1 valant 1 et exactement n coefficients de L_1 valant -1.
Et dans ce cas, dire que les masses totales de ces deux groupes de poussins sont égales revient à dire que la somme $\pm m_2 \pm m_3 \pm \cdots \pm m_{2n+1}$ vaut 0.
On peut faire le même raisonnement pour toutes les lignes L_i, cela revient à mettre de côté le poussin numéro i, i.e. à considérer tous les sous-ensembles de $2n$ poussins possibles.
Ainsi, l'hypothèse de l'énoncé correspond bien au fait que $BX_0 = 0$ pour une certaine matrice B, avec comme contrainte supplémentaire que

$$\boxed{\text{chaque ligne de } B \text{ contient exactement } n \text{ nombres 1 et } n \text{ nombres } -1.}$$

3°) Notons $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, le $i$ème coefficient de la matrice colonne BY est égal à la somme des coefficients de la ligne L_i de la matrice B. Grâce à la contrainte supplémentaire, on en déduit que $\boxed{\text{la matrice } Y \text{ de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{Z}) \text{ est une solution non nulle du système } (S)}$.

$Y \neq 0$ et $BY = 0$ donc la matrice B n'est pas inversible.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B) \neq \{0\}$, soit encore $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geq 1}$.

4°) $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z})$ et est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \pm 1 & \dots & \dots & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$1 = 1$ [2] et $-1 = 1$ [2] donc $M = A_{2n}$ [2].

En utilisant le prérequis, on en déduit que $\det(M) = \det(A_{2n})$ [2].

Or, par la question 1, $\det(A_{2n}) = (-1)^{2n-1}(2n-1) = 1 - 2n$ puisque $2n - 1$ est impair.

Or $1 - 2n$ est impair donc $\det(A_{2n}) = 1$ [2]. Donc $\det(M) = 1$ [2].

Ce qui signifie que $\det(M)$ est un entier impair.

En particulier, il n'est pas nul : $\det(M) \neq 0$.

Donc, $\boxed{\text{la matrice } M \text{ est inversible.}}$

5°) Par le théorème du rang appliqué à B : $2n + 1 = \mathrm{rg}(B) + \dim(\mathrm{Ker}(B))$.

Donc, $\mathrm{rg}(B) = 2n+1-\dim(\mathrm{Ker}(B))$. Or $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geq 1$ par la question 3 donc $\mathrm{rg}(B) \leq 2n$.

On note $C_1, \dots, C_{2n}$ les $2n$ premières colonnes de B.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

On suppose que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j C_j = 0$.

On note $C'_1, \dots, C'_{2n}$ les colonnes issues de $C_1, \dots, C_{2n}$ en supprimant le dernier coefficient.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j C'_j = 0$.

Or, $C'_1, \dots, C'_{2n}$ sont toutes les colonnes de M. Comme M est inversible, la famille de ses colonnes est libre. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{2n} = 0$.

Ainsi, la sous-famille $(C_1, \dots, C_{2n})$ des colonnes de B est libre.

$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_{2n}, C_{2n+1}) \geq \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_{2n})$.

Or $\mathrm{rg}(C_1, \dots, C_{2n}) = 2n$ par liberté de $(C_1, \dots, C_{2n})$. Ainsi, $\mathrm{rg}(B) \geq 2n$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{rg}(B) = 2n}$.

6°) Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B)$ est une droite vectorielle.

Comme $Y \in \mathrm{Ker}(B)$ et $Y \neq 0$, Y est une base de $\mathrm{Ker}(B)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}(Y)$.

Or $X_0 \in \mathrm{Ker}(B)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $X_0 = \lambda Y$ donc, pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, $m_i = \lambda$.

En particulier, $\boxed{\text{toutes les masses des poussins sont égales}}$.