Chapitre 1.B. Premières fonctions usuelles.

1 Fonctions polynomiales

Par exemple, $x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 7$ est une fonction polynomiale (notion différente de celle de polynôme, qui est plus générale ; c.f. second semestre).
Plus généralement, on appelle fonction polynômiale réelle toute fonction de la forme

où $n \in \mathbb{N}$ et où les a_i sont des réels, appelés coefficients.
On admet provisoirement que "deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients", ce qui signifie :

$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right) \Longleftrightarrow$

On dit qu'un réel λ est racine de $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ si $a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$.
C'est équivalent à la possibilité de mettre $(x - \lambda)$ en facteur dans $f(x)$, i.e. à :

À savoir faire : factorisation d'un polynôme de degré 3 à l'aide d'une racine évidente
Factoriser $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Démonstration 1

Lorsque f est de la forme $x \mapsto a_1 x + a_0$, il s'agit plus précisément d'une fonction affine.

2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissances

2.a Fonction logarithme népérien

Définition :

On appelle logarithme népérien la fonction suivante :

Proposition :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.
- ln est strictement croissante.
- $\forall x \in \,]0,1[,\ \ln(x) < 0$; $\quad \forall x \in \,]1,+\infty[,\ \ln(x) > 0$.

Démonstration 2

Proposition : Propriété fondamentale

Démonstration 3

⚠ Avant de transformer $\ln(ab)$, assurez-vous que a et b sont strictement positifs (ils pourraient être tous les deux strictement négatifs, et alors la propriété est grossièrement fausse).

Corollaire :

- $\forall\, a > 0,\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\forall\, a > 0,\ \forall\, b > 0,\ \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall\, a > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$

Démonstration 4

Proposition : Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x =$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} =$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} =$

Graphe de ln :

Définition :

On appelle logarithme décimal et on note $\log_{10}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

On appelle logarithme en base 2 et on note $\log_2$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

De manière générale, on peut définir le logarithme en base t (avec $t > 0$), il s'agit de la fonction ln multipliée par la constante $\dfrac{1}{\ln(t)}$. On a donc des propriétés similaires à celles de ln, en particulier $\log_2(1) = \log_{10}(1) = 0$, $\log_t(ab) = \log_t(a) + \log_t(b)$, pour a, b dans $\mathbb{R}_+^*$...
Par construction, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_2(2) = 1$, et, mieux : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^n) = n$, $\log_2(2^n) = n$.

2.b Fonction exponentielle

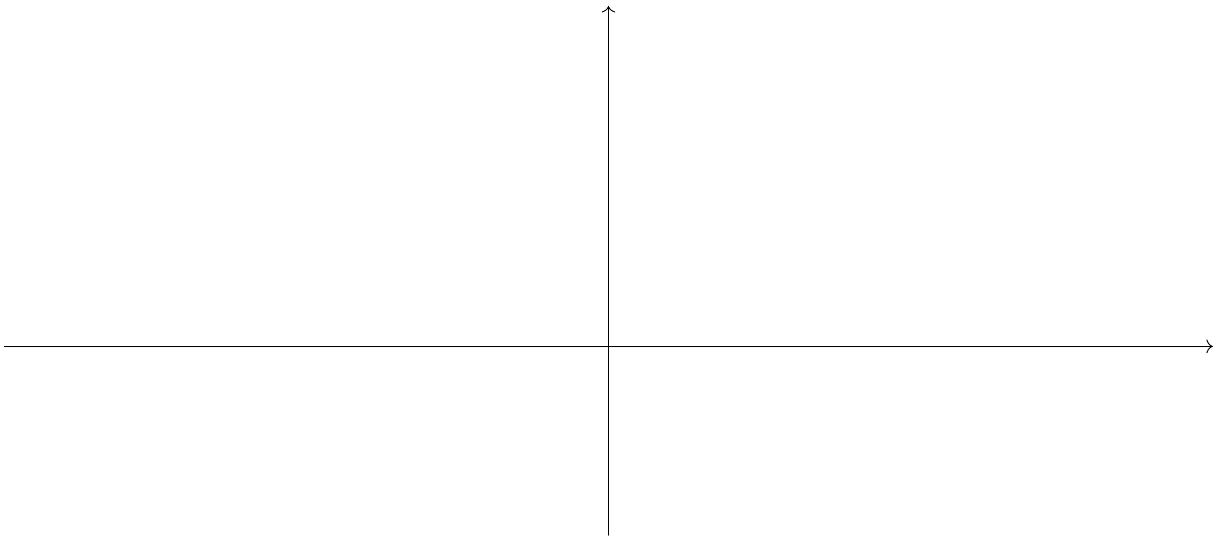
Définition :

La fonction ln est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\ln(\mathbb{R}_+^*)$, i.e. de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Sa réciproque est appelée exponentielle et notée exp.
On a donc $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Conséquence fondamentale :

$$\forall\, x > 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad y = \ln x \Longleftrightarrow x = \exp(y).$$

Les graphes de exp et ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



Proposition :

- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.
- exp est strictement croissante.
- $\forall\, x \in \,]-\infty, 0[,\ \exp(x) < 1$; $\quad \forall\, x \in \,]0, +\infty[,\ \exp(x) > 1$.

Démonstration 5

Proposition :

(Propriété fondamentale)

Démonstration 6

Corollaire :

- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exp(na) = (\exp(a))^n$.

Démonstration 7

Proposition : Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} =$

2.c Fonctions puissances

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la puissance α pour un réel strictement positif de la façon suivante :

Remarques :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve la notion de puissance connue.
- De même si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$:
- Avec cette définition, la propriété de ln vis-à-vis de la puissance se généralise au cas $\alpha \in \mathbb{R}$:
  Pour tout $x > 0$, $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$.

Proposition :

Soient x et y des réels strictement positifs, α, β des réels.

- $x^0 = 1$, $x^1 = x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Démonstration 8

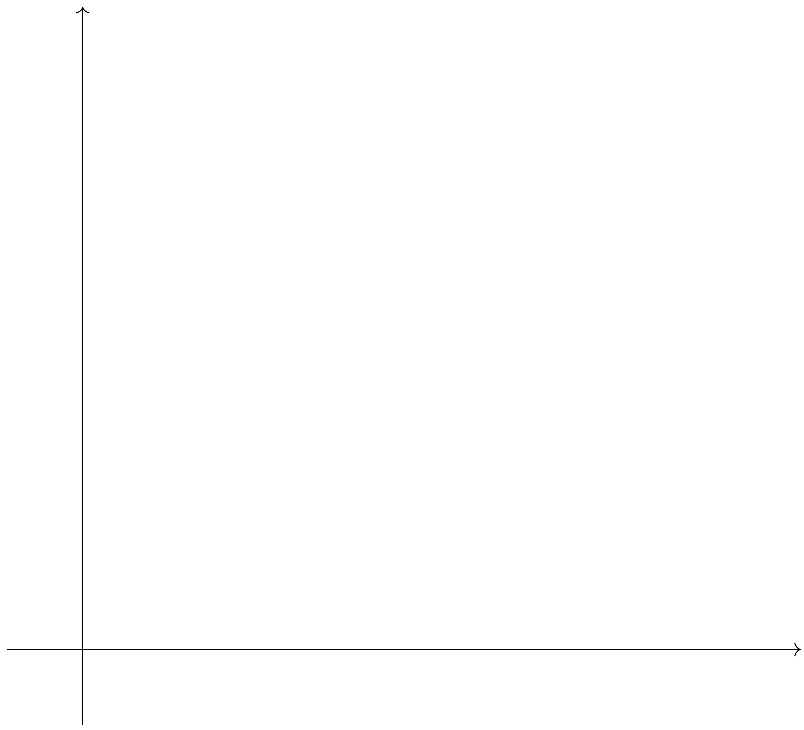
Proposition :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha \colon x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration 9

Allure des graphes :



Puissance $\frac{1}{n}$:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$.

Comme pour tout $x > 0$, $(x^{\frac{1}{n}})^n = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est en fait la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$ (qui réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$).

Exemples : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x}$, noté $\sqrt{x}$.
$\sqrt[3]{8} =$

Prolongement de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

- Par convention, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Pour n impair (uniquement), la fonction $f : x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (exo !).
  La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ peut donc être définie sur $\mathbb{R}$ comme réciproque de $f : x \mapsto x^n$.
  Par exemple, $\sqrt[3]{-8} =$

Remarque : notation e^x **pour** $\exp(x)$

On pose $e = \exp(1)$ (environ $2,72$), de sorte que
Alors, par définition de la puissance,

2.d Croissances comparées

Proposition :

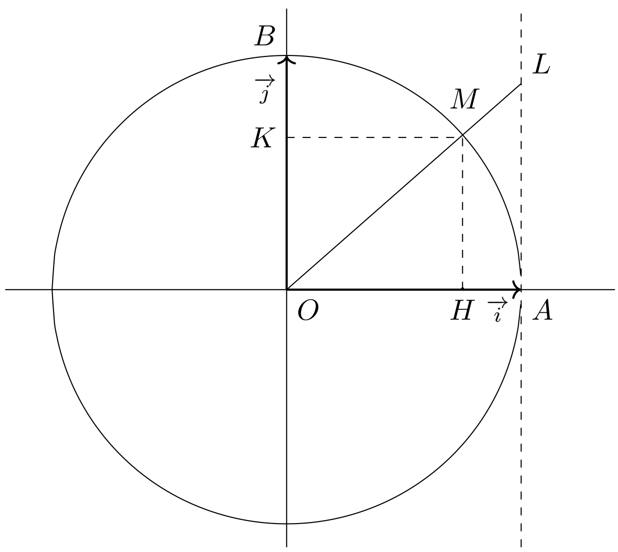
Soient α et β deux réels tels que

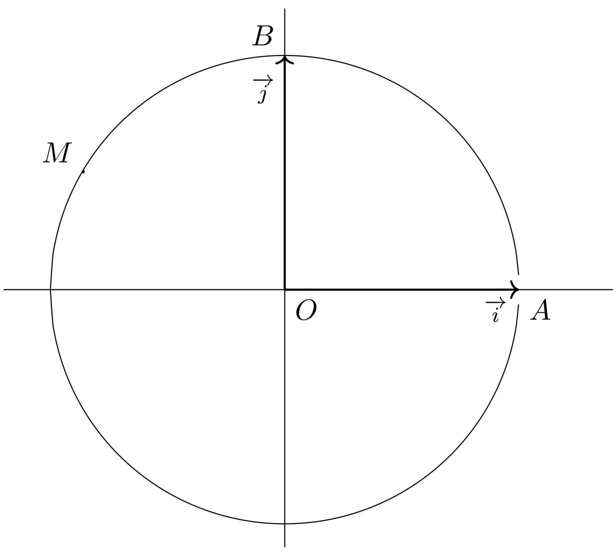
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

3 Fonctions trigonométriques

3.a Définitions, propriétés de base

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).
Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ vaut x.
On a (en mesure algébrique) : $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$, $\tan(x) = \overline{AL}$ (si $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$)





Proposition :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
-
-

Démonstration 10

Les angles x et $x + 2\pi$ correspondent au même point M donc : sin, cos et tan sont

3.b Valeurs d'annulation, conditions d'égalité

Rappel : $y = x[Q]$ signifie :

- Valeurs d'annulation de cos :

$$\cos(x) = 0 \iff$$
$$\iff$$

  Version plus concise : $\cos(x) = 0 \iff$

- Valeurs d'annulation de sin :

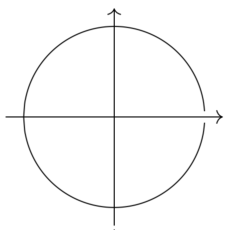
$$\sin(x) = 0 \iff$$
$$\iff$$

  Version plus concise : $\sin(x) = 0 \iff$

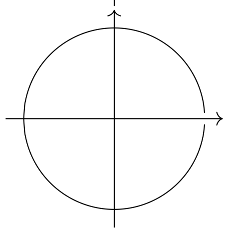
- Valeurs d'annulation de tan :

- Conditions d'égalité :

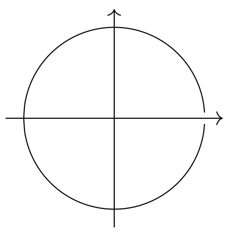
$$\cos x = \cos y \iff$$



$$\tan x = \tan y \iff$$



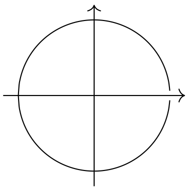
$$\sin x = \sin y \iff$$



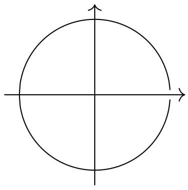
3.c Relations élémentaires

Sous réserve de définition :

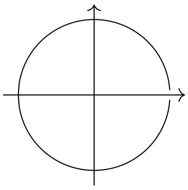
$\cos(-x) =$
$\sin(-x) =$
$\tan(-x) =$



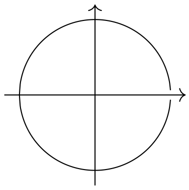
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) =$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) =$



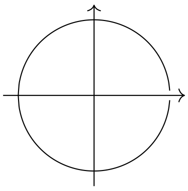
$\cos(\pi - x) =$
$\sin(\pi - x) =$
$\tan(\pi - x) =$



$\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$

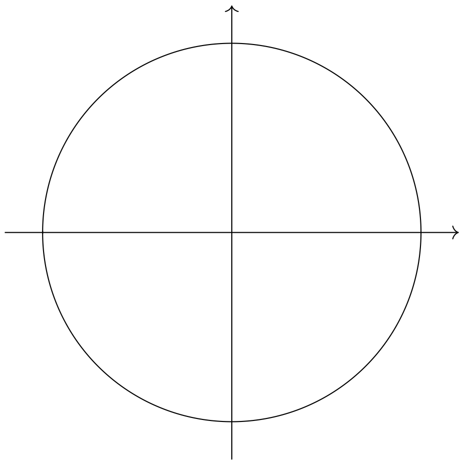


$\cos(\pi + x) =$
$\sin(\pi + x) =$
$\tan(\pi + x) =$



3.d Valeurs particulières à connaître

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					



3.e Dérivées et graphes

Proposition :

(Une limite de référence) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Démonstration 1

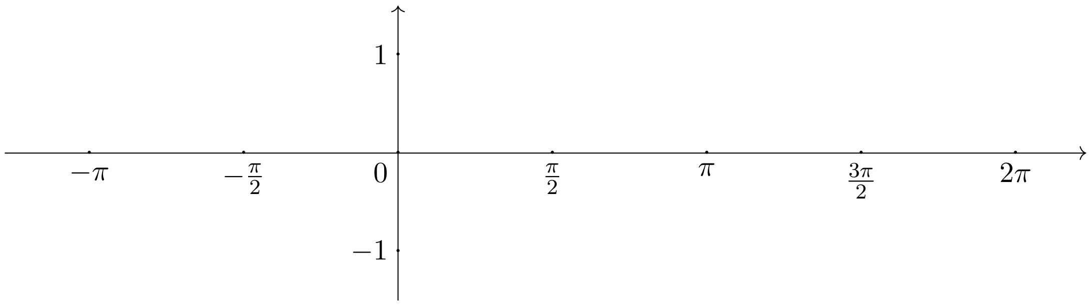
Proposition :

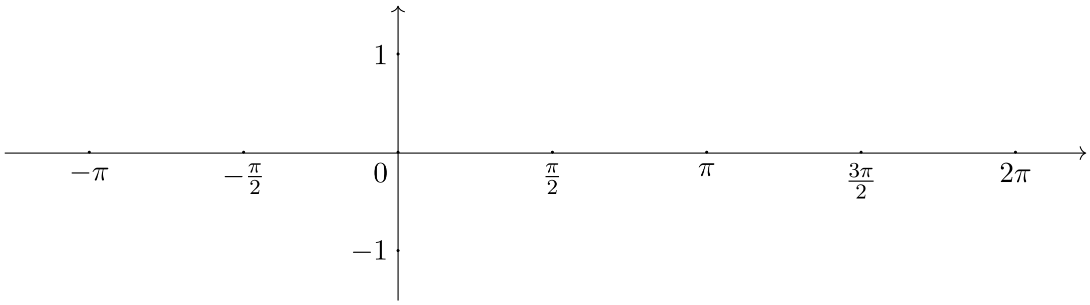
cos, sin, tan sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et :

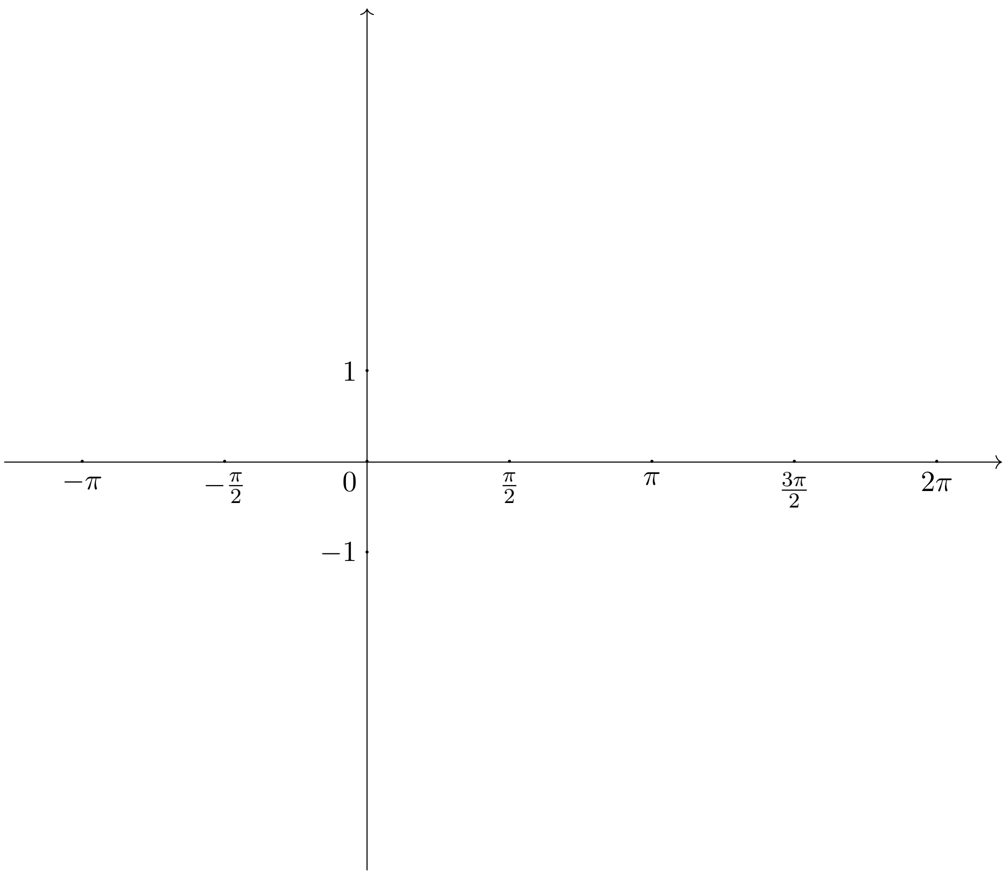
Démonstration 11

Proposition :

(Parités et périodicités)







3.f Formules trigonométriques

(Sous réserve de définition - attention aux tangentes !)

Celles à connaître par cœur

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \\ \cos(a-b) &= \\ \sin(a+b) &= \\ \sin(a-b) &= \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \tan(a+b) &= \\ \tan(a-b) &= \end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \\ &= \\ &= \\ \\ \sin(2x) &= \\ \\ \tan(2x) &= \end{aligned}$$

On tire des formules de $\cos(2x)$ les importantes formules de linéarisation suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \\ \sin^2(x) &= \end{aligned}$$

Démonstration 12

Celles à savoir retrouver

Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right) \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right) \end{aligned}$$

Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration 13

Celles hors programme

Expressions en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, sous réserve de définition,

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Démonstration 14

Plan du cours

1 Fonctions polynomiales **1**

2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissances **1**

2.a Fonction logarithme népérien 1
2.b Fonction exponentielle 3
2.c Fonctions puissances 4
2.d Croissances comparées 6

3 Fonctions trigonométriques **6**

3.a Définitions, propriétés de base 6
3.b Valeurs d'annulation, conditions d'égalité 7
3.c Relations élémentaires 8
3.d Valeurs particulières à connaître 8
3.e Dérivées et graphes 8
3.f Formules trigonométriques 10