Correction du devoir surveillé 3.

Exercice 1

1°) Soit z un nombre complexe de module 1. Alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$. $z + \dfrac{1}{z} = z + \overline{z}$ donc $\boxed{z + \dfrac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)}$.

2°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^5 + 1 = 0 &\Longleftrightarrow z^5 = -1\\
&\Longleftrightarrow z^5 = e^{i\pi}\\
&\Longleftrightarrow z^5 = \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5\\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{5}}}\right)^5 = 1\\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\frac{2k\pi}{5}}\\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\quad z = e^{i\frac{\pi}{5}}e^{i\frac{2k\pi}{5}}\\
&\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\quad z = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} / k \in \{0,\dots,4\}\right\}}$.

Ce sont bien des $\boxed{\text{complexes de module 1}}$, et pour $k = 0$ on trouve bien la valeur $\boxed{e^{i\frac{\pi}{5}}}$.

3°) **a)** Soit $z \in \mathbb{C}$.
On rappelle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, $u^5 - v^5 = (u - v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4)$.
$z^5 + 1 = z^5 - (-1)^5 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$.
Donc $\boxed{Q : z \mapsto z^4 - z^3 + z^2 - z + 1}$ convient. Q est bien une fonction polynomiale.
Remarque : On pouvait aussi chercher la fonction Q à l'aide de coefficients indéterminés.

b) $Q(0) = 1$ donc $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $Z = z + \dfrac{1}{z}$.

$$\begin{aligned}
(F) :\ Z^2 - Z - 1 = 0 &\Longleftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} - 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow z^4 + 2z^2 + 1 - z^3 - z - z^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Q(z) = 0 \iff (F) :\ Z^2 - Z - 1 = 0}$.

c) L'équation de degré 2 (F) a pour discriminant $\Delta = 5$, ses racines sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
D'après la question 2, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ est solution de (E).
Or, $(E) \iff z = -1$ ou $Q(z) = 0$. Comme $z_0 \neq -1$, il vient $Q(z_0) = 0$.

D'après la question précédente, on a donc $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme z_0 est de module 1, on obtient donc à l'aide de la question 1 : $\mathrm{Re}(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)$.

Or $\mathrm{Re}(z_0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

$\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \geq 0$. Comme $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (puisque $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$), on en tire finalement que $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

d) $\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)} = 1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{16}{(1+\sqrt{5})^2} - 1 = \frac{16}{6+2\sqrt{5}} - 1 \\
&= \frac{8}{3+\sqrt{5}} - 1 = \frac{8(3-\sqrt{5})}{9-5} - 1 \\
&= 2(3-\sqrt{5}) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 5 - 2\sqrt{5}$. Or $\dfrac{\pi}{5} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ donc $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$.

4°) $C = \mathrm{Re}(S)$ où $S = e^{ia} + e^{i(a+\varphi)} + e^{i(a+2\varphi)}$.

$$\begin{aligned}
S &= e^{ia}(1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi}) = e^{ia}(1 + e^{i\varphi} + (e^{i\varphi})^2) \\
&= e^{ia}\frac{1-(e^{i\varphi})^3}{1-e^{i\varphi}} \qquad \text{car } e^{i\varphi} \neq 1 \text{ puisque } \varphi \in]0, 2\pi[\\
&= e^{ia}\frac{1-e^{i3\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{3\varphi}{2}}(e^{-i\frac{3\varphi}{2}} - e^{i\frac{3\varphi}{2}})}{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}})} \\
&= e^{ia}e^{i\varphi}\frac{-2i\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = e^{i(a+\varphi)}\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\
&= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cos(a+\varphi)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sin(a+\varphi)}_{\in\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{C = \cos(a+\varphi)\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}}$.

5°) On pose $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$.

Alors $\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) = \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) = \cos(\theta) + \cos(3\theta) - 1$ car $\cos(\pi) = -1$.

D'autre part, $\cos(a+\varphi)\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)} = \cos(3\theta)\dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)}$.

Or $\sin(6\theta) = \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin(\theta)$.

Donc, par la question précédente, $\cos(\theta) + \cos(3\theta) - 1 = -\frac{1}{2}$.

Donc, $\boxed{\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}}$.

6°) D'après une formule d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos(\theta)\cos(3\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \times \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i4\theta}+e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\cos(4\theta)+2\cos(2\theta)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}{2}}$$

Or, $\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos(\theta)$.

D'autre part, $\cos(2\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos(3\theta)$.

Ainsi, $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{2}(\cos(\theta)+\cos(3\theta))$.

En utilisant la question précédente, $\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}}$.

7°) $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$ sont les solutions de l'équation $X^2 - (\cos(\theta)+\cos(3\theta))X + \cos(\theta)\cos(3\theta) = 0$ i.e. de $\boxed{X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0}$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Ses racines sont $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Or $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\theta) \geq 0$. Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, il vient : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

8°) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il est clair que $z = i$ n'est pas solution de (E) (car $(2i)^5 \neq 0$).
On peut donc supposer $z \neq i$ et écrire :

$$\begin{aligned}P(z) = 0 &\iff (z+i)^5 - (z-i)^5 = 0 \\ &\iff (z+i)^5 = (z-i)^5 \\ &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \qquad \text{car } z \neq i \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\ \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\ z+i = e^{i\frac{2k\pi}{5}}(z-i) \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,4\},\ z(1-e^{i\frac{2k\pi}{5}}) = -i - ie^{i\frac{2k\pi}{5}}\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, l'équation devient $0 = -2i$: exclu. Donc,

$$\begin{aligned}P(z) = 0 &\iff \exists\, k \in \{1,\dots,4\},\ z(1-e^{i\frac{2k\pi}{5}}) = -i - ie^{i\frac{2k\pi}{5}} \\ &\iff \exists\, k \in \{1,\dots,4\},\ z = \underbrace{\frac{i(1+e^{i\frac{2k\pi}{5}})}{e^{i\frac{2k\pi}{5}}-1}}_{\text{noté } z_k} \qquad \text{car } e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1 \neq 0\end{aligned}$$

Pour $k \in \{1, \dots, 4\}$,
$$z_k = \frac{ie^{i\frac{k\pi}{5}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{5}} + e^{i\frac{k\pi}{5}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{5}}\left(e^{i\frac{k\pi}{5}} - e^{-i\frac{k\pi}{5}}\right)} = \frac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \text{ car } \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) \neq 0.$$
Donc les solutions sont, en utilisant la π-périodicité de tan et l'imparité de tan :
$$\boxed{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}} ; \boxed{\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} ; \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right)} = \boxed{-\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} ; \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5} - \pi\right)} = \boxed{-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$$
En particulier, les solutions sont toutes réelles.

9°) Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned} P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) &= \frac{1}{2i}\Big[z^5 + 5iz^4 + 10i^2z^3 + 10i^3z^2 + 5i^4z + i^5 \\ &\qquad - \left(z^5 - 5iz^4 + 10i^2z^3 - 10i^3z^2 + 5i^4z - i^5\right)\Big] \\ &\qquad\qquad \text{par la formule du binôme de Newton} \\ &= \frac{1}{2i}\left[10iz^4 + 20i^3z^2 + 2i^5\right] = \frac{1}{2i}\left[10iz^4 - 20iz^2 + 2i\right] \end{aligned}$$
$$\boxed{P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1}$$
Ainsi, $P(z) = 0 \iff 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$ donc $\boxed{(G) \iff 5Z^2 - 10Z + 1 = 0}$.

10°) $5Z^2 - 10Z + 1$ est un trinôme du second degré en Z, à coefficients réels, de discriminant : $\Delta = 100 - 20 = 80 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$. Donc ses racines sont $\dfrac{10 + 4\sqrt{5}}{10} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

À l'aide de la question précédente, on obtient :
$$(G) \iff z^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ou } z^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$
Comme $\sqrt{5} > 2$ (car $5 > 4$), $1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ sont strictement positifs, on retrouve bien 4 solutions réelles pour (G) :
$$\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} ; -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} ; \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} ; -\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$
On constate que (G) a exactement deux solutions strictement positives. Comparons avec la question 8 : comme $\tan > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, ce sont nécessairement $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$.

Comme tan est strictement croissante et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} > \dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$.

On en déduit :
$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \text{ et } \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$
Simplifions :
$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}} \text{ donc } \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$
$$\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}} \text{ donc } \boxed{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

Exercice 2

1°) • La fonction cos ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ est bien définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par quotient, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, qui est bien un intervalle.

Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, f est l'unique primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ qui s'annule en 0.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[}$, et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}.}$

• La fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

ch est continue sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, qui est bien un intervalle.

Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{g \text{ est bien définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}.}$

2°) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On pose $u = \sin t$; la fonction sin est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment formé par 0 et x.

On a alors $\mathrm{d}u = \cos t \,\mathrm{d}t$.

Lorsque $t = 0$, $u = 0$, et lorsque $t = x$, $u = \sin(x)$.

On a :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1 - \sin^2 t} \cos t \,\mathrm{d}t$$

Donc, par changement de variable : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} \frac{1}{1-u^2} \,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\sin x} \frac{1}{2} \frac{1-u+1-u}{1-u^2} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sin x} \left(\frac{1-u}{(1-u)(1+u)} + \frac{1+u}{(1-u)(1+u)} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sin x} \left(\frac{1}{1+u} - \frac{-1}{1-u} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(|1+u|) - \ln(|1-u|) \right]_0^{\sin x} \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \right]_0^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)}$ car pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $-1 < \sin x < 1$

3°) • f est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ puisqu'elle y est dérivable ;

• $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est bien un intervalle ;

• et f est strictement croissante puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle : pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} > 0$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[$.
On calcule ces limites à l'aide de l'expression de f obtenue à la question précédente :
$\sin(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -1$, donc $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \underset{x\to-\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, on en tire que $f(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -\infty$.
$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$, et sin reste toujours en dessous de 1, donc $1-\sin x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ en restant positif, et $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$. Comme $\ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en tire que $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{f \text{ est bien bijective de } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ dans } \mathbb{R}.}$

4°) a) Soit $a > 0$.

$$\operatorname{ch}(\ln a) = \frac{e^{\ln a} + e^{-\ln a}}{2} = \frac{a + \frac{1}{a}}{2} = \boxed{\frac{a^2+1}{2a}}.$$

b) Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculons $\operatorname{ch}(f(x))$ à l'aide de l'expression trouvée en question 2 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(f(x)) &= \operatorname{ch}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}^2 + 1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + 1}{2\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}} \qquad \text{car on a bien } 1+\sin x > 0 \text{ et } 1-\sin x > 0 \\
&= \frac{\frac{1+\sin x + 1 - \sin x}{1-\sin x}}{2\sqrt{1+\sin x}}\sqrt{1-\sin x} \\
&= \frac{2}{2(1-\sin x)\sqrt{1+\sin x}}\sqrt{1-\sin x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}\sqrt{1+\sin x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}
\end{aligned}$$

Or $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(x) > 0$ donc $\operatorname{ch}(f(x)) = \dfrac{1}{\cos x}$.
Ainsi, on a bien, à l'aide de la question 1 :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \operatorname{ch}(f(x)) = f'(x)}$$

5°) Comme f et g sont dérivables là où elles sont définies, $g \circ f$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= f'(x)g'\left(f(x)\right)\\ &= \operatorname{ch}\left(f(x)\right)\frac{1}{\operatorname{ch}\left(f(x)\right)} \qquad \text{d'après la question précédente et la question 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{(g\circ f)'(x)=1}$$

Comme $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est un intervalle, on en tire qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ (g\circ f)(x)=x+C$$

Or $(g\circ f)(0)=g\left(f(0)\right)=g(0)=0$ (intégrales dont les deux bornes sont identiques). Donc $C=0$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall\, x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ (g\circ f)(x)=x}$$

6°) Soit $y\in\mathbb{R}$. Posons $x=f^{-1}(y)$, on sait que $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. D'après la question précédente :

$$(g\circ f)(x)=x \text{ i.e. } g\left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)=f^{-1}(y)$$

Mais $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, donc on obtient $\boxed{g(y)=f^{-1}(y), \text{ ceci pour tout } y\in\mathbb{R}.}$

7°) Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre, avec $f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On a donc :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall y\in\mathbb{R},\quad y=f(x)\iff x=g(y)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall y\in\mathbb{R},\quad y=\int_0^x\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \iff x=\int_0^y\frac{1}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 3

1°) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On peut l'écrire sous forme normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E)\iff\forall x>0,\ y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=3x$$

- On résout l'équation homogène associée $(H):\forall x>0, y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=0$.
  Les solutions sont les fonctions $x\mapsto\lambda e^{-\psi(x)}$ où ψ est une primitive de $x\mapsto-\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On choisit $\psi:x\mapsto-\ln(|x|)$ ie $x\mapsto-\ln(x)$.
  Pour tout $x>0$, $e^{-\psi(x)}=e^{\ln x}=x$.
  Donc les solutions de (H) sont les fonctions $x\mapsto\lambda x$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.
- Cherchons une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
  On pose $y:x\mapsto\lambda(x)x$ où $\lambda:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est dérivable.

y est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $y'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x)$.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x > 0, y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 3x \\ &\iff \forall x > 0, \lambda'(x)x = 3x \\ &\iff \forall x > 0, \lambda'(x) = 3 \end{aligned}$$

Prenons $\lambda : x \mapsto 3x$; d'après les équivalences ci-dessus, $x \mapsto 3x^2$ est une solution de (E).

- Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{x \mapsto 3x^2 + \lambda x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

2°) a) f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$ et, $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0, F'(x) = f(x).}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$f \in \mathcal{S}$ donc $f(x) = 2\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t + x^2$.
Donc, $xf(x) = 2\displaystyle\int_0^1 f(tx)x\,\mathrm{d}t + x^3$.
On pose $u = tx$. $t \mapsto tx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
On note : $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$.
Si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = 1$ alors $u = x$.
Donc, par le théorème de changement de variables, $\displaystyle\int_0^1 f(tx)x\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = F(x)$.
Finalement, $\boxed{xf(x) = x^3 + 2F(x)}$.

c) $\forall x > 0, f(x) = x^2 + \dfrac{F(x)}{x}$.
$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
Revenons à l'écriture : $\forall x > 0, xf(x) = x^3 + 2F(x)$.
$x \mapsto xf(x)$ et $x \mapsto x^3 + 2F(x)$ sont dérivables donc, pour tout $x > 0$;
$f(x) + xf'(x) = 3x^2 + 2F'(x)$. Or $F'(x) = f(x)$ donc $xf'(x) - f(x) = 3x^2$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

d) Ainsi, par 1., on en déduit : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = 3x^2 + \lambda x$.
De plus, $f \in \mathcal{S}$ donc $f(1) = 1$ d'où $1 = 3 + \lambda$ donc $\lambda = -2$.
Pour tout $x > 0, f(x) = 3x^2 - 2x$.
Or f et $x \mapsto 3x^2 - 2x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ dont l'égalité est encore valable en 0.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 3x^2 - 2x}$.

3°)
- On a vu que si $f \in \mathcal{S}$ alors f est la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x$.
- Réciproquement, on pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 - 2x \end{array}$.

  f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(1) = 1$.
  $\forall x \in \mathbb{R}_+$,
  $$\begin{aligned} \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3x^2t^2 - 2tx)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[x^2t^3 - xt^2\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= x^2 - x \end{aligned}$$
  Ainsi, $2\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t + x^2 = 2x^2 - 2x + x^2 = 3x^2 - 2x = f(x)$.
  Donc, $f \in \mathcal{S}$.
- Finalement, $\boxed{\text{il y a un seul élément dans } \mathcal{S}, \text{ la fonction } x \mapsto 3x^2 - 2x}$.