Corrigé du devoir maison 9.

Exercice

Structure d'espace vectoriel

1°) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x^2 + 2x + 1 + z - 4y = x^2 - 2x + 1 \\ &\iff 4x - 4y + z = 0 \\ &\iff z = -4x + 4y \end{aligned}$$

Donc $F = \{(x, y, -4x + 4y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -4) + y(0, 1, 4) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
On reconnaît $F = \text{Vect}(\,(1, 0, -4), (0, 1, 4)\,)$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2°) On note $u = (1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0)$. $u \in F$ et $v \in F$.
Or $u + v = (1, 1, 0) \notin F$. F n'est pas stable pour $+$.
Donc $\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

3°) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

★ $F \subset E$

★ On note $f : x \mapsto 0$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f - f \in F$. Ainsi $F \neq \varnothing$.

★ Soit $(h_1, h_2) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\underbrace{\lambda h_1 + h_2}_{\text{noté } h} \in F$.

h_1 et h_2 s'écrivent : $\begin{cases} h_1 = f_1 - g_1 \\ h_2 = f_2 - g_2 \end{cases}$ où les fonctions f_i et g_i sont croissantes sur $\mathbb{R}$.
$h = \lambda(f_1 - g_1) + f_2 - g_2 = \lambda f_1 - \lambda g_1 + f_2 - g_2$.
Supposons $\lambda \geq 0$. Alors λf_1 et λg_1 sont croissantes sur $\mathbb{R}$.
$h = (\lambda f_1 + f_2) - (\lambda g_1 + g_2)$.
$\lambda f_1 + g_1$ et $\lambda f_2 + g_2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions croissantes.
Ainsi, $h \in F$.

Supposons $\lambda < 0$. Alors $-\lambda > 0$ donc $(-\lambda)f_1$ et $(-\lambda)g_1$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$.
$h = (f_2 + (-\lambda)g_1) - (g_2 + (-\lambda)f_1)$.
$f_2 + (-\lambda)g_1$ et $g_2 + (-\lambda)f_1$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions croissantes.
Donc $h \in F$.
Dans les 2 cas, $h \in F$.

Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

4°) ★ Soit $u \in F \cap G$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} u_{n+2} &= -u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$ donc $-u_{n+1} + 2u_n = u_{n+1} + 6u_n$ d'où $2u_{n+1} = -4u_n$ *i.e.* $u_{n+1} = -2u_n$.
u est donc une suite géométrique de raison -2 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0(-2)^n$.
Ainsi, $u \in \text{Vect}(\alpha)$ où α est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (-2)^n$.
Donc, $F \cap G \subset \text{Vect}(\alpha)$.

★ Réciproquement, soit $u \in \mathrm{Vect}(\alpha)$. Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-2)^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n &= \lambda((-2)^{n+2} + (-2)^{n+1} - 2 \times (-2)^n) \\ &= \lambda(-2)^n(4 - 2 - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = \lambda(-2)^n(4 + 2 - 6) = 0$.
Ainsi, $u \in F$ et $u \in G$: $u \in F \cap G$.
Donc, $\mathrm{Vect}(\alpha) \subset F \cap G$.

Ainsi, $\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}(\alpha)}$. Comme α n'est pas la suite nulle, $\boxed{F \cap G \text{ est une droite vectorielle}}$.

5°) ★ On a bien $\{0\} \subset F \cap H$.

★ Réciproquement, soit $u \in F \cap H$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} u_{n+2} &= -u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$ donc $-u_{n+1} + 2u_n = 2u_{n+1} + 3u_n$ d'où $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{3}$.
u est donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = u_0 \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3} - 2\right) = -\dfrac{20}{9} u_0 \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
Or $u \in F$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$ donc $u_0 = 0$. Ainsi, u est la suite nulle.
Donc $F \cap H \subset \{0\}$.

Finalement $\boxed{F \cap H = \{0\}}$. Ce qui signifie que $\boxed{F \text{ et } H \text{ sont en somme directe}}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires et applications linéaires

6°) Remarque : $V = \mathrm{Ker}(f - i\mathrm{id}_E)$ et $W = \mathrm{Ker}(f + i\mathrm{id}_E)$, ce sont bien des sev de E.

Soit $x \in E$.

★ *Analyse* : On suppose que $x = v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$.
Alors, par linéarité de f, $f(x) = f(v) + f(w)$ donc $f(x) = iv - iw$.
On a alors : $\begin{cases} ix &= iv + iw \\ f(x) &= iv - iw \end{cases}$.
Donc, en sommant, $2iv = ix + f(x)$ donc $v = \dfrac{1}{2}(x - if(x))$.
v est donc unique. Puis $w = x - v = x - \dfrac{1}{2}(x - if(x)) = \dfrac{1}{2}(x + if(x))$.
Donc w est unique.
Si la décomposition existe alors elle est unique.

★ *Synthèse* : Réciproquement, on pose $\begin{cases} v = \dfrac{1}{2}(x - if(x)) \\ w = \dfrac{1}{2}(x + if(x)) \end{cases}$.

On a bien $v + w = x$.

De plus,

$$\begin{aligned}
f(v) &= \frac{1}{2}(f(x) - if^2(x)) \qquad \text{par } \mathbb{C}\text{-linéarité de } f \\
&= \frac{1}{2}(f(x) + ix) \qquad \text{car } f \circ f = -\operatorname{id}_E \\
&= \frac{i}{2}(x - if(x)) \\
&= iv
\end{aligned}$$

De même, $f(w) = \frac{1}{2}(f(x) + if^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - ix) = -\frac{i}{2}(x + if(x)) = -iw$.
Ainsi, $v \in V$ et $w \in W$.
D'où l'existence de la décomposition.

On a montré que $\boxed{E = V \oplus W}$.

Projection

7°) ★ Montrons que $p \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $(A, B) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
p(\lambda A + B) &= \frac{1}{2}(\lambda A + B + {}^{\mathrm{t}}(\lambda A + B)) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda A + B + \lambda\, {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B) \qquad \text{par linéarité de la transposition} \\
&= \frac{\lambda}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) + \frac{1}{2}(B + {}^{\mathrm{t}}B) \\
&= \lambda p(A) + p(B)
\end{aligned}$$

Donc p est linéaire. De plus, p va de E dans E. Donc $p \in \mathcal{L}(E)$.

On pouvait aussi remarquer que $p = \frac{1}{2} id_E + \frac{1}{2}\varphi$ *où* φ *est l'endomorphisme de* E $A \mapsto {}^tA$*, donc* p *est une combinaison linéaire d'endomorphismes de* E*, c'est donc un endomorphisme de* E*.*

★ Montrons que $p \circ p = p$.
Soit $A \in E$.

$$\begin{aligned}
p \circ p(A) &= p(p(A)) \\
&= \frac{1}{2}(p(A) + {}^{\mathrm{t}}p(A)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) + \frac{1}{2}({}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A))\right) \text{ par linéarité de la transposition} \\
&= \frac{1}{4}\left(A + {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}A + A\right) \\
&= \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) \\
&= p(A)
\end{aligned}$$

Ainsi, $p \circ p = p$.

On en déduit que $\boxed{p \text{ est un projecteur de } E}$.
p est nécessairement la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.
Or $\operatorname{Im}(p) = \{A \in E / p(A) = A\}$ et $\operatorname{Ker}(p) = \{A \in E / p(A) = 0\}$.

Soit $A \in E$.

$$\begin{aligned} p(A) = A &\iff \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) = A \\ &\iff A + {}^{\mathrm{t}}A = 2A \\ &\iff A = {}^{\mathrm{t}}A \\ &\iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p(A) = 0 &\iff A + {}^{\mathrm{t}}A = 0 \\ &\iff A = -{}^{\mathrm{t}}A \\ &\iff A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(p) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{p \text{ est la projection sur } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ parallèlement à } \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.