Correction du devoir surveillé 4.

Exercice 1

1°) (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- Son équation caractéristique est : $r^2 - 1 = 0 \iff r = 1$ ou $r = -1$.
  Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- 1 est solution simple de l'équation caractéristique, on pose donc $z_p : t \mapsto Ate^t$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  z_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$z_p'(t) = Ate^t + Ae^t \qquad z_p''(t) = Ate^t + Ae^t + Ae^t = Ate^t + 2Ae^t$$

$$\begin{aligned}
z_p \text{ solution de (F) sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad Ate^t + 2Ae^t - Ate^t = e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2A = 1 \qquad \text{car } e^t \neq 0 \\
&\iff A = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $t \mapsto \dfrac{t}{2}e^t$ est une solution de (F).
- Finalement, les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{2}e^t + \lambda e^t + \mu e^{-t} \end{array} \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

2°) a) $\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme composée de fonctions 2 fois dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{z'(t) = 2ty'(t^2)}$$

$$\boxed{z''(t) = 2y'(t^2) + 4t^2y''(t^2)}$$

b)

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = e^{\sqrt{x}} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ 4t^2y''(t^2) + 2y'(t^2) - y(t^2) = e^{\sqrt{t^2}} \\
&\qquad \text{car } t \mapsto t^2 \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ 4t^2y''(t^2) + 2y'(t^2) - y(t^2) = e^{|t|} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ z''(t) - z(t) = e^t
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } z \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y(t^2)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = z(\sqrt{x})$.

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff z \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ z(t) = \frac{t}{2}e^t + \lambda e^t + \mu e^{-t} \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}e^{\sqrt{x}} + \lambda e^{\sqrt{x}} + \mu e^{-\sqrt{x}} \\
&\qquad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{2}e^{\sqrt{x}} + \lambda e^{\sqrt{x}} + \mu e^{-\sqrt{x}} \end{array} \quad \text{où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Exercice 2

1°) Comme y est deux fois dérivable, y et y' sont dérivables, donc par somme z est dérivable et $z' = y'' + y'$. On a :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)y''(x) + (1+e^x)y'(x) - e^x y'(x) - e^x y(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)\big(y''(x) + y'(x)\big) - e^x\big(y'(x) + y(x)\big) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)z'(x) - e^x z(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}z(x) = 0 \\
&\iff \boxed{z \text{ solution de } (F)\ :\ z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}z(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

2°) Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{e^x}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\ln(1+e^x)$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+e^x > 0$.
Les solutions de (F) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{+\ln(1+e^x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, autrement dit les $\boxed{x \mapsto \lambda(1+e^x) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

3°) (G_1) admet comme solution particulière $\boxed{y_1 : x \mapsto 1}$:
en effet y_1 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_1'(x) + y_1(x) = 0 + 1 = 1$.
(G_2) admet comme solution particulière $\boxed{y_2 : x \mapsto \dfrac{e^x}{2}}$:
en effet y_2 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_2'(x) + y_2(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^x}{2} = e^x$.

4°)
- D'après les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda + \lambda e^x \\
&\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = \lambda.1 + \lambda e^x \\
&\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_\lambda) : y'(x) + y(x) = \lambda.1 + \lambda e^x
\end{aligned}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. (E_λ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Son équation homogène associée est (H_λ) : $y'(x) + y(x) = 0$, dont les solutions sont les $x \mapsto \mu e^{-x}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.
D'après le principe de superposition des solutions, $\lambda y_1 + \lambda y_2$ est une solution particulière de (E_λ).
On en tire que l'ensemble des solutions de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{x \mapsto \mu e^{-x} + \lambda.1 + \lambda\frac{e^x}{2}\ /\ \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \mu e^{-x} + \lambda.1 + \lambda\frac{e^x}{2}\ /\ \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$