Devoir surveillé 1.

Exercice 1

1°) Notons (E) : $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$.
Le domaine de définition de (E) est $[1, +\infty[$ puisque, pour x réel :
$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 1.$
Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \sqrt{2x+5} = 1 + \sqrt{x-1} \\
&\iff 2x+5 = (1+\sqrt{x-1})^2 \qquad \text{car } \begin{cases} \sqrt{2x+5} \geq 0 \\ 1+\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \\
&\iff 2x+5 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1 \\
&\iff x+5 = 2\sqrt{x-1} \\
&\iff (x+5)^2 = (2\sqrt{x-1})^2 \qquad \text{car } \begin{cases} x+5 \geq 0 \text{ puisque } x \geq 1 \\ 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \\
&\iff x^2 + 10x + 25 = 4(x-1) \\
&\iff x^2 + 6x + 29 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme réel du second degré obtenu vaut $\Delta = 36 - 4 \times 29 < 0$. Il n'y a donc pas de racines réelles.
Donc $\boxed{(E) \text{ n'a pas de solution.}}$

2°) On note $(*)$ l'inéquation $e^{-x}(2e^{-x} - 1) \leq 3$, bien définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(*) &\iff 2e^{-2x} - e^{-x} - 3 \leq 0 \\
&\iff 2X^2 - X - 3 \leq 0 \qquad \text{en posant } X = e^{-x}
\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme du second degré en X est $\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 3 = 25 = 5^2$.
Les racines du trinôme sont : $\dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1-5}{4} = -1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
(*) &\iff X \in \left[-1, \frac{3}{2}\right] \qquad \text{car le coefficient de } X^2 \text{ est strictement positif} \\
&\iff -1 \leq e^{-x} \leq \frac{3}{2} \\
&\iff e^{-x} \leq \frac{3}{2} \qquad \text{car } e^{-x} > 0 \\
&\iff -x \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \qquad \text{car ln est strictement croissante} \\
&\iff x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left[\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[}$.

Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = x$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_0 \text{ est une demi-droite, incluse dans première bissectrice } i.e. \text{ la droite d'équation } y = x}$.

2°) On suppose $k \neq 0$. Soit $x > 0$.

$$\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = \frac{x - k\sqrt{x}}{x} = 1 - \frac{k}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$\boxed{f_k \text{ n'est pas dérivable en 0 et } \mathcal{C}_k \text{ admet une tangente verticale en l'origine}}$.

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f_k(x) = x\left(1 - \frac{k}{\sqrt{x}}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$.

4°) Soit k' un réel tel que $k > k'$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$f_k(x) - f_{k'}(x) = x - k\sqrt{x} - (x - k'\sqrt{x}) = \sqrt{x}(k' - k) \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ est en-dessous de } \mathcal{C}_{k'}.}$

5°) **a)** f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0, f_k'(x) = 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f_k'(x) > 0 &\iff \sqrt{x} \geq \frac{k}{2} \\ &\iff x > \frac{k^2}{4} \quad \text{car } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \frac{k}{2} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De même, $f_k'(x) = 0 \iff x = \frac{k^2}{4}$

x	0		$\frac{k^2}{4}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	||	-	0	+	
f_k	0	↘	$-\frac{k^2}{4}$	↗	$+\infty$

Ainsi, $\boxed{f_k \text{ admet un minimum atteint en } a_k = \frac{k^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} f_k(a_k) = f_k\left(\frac{k^2}{4}\right) &= \frac{k^2}{4} - k\sqrt{\frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} \quad \text{car } k > 0 \\ &= -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La valeur du minimum est } -\frac{k^2}{4}}$.

b) Pour tout $k > 0, A_k\left(\frac{k^2}{4}, -\frac{k^2}{4}\right)$.

On en déduit que $\boxed{\text{tous les points } A_k \text{ sont situés sur la droite d'équation } y = -x.}$

c) $\mathcal{C}_k$ passe bien par l'origine.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f_k(x) = 0 &\iff x = k\sqrt{x} \\ &\iff x^2 = k^2 x \quad \text{car } \begin{cases} x \geq 0 \\ k\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \\ &\iff x(x-k^2) = 0 \\ &\iff x = k^2 \quad \text{car } x \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en-dehors de l'origine, $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ rencontre l'axe des abscisses en un unique point } B_k}$.

Son abscisse est $\boxed{b_k = k^2 = 4a_k}$.

d)

$$\begin{aligned} f_k'(b_k) = f_k'(k^2) &= 1 - \frac{k}{2\sqrt{k^2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \quad \text{car } k > 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La tangente à } \mathcal{C}_k \text{ en } B_k \text{ garde une direction fixe}}$.

$\boxed{\text{Elle est parallèle à la droite d'équation } y = \frac{x}{2}.}$

6°) a) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f_k'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}} > 0$ car $2\sqrt{x} \geq 0$ et $-k > 0$.

x	0		$+\infty$
f_k	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f_k'(x) = 2 &\iff \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}} = 2 \\ &\iff 2\sqrt{x} - k = 4\sqrt{x} \\ &\iff 2\sqrt{x} = -k \\ &\iff 4x = k^2 \quad \text{car } \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ -k \geq 0 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{k^2}{4}\right) &= \frac{k^2}{4} - k\sqrt{\frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} \quad \text{car } k \leq 0 \\ &= \frac{3k^2}{4} \end{aligned}$$

Le point $D_k\left(\dfrac{k^2}{4}, \dfrac{3k^2}{4}\right)$ est le seul point de $\mathcal{C}_k$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Les points D_k appartiennent à la droite d'équation $y = 3x$.

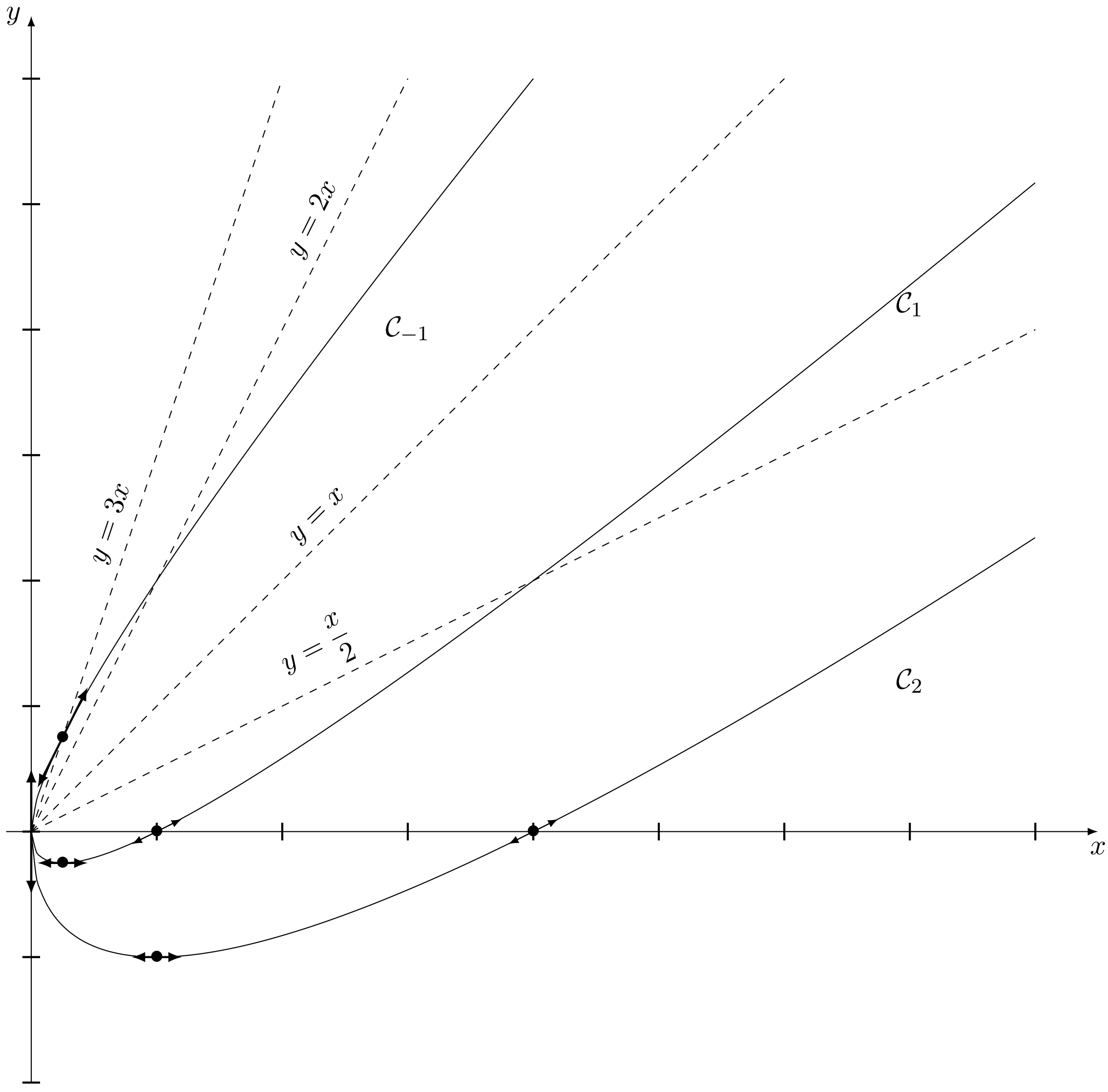
7°) Les points remarquables sont :

— pour $\mathcal{C}_{-1}$: $D_{-1}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$.

— pour $\mathcal{C}_1$: $A_1\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$ et $B_1(1, 0)$.

— pour $\mathcal{C}_2$: $A_2(1, -1)$ et $B_2(4, 0)$.

La courbe $\mathcal{C}_{-1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$ qui est elle-même au dessus de $\mathcal{C}_2$.



Exercice 3

1°) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables.

Et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \ln x \leq 1 \\ &\iff x \leq e \text{ car exp est strictement croissante} \\ f'(x) = 0 &\iff x = e \end{aligned}$$

De plus, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.

D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2°) a) On a $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $(2, 4)$ est solution évidente de $(*)$.

b) Soient a et b des entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} (*) &\iff \ln(a^b) = \ln(b^a) \text{ car ln est bijective} \\ &\iff b \ln a = a \ln b \\ &\iff \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \\ \Aboxed{(*) &\iff f(a) = f(b)} \end{aligned}$$

c) On suppose ici $a^b = b^a$ avec a et b entiers tels que $0 < a < b$.

Alors $f(a) = f(b)$ par la question précédente.

On veut montrer que $a < e < b$ ie $a < e$ et $e < b$.

Raisonnons par l'absurde, i.e. supposons $a \geq e$ ou $b \leq e$.

★ Supposons $a \geq e$. Alors $e \leq a < b$.
Comme f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, on en déduit : $f(a) < f(b)$. Exclu puisque $f(a) = f(b)$.

★ Supposons $b \leq e$. Alors $0 < a < b \leq e$.
Comme f est strictement croissante sur $]0, e]$, on a : $f(a) < f(b)$. Exclu.

On en déduit alors $\boxed{a < e < b}$.

d) Raisonnons par double implication.

★ Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$ et $a^b = b^a$. Alors, par 2c, $a < e < b$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$, $a = 1$ ou $a = 2$.
Supposons que $a = 1$. Alors $a^b = 1^b = 1$, et $b^a = b^1 = b$, d'où $b = 1 = a$, ce qui est exclu.
On en tire que $a = 2$. Or on a vu que $(2, 4)$ était solution de $(*)$ donc, par 2b, $f(2) = f(4)$, et comme $(a, b) = (2, b)$ est solution, on a aussi $f(2) = f(b)$. Ainsi $f(b) = f(4)$, et comme 4 et b sont dans $[e, +\infty[$ où f est strictement décroissante, la seule possibilité est $b = 4$.

★ Réciproquement, avec $a = 2, b = 4$, on a bien : $0 < a < b$ et $f(b) = f(a)$.

Ainsi, l'unique solution du problème est $\boxed{\text{le couple } (2,4)}$.

3°) *Deuxième application*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}} &\iff \ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right) \text{ car ln est strictement croissante} \\ &\iff \frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln 3}{3} \\ &\iff f(n) \leq f(3) \end{aligned}$$

f est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc sur $[3, +\infty[$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 3, f(n) \leq f(3)$.
Traitons les cas $n = 1$ et $n = 2$.
$f(1) = 0$ et $f(3) = \dfrac{\ln 3}{3} > 0$ donc $f(1) \leq f(3)$.
$f(2) = f(4)$ et $4 \geq 3$ donc $f(4) \leq f(3)$ donc $f(2) \leq f(3)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}}$.

Exercice 4

1°) $-\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^X \underset{X \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par composition de limites, $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, et par produit, $\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.}$
Comme $0 = f(0)$, cela signifie que $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

2°) Par composition et produit de fonctions dérivables là où elles sont définies, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.
Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \boxed{e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

3°) Déterminons le taux d'accroissement de f en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$$

Comme $Xe^{-X} = \dfrac{X}{e^X} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Par ailleurs, $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = 0}$.

4°) Limite en $+\infty$: $-\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et exp est continue en 0 donc $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$.
Par produit, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

5°) a) Pour tout $x > 0$,

$$x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}}$$

Or on sait que $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\dfrac{e^X - 1}{X} \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 1$. D'où :

$$\boxed{x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1}$$

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + e^{-\frac{1}{x}}$.
On sait que $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Grâce à la question précédente, on peut donc affirmer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Cela signifie que $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$

c) *Méthode 1* : D'après le cours, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leq e^u$.
En multipliant cette inégalité par e^{-u} qui est bien positif, on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $e^{-u}(1+u) \leq 1$.
Méthode 2 : Posons, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $g(u) = e^{-u}(1+u)$.
Par composition et produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^+$:
$g'(u) = -e^{-u}(1+u) + e^{-u} = e^{-u}(-(1+u)+1) = -ue^{-u}$.
Comme exp est positive, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $g'(u) \leq 0$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $g(0) = 1$, on a $\boxed{\text{pour tout } u \in \mathbb{R}^+,\ e^{-u}(1+u) = g(u) \leq 1.}$

d) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \\
&= x\left(\frac{1}{x} + 1\right)e^{-\frac{1}{x}} - x \\
&= x\left[\left(\frac{1}{x} + 1\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1\right] \\
&= x\left[g\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, comme $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$, $g\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1 \leq 0$, et finalement $f(x) - x \leq 0$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ entier.}}$

6°) Par produit et composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{x}}\frac{1 - x}{x^4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le signe de } f''(x) \text{ est celui de } 1 - x \text{ puisque } \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} > 0.}$$

7°) L'équation de T est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ i.e. $y = 3e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}$ i.e. $y = 3e^{-1}x - e^{-1}$.
Ainsi on a $\boxed{a = 3e^{-1} \text{ et } b = -e^{-1}}$.

8°) Posons, pour tout $x > 0$, $h(x) = f(x) - 3e^{-1}x + e^{-1}$. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, h l'est aussi et, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = f'(x) - 3e^{-1}, \qquad h''(x) = f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1-x}{x^4}$$

On en déduit successivement le signe de h'', les variations de h', le signe de h', les variations de h puis finalement le signe de h.
On utilise les informations : $h'(1) = h(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
h'		↗	0	↘	
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$-$	
h		↘	0	↘	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

$$\forall x \in \,]0,1],\ h(x) \geq 0 \text{ i.e. } f(x) \geq ax+b \quad \text{ et } \quad \forall x \in [1,+\infty[,\ h(x) \leq 0 \text{ i.e. } f(x) \leq ax+b$$

On en déduit que $\boxed{\text{sur }]0,1],\ \mathcal{C} \text{ est au-dessus de } T}$, et que $\boxed{\text{sur } [1,+\infty[,\ \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } T}$.

9°) On sait $2 < e < 3$ donc $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2}$ (on a même, $\dfrac{5}{2} < e$ donc $\dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$).
La tangente au point d'abscisse 1 a pour pente $3e^{-1}$ donc elle est un peu plus « pentue » que la droite d'équation $y = x$.
$f(1) = 2e^{-1} < 1$.