Devoir maison 9.

À rendre le lundi 21 mars 2022

Exercice 1

Les questions sont indépendantes entre elles et portent sur différentes notions d'algèbre linéaire.

Structure d'espace vectoriel

Dans chaque cas, déterminer si F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, ou non.

1°) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x + 1)^2 + z - 4y = (x - 1)^2\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

2°) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xy = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

3°) $F = \{f - g \ / f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont croissantes$\}$ avec $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles.
Soit F, G et H les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{u \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0\} \\ G &= \{u \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0\} \\ H &= \{u \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0\}. \end{aligned}$$

On répondra aux deux questions suivantes sans résoudre les relations de récurrence linéaires d'ordre 2.

4°) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

5°) Montrer que F et H sont en somme directe.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires et applications linéaires

6°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\,\mathrm{id}_E$.
On note $V = \{x \in E \ / \ f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E \ / \ f(x) = -ix\}$.
Montrer que : $E = V \oplus W$.

Projection

7°) On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ A & \mapsto & \dfrac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) \end{array}$.
Montrer que p est une projection et la caractériser.