# Devoir maison 2.

*À rendre le Jeudi 7 octobre 2021*

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{7}{8}$.

## Exercice 2

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

## Exercice 3

Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera telle que :

$$(*) : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

## Exercice 4

Soit $n$ un entier $\geq 2$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

En calculant le produit $S_n \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, faire apparaître un téléscopage et en déduire que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

## Exercice 5

Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que $\begin{cases} (1) : & 1 \in A \\ (2) : & \forall n \in A, 2n \in A \\ (3) : & \forall n \in A, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ (p \leq n \implies p \in A) \end{cases}$.

**1°)** Traduire l'hypothèse (3) en une phrase simple en français.

**2°)** Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A$.

**3°)** Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.