Corrigé du devoir maison 2.

Exercice 1

1°) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Les solutions sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } y' = ay \text{ sont les fonctions } x \mapsto \lambda e^{ax} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

2°) **a)** $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)f(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) \\ &= -f'(-x)f(x) + 1 \text{ par } (*) \end{aligned}$$

On utilise ensuite $(*)$ en remplaçant x par $-x$: $f(x)f'(-x) = 1$.

Donc $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part, g est constante donc $g(x) = g(0)$ i.e. $f(-x)f(x) = f(0)^2$ i.e $f(-x)f(x) = 16$.

Nécessairement, $f(-x) \neq 0$ (sinon $0 = 16$), donc $f(x) = \dfrac{16}{f(-x)}$ i.e. $\dfrac{1}{16}f(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$.

D'autre part, avec $(*)$: $f(-x)f'(x) = 1$, on obtient aussi $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{16}f(x)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution de l'équation } (F_a) \text{ avec } a = \dfrac{1}{16}}$.

c) On en déduit, par la question préliminaire, qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{\frac{x}{16}}$.

Or $f(0) = -4$ donc $\lambda = -4$. Finalement, $\boxed{f \text{ est la fonction } x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}}$.

3°) ★ On a montré que si $f \in \mathcal{E}$ alors f est la fonction $x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$.

★ Réciproquement, posons $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$.

Alors, $f(0) = -4$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4 \times \dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = -4e^{\frac{-x}{16}} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) e^{\frac{x}{16}} = 1$.

Donc, $f \in \mathcal{E}$.

★ Conclusion : $\boxed{\mathcal{E} \text{ contient un seul élément, la fonction } x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}}$.

Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff \cos x + \sin x = 1 \\
&\iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = 1 \\
&\iff \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x\right) = 1 \\
&\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est : $\boxed{\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

3°) On suppose que $n \geq 3$.

a) Supposons que $0 < |\cos x| < 1$.

Par l'inégalité triangulaire :

$$|\cos^n x + \sin^n x| \leq |\cos^n x| + |\sin^n x| \quad i.e. \quad |\cos^n x + \sin^n x| \leq |\cos x|^n + |\sin x|^n.$$

Comme $n \geq 3$, on peut écrire $|\cos x|^n = |\cos x|^2.|\cos x|^{n-2}$.

Puisque $n - 2 \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^{n-2}$ est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Comme $0 < |\cos x| < 1$, on en tire $0^{n-2} < |\cos x|^{n-2} < 1^{n-2}$ i.e. $0 < |\cos x|^{n-2} < 1$.

Multiplions cette inégalité par le réel strictement positif $|\cos x|^2$, on obtient $|\cos x|^n < |\cos x|^2$.

De même, comme $0 \leq |\sin x| \leq 1$, on a $|\sin x|^n \leq |\sin x|^2$.

En sommant ces deux inégalités, on obtient $|\cos x|^n + |\sin x|^n < |\cos x|^2 + |\sin x|^2$.

Or $|\cos x|^2 + |\sin x|^2 = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$, d'où :

$$\boxed{|\cos^n x + \sin^n x| < 1}.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

★ Si $0 < |\cos x| < 1$, d'après la question précédente, (E_n) n'est pas vérifiée. Donc, si x est solution de (E_n), alors $\cos x = \pm 1$ ou $\cos x = 0$, et par conséquent x s'écrit : $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

★ Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$.

Si k est pair, il s'écrit $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$:

- $\cos^n(k\pi) + \sin^n(k\pi) = \cos^n(2p\pi) + \sin^n(2p\pi) = 1^n + 0^n = 1$,
  donc $k\pi$ est solution de (E_n).
- $\cos^n\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos^n\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right) = 0^n + 1^n = 1$,
  donc $\frac{\pi}{2} + k\pi$ est solution de (E_n).

Si k est impair, il s'écrit $k = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$:

- $\cos^n(k\pi) + \sin^n(k\pi) = \cos^n(2p\pi + \pi) + \sin^n(2p\pi + \pi) = (-1)^n + 0^n = (-1)^n$,
  donc $k\pi$ est solution de (E_n) si et seulement si n est pair.
- $\cos^n\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) + \sin^n\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos^n\left(\frac{3\pi}{2} + 2p\pi\right) + \sin^n\left(\frac{3\pi}{2} + 2p\pi\right) = 0^n + (-1)^n = (-1)^n$,
  donc $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ est solution de (E_n) si et seulement si n est pair.

Finalement, il y a 2 cas :

- Si n est pair, l'ensemble des solutions de (E_n) est $\left\{k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ i.e. $\left\{k\dfrac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Si n est impair, l'ensemble des solutions de (E_n) est $\left\{2p\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2p\pi / \ p \in \mathbb{Z}\right\}$.