Devoir maison 1.

À rendre le lundi 12 septembre 2022

CONSIGNES POUR LES DM

- ★ Ne pas commencer le DM la veille du jour où vous devez le rendre. Anticipez !

  Travailler sérieusement les DM est indispensable pour progresser. Il faut vous mettre au travail sur le DM dès que je vous le donne. Le but n'est pas de le faire d'un seul coup mais d'étaler le travail pour avoir un temps de réflexion suffisant.
- ★ Il faut s'entraîner à chercher seul. C'est normal de ne pas trouver du premier coup et c'est en "séchant" sur les problèmes qu'on arrive, petit à petit, à progresser (d'où encore l'intérêt de s'y prendre suffisamment à l'avance).

  Si vous n'arrivez pas à vous débloquer, vous pouvez me poser des questions et vous pouvez aussi en discuter avec vos camarades. La phase de rédaction doit en revanche être complètement personnelle. Cela n'a aucun intérêt de recopier le DM du voisin.
- ★ La copie que vous rendez doit être écrite lisiblement, avec soin, sans ratures. Les résultats doivent être encadrés. Si ceci n'est pas respecté, je ne corrigerai pas votre copie.

  Utilisez des copies doubles que ce soit en DM ou en DS et évitez les encres pâles.
- ★ Aucun retard dans le rendu des DM ne sera accepté.

Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des réels sauf le réel 1) par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ f_k(x) = \frac{e^{kx}}{1-x}.$$

Question préliminaire : rappeler les valeurs de $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X}$ et de $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{e^X}{X}$.

1°) Soit $k \in \mathbb{Z}^*$.

Dans les questions qui suivent, on sera souvent amené à distinguer des cas selon le signe de k.

a) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
Que peut-on dire en termes de limite en 1 ?

b) Déterminer la position de la quantité $a_k = \dfrac{k+1}{k}$ par rapport à 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_k (on ne cherchera pas à calculer $f_k(a_k)$).

2°) Dans cette question, on ne s'intéresse qu'à la fonction f_{-1}, que l'on notera plus simplement $g : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

Ne connaissant pas de primitive de g sur $[0, \frac{1}{2}]$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale I de g sur ce segment :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

a) À l'aide de la question 1, justifier l'encadrement :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ 1 \leq g(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

c) En déduire que : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

e) À l'aide de l'encadrement obtenu en 2.a, montrer que :

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

f) *Dans cette question, l'usage de la calculatrice est autorisée pour calculer des valeurs approchées de nombres faisant intervenir $\sqrt{e}$.*
Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à 10^{-2} près.