Devoir maison 1.

À rendre le lundi 13 septembre 2021

CONSIGNES POUR LES DM

★ Ne pas commencer le DM la veille du jour où vous devez le rendre. Anticipez !

Travailler sérieusement les DM est indispensable pour progresser. Il faut vous mettre au travail sur le DM dès que je vous le donne. Le but n'est pas de le faire d'un seul coup mais d'étaler le travail pour avoir un temps de réflexion suffisant.

★ Il faut s'entraîner à chercher seul. C'est normal de ne pas trouver du premier coup et c'est en "séchant" sur les problèmes qu'on arrive, petit à petit, à progresser (d'où encore l'intérêt de s'y prendre suffisamment à l'avance).

Si vous n'arrivez pas à vous débloquer, vous pouvez me poser des questions et vous pouvez aussi en discuter avec vos camarades. La phase de rédaction doit en revanche être complètement personnelle. Cela n'a aucun intérêt de recopier le DM du voisin.

★ La copie que vous rendez doit être écrite lisiblement, avec soin, sans ratures. Les résultats doivent être encadrés. Si ceci n'est pas respecté, je ne corrigerai pas votre copie.

Utilisez des copies doubles que ce soit en DM ou en DS et évitez les encres pâles.

★ Aucun retard dans le rendu des DM ne sera accepté.

Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_k : x \mapsto \frac{(2\ln(x))^k}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.

Pour tracer les courbes demandées, on utilisera un repère orthonormé et on pourra utiliser, si nécessaire, la calculatrice pour calculer les coordonnées des points remarquables. En revanche, on ne s'aidera pas de points supplémentaires. On veillera à utiliser une échelle adaptée.

1°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Rappeler la valeur de $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^k}{e^X}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$.

Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x)$? (On distinguera deux cas selon la parité de k).

2°) **a)** Établir le tableau de variations de f_1.

b) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$.

3°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ supérieur ou égal à 2.

a) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_k(x) = (\ln(x))^{k-1}(k - 2\ln(x))$.

Déterminer le signe de $g_k(x)$ en fonction de x, en distinguant deux cas selon la parité de k.

b) Justifier que f_k est dérivable et que $f_k'(x)$ a le signe de $g_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En déduire le tableau de variations de f_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en distinguant deux cas selon la parité de k.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_2$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_1$.

4°) Justifier qu'il existe exactement deux points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On précisera ces deux points.

5°) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = \frac{1}{2^k}\int_1^e f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{k+1} = -\frac{1}{e} + (k+1)I_k.$$

c) Montrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{I_k}{k!} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right).$$

d) En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1, e]$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_k \leq 1$.

e) En déduire la valeur de $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{I_k}{k!}$, puis la valeur de $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right)$.