# Devoir maison 3.

*À rendre le lundi 17 octobre 2022*

## Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Le but de l'exercice est de retrouver l'expression de $S_n$ en fonction de $n$, par deux méthodes indépendantes.

On pourra se servir de l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ établie en cours.

**1°)** *Première méthode*

**a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

**b)** En déduire, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à deux, une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left( 2\binom{k}{2} + k \right)$, puis de $S_n$.

**2°)** *Deuxième méthode*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$ de deux manières différentes, et en déduire $S_n$.

## Exercice 2

**1°)** Démontrer que : $\cos(2x) = \dfrac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

**2°)** On note $A = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{5}{13}\right)$, $B = 2 \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

À l'aide de la question précédente, montrer que : $A = B$.