Devoir surveillé 1.

Samedi 25 septembre 2021, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=1$.

2°) Résoudre l'inéquation $e^{-x}(2e^{-x}-1)\leq 3$.

Exercice 2

Soit k un réel. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f_k : x \mapsto x - k\sqrt{x}$.
On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) Quelle est la nature de C_0 ?

Désormais, on supposera $k \neq 0$.

2°) Étudier la dérivabilité de f_k en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

3°) Étudier la limite de f_k en $+\infty$.

4°) Soit k' un réel tel que $k > k'$, étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k'}$.

5°) Dans cette question, on suppose que $k > 0$.

- **a)** Dresser le tableau de variations de f_k. On montrera qu'il y a un minimum atteint en une valeur a_k que l'on déterminera. Donner la valeur du minimum.
- **b)** Soit A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse a_k. Montrer que tous les points A_k sont situés sur une même droite à préciser.
- **c)** Montrer, qu'en dehors de l'origine, $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses en un unique point B_k dont on précisera l'abscisse b_k.
  Vérifier que $b_k = 4a_k$.
- **d)** Etablir que la tangente à $\mathcal{C}_k$ en B_k garde une direction fixe.

6°) On suppose dans cette question que $k < 0$.

- **a)** Dresser le tableau de variations de f_k.
- **b)** Montrer qu'il existe un unique point D_k de $\mathcal{C}_k$ que l'on déterminera, où la tangente à $\mathcal{C}_k$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. A quelle droite fixe appartient-il ?

7°) Tracer sur une même figure avec le maximum de précision et avec tous les éléments mis en valeur les courbes pour $k=-1, k=1, k=2$.
On prendre 2 cm pour unité.

Exercice 3

1°) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

2°) *Première application*
Nous allons déterminer les couples (a, b) d'entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $a < b$ et vérifiant l'équation $(*) : a^b = b^a$.

- **a)** Trouver un couple d'entiers de $\mathbb{N}^*$ qui soit solution évidente de $(*)$.
- **b)** Soit a et b des entiers naturels non nuls.
Vérifier que l'équation $(*)$ est équivalente à l'équation $f(a) = f(b)$.
- **c)** Soit a et b des entiers tels que $0 < a < b$ et $a^b = b^a$. Justifier que $a < e < b$.
- **d)** En déduire tous les couples (a, b) d'entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $a < b$ et vérifiant $a^b = b^a$.

3°) *Deuxième application*
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1°) Montrer que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Qu'en déduire sur la fonction f ?

2°) Justifier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

3°) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

4°) Dresser le tableau de variation de f.

5°)
- **a)** Justifier que $x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$.
- **b)** En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- **c)** Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $e^{-u}(1+u) \leq 1$.
- **d)** En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

6°) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x)$ est du signe de $1 - x$.

7°) Déterminer les réels a et b tels que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ait pour équation : $y = ax + b$.

8°) Déterminer, à l'aide de la question 6, le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Qu'en déduire sur $\mathcal{C}$ et T ?

9°) Donner l'allure de $\mathcal{C}$, de Δ et de T sur une même figure.