Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 3.

1°) $f_1(x) = \exp(\cos x \ln(1+\sin x))$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\sin x \geq 0$, et $1+\sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$.

Donc f_1 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Par composition et somme de fonctions dérivables là où elles sont définies, f_1 est dérivable sur D, et pour tout $x \in D$,

$$f_1'(x) = \boxed{\left(-\sin x \ln(1+\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) \exp(\cos x \ln(1+\sin x))}$$

2°) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, et pour tout x dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{\big(3x^2 \sin(5x-1) + x^3.5\cos(5x-1)\big)\ln x - x^3 \sin(5x-1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2 \sin(5x-1)(3\ln x - 1) + 5x^3 \cos(5x-1)\ln(x)}{(\ln x)^2}} \end{aligned}$$

3°) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = \cos x\,[(-\sin)(\sin x)] - (-\sin x)\,[\cos(\cos x)] = \boxed{\sin x\,(\cos(\cos x)) - \cos x\,(\sin(\sin x))}$$

4°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1} > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Comme Arccos est définie sur $[-1,1]$, $\boxed{f_4 \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

$x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ par quotient.

Arccos est dérivable sur $]-1,1[$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \neq -1$, et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Longleftrightarrow 1+x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 0$.

Par composition, $\boxed{f_4 \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}^*}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \, \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \, \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \, \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \, \frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}} = \boxed{\frac{x}{|x|(1+x^2)}}
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_4'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f_4'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

5°) Soit D le domaine de définition de f_5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \in D \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$

Le plus simple est de faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{D =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[}$.

Par quotient, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet ensemble, d'après le tableau de signe. Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, puis produit avec $x \mapsto x$, $\boxed{f_5 \text{ est dérivable sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$.

$$
\begin{aligned}
\forall\, x \in\,]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad f_5'(x) &= 1 \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{\dfrac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \\
&= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2x}{(1+x)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\
&= \boxed{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}
\end{aligned}
$$

Remarque : Attention pour les simplifications !

Si $x < -1$, $x+1$ et $x-1$ sont strictement négatifs, donc écrire $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ est faux.

Mieux vaut écrire, lorsque $\frac{a}{b}$ est positif, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|} = \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.
Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
f_5'(x) &= \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|^2}\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}} \\
&= \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}}\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2 |1+x| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}\sqrt{|x-1|}} \\
&= \frac{|x-1|.|x+1| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|.|x-1|}} \\
&= \frac{x^2-1+x}{|1+x|\sqrt{x^2-1}} \text{ car } x^2-1>0 \text{ sur }]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[
\end{aligned}$$

Étude en 1 : Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\dfrac{f_5(x) - f_5(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - 0}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$
Donc $\boxed{f_5 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.