Devoir surveillé 2.

Samedi 23 octobre 2021, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} u_k + 1 \end{cases}$$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de u_n ?

2°) Démontrer cette conjecture par une récurrence forte.

3°) Sans utiliser le résultat précédent, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.
En déduire à nouveau u_n en fonction de n.

Exercice 2

Partie 1 : Définition de la fonction th

On définit la fonction *tangente hyperbolique* en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

1°) Justifier que la fonction th est bien définie et étudier sa parité.

2°) Montrer que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. On donnera deux expressions de cette dérivée.

3°) Dresser le tableau de variations de th en précisant les limites aux bornes du domaine de définition.

Partie 2 : Calcul et limite d'une somme

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

1°) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}$.

2°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Écrire $1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ sous la forme $2\dfrac{\operatorname{th}(a)}{\operatorname{th}(b)}$ où a et b sont des réels à déterminer en fonction de x et k.

3°) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(x) = n\ln 2 + \ln\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\operatorname{th} x)$.

4°) **a)** Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{th} t}{t} = 1$.

b) Dans cette question, x est un réel strictement positif fixé.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Exercice 3

1°) Dans cette question, on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, non dérivable en 0.
Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variations de φ en y précisant la limite en $+\infty$.

2°) Dans cette question, on considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle y est continue.
Calculer les valeurs ou limites de f aux bornes de $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin}(h)}{h} = 1$.
En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
Que peut-on dire de la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ?

c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

d) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.
Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \psi(x)$, et que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\psi(x)$.

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

a) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire les expressions de $f(x)$ en fonction de $g(x)$ sur deux intervalles à préciser, dont la réunion est $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$(*) \ : \ \operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$$

1°) Déterminer les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+3).$$

2°) Justifier que l'équation $(*)$ admet une unique solution x_0.

3°) Montrer que $4 < x_0$.

4°) On pose $\theta = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5)$. Justifier que $\tan(\theta)$ existe, puis le calculer.

5°) Justifier que $\dfrac{3\pi}{4} < f(5) < \dfrac{3\pi}{2}$, puis calculer $\tan(f(5))$.
En déduire la valeur de x_0.

Exercice 5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_p = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{p} \binom{2p}{2\ell}(-1)^\ell$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $A_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i2k\theta}$.

1°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de i^k (on fera deux cas selon la parité de k).

2°) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos(m\pi) = (-1)^m$.

3°) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 + e^{i2\theta} = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$.

4°) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $A_n(\theta)$, puis, à l'aide de la question 3, calculer $\mathrm{Re}\,(A_n(\theta))$.

5°) Calculer $\mathrm{Re}\left(A_{2p}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$; on simplifiera jusqu'à trouver un résultat entier.

6°) En déduire S_p.