

TD 2. Logique, raisonnements, calculs algébriques.

Exercice 1. 1) Dans chaque cas, préciser si la proposition est vraie ou fausse, et donner sa négation.

- | | |
|---|--|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [1, +\infty[\implies x^2 \geq x$ | d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 < 0 \implies x < 0)$. |
| b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y \iff x^2 = y^2$ | e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy > 0$. |
| c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, x = 0$. | f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 0$. |

2) Donner la négation des phrases suivantes :

- a) S'il pleut alors je prends mon parapluie.
- b) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
- c) Un été, il a plu tous les jours en Bretagne.

Exercice 2. Traduire formellement les propositions suivantes, et dire si elles sont vraies ou fausses :

- a) Pour être multiple de 6, il est nécessaire d'être multiple de 3.
- b) Pour être multiple de 6, il est suffisant d'être multiple de 3.
- c) Pour que $x + 2 \geq 3$, il faut que x soit positif ou nul.
- d) Pour que $x + 2 \geq 3$, il suffit que $x \geq 2$.
- e) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- f) Tout réel possède une racine carrée dans \mathbb{R} .
- g) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- h) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

Exercice 3. Écrire en langage formel les propositions suivantes (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) :

- | | | |
|---|-----------------------------|----------------------------|
| a) f n'est pas la fonction nulle | c) f est décroissante | e) f présente un minimum |
| b) f ne s'annule pas sur \mathbb{R} | d) f n'est pas croissante | f) f n'est pas majorée |

Exercice 4. Soit E un ensemble non vide, et f fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} .

Exprimer en français la signification des assertions suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$ | c) $\forall x \in E, \exists y \in E, x \neq y$ |
| b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$ | d) $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x = y \text{ ou } y = z \text{ ou } z = x)$ |

Exercice 5. Soient A et B des réels. Montrer :

$$(\forall \varepsilon > 0, A \leq B + \varepsilon) \implies A \leq B.$$

Exercice 6. Soit I et J des intervalles, et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Montrer que si f est strictement croissante, alors f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(*) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

- a) Soit f une fonction vérifiant (*). Montrer que $f(0) = 1$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) Conclure.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n!$

Exercice 9. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que cette suite est strictement croissante.

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 \in]0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^n (u_k)^k}{n^n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1]$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Simplifier : $A = (n+2)! - 2(n!)$; $B = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$; $C = \frac{n!}{(n+4)!}$.

b) Écrire à l'aide de factorielles : $A = 2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \times 2$; $B = \prod_{k=0}^n (2k+1)$

Exercice 12. 1) Calculer les sommes suivantes (avec x, q réels, et $1 \leq p \leq n$) :

$$A = \sum_{k=0}^n x^{2k+1} \quad ; \quad B = \sum_{k=p}^n q^k \quad ; \quad C = \sum_{j=p}^n (2j+1) \quad ; \quad D = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad ; \quad E = \sum_{k=1}^n k(k!)$$

2) Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

En déduire $F = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 13. a) Développer $(k+1)^3 - k^3$ pour tout entier k . Retrouver $\sum_{k=1}^n k^2$ sous forme factorisée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Faire un raisonnement similaire pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{3^i 4^j}{5^{i+j}} \quad ; \quad B = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \right) \quad ; \quad D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer : $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ et $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

(Indication : télescopage...)

Exercice 16. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$ et $\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p}$.

b) On pose $S_p = \sum_{\substack{k \text{ entier tel que} \\ 0 \leq 2k \leq n}} \binom{n}{2k}$ et $S_i = \sum_{\substack{k \text{ entier tel que} \\ 0 \leq 2k+1 \leq n}} \binom{n}{2k+1}$.

Calculer $S_p + S_i$ et $S_p - S_i$, en déduire la valeur de ces sommes.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontrer que pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$. En déduire $\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p}$.

2) On note $f : x \mapsto (1+x)^n$. Retrouver le résultat de la question 1 à l'aide de la fonction f (on calculera $f'(x)$ de deux façons différentes).