Corrigé du devoir maison 1.

1°) Par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X^k} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^k}{e^X} = 0}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = \dfrac{(\ln(x^2))^k}{e^{\ln(x^2)}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^k}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x^2))^k}{e^{\ln(x^2)}} = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0}$.

Variante : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = \dfrac{2^k}{x} \dfrac{(\ln(x))^k}{e^{\ln(x)}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^k}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^k}{e^{\ln(x)}} = 0$.

Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^k}{x} = 0$, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0}$.

On a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$.

Si k est pair, $\lim\limits_{x\to0} (\ln(x))^k = +\infty$.

Si k est impair, $\lim\limits_{x\to0} (\ln(x))^k = -\infty$.

Par produit, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f_k(x) = -\infty \text{ si } k \text{ est pair}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f_k(x) = -\infty \text{ si } k \text{ est impair}}$.

2°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Par quotient, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_1'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln(x).2x}{(x^2)^2} = 2x\frac{1-2\ln(x)}{x^4} = 2\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} 1 - 2\ln(x) > 0 &\iff 1 > 2\ln(x) \\ &\iff \frac{1}{2} > \ln(x) \\ &\iff e^{\frac{1}{2}} > x \text{ par stricte croissance de exp} \end{aligned}$$

$$\text{De même,}\quad 1 - 2\ln(x) = 0 \iff x = e^{\frac{1}{2}}$$

Calculons : $f_1(e^{\frac{1}{2}}) = 2\dfrac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 2\dfrac{\frac{1}{2}}{e} = \dfrac{1}{e}$.

D'où le tableau de variation de f_1 :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	-	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

b) $f_1'(1) = 2\dfrac{1-0}{1^3} = 2$, et $f_1(1) = 0$, donc la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 2(x-1)+0$ i.e. $\boxed{y = 2x-2}$.

c) Voir le tracé de la courbe à la questions 3c.

3°) a) Lorsque k est impair, $k-1$ est pair, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^{k-1} \geq 0$, et comme $k-1>0$, cette quantité s'annule uniquement pour $x=1$.
Lorsque k est pair, $k-1$ est impair, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^{k-1}$ a même signe que $\ln(x)$: strictement négatif sur $]0,1[$, nul en 1, et strictement positif sur $]1,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} k - 2\ln(x) > 0 &\iff k > 2\ln(x) \\ &\iff \frac{k}{2} > \ln(x) \\ &\iff e^{\frac{k}{2}} > x \text{ par stricte croissance de exp} \end{aligned}$$

$$\text{De même, } \quad k - 2\ln(x) = 0 \iff x = e^{\frac{k}{2}}$$

On en tire les tableaux de signes suivants :
Pour k impair :

x	0		1		$e^{\frac{k}{2}}$		$+\infty$
$g_k(x)$	||	$+$	0	$+$	0	$-$	

Pour k pair :

x	0		1		$e^{\frac{k}{2}}$		$+\infty$
$(\ln(x))^{k-1}$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$k-2\ln(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Par produit et quotient, $f_k : x \mapsto 2^k \dfrac{(\ln(x))^k}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_k'(x) = 2^k \frac{k\frac{1}{x}(\ln(x))^{k-1}x^2 - (\ln(x))^k .2x}{(x^2)^2} = 2^k x \frac{k(\ln(x))^{k-1} - 2(\ln(x))^k}{x^4} = 2^k \frac{g_k(x)}{x^3}$$

Comme $x^3 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g_k et f_k' ont même signe.

Calculons : $f_k\left(e^{\frac{k}{2}}\right) = 2^k \dfrac{\left(\ln\left(e^{\frac{k}{2}}\right)\right)^k}{\left(e^{\frac{k}{2}}\right)^2} = 2^k \dfrac{\left(\frac{k}{2}\right)^k}{e^k} = \dfrac{k^k}{e^k}$ et $f_k(1) = 0$.

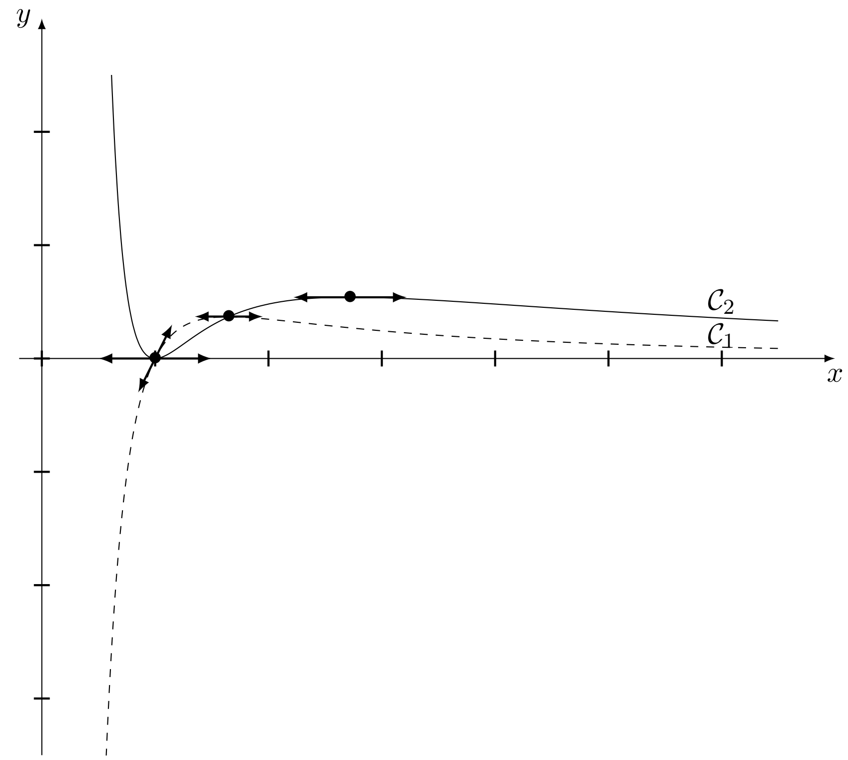
On en déduit le tableau de variation de f_k.
Pour k impair :

x	0		1		$e^{\frac{k}{2}}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	||	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{k^k}{e^k}$	$\searrow$	0

Pour k pair :

x	0		1		$e^{\frac{k}{2}}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{k^k}{e^k}$	$\searrow$	0

c) Tracé des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:



Remarque : $f_2\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\left(2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{\left(2\frac{1}{2}\right)^2}{e} = \dfrac{1}{e}.$

4°) On peut commencer par chercher les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On sait déjà que les points $A(1,0)$ et $B\left(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{e}\right)$ appartiennent à la fois à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifions qu'il n'y en a pas d'autres (regarder le dessin des courbes ne suffit pas !).
On résout alors, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff 2\ln(x) = 4\left(\ln(x)\right)^2 \\ &\iff \ln(x) - 2\left(\ln(x)\right)^2 = 0 \\ &\iff \ln(x)\left(1 - 2\ln(x)\right) = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les points A et B sont donc les seuls points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Vérifions que ces points sont sur toutes les courbes $\mathcal{C}_k$: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(1) = 0$ et $f_k(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{\left(2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right)^k}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{1^k}{e} = \dfrac{1}{e}.$

$\boxed{\text{Ainsi il y a bien exactement deux points communs à toutes les courbes } \mathcal{C}_k\text{, ce sont les points } A \text{ et } B.}$

5°) a) Soit les fonctions u et v dérivables, suivantes.

$$\forall x \in [1,e], \qquad u(x) = \ln(x) \qquad\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v(x) = -\frac{1}{x} \qquad\qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} + 0 + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} + -\frac{1}{e} + 1 \\ &\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}} \end{aligned}$$

b) Soit les fonctions w et v dérivables, suivantes.

$$\forall x \in [1,e], \qquad w(x) = (\ln(x))^{k+1} \qquad\qquad u'(x) = (k+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^k$$
$$v(x) = -\frac{1}{x} \qquad\qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left[-\frac{1}{x}\,(\ln(x))^{k+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{k+1}{x}\,(\ln(x))^k\,\frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} + 0 + (k+1)\int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\boxed{I_{k+1} = -\frac{1}{e} + (k+1)I_k} \end{aligned}$$

c) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$: $\dfrac{I_k}{k!} = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right)$.

- $\dfrac{I_1}{1!} = I_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$.
  Et pour $k=1$, $1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right) = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!}\right) = 1 - \dfrac{2}{e}$.
  Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$.
  D'après la question précédente,

$$\frac{I_{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{1}{e}\frac{1}{(k+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+1)!}I_k$$

  Or $\dfrac{(k+1)}{(k+1)!}I_k = \dfrac{1}{k!}I_k = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right)$ par hypothèse de récurrence. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} &= -\frac{1}{e}\frac{1}{(k+1)!} + 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\right) \end{aligned}$$

  Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\dfrac{I_k}{k!} = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right).}$

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme ln est croissante, pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e)$ i.e. $0 \leq \ln(x) \leq 1$, d'où $0 \leq (\ln(x))^k \leq 1$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [1, e]$, $0 \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc, par produit, $0 \leq \dfrac{(\ln(x))^k}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

Par croissance de l'intégrale sur $[1, e]$,

$$\int_1^e 0 \, \mathrm{d}x \leq \int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_1^e 0 \, \mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 \leq 1$.

On a bien : $\boxed{0 \leq I_k \leq 1}$.

e) On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{I_k}{k!} \leq \dfrac{1}{k!}$; comme $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k!} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{I_k}{k!} = 0}$.

Or, d'après la question c, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{k!} = e - e\dfrac{I_k}{k!}$.

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = e}$.