

---

## Devoir maison 2.

---

À rendre le lundi 26 septembre 2022

### Exercice 1

On souhaite déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$f(0) = -4 \quad \text{et} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1}_{\text{propriété notée } (*)}$$

1°) *Question préliminaire* : Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Rappeler quelles sont les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(F_a)$  :  $y' = ay$ .

2°) Soit  $f \in \mathcal{E}$ . On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)f(x)$ .

a) Montrer que  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

b) En déduire qu'il existe un réel  $a$  que l'on déterminera tel que  $f$  est solution de l'équation  $(F_a)$ .

c) En déduire l'expression de  $f$ .

3°) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse à l'équation

$$(E_n) : \cos^n x + \sin^n x = 1$$

1°) Résoudre  $(E_1)$ .

2°) Résoudre  $(E_2)$ .

3°) On suppose que  $n \geq 3$ .

a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que si  $0 < |\cos x| < 1$  alors  $|\cos^n x + \sin^n x| < 1$ .

b) En déduire les solutions de  $(E_n)$ .