Démo 26 : $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto e^{\varphi(x)}$

Notons $u = Re(\varphi)$ et $v = Im(\varphi)$:

$\forall x \in I$, $\varphi(x) = u(x) + i v(x)$

$$, f(x) = e^{\varphi(x)} = e^{u(x)+iv(x)}$$
$$= e^{u(x)} \times e^{iv(x)}$$
$$= e^{u(x)}\Big(\cos(v(x)) + i \sin(v(x))\Big)$$

$$f(x) = \underbrace{e^{u(x)}\cos(v(x))}_{\in \mathbb{R}} + i\, \underbrace{e^{u(x)}\sin(v(x))}_{\in \mathbb{R}}$$

Donc $Re(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{u(x)} \times \cos(v(x))$ et $Im(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{u(x)}\sin(v(x))$

Comme φ est dérivable sur I, u et v (ses parties réelle et imaginaire) sont dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc, par composition, comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $\exp \circ u$, $\cos \circ v$ et $\sin \circ v$ sont dérivables sur I.

Et par produit, $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables sur I.
Par déf°, f est dérivable sur I.

$$\forall x \in I, \quad (Re(f))'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} \cos(v(x)) + e^{u(x)} \times v'(x) \times (-\sin)(v(x))$$
$$= e^{u(x)} \left[u'(x) \cos(v(x)) - v'(x) \sin(v(x)) \right]$$
$$(Im(f))'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} \sin(v(x)) + e^{u(x)} \times v'(x) \times \cos(v(x))$$
$$= e^{u(x)} \left[u'(x) \sin(v(x)) + v'(x) \cos(v(x)) \right]$$

D'où, $\forall x \in I$, $f'(x) = (Re(f))'(x) + i\,(Im(f))'(x)$

$$f'(x) = e^{u(x)} \left[u'(x) \cos(v(x)) + i\, v'(x) \cos(v(x)) + i\, u'(x) \sin(v(x)) - v'(x) \sin(v(x)) \right]$$

$(-1) = (i)^2$

$$= e^{u(x)} \left[\underbrace{(u'(x) + i\, v'(x))}_{\varphi'(x)} \cos(v(x)) + \underbrace{(u'(x) + i\, v'(x))}_{\varphi'(x)}\, i \sin(v(x)) \right]$$

$$= e^{u(x)} \varphi'(x) \left[\cos(v(x)) + i \sin(v(x)) \right]$$

$$= \varphi'(x)\, e^{u(x)}\, e^{i v(x)} = \varphi'(x)\, e^{u(x) + i v(x)}$$

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f'(x) = \varphi'(x)\, e^{\varphi(x)}}$$