Devoir maison 6.

À rendre le lundi 17 janvier 2022

Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - x - 1$.

1°) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[1, +\infty[$. Justifier que $x_n \neq 1$.

2°) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

3°) En déduire que la suite (x_n) est monotone.

4°) Montrer que la suite (x_n) converge vers 1.

5°) Justifier que, pour tout $n \geq 2$, $x_n = \exp\left(\dfrac{\ln(1 + x_n)}{n}\right)$.

6°) Quelle est la limite de $\ln(1 + x_n)$? Traduire à l'aide de la notation o.

7°) En déduire que :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On parle de développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n}$.

8°) En déduire un développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ (on utilisera encore la question 5).

Exercice 2

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{\tan^2(x)}$.