Devoir surveillé 3.

Samedi 27 novembre 2021, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{5}}$$

Le but de l'exercice est le calcul par radicaux (c'est-à-dire à l'aide de "racines carrées") de $\cos(\theta)$, par deux méthodes indépendantes.

Première méthode

1°) Montrer que si un nombre complexe z est de module 1, alors $z + \dfrac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \ z^5 + 1 = 0$$

Vérifier que toutes les solutions sont de module 1.

3°) **a)** Sans utiliser la question 2, montrer qu'il existe une fonction polynomiale Q, que l'on déterminera, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$$

b) Vérifier que 0 n'est pas solution de $Q(z) = 0$.
On suppose donc dorénavant $z \neq 0$. On pose alors $Z = z + \dfrac{1}{z}$.
Montrer que :

$$Q(z) = 0 \iff (F) : \ Z^2 - Z - 1 = 0.$$

c) Déduire des questions précédentes une expression par radicaux de $\cos(\theta)$.

Deuxième méthode

4°) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, 2\pi[$. On pose $C = \cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi)$.
Montrer à l'aide des complexes que :

$$C = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\dfrac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}.$$

5°) *On rappelle que θ désigne $\dfrac{\pi}{5}$.*
En prenant $a = \theta$ et en choisissant judicieusement la valeur de φ, en déduire :

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}.$$

6°) Après avoir linéarisé $\cos(\theta)\cos(3\theta)$, déduire de la question précédente que :

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}.$$

7°) En déduire une équation du second degré dont $\cos(\theta)$ est solution.
Résoudre et conclure.

Exercice 3

Question préliminaire

Montrer que pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, $\sin(t) = \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Les deux parties sont indépendantes et utilisent le résultat de la question préliminaire.

Partie 1

On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

1°) À l'aide du changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (que l'on justifiera), montrer que :

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{Arctan}\,x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2°) Montrer que

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 3 - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3°) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence d'une primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)$ en fonction de F ; en déduire que φ est dérivable et montrer que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire I.

.

Partie 2

On pose :

$$J = \int_0^{\pi} \frac{t}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On définit également sur $\mathbb{R}$ la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

1°) Quelle propriété a la fonction G ? En déduire que $G(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} G(x)$.

2°) À l'aide du changement de variable $\theta = \pi - t$, montrer que $J = \dfrac{\pi}{2}G(\pi)$.

3°) **a)** Calculer, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $H(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u$.

b) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. À l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction H.

4°) Déduire des questions précédentes la valeur de $G(\pi)$ puis celle de J.

Exercice 4

On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$(*) : \ \forall\, a > 0, \forall\, b > 0,\ f(ab) = af(b) + bf(a)$$

1°) Question préliminaire :
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(E_m) :\ xy'(x) - y(x) = mx$.

2°) Vérifier que $\varphi : x \mapsto x \ln x$ est un élément de $\mathcal{S}$.

3°) Soit f, g des éléments de $\mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + g \in \mathcal{S}$.

Remarque : On dit que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire.

4°) Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{S}$.

a) Montrer que $f(1) = 0$.

b) En dérivant $(*)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\forall\, a > 0, \forall\, b > 0,\ af(b) + abf'(a) = abf'(b) + bf(a)$$

c) En déduire qu'il existe un réel m tel que : $\forall x > 0,\ xf'(x) - f(x) = mx$.

d) En déduire la forme de f.
On exprimera le résultat à l'aide du seul paramètre m.

5°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.