Devoir maison 5.

À rendre le lundi 3 janvier 2022

`La partie 3 est facultative.`

Exercice

Partie 1 : La constante d'Euler

On définit la suite réelle (H_n) par : $\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = H_n - \ln(n+1),\ \ b_n = H_n - \ln n$.

1°) En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \qquad \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$$

2°) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite que l'on notera γ (appelée *constante d'Euler*).

3°) Justifier : $1 - \ln(2) \leq \gamma \leq 1$.

4°) Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

Partie 2 : Une première application

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On souhaite démontrer que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

5°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

- **a)** Étudier la monotonie de la suite (K_n).
- **b)** En déduire que (K_n) converge.
- **c)** Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, K_n à l'aide d'éléments de la suite (H_n), puis de la suite (b_n). En déduire que la suite (K_n) converge vers $\ln 2$.

6°) **a)** Montrer que : $\forall n \geq 1, A_{2n} = K_n$.

- **b)** En déduire que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3 : Une deuxième application

On définit les deux suites (v_n) et (S_n) par :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

7°) Rappeler la valeur de v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

8°) Déterminer des réels a, b, c vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

9°) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$

10°) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide d'éléments de la suite (H_n), puis de la suite (b_n).

11°) Déterminer la limite de (S_n).

Aspect culturel : Introduite par le mathématicien suisse Euler (1707-1783), la constante d'Euler γ est donc la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Une valeur approchée est : $\gamma \approx 0,5772156649\ldots$. On ne sait toujours pas à l'heure actuelle si γ est un nombre rationnel ou pas.

Cette constante joue un rôle essentiel dans des domaines très variés (sommes infinies, produits, probabilités, intégrales). Par exemple, elle intervient en arithmétique. On peut démontrer que le nombre moyen de diviseurs de tous les nombres compris entre 1 et n est très proche de $\ln n + 2\gamma - 1$.