

## Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 1.

1°)  $f_1$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f_1'(x) = \frac{4 \cdot \frac{1}{x} (\ln x)^3 x - (\ln x)^4 \cdot 1}{x^2} = \frac{4 (\ln x)^3 - (\ln x)^4}{x^2} = \boxed{(\ln x)^3 \frac{4 - \ln x}{x^2}}$$

2°)  $f_2$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_2'(x) = \boxed{\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) 2 \cos(2x) - 2 \sin(x) \cos(x) \sin(2x)}$$

*Non demandé* On peut tenter de simplifier en mettant tout en fonction de  $\cos x$  (utile si on avait souhaité le signe de  $f_2'$ ) :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) (4 \cos^2(x) - 2) - 2 \sin(x) \cos(x) 2 \sin(x) \cos(x) \\ &= 4 \cos^4(x) + 6 \cos^2(x) - 2 \cos^2(x) - 3 - 4 (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \\ &= 4 \cos^4(x) + 4 \cos^2(x) - 3 - 4 \cos^2(x) + 4 \cos^8(x) \\ &= 8 \cos^4(x) - 3 \end{aligned}$$

On peut aussi tout exprimer en fonction de  $\cos(2x)$  :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (2 \cos^2 x + 3) \cos(2x) - \sin^2(2x) \\ &= (2 \cos^2 x - 1 + 4) \cos(2x) - (1 - \cos^2(2x)) \\ &= (\cos(2x) + 4) \cos(2x) - 1 + \cos^2(2x) \\ &= 2 \cos^2(2x) + 4 \cos(2x) - 1 \end{aligned}$$

3°) Si  $x > 0$ ,  $1 + \frac{2}{x} > 1$  donc  $f_3(x)$  existe.

Si  $x < 0$ ,  $1 + \frac{2}{x} > 0 \iff \frac{2}{x} > -1 \iff \frac{1}{-x} < \frac{1}{2} \iff -x > 2$  car  $-x$  et  $2$  sont strictement positifs.

Le domaine de définition de  $f_3$  est donc  $] -\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ . C'est aussi le domaine de dérivabilité.

Pour tout  $x \in ] -\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ ,

$$f_3'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = \boxed{\frac{-2}{x(x+2)} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)}$$

4°) Pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(x)$  existe et  $\tan(x) \geq 0$ , donc  $f_4$  est bien définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

Sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan$  est dérivable et est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

$x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par composition,  $f_4$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$f_4'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$$

5°)  $X^2 - 3X - 10$  est un trinôme du second degré de discriminant  $\Delta = 9 + 40 = 7^2$ , donc ses racines sont  $\frac{3+7}{2} = 5$  et  $\frac{3-7}{2} = -2$ . Comme le coefficient de  $X^2$  est positif, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \iff x \in ]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$$

Donc  $f_5$  a pour domaine de définition  $] - \infty, -2] \cup [5, +\infty[$ .

$x \mapsto x^2 - 3x - 10$  est dérivable sur  $] - \infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$ , et pour tout  $x \in ] - \infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$ ,  $x^2 - 3x - 10 > 0$ . De plus  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par composition,  $f_5$  est dérivable sur  $] - \infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ] - \infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$ ,

$$f_5'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$$

Soit  $x \in ]5, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \frac{f_5(x) - f_5(5)}{x - 5} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 5} \\ &= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x - 5} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}} \text{ car } x - 5 > 0 \text{ donc } x - 5 = \sqrt{x-5}^2 \\ \frac{f_5(x) - f_5(5)}{x - 5} &\xrightarrow{x \rightarrow 5} +\infty \end{aligned}$$

Donc  $f_5$  n'est pas dérivable en 5.

Soit  $x \in ]-\infty, -2[$  :

$$\begin{aligned} \frac{f_5(x) - f_5(-2)}{x - (-2)} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x + 2} \\ &= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x + 2} \\ &= \frac{\sqrt{-x+5}\sqrt{-x-2}}{-\sqrt{-x-2}^2} \text{ car } x + 2 < 0 \text{ et } -x + 5 < 0 \\ &= \frac{\sqrt{-x+5}}{-\sqrt{-x-2}} \\ \frac{f_5(x) - f_5(-2)}{x - (-2)} &\xrightarrow{x \rightarrow -2} -\infty \end{aligned}$$

Donc  $f_5$  n'est pas dérivable en -2.