
Devoir surveillé 4.

Jeudi 16 décembre 2021, de 15h35 à 16h35.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une *marge*.

Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère sur \mathbb{R}_+^* l'équation :

$$(E) : \quad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = e^{\sqrt{x}}$$

1°) Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation : $(F) : z''(t) - z(t) = e^t$.

2°) Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y(t^2)$.

- a) Justifier que z est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* puis calculer z' et z'' en fonction de y et de ses dérivées.
- b) Montrer que y est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si z est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation (F) .
- c) Résoudre (E) .

Exercice 2

On considère sur \mathbb{R} l'équation :

$$(E) : \quad (1 + e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$$

On pose une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

1°) On pose $z = y' + y$.

Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène (F) telle que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \iff z \text{ solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Indication : on pourra remarquer que le coefficient 1 devant $y'(x)$ peut se réécrire $1 + e^x - e^x$.

2°) Résoudre (F) .

3°) Déterminer des solutions particulières des équations différentielles $(G_1) : y'(x) + y(x) = 1$ et $(G_2) : y'(x) + y(x) = e^x$.

4°) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .