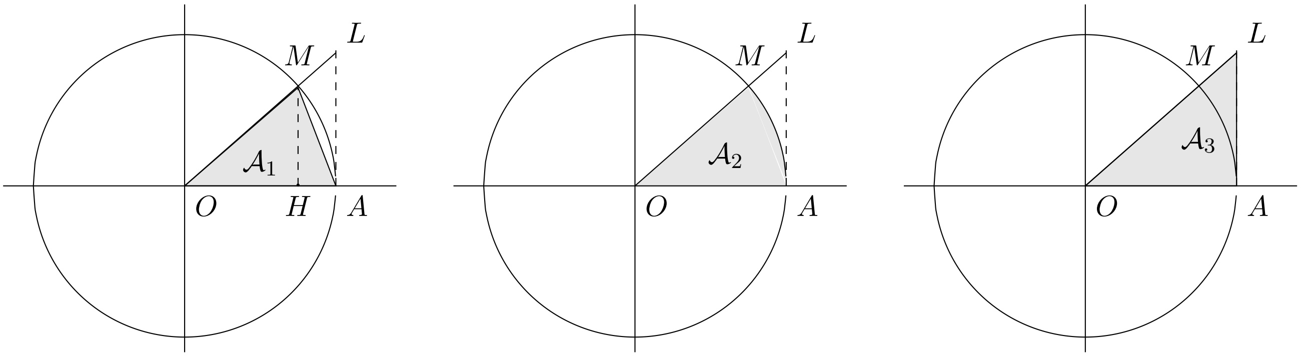
Ch 1 - Démonstration non faite en classe.

Proposition :

> Rappel : $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

Preuve géométrique :
On reprend les notations utilisées dans le cours sur le cercle trigonométrique, et on considère trois aires, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé et M de coordonnées $(\cos x, \sin x)$:



Notons $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle OAM, $\mathcal{A}_2$ l'aire de la portion du disque trigonométrique délimité par les points A et M, et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle OAL.

Comme le triangle OAL est rectangle en A, $\mathcal{A}_3 = \dfrac{1}{2} OA \times AL = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{2\cos(x)}$.

Comme MH est la hauteur issue de M du triangle OAM, $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} OA \times MH = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sin(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$.

Enfin, pour l'aire $\mathcal{A}_2$, utilisons la proportionnalité. Nous savons que l'aire totale du disque est $\pi \times 1^2 = \pi$ (le rayon vaut 1), et cela correspond à un angle 2π (tour complet). Nous cherchons la portion correspondant à un angle x, donc $\mathcal{A}_2 = \pi \times \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$.

Il est clair que $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2 \leq \mathcal{A}_3$, d'où l'encadrement :

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Ainsi $\dfrac{\sin(x)}{x} \leq 1$ avec la première inégalité, et $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x}$ avec la deuxième inégalité. Finalement, on a montré, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Comme les fonctions cos et $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sont paires, cet encadrement est aussi valable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Comme $\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$, on en tire, par le théorème des gendarmes, que $\boxed{\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}$.

Proposition :

cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin x$ et $\sin'(x) = \cos x$.

Démo 11 : On admet les formules trigonométriques d'addition (qui se démontrent indépendemment, c.f. plus loin).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{-(1-\cos(x))(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)} \\ &= \frac{-\left(1-\cos^2(x)\right)}{x(\cos(x)+1)} = \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} \\ &= -\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{x}{\cos(x)+1}\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1^2 = 1$, et $\cos(x)+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$, donc par produit : $\boxed{\frac{\cos(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que cos est dérivable en a et que $\cos'(a) = -\sin(a)$.

$$\begin{aligned}\forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h} \\ &= \frac{\cos(a)(\cos(h)-1)-\sin(a)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

D'après les limites trouvées plus haut, on obtient que :

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin(a).$$

Donc cos est dérivable en a et $\cos'(a) = -\sin(a)$.

Ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{cos est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \cos' = -\sin}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que sin est dérivable en a et que $\sin'(a) = \cos(a)$.

$$\begin{aligned}\forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h} \\ &= \frac{\sin(a)(\cos(h)-1)+\cos(a)\sin(h)}{h} \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

D'après les limites trouvées plus haut, on obtient que :

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos(a).$$

Donc sin est dérivable en a et $\sin'(a) = \cos(a)$.

Ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{sin est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \sin' = \cos}$.