Devoir surveillé 5.

Lundi 22 janvier 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante :

$$(E_n) \ : \ x - \ln(x) = n.$$

On définit la fonction f_n par : $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

Partie 1 : Étude de la fonction f_n

1°) Étudier les variations de f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sur son ensemble de définition.

2°) Déterminer les solutions, si elles existent, de (E_0) et de (E_1).

Partie 2 : Étude d'une suite

1°) Soit $n \geq 2$. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $]0, 1[$. On notera x_n cette unique solution.

2°) Déterminer, pour tout $n \geq 2$, le signe de $f_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

3°) Justifier que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge. On notera ℓ sa limite.

4°) Montrer que $\ell = 0$.

5°) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $x_n = e^{x_n} e^{-n}$, et en déduire que $x_n = e^{-n} + o(e^{-n})$.

6°) En déduire que :

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

7°) On pose, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k$.

a) Quelle est la monotonie de $(S_n)_{n\geq 2}$?

b) Justifier qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \leq \dfrac{3}{2} e^{-n}$.

c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge.

Exercice 2

1°) Déterminer le développement limité d'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

2°) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.
Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera. On étudiera les positions relatives.

Exercice 3

On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2+x+1} \end{array}$.

On pose alors :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad i.e. \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1} \end{cases}.$$

1°) **a)** Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 < u_n \leq 1$.

2°) **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3°) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

4°) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

5°) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

6°) Déduire des questions précédentes un encadrement de nu_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que la suite (nu_n) converge et déterminer sa limite.
Traduire ce résultat en une écriture en o pour la suite (u_n).

Exercice 4

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{i-x}{i+x} \end{array}$.

1°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{U}$.

Rappel : L'ensemble $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1.

2°) f est-elle surjective ?

3°) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Résoudre l'équation $f(x) = e^{i\theta}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On simplifiera le résultat obtenu.

4°) On va montrer, dans cette question, que f est injective par 2 méthodes.

a) *Méthode 1* : En revenant à la définition de l'injectivité.

b) *Méthode 2* : En utilisant la question précédente.

5°) Déterminer $f(\mathbb{R})$.

6°) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, et vérifiant la relation :

$$(*)\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right).$$

1°) On suppose, dans cette question, que f est solution.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On note $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

a) On suppose dans cette question que $a \geq 0$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

ii. Montrer que (u_n) est monotone.

iii. Montrer que (u_n) converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $a < 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n$.

À l'aide de la suite (v_n), montrer que (u_n) converge vers 0.

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = f(u_n)$.

Montrer que (α_n) est constante.

d) Qu'en déduire sur la fonction f ?

2°) Conclure.

$*\ *\ *\ *\ *$ FIN $*\ *\ *\ *\ *$