

Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 2.

1°) f_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = \boxed{\operatorname{ch}(x) \exp(\operatorname{sh}(x))}.$$

2°) f_2 est dérivable là où elle est définie (par somme, produit et quotient), et pour tout x dans son domaine de définition :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{-\sin x (\sin x - x \cos x) - \cos x (\cos x + x \sin x - 1 \times \cos x)}{(\sin x - x \cos x)^2} \\ &= \boxed{\frac{-\sin^2 x}{(\sin x - x \cos x)^2}} \end{aligned}$$

3°) f_3 est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_4'(x) = \boxed{4(3x^2 + 1)(x^3 + x - 2)^3}$$

4°) Pour tout réel x , $2 - x > 0 \iff x < 2$. Donc $\boxed{f_4 \text{ est définie sur }]-\infty, 2[}$.

$x \mapsto 2 - x$ est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* sur cet intervalle ; et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* ; donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2 - x}$ est dérivable sur $] -\infty, 2[$.

Par quotient ($x \mapsto x$ est dérivable sur $] -\infty, 2[$), $\boxed{f_4 \text{ est dérivable sur }] -\infty, 2[}$.

Pour tout $x \in] -\infty, 2[$,

$$f_4'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2 - x} - x \frac{-1}{2\sqrt{2 - x}}}{\sqrt{2 - x}^2} = \frac{2(2 - x) + x}{2\sqrt{2 - x}(2 - x)} = \boxed{\frac{4 - x}{2\sqrt{2 - x}(2 - x)}}$$

Autre manière de faire le calcul : en écrivant $f_4(x) = x(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 1 \times (2 - x)^{-\frac{1}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) \times (2 - x)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= (2 - x) \times (2 - x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{x}{2} (2 - x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(2 - x) + x}{2} (2 - x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \boxed{\frac{4 - x}{2} (2 - x)^{-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

5°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$ donc $0 < e^{-x^2} \leq 1$, autrement dit $x \mapsto e^{-x^2}$ est à valeurs dans $]0, 1]$.

Comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ qui contient $]0, 1]$, $\boxed{f_5 \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

Pour tout réel x , $e^{-x^2} = 1 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$.

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x^2} \in]0, 1[$, et $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* par composition.

Par ailleurs, Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et donc sur $] 0, 1[$. Par composition, f_5 est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_5'(x) = (-2x)e^{-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{-x^2})^2}} = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}$$