Corrigé du devoir maison 12.

Partie 1 : Généralités

1°) $f_X(0) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)0^k = \boxed{P(X=0)}$.

$f_X(1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \boxed{1}$ puique les $(X=k)$ forment un système complet d'événements.

2°) f_X est une fonction polynômiale, elle est donc indéfiniment dérivable.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $n \geq 1$,

$$f'_X(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)kt^{k-1} \text{ car pour } k=0 \text{, le terme était une constante}$$

Ainsi $\boxed{f'_X(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)}$. De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $n \geq 2$:

$$f''_X(t) = \sum_{k=2}^{n} P(X=k)k(k-1)t^{k-2}$$

Ainsi $\boxed{f''_X(1) = \sum_{k=2}^{n} (k^2-k)P(X=k)}$. Par ailleurs, $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$,
donc $\boxed{E(X) = f'_X(1)}$.
$V(X) = E(X^2) - E(X)$ et par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2-k)P(X=k) + \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k^2-k)P(X=k) + \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= f''_X(1) + f'_X(1)
\end{aligned}$$

On en tire que $\boxed{V(X) = f''_X(1) + f'_X(1) - (f'_X(1))^2}$.

Partie 2 : Une première application

3°) À l'issue du 2ème lancer, on ne peut avoir gagné qu'un point au plus. Donc $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
Ne pas avoir gagné de point au 2ème lancer revient à avoir fait deux fois de suite la même chose : $(X_2 = 0) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$.
Comme $P_1 \cap P_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont incompatibles,

$$P(X_2 = 0) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2)$$

Comme P_1 et P_2 sont indépendants, ainsi que F_1 et F_2 :

$$P(X_2 = 0) = P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2)$$

Comme la pièce est équilibrée : $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Comme $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = 1$, on en tire $\boxed{P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}}$. On peut dire que X_2 est une variable de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{E(X_2) = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{V(X_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$.

4°) À l'issue du 3ème lancer, on peut gagner un point supplémentaire par rapport à X_2 donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Ne pas avoir gagné de point au 3ème lancer revient à avoir fait trois fois de suite la même chose : $(X_3 = 0) = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.
Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $P(X_3 = 0) = 2 \times \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
Avoir gagné 2 points au 3ème lancer revient à avoir fait à chaque lancer un côté différent : $(X_3 = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$.
Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $P(X_3 = 2) = 2 \times \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
Comme $P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) + P(X_3 = 2) = 1$, on en tire $\boxed{P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}}$.

5°) $X_n(\Omega) = \{0, \dots, n-1\}$, car on peut ne faire que des piles et ne gagner aucun point, et au maximum on gagne un point à chaque lancer à partir du $2^{\text{ème}}$ donc au total $n - 1$ points.
$(X_n = 0) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n)$. Par un raisonnement similaire à ceux des questions précédentes,

$$P(X_n = 0) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

6°) Soit $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons A_{n+1} l'événement "le côté obtenu au $n+1$-ième lancer est le même que celui obtenu au lancer précédent".
A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$ forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = k) = P(A_{n+1})P_{A_{n+1}}(X_{n+1} = k) + P(\overline{A_{n+1}})P_{\overline{A_{n+1}}}(X_{n+1} = k)$$

On a $A_{n+1} = (P_n \cap P_{n+1}) \cup (F_n \cap F_{n+1})$; par un raisonnement similaire à ceux des questions précédentes, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc également $P(\overline{A_{n+1}}) = 1 - P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Sachant que A_{n+1} est réalisé (on ne gagne pas de point au $n+1$-ième lancer), dire que $X_{n+1} = k$ revient à dire que $X_n = k$. De même, sachant que $\overline{A_{n+1}}$ est réalisé (on gagne un point au $n+1$-ième lancer), dire que $X_{n+1} = k$ revient à dire que $X_n = k - 1$. D'où :

$$\boxed{P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k - 1)}.$$

Lorsque k vaut n, comme X_n ne prend jamais la valeur n, on a $P(X_n = n) = 0$, donc la formule devient $\boxed{P(X_{n+1} = n) = \frac{1}{2}P(X_n = n - 1)}$.

7°) Soit $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$. En utilisant les questions 5 et 6 :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = k)t^k \\
&= P(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1) \right) t^k + P(X_{n+1} = n)t^n \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k-1)t^k + \frac{1}{2}P(X_n = n-1)t^n \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(Q_n(t) - P(X_n = 0)\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-2} P(X_n = j)t^{j+1} + \frac{1}{2}P(X_n = n-1)t^n \text{ avec } j = k+1 \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(Q_n(t) - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{t}{2}\sum_{j=0}^{n-2} P(X_n = j)t^j + \frac{t}{2}P(X_n = n-1)t^{n-1} \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}Q_n(t) - \frac{1}{2^n} + \frac{t}{2}\sum_{j=0}^{n-1} P(X_n = j)t^j \\
&= \frac{1}{2}Q_n(t) + \frac{t}{2}Q_n(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_{n+1}(t) = \frac{t+1}{2}Q_n(t)}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $(Q_n(t))_{n\geq 2}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1+t}{2}$.
Comme $Q_2(t) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)t = \dfrac{1+t}{2}$, on en tire que pour tout $n \geq 2$,

$$Q_n(t) = Q_2(t)\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} = \boxed{\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}}.$$

8°) Soit $n \geq 3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_n'(t) = \dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{n-2}$, donc $E(X_n) = Q_n'(1) = \boxed{\dfrac{n-1}{2}}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_n''(t) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{n-3}$, donc $Q_n''(1) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}$ et

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} \\
&= \frac{n-1}{4}(n-2+2-n+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X_n) = \frac{n-1}{4}}$$

Partie 3 : Une deuxième application

9°) Par hypothèse, pour tout $k \in \{2, \ldots, 12\}$, $P(S = k) = \dfrac{1}{11}$ (et $P(S = 0) = P(S = 1) = 0$). Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_S(t) = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11}t^k = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k$$

Si $t=1$, on a $\boxed{f_S(1)=1}$ (comme vu à la question 2). Si $t\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\begin{aligned} f_S(t) &= \frac{t^2}{11}\sum_{k=2}^{12} t^{k-2}\\ &= \frac{t^2}{11}\sum_{i=0}^{10} t^i \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, t\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\ f_S(t)=\frac{t^2}{11}\frac{1-t^{11}}{1-t}} \text{ car } t\neq 1$$

Comme 0 n'est pas racine de $\sum_{i=0}^{10} t^i$, 0 est bien racine double de f_S.

On sait aussi que 1 n'est pas racine de f_S. Pour $t\neq 0$ et $t\neq 1$,

$$\begin{aligned} f_S(t)=0 &\Longleftrightarrow 1-t^{11}=0\\ &\Longleftrightarrow t \text{ racine 11ième de l'unité distincte de 1}\\ &\Longleftrightarrow t=e^{i\frac{2k\pi}{11}},\ k\in\{1,\dots,11\} \end{aligned}$$

Aucun des angles $\dfrac{2k\pi}{11}$ n'est égal à 0 modulo π, donc toutes ces valeurs sont non réelles.

Ainsi, $\boxed{\text{la seule racine réelle de } f_S \text{ est } 0.}$

10°) a) $p_6=P(X=6)=P(Y=6)\geq 0$, et si cette valeur était nulle, alors $(X=6)$ et $(Y=6)$ seraient vides, et donc $(S=12)$ aussi puisque $(S=12)=(X=6)\cap(Y=6)$. Or on sait que $P(S=12)=\dfrac{1}{11}\neq 0$ donc c'est impossible. Ainsi $\boxed{p_6>0}$.
De même, $P(S=2)\neq 0$ et la seule façon d'avoir $S=2$ est que X et Y valent 1.
Donc $p_1=P(X=1)=P(Y=1)\neq 0$ i.e. $\boxed{p_1>0.}$

b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_X(t)=\sum_{k=1}^{6} p_k t^k$, et comme $p_6\neq 0$, $\boxed{f_X \text{ est bien de degré } 6}$.
On a $f_X(0)=\sum_{k=1}^{6} p_k 0^k=0$ donc $\boxed{0 \text{ est bien racine de } f_X}$.

c) En utilisant le calcul général fait à la question 2, on trouve que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'_X(t)=\sum_{k=1}^{6} kp_k t^{k-1}$ donc $\boxed{f'_X(0)=p_1}$.
Supposons que pour tout $h<0$, $f_X(h)>0$. Alors, pour tout $h<0$, le taux d'accroissement de f_X entre h et 0 est négatif :

$$\frac{f_X(h)-f_X(0)}{h-0}=\frac{f_X(h)}{h}<0$$

Par passage à la limite $h\to 0$, on obtient $f'_X(0)\leq 0$: absurde puisque $f'_X(0)=p_1>0$ d'après la question a. Ainsi, $\boxed{\text{il existe un réel } h<0 \text{ tel que } f_X(h)\leq 0.}$

d) Comme f_X est de degré 6 et de coefficient dominant p_6 positif, $f_X(t)\underset{t\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
En particulier, il existe un réel B tel que pour tout $t\leq B$, $f_X(t)>1$.
Comme $f_X(h)\leq 0$, on a $B<h$.
La fonction f_X est continue sur le segment $[B,h]$. On a $f_X(B)>0$ et $f_X(h)\leq 0$ donc la valeur 0 est comprise entre $f_X(B)$ et $f_X(h)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel t_0 entre B et h, tel que $\boxed{f_X(t_0)=0}$. On a $t_0<0$ puisque $t_0\leq h<0$.

11°) D'après le résultat admis, comme X_1 et X_2 sont indépendantes, $f_S=f_{X_1}f_{X_2}=f_X^2$.
En particulier, $f_S(t_0)=(f_X(t_0))^2=0^2=0$. Ainsi t_0 est une racine réelle pour f_S, strictement négative donc distincte de 0 : c'est absurde d'après la question 9.
Ainsi, $\boxed{\text{il est impossible que } S \text{ suive la loi uniforme sur } \{2,\dots,12\}.}$