
TD 3. Nouvelles fonctions usuelles.

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 2. Soient a et x deux réels.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kx)$.

Exercice 3. Résoudre $\operatorname{ch}(x) = 2$.

Exercice 4. 1) (Une formule de trigonométrie hyperbolique) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t)$.

2) (Application) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 5. Étudier les fonctions suivantes, et tracer leurs courbes représentatives :

$f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$, $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ $h : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan(x))$.

Exercice 6. On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1°) Déterminer le domaine de définition D de f .

2°) Soit $x \in D$. Comment poser θ pour avoir $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$?

Exprimer alors $f(x)$ en fonction de θ .

3°) À l'aide de l'expression trouvée précédemment, simplifier f .

Exercice 7. On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , et son domaine de dérivabilité.

b) Calculer f' .

c) En déduire une expression simple de f .

d) Retrouver ce résultat par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{R} : a) $2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} x$ b) $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$.

Exercice 10. On considère l'équation : $(E) : \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4}$.

1°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

2°) La déterminer.

Exercice 11. Donner les domaines de définition, de dérivabilité et calculer les dérivées de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$

et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire ?