Ch 3 - Démonstrations non faites en classe.

Théorème : de la dérivée de la réciproque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Notons $J = f(I)$; d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J.

$\boxed{\text{Soit } y_0 \in J}$. $\boxed{\text{On pose } x_0 = f^{-1}(y_0)}$ (de sorte que $y_0 = f(x_0)$).
On suppose f dérivable en x_0, alors :

$$\boxed{f^{-1} \text{ dérivable en } y_0 \iff f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0}$$

et dans ce cas, on a $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.}$

Démonstration :

Soit $y \in J \backslash \{y_0\}$. On peut écrire : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.

- Supposons que $f'(x_0) \neq 0$. On sait que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$, avec $f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - f(x_0) \neq 0$ pour $x \neq x_0$ (grâce à la bijectivité de f), donc on sait que

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} \ : \ (1)$$

Par ailleurs, on sait grâce au théorème de la bijection que f^{-1} est continue en y_0, et donc que $f^{-1}(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f^{-1}(y_0)$ i.e. $f^{-1}(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} x_0$: (2).
On peut donc faire une composition de limites avec (1) et (2) :

$$\frac{f^{-1}(y) - x_0}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(x_0)} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{i.e. } \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Ce qui signifie que f^{-1} est dérivable en y_0 et que $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.

- Supposons que $f'(x_0) = 0$. On sait donc que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.
Nous avons aussi supposé f strictement monotone :
  — Dans le cas où f est strictement croissante :
  Pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ tel que $x < x_0$, on a $f(x) - f(x_0) < 0$, et aussi $x - x_0 < 0$, donc le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est strictement positif ;
  Pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ tel que $x > x_0$, on a $f(x) - f(x_0) > 0$, et aussi $x - x_0 > 0$, donc le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est strictement positif.
  Puisque cette expression tend vers 0 en x_0 en restant strictement positive, son inverse tend vers $+\infty$ en x_0 :

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty \ : \ (1)$$

— Dans le cas où f est strictement décroissante, il n'est pas difficile d'adapter ce qui précède et de constater que le taux d'accroissement est toujours strictement négatif, on trouve alors :

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty \ : \ (1)$$

On peut alors faire une composition de limites comme dans le cas $f'(x_0) \neq 0$, sauf qu'on trouvera alors que le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 aura pour limite en y_0 $+\infty$ ou $-\infty$ (selon la stricte monotonie de f). Dans les deux cas, on conclut que f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.
Par contraposée : si f^{-1} est dérivable en y_0, alors $f'(x_0) \neq 0$.

Théorème-définition :

- La fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
  (⚠ f n'est pas la fonction cosinus).
  Sa réciproque f^{-1} est appelée arccosinus, et notée Arccos.
- La fonction Arccos est définie et continue sur $[-1,1]$, à valeurs dans $[0,\pi]$, et strictement décroissante.

Démo 6 :

- $[0,\pi]$ est un intervalle
- f est continue sur $[0,\pi]$
- f est dérivable sur $[0,\pi]$ et : $\forall\, x \in [0,\pi]$, $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$
  et $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \pi$.
  Donc f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1,1]$.
Ainsi $f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$, et toujours par le théorème de la bijection, f^{-1} est continue, et a la même stricte monotonie que f : f^{-1} est strictement décroissante.

Théorème :

Arccos n'est dérivable que sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démo 7 : Arccos est la réciproque de $f : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, qui vérifiait bien toutes les hypothèses du théorème de la bijection.

Soit $y \in [-1,1]$. Posons $x = \text{Arccos}(y)$ (de sorte que $y = \cos(x)$, et que $x \in [0,\pi]$).
f est dérivable en x, donc, par le théorème de la dérivée de la réciproque,

$$\begin{aligned} \text{Arccos dérivable en } y &\iff f'(x) \neq 0 \\ &\iff -\sin(x) \neq 0 \\ &\iff \sin(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Or $x \in [0,\pi]$ donc

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ &\iff \text{Arccos}(y) = 0 \text{ ou } \text{Arccos}(y) = \pi \\ &\iff y = 1 \text{ ou } y = -1 \quad (\text{ car } \cos(0) = 1 \text{ et } \cos(\pi) = -1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Arccos dérivable en } y \iff y \neq 1 \text{ et } y \neq -1$$

Autrement dit, Arccos est dérivable <u>seulement</u> sur $]-1,1[$.
Supposons $y \in]-1,1[$. Toujours par le théorème,

$$\text{Arccos}(y) = \frac{1}{f'(\text{Arccos}(y))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(y))}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} (\sin(\text{Arccos}(y)))^2 + (\cos(\text{Arccos}(y)))^2 &= 1 \\ (\sin(\text{Arccos}(y)))^2 + y^2 &= 1 \\ \text{donc } (\sin(\text{Arccos}(y)))^2 &= 1 - y^2 \\ \sqrt{(\sin(\text{Arccos}(y)))^2} &= \sqrt{1-y^2} \\ |\sin(\text{Arccos}(y))| &= \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Or $\text{Arccos}(y) \in [0,\pi]$ et sin est positive sur $[0,\pi]$, donc $\sin(\text{Arccos}(y)) \geq 0$, donc $\sin(\text{Arccos}(y)) = \sqrt{1-y^2}$.
Ainsi $\text{Arccos}'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.