Devoir surveillé 7.

Samedi 9 avril 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On note A_k l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f^2 = kf$:

$$A_k = \{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ f^2 = kf\}$$

On rappelle que f^2 désigne $f \circ f$.

Partie 1 : Quelques propriétés générales

1°) On suppose que $f \in A_0$ ($i.e$ $k = 0$). Montrer qu'il y a une inclusion entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in A_k$. On suppose $k \neq 0$ et f bijective. Déterminer f.

3°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in A_k$. On suppose $k \neq 0$.

- **a)** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
- **b)** Soit $x \in E$. Montrer que $x - \dfrac{1}{k} f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
- **c)** En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
- **d)** Que peut-on dire de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

4°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et f et g des éléments de A_k. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que : $\exists\, k' \in \mathbb{N}$, $f \circ g \in A_{k'}$.

5°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et f et g des éléments de A_k. On suppose $k \neq 0$.

- **a)** Montrer que $f \circ g + g \circ f = 0 \implies f \circ g = g \circ f = 0$.
- **b)** Montrer que $f + g \in A_k \iff f \circ g = g \circ f = 0$.

Partie 2 : Un exemple avec $E = \mathbb{R}^3$

Dans cette partie, on se place dans le cas $E = \mathbb{R}^3$, et on considère l'application f définie sur E par :

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \ f(x, y, z) = (x - y, -x + y, 2x + 2y + 2z)$$

Par ailleurs, on note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\}$.

6°) Montrer que F est un plan vectoriel dont on donnera une base.

7°) Montrer que f est un endomorphisme de E.

8°) Déterminer le noyau de f et en préciser une base.
f est-il un automorphisme de E ?

9°) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, puis justifier l'égalité $\mathrm{Im}(f) = F$.

10°) Déterminer un entier k tel que $f \in A_k$.
En déduire f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11°) À l'aide de la question 3b, montrer que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f)$. A-t-on l'égalité ?

Partie 3 : Un exemple avec $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dans cette partie, on se place dans le cas $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note e_k la fonction $x \mapsto \exp(kx)$.
On considère l'application φ sur E par :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \ \varphi(f) = f'(0)e_k$$

12°) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

13°) Montrer que $\varphi \in A_k$.

14°) On pose $F = \mathrm{Vect}(e_k)$ et $G = \{f \in E \ / \ f'(0) = 0\}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et

$$\Delta : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

On notera de la même manière un polynôme et sa fonction polynomiale.

Question préliminaire :
Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ où $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.
Justifier : $\exists\, Q \in E,\ Q' = P$.

Partie 1

1°) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2°) **a)** On suppose qu'il existe un polynôme P non constant dans $\mathrm{Ker}(\Delta)$.
Montrer que P admet une infinité de racines. Qu'en conclut-on ?

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

3°) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $P(X+1) - P(X) = 1$ est $\{X + c \ / \ c \in \mathbb{R}\}$.

Partie 2

On cherche l'ensemble $\mathcal{A}$ des polynômes P de E tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k$$

4°) Soit $P \in \mathcal{A}$.
On sait, par la question préliminaire, qu'il existe un polynôme Q de E tel que $Q' = P$.

a) Justifier que $Q(X+1) - Q(X) = X$.

b) En déduire que : $\exists\, c \in \mathbb{R},\ P(X) = X + c$.

5°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$.

Partie 3

On souhaite démontrer qu'il n'existe pas de polynôme P de E tel que :

$$(*) : \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$$

Nous allons raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe un polynôme P de E vérifiant $(*)$.
On se donne alors un polynôme Q tel que $Q' = P$.

6°) Montrer que $X(Q(X+1) - Q(X)) = 1$.

7°) Conclure.

Exercice 3

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

On notera de la même manière un polynôme et sa fonction polynomiale.

1°) Calculer $T_2,\ T_3,\ T_4$.

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et a pour coefficient dominant 2^{n-1}.

3°) **a)** Linéariser $\cos a \times \cos b$ pour a, b réels.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (*)$.
Remarque : $T_n(\cos\theta)$ est un réel, obtenu en remplaçant dans le polynôme $T_n(X)$ l'indéterminée X par le réel $\cos\theta$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

d) Calculer $T_n(1)$ et $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°) **a)** Montrer, en utilisant la question 3c), que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(X) = (-1)^n T_n(-X)$.

b) Qu'en déduit-on pour les polynômes T_n ?

5°) **a)** En dérivant suffisamment $(*)$ par rapport à la variable θ, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1, 1],\ (x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x) \quad (**)$$

b) Que vaut $T_n'(1)$?

6°) Dans cette question, on suppose $n \geq 1$.

a) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose : $\alpha_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$. Calculer $T_n(\alpha_k)$.

b) En déduire que le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, que toutes ses racines sont simples et situées dans l'intervalle $[-1, 1]$.

c) Écrire T_n sous forme d'un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

d) Donner les valeurs de

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ s_n = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

en fonction de n.