Devoir maison 7.

À rendre le jeudi 3 février 2022

Exercice

On cherche dans cet exercice l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et qui vérifient la propriété :

$$(*) : \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Partie 1 :

Soit f une solution du problème. On pose : $g : x \mapsto f(x) - f(0)$.

1°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.

2°) En déduire que, pour tous réels x et y, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

3°) Étudier la parité de g.

4°) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x - x_0) = g(x) - g(x_0)$.
En déduire que g est continue en x_0.

5°) *On souhaite prouver que :* $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$ *où* $a = g(1)$. On pose : $h : x \mapsto g(x) - ax$.

a) Montrer que h est 1-périodique.

b) Justifiez soigneusement que h possède un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}$.

c) Soit M le maximum de h sur $\mathbb{R}$ et soit un réel x_1 tel que $h(x_1) = M$.
En calculant, pour tout réel x, $h(x_1 + x)$, montrer que l'on a $h(x) \leq 0$.

d) De la même façon, en considérant le minimum de h sur $\mathbb{R}$, montrer que l'on a, pour tout réel $x, h(x) \geq 0$.
En déduire la fonction h puis la fonction g.

6°) En déduire la forme de f.

Partie 2 :

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.