Corrigé du devoir maison 10.

Question préliminaire
Comme T est scindé et de degré p, il possède p racines comptées avec multiplicités ; en les notant $x_1, \dots, x_p$, on a $\boxed{x_1 + \dots + x_p = -\dfrac{a_{p-1}}{a_p}}$.

Étude d'une suite de polynômes

1°) a) $Q_1 = X + (X-1)Q_0 = \boxed{2X-1}$.
$Q_2 = X^2 + (X-1)Q_1 = X^2 + (X-1)(2X-1) = \boxed{3X^2 - 3X + 1}$.
$Q_3 = X^3 + (X-1)Q_2 = X^3 + (X-1)(3X^2 - 3X + 1)$
$Q3 = X^3 + 3X^3 - 3X^2 + X - 3X^2 + 3X - 1 = \boxed{4X^3 - 6X^2 + 4X - 1}$.
On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{Q_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } n+1}$.

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $Q_n = (n+1)X^n + R_n$ avec R_n un polynôme de degré $< n$.

- $Q_0 = 1$, c'est bien $(0+1)X^0 + R_0$ avec $R_0 = 0$ qui est bien un polynôme de degré $-\infty < 0$.
  Ainsi H_0 est vraie.
- Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : on a $Q_n = (n+1)X^n + R_n$ avec R_n un polynôme de degré $< n$.

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= X^{n+1} + (X-1)\left((n+1)X^n + R_n\right) \\ &= X^{n+1} + (n+1)X^{n+1} - (n+1)X^n + (X-1)R_n \\ &= (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^n + (X-1)R_n \end{aligned}$$

  Posons $R_{n+1} = -(n+1)X^n + (X-1)R_n$.
  Comme $\deg(R_n) < n$, on a $\deg\left((X-1)R_n\right) = 1 + \deg(R_n) < n+1$, et par somme $\deg(R_{n+1}) \leq \max\left(\deg(-(n+1)X^n), \deg((X-1)R_n)\right) < n+1$.
  Ainsi H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } n+1}$

2°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (X-1)^k X^{n-k}$.

- $Q_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} (X-1)^k X^{0-k} = (X-1)^0 X^0 = 1$.
  Ainsi H_0 est vraie.
- Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= X^{n+1} + (X-1)\sum_{k=0}^{n} (X-1)^k X^{n-k} \\ &= X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (X-1)^{k+1} X^{n+1-(k+1)} \\ &= (X-1)^0 X^{n+1-0} + \sum_{j=1}^{n+1} (X-1)^j X^{n+1-j} \text{ (changement d'indice } j = k+1) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (X-1)^j X^{n+1-j} \end{aligned}$$

  Ainsi H_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n = \sum_{k=0}^{n} (X-1)^k X^{n-k}}$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^j \right) X^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^{n+j-k} \right) \end{aligned}$$

Étudions la somme interne $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^{n+j-k}$:

- Pour $k=0$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} (-1)^{0-j} X^{n+j-0} = \binom{0}{0} (-1)^{0-0} X^n$: il n'y a pas de terme en X^{n-1}.
- Pour $k \geq 1$, dans $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^{n+j-k}$, X^{n-1} apparaît quand $j-k=-1$ i.e. $j=k-1$.

  Le coefficient est alors $\displaystyle\binom{k}{k-1} (-1)^{k-(k-1)} = k(-1)^1 = -k$.

Ainsi, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-k) = -\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{-\frac{n(n+1)}{2}}$.

Calcul de S

4°) *Méthode 1* :

Soit $x \in \mathbb{C}$. 1 n'est pas racine de P car $1^{n-1} + \cdots + 1 = n \neq 0$.

On suppose donc $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0 \\ &\iff \frac{1-x^n}{1-x} = 0 \\ &\iff x^n = 1 \\ &\iff \exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\ x = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\ x = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{car } x \neq 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont donc les } \omega_k \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n-1\}.}$

Méthode 2 :

Comme l'énoncé donne la réponse, on peut vérifier que les ω_k sont racines et conclure par un argument sur le degré.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(\omega_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^j = 1 + \omega_k + \cdots + \omega_k^{n-1} = \frac{1-\omega_k^n}{1-\omega_k}$ car $\omega_k \neq 1$.

Or $\omega_k^n = 1$ donc $P(\omega_k) = 0$.

P admet $n-1$ racines distinctes (les ω^k, $1 \leq k \leq n-1$). De plus, $\deg(P) = n-1$ donc ce sont toutes les racines de P (et par ailleurs, elles sont simples).

Méthode 3 : On connaît la factorisation classique : $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$.

Cela peut s'écrire : $X^n - 1 = (X-1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$.

De plus, $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1) = (X-1)P$.

Donc $(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega_k) = (X-1)P$.

Comme $X-1$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit que : $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega_k)$. D'où le résultat.

5°) Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On a $y = \dfrac{1}{1-x} \neq 0$ donc $1 - x = \dfrac{1}{y}$ donc $\boxed{x = 1 - \dfrac{1}{y}}$.

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 &\Longleftrightarrow P\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^k = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{y-1}{y}\right)^k = 0 \\
&\Longleftrightarrow y^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{y-1}{y}\right)^k = 0 \ \text{ car } y^{n-1} \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(y-1)^k y^{n-1-k} = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = 0 \Longleftrightarrow Q_{n-1}(y) = 0}$$

6°) D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, x est racine de P si et seulement si $\dfrac{1}{1-x}$ est racine de Q_{n-1}. Comme, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, ω_k est une racine de P différente de 1, on obtient que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\dfrac{1}{1-\omega_k}$ est racine de Q_{n-1}.

Pour tout $(x, x') \in (\mathbb{C}\backslash\{1\})^2$, $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x'} \Longrightarrow 1 - x = 1 - x' \Longrightarrow x = x'$;
donc, comme les ω_k pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ forment $n-1$ valeurs distinctes de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, on a trouvé $n-1$ racines distinctes pour Q_{n-1}.
Or d'après la question 1.b, on sait que Q_{n-1} est de degré $n-1$. Donc Q_{n-1} n'a pas d'autre racine.

$$\boxed{\text{Ainsi, les racines de } Q_{n-1} \text{ sont les nombres } \frac{1}{1-\omega_k} \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n-1\}.}$$

7°) D'après la question 1.b et la question 3, le coefficient dominant (devant X^{n-1}) de Q_{n-1} est n et le coefficient devant X^{n-2} est $-\dfrac{(n-1)n}{2}$.
Comme Q_{n-1} est de degré $n-1$ et qu'il a $n-1$ racines distinctes, il est scindé ; d'après la question préliminaire :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_k} = -\frac{-\frac{n(n-1)}{2}}{n} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{S = \frac{n-1}{2}}$$