Corrigé du devoir maison 5.

Exercice

La constante d'Euler

1°) On sait : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.
$\ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$.
On a bien obtenu : $\boxed{\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}}$.

2°) ★ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0$ par 1).
Donc (a_n) est croissante.

★ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ par 1).
Donc (b_n) décroissante.

★ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.
Ainsi, par le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent et ont même limite } \gamma}$.
De plus, par la monotonie des suites, $a_1 \leq \gamma \leq b_1$.
Donc $\boxed{1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1}$.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = b_n + \ln n$.
La suite (b_n) est convergente et $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par somme, $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Une première application

5°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
K_{n+1} - K_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \qquad \text{en posant } j = k+1 \text{ dans la 1ere somme} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La suite } (K_n) \text{ est donc strictement croissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$1 \leq k \leq n$ donc $0 < n+1 \leq n+k \leq 2n$ donc $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

On somme de $k=1$ à $k=n$ l'inégalité de droite :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$ *i.e* $K_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ donc $K_n \leq 1$.

La suite (K_n) est croissante et majorée donc $\boxed{\text{la suite } (K_n) \text{ converge}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{K_n = H_{2n} - H_n}$.

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $H_p = b_p + \ln p$ donc

$$K_n = b_{2n} + \ln(2n) - b_n - \ln n = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) + b_{2n} - b_n$$

Ainsi, $\boxed{K_n = \ln 2 + b_{2n} - b_n}$.

Or la suite (b_n) converge vers γ donc la suite extraite (b_{2n}) aussi.

On en déduit, par opérations, que $\boxed{\text{la suite } (K_n) \text{ converge vers } \ln 2}$.

6°) a) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n : A_{2n} = K_n$.

★ Pour $n = 1$: $K_1 = \dfrac{1}{2}$ et $A_2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}
A_{2(n+1)} = A_{2n+2} &= A_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= K_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \qquad \text{par } \mathcal{P}_n \\
&= K_{n+1} \text{ par le calcul effectué dans 5a}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{2n} = K_n}$.

b) (K_n) converge vers $\ln 2$ par 5c donc (A_{2n}) converge vers $\ln 2$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{2n+1} = A_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$ donc la suite (A_{2n+1}) converge aussi vers $\ln 2$.

Les 2 suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs de la suite (A_n) sont convergentes de même limite $\ln 2$ donc $\boxed{\text{la suite } (A_n) \text{ converge vers } \ln 2}$.

Une deuxième application

7°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

8°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} &= \frac{n+1-n}{n(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n(2n+1)} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{2n+1-2n}{n(2n+1)} - \frac{2(n+1)-(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}
\end{aligned}$$

Les réels $\boxed{a=1,\ b=1,\ c=-4}$ conviennent donc.

Autre méthode : Réduire l'expression $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{2n+1}$ au même dénominateur, il suffit alors de résoudre un système.

9°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
H_{2n+1} &= \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{\substack{p \text{ pair} \\ 1\leq p\leq 2n+1}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \text{ impair} \\ 1\leq p\leq 2n+1}} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= \frac{1}{2}H_n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1}$

Autre méthode : Par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$.

- Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3}$ et $H_3 - \dfrac{1}{2}H_1 - 1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}.1 - 1 = \dfrac{1}{3}$, donc P_1 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(n+1)+1} \\
&= H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1 + \frac{1}{2n+3} \qquad \text{par H.R}
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
H_{2(n+1)+1} - \frac{1}{2}H_{n+1} - 1 &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) - 1 \\
&= H_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - 1 \\
&= H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1 + \frac{1}{2n+3}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} = H_{2(n+1)+1} - \frac{1}{2}H_{n+1} - 1$: P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De ce qui précède, on déduit :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) \\
&= 6\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right] \\
&= 6\left[H_n + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - 4\left(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1\right)\right] \qquad \text{en posant } j = k+1 \\
&= 6\left(H_n + (H_{n+1} - 1) - 4H_{2n+1} + 2H_n + 4\right) \\
&= 6\left(3 + 3H_n + H_{n+1} - 4H_{2n+1}\right) \\
&= 6\left[3 + 3(b_n + \ln(n)) + (b_{n+1} + \ln(n+1)) - 4(b_{2n+1} + \ln(2n+1))\right] \\
&= 6\left[3 + 3b_n + b_{n+1} - 4b_{2n+1} + \ln\left(\frac{n^3(n+1)}{(2n+1)^4}\right)\right]
\end{aligned}$$

La suite (b_n) converge vers γ, donc les suites extraites (b_{n+1}) et (b_{2n+1}) convergent aussi vers γ, donc $3b_n + b_{n+1} - 4b_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus, $\dfrac{n^3(n+1)}{(2n+1)^4} = \dfrac{n^4 + n^3}{n^4\left(2+\frac{1}{n}\right)^4} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2^4}$.

Par continuité de ln, on a $\ln\left(\dfrac{n^3(n+1)}{(2n+1)^4}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\dfrac{1}{2^4}\right) = -4\ln(2)$.

On en déduit que : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6\left(3 - 4\ln(2)\right) = 18 - 24\ln 2.}$