Corrigé du devoir maison 3.

Exercice 1

1°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \binom{k}{2} = \binom{2}{2} = 1$, et $\displaystyle\binom{2+1}{3} = 1$, donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, avec $n \geq 2$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \binom{n+1}{2} \\
&= \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \text{ par l'hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{3} \text{ par la fomule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

  Ainsi P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}}$.

b) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \left(2\binom{k}{2} + k\right) &= 2\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=2}^{n} k \\
&= 2\binom{n+1}{3} + \sum_{k=1}^{n} k \; - 1 \quad \text{ par la question précédente} \\
&= 2\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\
&= 2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!} + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\
&= \frac{(n+1)n \times 2(n-1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} - 1 \\
&= \frac{n(n+1)\,(2n-2+3)}{6} - 1 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 2$, $2\displaystyle\binom{k}{2} + k = 2\frac{k(k-1)}{2} + k = k(k-1) + k = k^2$.
Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \left(2\binom{k}{2} + k\right) = \sum_{k=2}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 = S_n - 1.$$

On retrouve donc que pour tout $n \geq 2$, $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Premier calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i \qquad \text{car } i \text{ est une constante vis-à-vis de } j\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n+1)i - \sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - S_n\\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - S_n
\end{aligned}$$

Second calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)^2}{2} - S_n &= \frac{1}{2}S_n + \frac{n(n+1)}{4}\\
\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{4} &= \frac{3}{2}S_n\\
\frac{3}{2}S_n &= \frac{n(n+1)}{2}\left(n+1-\frac{1}{2}\right)\\
\frac{3}{2}S_n &= \frac{n(n+1)}{2}\frac{2n+1}{2}\\
&\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \boxed{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

2°) Montrons tout d'abord $\cos A = \cos B$.

$\cos A = \cos\left(\text{Arccos}\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{5}{13}$.

$\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$, donc par la question 1,

$$\cos B = \cos\left(2\,\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1-\tan^2\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{5}{13}$$

Ainsi, $\cos A = \cos B$.

De plus, par définition de Arccos, $A \in [0, \pi]$.

Par définition de Arctan, $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$.

De plus, $0 < \frac{2}{3}$ donc, par stricte croissance de Arctan : $0 < \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Ainsi, $B = 2\,\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) \in [0, \pi]$.

$\cos A = \cos B$ et A et B sont des éléments de $[0, \pi]$. Comme cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que : $\boxed{A = B}$.