Correction du devoir surveillé 3.

Exercice 1

On pose : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = \ln(1-x^2) \qquad g(x) = \frac{-1}{x}$

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \quad f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{x}\frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\ln\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 3\ln\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\ln\left(1-\frac{1}{4}\right) + 3\ln\left(1-\frac{1}{9}\right) - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3\ln\left(\frac{8}{9}\right) - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\ln(3) + 2\ln(4) + 3\ln(8) - 3\ln(9) - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -2\ln(3) + 2.2\ln(2) + 3.3\ln(2) - 3.2\ln(3) - \Big[\ln(|1+x|) - \ln(|1-x|)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\
&= 13\ln(2) - 8\ln(3) - \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) \\
&= 13\ln(2) - 8\ln(3) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 13\ln(2) - 8\ln(3) - \ln(3) + \ln(2) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) - \ln(2) + \ln(3) \\
&= 13\ln(2) - 8\ln(3) - \ln(3) + 2\ln(2) - \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 14\ln(2) - 9\ln(3)}$$

Exercice 2

Première méthode

1°) Soit z un nombre complexe de module 1. Alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

$z + \frac{1}{z} = z + \overline{z}$ donc $\boxed{z + \frac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)}$.

2°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^5+1=0 &\iff z^5=-1 \\ &\iff z^5=e^{i\pi} \\ &\iff z^5=\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{5}}}\right)^5=1 \\ &\iff \exists\, k\in\{0,1,2,3,4\},\quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{5}}}=e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\ &\iff \exists\, k\in\{0,1,2,3,4\},\quad z=e^{i\frac{\pi}{5}}e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\ &\iff \exists\, k\in\{0,1,2,3,4\},\quad z=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est $\boxed{\left\{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} / k\in\{0,\dots,4\}\right\}}$.

Ce sont les complexes : $e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}=-1, e^{i\frac{7\pi}{5}}=e^{-i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}=e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

Ce sont bien des complexes de module 1.

3°) a) *Méthode 1*

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$z^5+1=z^5-(-1)^5=(z-(-1))\left(\sum_{k=0}^{4} z^k(-1)^{4-k}\right)=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$.

Méthode 2

-1 est racine de z^5+1 donc il existe des complexes a, b, c, d, e tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z^5+1=(z+1)(az^4+bz^3+cz^2+dz+e)$.

Développons, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (z+1)(az^4+bz^3+cz^2+dz+e) &= az^5+bz^4+cz^3+dz^2+ez+az^4+bz^3+cz^2+dz+e \\ &= az^5+(b+a)z^4+(c+b)z^3+(d+c)z^2+(e+d)z+e \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b+a=0 \\ c+b=0 \\ d+c=0 \\ e+d=0 \\ e=1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \\ d=-1 \\ e=1 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{Q : z\mapsto z^4-z^3+z^2-z+1}$ convient. Q est bien une fonction polynomiale.

b) $Q(0)=1$ donc 0 n'est pas racine de Q.

Soit $z\neq 0$, on pose $Z=z+\dfrac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} (F):\ Z^2-Z-1=0 &\iff \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0 \\ &\iff z^2+2+\frac{1}{z^2}-z-\frac{1}{z}-1=0 \\ &\iff z^4+2z^2+1-z^3-z-z^2=0 \\ &\iff z^4-z^3+z^2-z+1=0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Q(z)=0 \iff (F):\ Z^2-Z-1=0}$.

c) Le discriminant de (F) est $\Delta = 1+4=5$, ses racines sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
D'après la question 2, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ est solution de (E).
Or, $(E) \iff z=-1$ ou $Q(z)=0$. Comme $z_0 \neq -1$, il vient $Q(z_0)=0$.
D'après la question précédente, on a donc $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Comme z_0 est de module 1, on obtient donc à l'aide de la question 1 : $\mathrm{Re}(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)$.
Or $\mathrm{Re}(z_0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
$\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et cos est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \geq 0$. Comme $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (puisque $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$), on en tire finalement que $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

Deuxième méthode

4°) $C = \mathrm{Re}(S)$ où $S = e^{ia} + e^{i(a+\varphi)} + e^{i(a+2\varphi)}$.

$$\begin{aligned}
S &= e^{ia}(1+e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}) = e^{ia}(1+e^{i\varphi}+(e^{i\varphi})^2)\\
&= e^{ia}\frac{1-(e^{i\varphi})^3}{1-e^{i\varphi}} \qquad \text{car } e^{i\varphi}\neq 1\\
&= e^{ia}\frac{1-e^{i3\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{3\varphi}{2}}(e^{-i\frac{3\varphi}{2}} - e^{i\frac{3\varphi}{2}})}{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}})}\\
&= e^{i(a+\varphi)}\frac{-2i\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = e^{i(a+\varphi)}\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\\
&= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cos(a+\varphi)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sin(a+\varphi)}_{\in\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{C = \cos(a+\varphi)\dfrac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$.

5°) On pose $a=\theta$ et $\varphi = 2\theta$.
Alors $\cos(a)+\cos(a+\varphi)+\cos(a+2\varphi) = \cos(\theta)+\cos(3\theta)+\cos(5\theta) = \cos(\theta)+\cos(3\theta)-1$ car $\cos(\pi)=-1$.

D'autre part, $\cos(a+\varphi)\dfrac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \cos(3\theta)\dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)}$.

Or $\sin(6\theta) = \sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = -\sin(\theta)$.

Donc, par la question précédente, $\cos(\theta)+\cos(3\theta)-1 = -\dfrac{1}{2}$.

Donc, $\boxed{\cos(\theta)+\cos(3\theta) = \dfrac{1}{2}}$.

6°) D'après une formule d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos(\theta)\cos(3\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\times\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}\\ &= \frac{e^{i4\theta}+e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}}{4}\\ &= \frac{\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}+\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}}{2}\\ &= \frac{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

Or, $\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos(\theta)$.

D'autre part, $\cos(2\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos(3\theta)$.

Ainsi, $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{2}(\cos(\theta)+\cos(3\theta))$.

En utilisant la question précédente, $\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}}$.

7°) $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$ sont les racines du polynôme $X^2-(\cos(\theta)+\cos(3\theta))X+\cos(\theta)\cos(3\theta)$ i.e. de $\boxed{X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}}$.

Autre méthode : $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}-\cos(\theta)$, *d'où* $-\frac{1}{4} = \cos(\theta)\left(\frac{1}{2}-\cos(\theta)\right) = \frac{1}{2}\cos(\theta)-(\cos(\theta))^2$ *:* $\cos(\theta)$ *est donc racine de* $X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$.

Ses racines sont $\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Or $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\theta) \geq 0$. Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, il vient : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 3

Question préliminaire

Pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est bien défini puisque $\frac{t}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, et :

$$\frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = 2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \sin(t)}$$

Partie 1

1°) Comme le segment $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ est inclus dans $]-\pi,\pi[$, en utilisant la question préliminaire :

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} t\frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

★ On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. La fonction $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est bien de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$. Remarquons que, pour $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $\frac{t}{2} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\frac{t}{2} = \operatorname{Arctan}(x)$, donc $t = 2\operatorname{Arctan} x$.

★ On a alors : $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$.

★ $\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{3} \implies x = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ t = \dfrac{2\pi}{3} \implies x = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$

Ainsi,

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{t}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t = \boxed{\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2\operatorname{Arctan} x}{x}\,\mathrm{d}x.}$$

2°) Posons $f = \ln$ et $g = \operatorname{Arctan}$.
Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ et :
$\forall x \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
D'où, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= 2\left[\ln(x)\operatorname{Arctan}(x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \ln(x)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln\left(\sqrt{3}\right)\frac{\pi}{3} - 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\pi}{6} - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{1}{2}\ln(3)\frac{\pi}{2} - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}\ln(3) - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.}$$

3°) a) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^* \text{ donc elle admet une primitive sur } \mathbb{R}_+^*.}$

b) Comme f est continue de primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Or F est dérivable de dérivée f, et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc par somme et composition, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= F'(x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{-\ln x}{x^2+1} \\ \varphi'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la dérivée de } \varphi \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+^*}$.

c) Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, la fonction φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\varphi(1) = \displaystyle\int_1^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = 0.}$

D'après la question 2, $I = \dfrac{\pi}{2}\ln(3) - 2\varphi(\sqrt{3})$ donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2}\ln(3)}$.

Partie 2

1°) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \geq -1 > 2$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2 + \sin(t) > 0$.

Donc la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{2+\sin(t)}$ est bien définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et elle y est continue par quotient. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } G' = g}$.

En particulier, G est continue en π donc $\boxed{G(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} G(x).}$

2°) ★ On pose $\theta = \pi - t$. La fonction $t \mapsto \pi - t$ est bien de classe C^1 sur $[0,\pi]$. On a alors $t = \pi - \theta$.

★ On a alors : $\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}t$.

★ $\begin{cases} t = 0 \implies \theta = \pi \\ t = \pi \implies \theta = 0 \end{cases}$

D'où

$$\begin{aligned} J &= -\int_\pi^0 \frac{\pi-\theta}{2+\sin(\pi-\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\pi-\theta}{2+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \pi\int_0^\pi \frac{1}{2+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \ - \ \int_0^\pi \frac{\theta}{2+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ J &= \pi G(\pi) - J \end{aligned}$$

D'où $2J = \pi G(\pi)$ i.e. $\boxed{J = \dfrac{\pi}{2}G(\pi)}$.

3°) a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$1 + u + u^2 = 1 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{4}{3}\left(u+\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left[1 + \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right].$$

Cette quantité est bien toujours non nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}$,

$$H(X) = \frac{4}{3}\int_0^X \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u$$

★ On pose $y = \dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}$. La fonction $y \mapsto \dfrac{2y+1}{\sqrt{3}}$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

★ On a alors : $\mathrm{d}y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u$ d'où $\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}y$.

★ $\begin{cases} u = 0 \implies y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ u = X \implies y = \frac{2X+1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

D'où

$$H(X) = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2X+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+y^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan} y\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2X+1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right)}$$

b) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. À l'aide de la question préliminaire,

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{2 + \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}\,\frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)+\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

★ On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. La fonction $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est bien de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ donc sur le segment de bornes 0 et x.

★ On a alors : $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$.

★ $\begin{cases} t = 0 \implies u = 0 \\ t = x \implies u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

D'où :

$$G(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\boxed{G(x) = H\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

4°) Pour $x \in]-\pi, \pi[$, $G(x) = H\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \tan\frac{x}{2} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} = +\infty$. Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \mathrm{Arctan}\, X = \frac{\pi}{2}$; par composition, on obtient que

$$\lim_{x\to\pi^-} G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

D'après la question 1, on a donc $\boxed{G(\pi) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$ et $\boxed{J = \dfrac{\pi^2}{3\sqrt{3}}}$ d'après la question 2.

Exercice 4

1°) Soit $m \in \mathbb{R}$. (E_m) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. Écrivons-là sous forme normalisée :

$$(E_m) \iff \forall x > 0,\ y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = m$$

★ On résout l'équation homogène associée : (H) : $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = 0$.
Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto -\ln(|x|)$ i.e. $x \mapsto -\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{+\ln(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e. les $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

★ On cherche une solution particulière de (E_m) par la méthode de variation de la constante.
On pose $y : x \mapsto \lambda(x)x$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable.
y est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0, y'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x)$.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_m) &\iff \forall x > 0, \lambda'(x)x + \lambda(x) - \frac{\lambda(x)x}{x} = m \\ &\iff \forall x > 0, \lambda'(x)x = m \\ &\iff \forall x > 0, \lambda'(x) = \frac{m}{x} \end{aligned}$$

Par exemple, $\lambda : x \mapsto m\ln(x)$ convient.
Ainsi, $x \mapsto mx\ln x$ est une solution particulière de (E_m).

★ Finalement, $\boxed{\text{les solutions de } (E_m) \text{ sont les fonctions } x \mapsto mx\ln x + \lambda x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

2°) $\varphi : x \mapsto x\ln x$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tous $a > 0, b > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= ab\ln(ab)\\ &= ab(\ln a + \ln b)\\ &= b(a\ln a) + a(b\ln b)\\ &= b\varphi(a) + a\varphi(b)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est élément de } \mathcal{S}}$.

3°) Soit f, g des éléments de $\mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $h = \lambda f + g$.
h est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f et g le sont. Soit alors $a > 0, b > 0$.

$$\begin{aligned}h(ab) &= \lambda f(ab) + g(ab)\\ &= \lambda(af(b) + bf(a)) + ag(b) + bg(a) \qquad \text{car } f \text{ et } g \text{ vérifient } (*)\\ &= a(\lambda f(b) + g(b)) + b(\lambda f(a) + g(a))\\ &= ah(b) + bh(a)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{h \in \mathcal{S}}$.

4°) a) On pose $a = b = 1$ dans $(*)$: $f(1) = f(1) + f(1)$ donc $\boxed{f(1) = 0}$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé.
Les fonctions $a \mapsto f(ab)$ et $a \mapsto af(b) + bf(a)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
De plus, elles sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ donc leurs dérivées sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ bf'(ab) = f(b) + bf'(a) \qquad L_1$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
Les fonctions $b \mapsto f(ab)$ et $b \mapsto af(b) + bf(a)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
De plus, elles sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ donc leurs dérivées sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ af'(ab) = af'(b) + f(a) \qquad L_2$$

Pour tous $a > 0, b > 0$, on effectue aL_1 et bL_2. Alors,

$$abf'(ab) = af(b) + abf'(a) \qquad\qquad abf'(ab) = abf'(b) + bf(a)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } a > 0, b > 0,\ af(b) + abf'(a) = abf'(b) + bf(a)}$.

c) Soit $x > 0$. On pose $a = x$ et $b = 1$ dans la question précédente.
On obtient : $xf(1) + xf'(x) = xf'(1) + f(x)$.
Donc, $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$ puisque $f(1) = 0$ par 4a.
On pose $m = f'(1)$. Alors $\boxed{m \in \mathbb{R}}$ et, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ xf'(x) - f(x) = m}$.

d) Ainsi, f est solution de l'équation (E_m). Par 1,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0,\ f(x) = mx\ln x + \lambda x$$

Or $f(1) = 0$ par 4a donc $0 = \lambda$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est de la forme } x \mapsto mx\ln x \text{ où } m \in \mathbb{R}}$.

5°) ★ Si $f \in \mathcal{S}$ alors il existe un réel m tel que $f = m\varphi$.

★ Réciproquement, soit $m \in \mathbb{R}$. On note $f = m\varphi$.
$\varphi \in \mathcal{S}$ par 2. De plus, la fonction nulle g est aussi dans $\mathcal{S}$.
Donc, par 3, $m\varphi + g \in \mathcal{S}$ *i.e.* $f = m\varphi \in \mathcal{S}$.

★ Ainsi, $\boxed{\text{les éléments de } \mathcal{S} \text{ sont les fonctions } \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & mx\ln x\end{array} \text{ où } m \in \mathbb{R}}$.