Devoir maison 8.

À rendre le lundi 28 février 2022

Exercice 1

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \forall\, x \in I,\quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie 1 : Premiers exemples

1°) Montrer que $\exp \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2°) Pour $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, déterminer le plus grand intervalle I possible tel que $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

Partie 2 : Stabilité par quelques opérations

3°) Soit I un intervalle et f, g des éléments de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.
Montrer que $f+g \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ et que $fg \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

4°) Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On pose $\varphi = \exp \circ f$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et exprimer φ' en fonction de f' et de φ.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\varphi^{(n+1)}$ en fonction de dérivées successives de f et des dérivées de φ d'ordre plus petit.

c) Montrer alors, à l'aide d'une récurrence, que $\varphi \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

Partie 3 : Quelques propriétés - prolongement à gauche

5°) Montrer que si $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

6°) Soit I un intervalle. Montrer que si $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$, alors f est croissante et minorée sur I.

7°) Soit a un réel, et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, vérifiant $b > a$ si b est réel.

a) Montrer que si $f \in \mathcal{A}\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$, alors f admet une limite finie ℓ_0 en a, et que $\ell_0 \geq 0$.

b) Montrer que si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et que $f \in \mathcal{A}\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$, et $f'(a) \geq 0$.

c) Montrer que si $f \in \mathcal{A}\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$, alors f se prolonge par continuité en a.
Montrer alors que la fonction f ainsi prolongée est dans $\mathcal{A}\left([a,b[,\mathbb{R}\right)$.
Indication : on effectuera une récurrence.

d) Justifier par un contre-exemple qu'un tel prolongement n'est pas possible en b pour une fonction de $\mathcal{A}\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3.

2°) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

3°) *Un premier calcul de A^n*

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} - 2A^n = A - 2I_3$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = A^n + 2A - 2I_3$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_{n+1} en fonction de G_n. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de A et I_3.

4°) *Un deuxième calcul de A^n*

On n'utilisera pas la question précédente bien sûr.

a) On pose $B = A - I_3$ et $C = 2I_3 - A$.

Exprimer A comme une combinaison linéaire de B et de C.

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n et C^n.

c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.