Devoir maison 3.

Exercice 1

1°) $e^{i\alpha\pi} = e^{i\,\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)} = \cos\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + i\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} + i\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Or, on sait aussi que :

$$\begin{aligned}\left[\cos\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]^2 + \left[\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]^2 &= 1\\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left[\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]^2 &= 1\\ \left[\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]^2 &= 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}\\ \sqrt{\left[\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]^2} &= \sqrt{\frac{8}{9}}\\ \left|\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right| &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) \in [0,\pi]$, et sin est positive sur $[0,\pi]$, donc :

$$\sin\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Finalement, $e^{i\alpha\pi} = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}}$.

2°) Par ailleurs, on a supposé que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc $\exists\, p \in \mathbb{Z}$, $\exists\, q_0 \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = \frac{p}{q_0}$.

On en tire que $\left(e^{i\alpha\pi}\right)^{2q_0} = \left(e^{i\frac{p}{q_0}\pi}\right)^{2q_0} = e^{i2p\pi} = 1$.

En posant $q = 2q_0$, on a bien $q \in \mathbb{N}^*$, et d'après la question précédente :

$$\left(\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)^q = 1 \text{ d'où } \boxed{(1+2i\sqrt{2})^q = 3^q}.$$

3°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : \exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ (1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$.

- $(1+2i\sqrt{2})^1 = 1+2i\sqrt{2}$, donc en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 2$, on a $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2$, et $(1+2i\sqrt{2})^1 = a_1 + ib_1\sqrt{2}$.
  Ainsi P_1 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a donc des entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2})\\ &= \left(a_n + ib_n\sqrt{2}\right)(1+2i\sqrt{2})\\ &= a_n - 2b_n\sqrt{2}^2 + ib_n\sqrt{2} + i2a_n\sqrt{2}\\ &= a_n - 4b_n + i(b_n+2a_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

  Posons $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = b_n + 2a_n$; ce sont bien des entiers, et on a $(1+2i\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}\sqrt{2}$. Donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \exists\,(a_n,b_n)\in\mathbb{Z}^2, \ (1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}.}$
  On a obtenu au passage que des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui conviennent sont les suites définies par :

$$\begin{cases} a_1 = 1, \ b_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_{n+1} = a_n - 4b_n, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n \end{cases}$$

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} &= a_n - 4b_n - (b_n + 2a_n) \\ &= -a_n - 5b_n \\ &= -(a_n - b_n) - 6b_n \\ &\boxed{u_{n+1} = -u_n - 6b_n.} \end{aligned}$$

5°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : u_n n'est pas divisible par 3.
- $u_1 = a_1 - b_1 = -1$, ce n'est pas divisible par 3, donc P_1 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
  Si u_{n+1} était divisible par 3, il existerait un entier k tel que $u_{n+1} = 3k$. On aurait alors, d'après la question précédente, $3k = -u_n - 6b_n$ d'où $u_n = -3k - 6b_n = 3(-k - 2b_n)$. C'est absurde car $-k - 2b_n$ est un entier et qu'on sait que u_n n'est pas divisible par 3.
  Ainsi, u_{n+1} n'est pas divisible par 3.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \text{ n'est pas divisible par 3.}}$

6°) D'après les question 2 et 3, il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_q + ib_q\sqrt{2} = 3^q$, où a_q et b_q sont des entiers.

Par unicité des parties réelle et imaginaire d'un complexe, on a $a_q = 3^q$ et $b_q = 0$.

On a donc $u_q = a_q - b_q = 3^q$: c'est un nombre divisible par 3, absurde d'après la question 5.

On en déduit que $\boxed{\alpha \text{ est un irrationnel.}}$

Exercice 2

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq i$. Supposons z solution de (E).
Alors $(z^2+1)^n = (z-i)^{2n}$. D'où, en passant aux modules : $|z^2+1|^n = |z-i|^{2n} = \left(|z-i|^2\right)^n$.
Comme les modules sont des réels positifs, on en tire : $|z^2+1| = |z-i|^2$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} |(z-i)(z+i)| &= |z-i|^2 \\ |z-i|.|z+i| &= |z-i|^2 \\ |z+i| &= |z-i| \text{ car } z \neq i \text{ donc } |z-i| \neq 0 \\ |z+i|^2 &= |z-i|^2 \\ (z+i)\overline{(z+i)} &= (z-i)\overline{(z-i)} \\ (z+i)(\overline{z}-i) &= (z-i)(\overline{z}+i) \\ z\overline{z} - iz + i\overline{z} - i^2 &= z\overline{z} + iz - i\overline{z} - i^2 \\ -2iz + 2i\overline{z} &= 0 \\ -2i\,(z - \overline{z}) &= 0 \\ -2i2i\mathrm{Im}(z) &= 0 \\ \mathrm{Im}(z) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{toutes les solutions de } (E) \text{ distinctes de } i \text{ sont réelles}}$.

2°) Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $z^2+1=(z-i)(z+i)$,

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff (z-i)^n(z+i)^n - ((z-i)^n)^2 = 0 \\ &\iff (z-i)^n\left((z+i)^n - (z-i)^n\right) = 0 \\ &\iff (z-i)^n = 0 \text{ ou } (z+i)^n - (z-i)^n = 0 \\ &\iff z = i \text{ ou } (z+i)^n = (z-i)^n \end{aligned}$$

Supposons $z \neq i$, et résolvons :

$$\begin{aligned} (z+i)^n = (z-i)^n &\iff \frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1 \qquad \text{car } z \neq i \\ &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\quad z+i = (z-i)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\quad z(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = -i - ie^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\quad z(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = -i\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

Pour $k=0$, l'équation donne $0=-2i$, donc le cas $k=0$ est exclu.
Pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $\frac{2k\pi}{n} \in]0,2\pi[$ donc $1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$. On a donc :

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \exists\, k \in \{1,\dots,n-1\},\quad z = -i\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

Or, pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$,

$$\begin{aligned} -i\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} &= -i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} \\ &= -i\frac{2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\{i\} \cup \left\{ \frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} / k \in \{1,\dots,n-1\} \right\}}$$

On retrouve bien le fait que les solutions distinctes de i sont réelles.
Remarque : attention à ne pas écrire $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$: c'est faux, car il arrive que le membre de gauche soit défini mais pas le membre de droite !
Par exemple, si $n=4$ et $k=2$, alors $\frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$; tan n'est pas définie en ce point, alors que $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$!