Devoir maison 2.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $(*)$ l'équation : $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{7}{8}$.

Méthode 1 :
On fait baisser le degré grâce à $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

$$\begin{aligned}
(*) &\iff \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}\\
&\iff 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) + 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x) = \frac{7}{2}\\
&\iff 2\cos^2(2x) = \frac{3}{2}\\
&\iff \cos^2(2x) = \frac{3}{4}\\
&\iff \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, -\frac{5\pi}{12} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

Variante de la méthode 1 :
On reprend à l'étape :

$$\begin{aligned}
(*) &\iff 2\cos^2(2x) = \frac{3}{2}\\
&\iff 2\cos^2(2x) - 1 = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos(4x) = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

Méthode 2 :
Astuce : identité remarquable $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x$, ce qui s'écrit : $1 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
(*) \iff\; & 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x = \frac{7}{8} \\
\iff\; & 2(\cos x \sin x)^2 = \frac{1}{8} \\
\iff\; & 2\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \\
\iff\; & \sin^2(2x) = \frac{1}{4} \\
\iff\; & \sin(2x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(2x) = -\frac{1}{2} \\
\iff\; & \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\
\iff\; & \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n : 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

- ★ Pour $n = 1$: $1 \leq 2 - 1$ donc H_1 est vraie.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
  $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ par H_n.
  Or,

$$\begin{aligned}
2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{-n(n+1) + (n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{-n^2 - n + n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n(n+1)^2} > 0
\end{aligned}$$

  Donc, $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
  Ainsi, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.
  H_{n+1} est donc vraie.
- ★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, H_n \text{ est vraie}}$.

Exercice 3

On effectue un raisonnement par analyse-synthèse :

- ★ *Analyse* : On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
  En appliquant $(*)$: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad L_1$.

En appliquant $(*)$ avec $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x} \quad L_2$.

En calculant $L_1 - 2L_2$: $-3f(x) = x - \frac{2}{x}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$.

D'où l'unicité de f.

★ *Synthèse* : On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \end{array}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3x} \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $(*)$.

$$\boxed{\text{Il y a une unique solution au problème } (*) \text{ : la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \end{array}.}$$

Exercice 4

Soit n un entier ≥ 2. $S_n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Retrouvons la formule donnant $\sin a \sin b$ pour a et b réels.

$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad L_1 \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad L_2 \end{cases}$.

$\frac{L_2 - L_1}{2}$ donne : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-2} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right) \right) \\ &\qquad \text{en posant } j = k-1 \text{ (\textit{i.e.} } k = j+1 \text{ dans la première somme)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{2n} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$.

Ainsi, $S_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ soit $\boxed{S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$.

Exercice 5

1°) La propriété (3) dit que :

$\boxed{\text{si un entier } n \text{ est dans } A \text{ alors tout entier } \geq 1 \text{ qui est inférieur à } n \text{ est aussi dans } A.}$

2°) On pose, pour $m \in \mathbb{N}, H_m : 2^m \in A$.

★ Pour $m = 0$: $2^0 = 1 \in A$.

★ Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_m est vraie.
$2^m \in A$ donc par la propriété (1) : $2 \times 2^m \in A$ *i.e.* $2^{m+1} \in A$.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A}$.

3°) On sait déjà que $A \subset \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. On résout :

$$\begin{aligned} 2^m \geq n &\iff \ln(2^m) \geq \ln n \text{ car ln est strictement croissante} \\ &\iff m \ln 2 \geq \ln n \\ &\iff m \geq \frac{\ln n}{\ln 2} \text{ car } \ln 2 > 0 \end{aligned}$$

On prend alors comme entier m_0 le premier entier naturel supérieur ou égal à l'entier $\frac{\ln n}{\ln 2}$.
On a donc $2^{m_0} \in A$ par 2.
Comme $2^{m_0} \in A$ et $n \leq 2^{m_0}$, on en déduit, par (3), que $n \in A$.
Ainsi, $\mathbb{N}^* \subset A$.
Finalement, $\boxed{A = \mathbb{N}^*}$.