Entraînement au calcul de dérivées : corrigé bloc 4.

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{2} + k\pi > 0$ donc :

$$x^5 = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \sqrt[5]{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{2} - k\pi < 0$ donc :

$$x^5 = \frac{\pi}{2} - k\pi \iff x = -\sqrt[5]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Le domaine de définition de f_1, qui est aussi le domaine de dérivabilité de f_1, est donc :
$\mathbb{R}\backslash \left(\left\{ \sqrt[5]{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \ / \ k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\sqrt[5]{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \ / \ k \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$
Pour tout x dans cet ensemble,

$$\boxed{f_1'(x) = 5x^4 \left(1 + \tan^2(x^5)\right)}$$

(ou $\dfrac{5x^4}{\cos^2(x^5)}$).
Attention, $\tan^2(x^5)$ n'a rien voir avec $\tan(x^{10})$, cela désigne $\left(\tan(x^5)\right)^2$...

2°) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et pour tout x dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2}} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \frac{1}{\dfrac{(1+x)^2 + x^2}{(x+1)^2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}} \end{aligned}$$

Vous constaterez que l'expression $\dfrac{1}{2x^2 + 2x + 1}$ existe pour $x = -1$: on n'en déduit pas pour autant que f_2 est dérivable en -1, puisque f_2 n'est même pas définie en -1 ! !

3°) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(1 - \frac{2x}{x^4}\right) \sin\frac{1}{x} + \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\frac{1}{x} \\ &= \boxed{\left(1 - \frac{2}{x^3}\right) \sin\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) \cos\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Il est intéressant de connaître la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$: c'est $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$.

Cela se trouve très vite en écrivant $\dfrac{1}{x^2}$ sous la forme x^{-2}, ce qui se dérive en $-2x^{-3}$...

4°) f_4 est clairement définie sur $\mathbb{R}_+$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que $x \mapsto x$, donc par produit, f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_4'(x) = x\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \times \sqrt{x} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

On le trouve encore plus vite en écrivant que $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ se qui se dérive en $\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$...

Prouvons à part la dérivabilité en 0 (remarque : évaluer l'expression valable sur $\mathbb{R}_+^*$ est tout sauf une preuve ! !) : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0} = \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f_4 est dérivable en 0 et $f_4'(0) = 0$.

5°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x}$ existe et est réel donc $f_5(x) = 10^{\sqrt{x}}$ existe, et c'est $\exp\left(\sqrt{x}\ln(10)\right)$.

$x \mapsto \sqrt{x}\ln(10)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition avec exp qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_5'(x) = \boxed{\frac{\ln(10)}{2\sqrt{x}} \exp\left(\sqrt{x}\ln(10)\right)}$$