Correction du devoir surveillé 7.

Exercice 1

Partie 1

1°) $f \in A_0$ donc $f \circ f = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in E, f \circ f(x) = 0$ *i.e.* $f(f(x)) = 0$ donc, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
On vient de montrer que tous les éléments de la forme $f(x)$ où $x \in E$ sont dans $\mathrm{Ker}(f)$.
Ceci prouve que : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

2°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in A_k$. On suppose $k \neq 0$ et f bijective.
$f \circ f = kf$. f^{-1} existe : $f \circ f \circ f^{-1} = kf \circ f^{-1}$.
Donc $f \circ \mathrm{id}_E = k\,\mathrm{id}_E$, donc $f = k\,\mathrm{id}_E$.
Donc $\boxed{f \text{ est l'homothétie de rapport } k}$.

3°) **a)** On sait déjà que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $x = 0$.
$x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$.
De plus, $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc x s'écrit $x = f(y)$ où $y \in E$.
Ainsi, $f(f(y)) = 0$ *i.e.* $f \circ f(y) = 0$.
Or $f \in A_k$ donc $f \circ f = kf$. Ainsi, $kf(y) = 0$.
Comme $k \neq 0$, il vient $f(y) = 0$. Donc $x = 0$.
On a montré : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$.
Finalement, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}}$.

b) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} f\left(x - \frac{1}{k}f(x)\right) &= f(x) - \frac{1}{k}f(f(x)) \qquad \text{par linéarité de } f \\ &= f(x) - \frac{1}{k}f \circ f(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{k}kf(x) \qquad \text{car } f \circ f = kf \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{x - \frac{1}{k}f(x) \in \mathrm{Ker}(f)}$.

c) Soit $x \in E$.

$$x = \frac{1}{k}f(x) + x - \frac{1}{k}f(x)$$

On note $y = \frac{1}{k}f(x)$ et $z = x - \frac{1}{k}f(x)$.
On a bien : $x = y + z$.
y s'écrit, par linéarité de f, $y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$.
De plus, par 3b, $z \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi, on a montré que : $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)}$.

d) On a vu : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

On en déduit que $\boxed{\text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

Ce qui revient à : $\boxed{E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)}$.

4°) Tout d'abord, $f \circ g \in \mathcal{L}(E)$ comme composée d'endomorphismes de E.
$(f \circ g)^2 = f^2 \circ g^2$ car f et g commutent.
Or $f \in A_k$ et $g \in A_k$ donc $f^2 = kf$ et $g^2 = kg$.
D'où $(f \circ g)^2 = (kf) \circ (kg) = k^2(f \circ g)$. De plus, $k^2 \in \mathbb{N}$.
On en déduit que $\boxed{f \circ g \in A_{k^2}}$. Ainsi, $\boxed{\exists\, k' \in \mathbb{N},\ f \circ g \in A_{k'}}$.

5°) **a)** On suppose que $f \circ g + g \circ f = 0$, notée $(*)$.
On compose $(*)$ à gauche par f :

$$\begin{aligned} & f \circ (f \circ g + g \circ f) = f \circ 0 \\ \text{i.e.} \quad & f \circ f \circ g + f \circ g \circ f = 0 \\ & kf \circ g + f \circ g \circ f = 0 \quad \text{car } f^2 = kf \end{aligned}$$

On compose $(*)$ à droite par f :

$$\begin{aligned} & (f \circ g + g \circ f) \circ f = 0 \circ f \\ \text{i.e.} \quad & f \circ g \circ f + g \circ f \circ f = 0 \\ & f \circ g \circ f + kg \circ f = 0 \quad \text{car } f^2 = kf \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ g \circ f = -kf \circ g = -kg \circ f$, et comme $k \neq 0$, il vient : $f \circ g = g \circ f$.
Comme, par $(*)$, $f \circ g = -g \circ f$, on obtient : $\boxed{f \circ g = g \circ f = 0}$.

b) $f + g \in \mathcal{L}(E)$ comme somme d'endomorphismes de E.
$(f+g)^2 = (f+g) \circ (f+g) = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 = k(f+g) + f \circ g + g \circ f$
car $f \in A_k, g \in A_k$.

★ On suppose que $f \circ g = g \circ f = 0$.
Alors, $(f+g)^2 = k(f+g)$. Donc $f + g \in A_k$.

★ On suppose que $f + g \in A_k$. Donc $(f+g)^2 = k(f+g)$.
On en déduit que : $f \circ g + g \circ f = 0$.
Par la question précédente, $f \circ g = g \circ f = 0$.

Finalement, $\boxed{f + g \in A_k \iff f \circ g = g \circ f = 0}$.

Partie 2

6°) Pour $(x, y, z) \in E$, $x + y = 0 \iff x = -y$, donc :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(-y, y, z) \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y.(-1, 1, 0) + z.(0, 0, 1) \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\left((-1, 1, 0), (0, 0, 1)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que F est un sev de E et que $((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ en est une famille génératrice. Par ailleurs, $(-1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont 2 vecteurs non colinéaires : ils forment donc une famille libre. C'est donc une base de F et $\boxed{\dim(F) = 2}$, F est bien un plan.

7°) f va bien de E dans E.
Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda.u + v) &= (\lambda x + x' - (\lambda y + y'), -(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x - y) + x' - y', \lambda(-x + y) + (-x' + y'), \lambda(2x + 2y + 2z) + 2x' + 2y' + 2z') \\ &= \lambda.(x - y, -x + y, 2x + 2y + 2z) + (x' - y', -x' + y', 2x' + 2y' + 2z') \\ &= \lambda.f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Donc, f est linéaire.

Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

8°) Soit $u = (x, y, z) \in E$.

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(u) = 0 \\
&\iff (x - y, -x + y, 2x + 2y + 2z) = 0 \\
&\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(x, x, -2x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \boxed{\operatorname{Vect}((1, 1, -2))}$.

Ainsi $((1, 1, -2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$ constituée d'un vecteur non nul, donc c'est une famille libre et $\boxed{\text{c'est une base de } \operatorname{Ker}(f).}$

Comme $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$, f n'est pas injective, donc pas bijective, $\boxed{\text{ce n'est pas un automorphisme de } E}$.

9°) On a $f(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 1, 2)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$, et ces vecteurs forment une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Comme $f(0, 1, 0) = -f(1, 0, 0) + 2f(0, 0, 1)$, la famille $(f(1, 0, 0), f(0, 0, 1)) = ((1, -1, 2), (0, 0, 2))$ est encore génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.

Or, ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre.

Finalement, $\boxed{((1, -1, 2), (0, 0, 2)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$.

Au passage, on obtient que $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 2.

On constate que les vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(0, 0, 2)$ sont dans F, car leurs coordonnées vérifient l'équation de F. Donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1, -1, 2), (0, 0, 2)) \subset F$.

Comme $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2 = \dim(F)$, on en déduit : $\boxed{\operatorname{Im}(f) = F}$.

10°) *On peut constater que pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(f(x, y, z)) = 2f(x, y, z)$, *ou bien :*

Calculons :

- $f^2(1, 0, 0) = f(f(1, 0, 0)) = f(1, -1, 2) = (2, -2, 4) = 2f(1, 0, 0)$.
- $f^2(0, 1, 0) = f(f(0, 1, 0)) = f(-1, 1, 2) = (-2, 2, 4) = 2f(0, 1, 0)$.
- $f^2(0, 0, 1) = f(f(0, 0, 1)) = f(0, 0, 2) = (0, 0, 4) = 2f(0, 0, 1)$

Ainsi f^2 et $2f$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donc $f^2 = 2f$. Ainsi $\boxed{f \in A_2.}$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: P_n : $f^n = 2^{n-1}.f$.

- $f^1 = f = 2^0.f$ donc P_1 est vraie.
- Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on ait $f^n = 2^{n-1}f$.
  Alors $f^{n+1} = f^n \circ f = 2^{n-1}f \circ f = 2^{n-1}.2.f = 2^{n+1-1}f$.
  Ainsi P_{n+1} est vraie.
- Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f^n = 2^{n-1}.f}$.

11°) Soit $y \in \operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id}_E)$. Il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = (f - 2\mathrm{id}_E)(x) = f(x) - 2x$.

On a donc $y = -2\left(x - \dfrac{1}{2}f(x)\right)$. D'après la question 3b, $x - \dfrac{1}{2}f(x) \in \operatorname{Ker}(f)$. Comme $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, on en tire que $y \in \operatorname{Ker}(f)$ aussi.

On a donc : $\boxed{\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f)}$.

Comme $f \neq 2\mathrm{id}_E$, on a $\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ et $\dim(\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id}_E)) \geq 1$.

De plus, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$, on a donc $\boxed{\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}(f)}$.

$\boxed{\text{On a bien l'égalité}}$.

Partie 3

12°) Soit $f \in E$. Alors $f'(0) \in \mathbb{R}$ et comme e_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\varphi(f) \in E$. Ainsi $\varphi : E \to E$.

Soient $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'(0)e_k \\ &= \big(\lambda f'(0) + g'(0)\big)\, e_k \\ &= \lambda f'(0)e_k + g'(0)e_k \\ &= \lambda\varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.
Ainsi, $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$.

13°) Soit $f \in E$. Notons $g = \varphi(f)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f'(0)\exp(kx)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = kf'(0)\exp(kx)$. Ainsi $g'(0) = kf'(0)$.
On en tire que $\varphi(\varphi(f)) = kf'(0)e_k = k\varphi(f)$; ceci pour tout $f \in E$, donc $\varphi \circ \varphi = k\varphi$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \in A_k}$.

14°) Par définition, pour tout $f \in E$, $\varphi(f) \in F$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset F$.
Réciproquement, Si $h \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda e_k$. Posons $f : x \mapsto \lambda x$, alors $f \in E$ et $f'(0) = \lambda$, donc $h = \lambda e_k = \varphi(f)$. Ainsi $h \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
Ainsi, $F = \mathrm{Im}(\varphi)$.
Par ailleurs, pour tout $f \in E$,

$$f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(f) = 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(0)\exp(kx) = 0 \iff f'(0) = 0$$

(puisque exp ne s'annule jamais).
Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = G$ (ce qui montre au passage que G est un sous-espace vectoriel de E).
Comme $\varphi \in A_k$ et $k \neq 0$, la question 3d nous permet de conclure que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

Exercice 2

Question préliminaire :
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ où $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.
On pose $Q = a_0X + \dfrac{a_1}{2}X^2 + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1}X^{n+1}$. Alors $\boxed{Q \in E \text{ et } Q' = P}$.

Partie 1

1°) Soit $(P,Q) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que : $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X)) \qquad \text{par propr des lois + et . sur } E \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Ainsi, Δ est linéaire. De plus, Δ va de E dans E.
Donc, $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2°) **a)** On suppose qu'il existe un polynôme P non constant de E dans $\mathrm{Ker}(\Delta)$.
On a donc : $\varphi(P) = 0$ donc $P(X+1) = P(X)$. P n'est pas constant donc admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$.
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha + n$ est une racine de P.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : P(\alpha + n) = 0$.
★ $P(\alpha) = 0$ car α est une racine de P. Donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
$P(X+1) = P(X)$. En évaluant en $\alpha + n$: $P(\alpha+n+1) = P(\alpha+n)$.
Or, par H_n, $P(\alpha+n) = 0$ donc $P(\alpha+n+1) = 0$: $\alpha+n+1$ est une racine de P.
H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha + n$ est une racine de P.

On en déduit que $\boxed{P \text{ admet une infinité de racines}}$. C'est donc le polynôme nul. Or, P n'est pas constant.

$\boxed{\text{On aboutit donc à une contradiction : il n'y a pas de polynôme non constant dans } \operatorname{Ker}(\Delta)}$.

b) ★ Si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ alors P est constant donc $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = 0$: $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.
Ainsi, $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}(\Delta)$.

★ Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$ alors, par la question précédente, P est constant (sinon, on aboutit à une contradiction). Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

3°) L'équation à résoudre se réécrit $\Delta(P) = 1$. Comme Δ est linéaire, c'est une équation linéaire, et on constate que le polynôme X est une solution particulière : $(X+1) - X = 1$.
De plus, on connaît l'ensemble des solutions de $\Delta(P) = 0$, c'est $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \{c \;/\; c \in \mathbb{R}\}$.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } P(X+1) - P(X) = 1 \text{ est } \{X + c \;/\; c \in \mathbb{R}\}}$.

Partie 2

4°) **a)** $P \in \mathcal{A}$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k$.

Or $Q' = P$ donc Q est une primitive de la fonction P donc
$\displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = [Q(t)]_k^{k+1} = Q(k+1) - Q(k)$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}, Q(k+1) - Q(k) = k$, soit encore $Q(k+1) - Q(k) - k = 0$.
Tous les entiers naturels sont donc racines du polynôme $Q(X+1) - Q(X) - X$. Le polynôme $Q(X+1) - Q(X) - X$ admet donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul.
On a bien : $\boxed{Q(X+1) - Q(X) = X}$.

b) $Q(X+1) - Q(X) = X$. En dérivant : $Q'(X+1) - Q'(X) = 1$.
Or $Q' = P$ donc $P(X+1) - P(X) = 1$. Par 3, $\boxed{\exists\, c \in \mathbb{R}, P(X) = X + c}$.

5°) ★ On a prouvé que si $P \in \mathcal{A}$ alors $\exists\, c \in \mathbb{R}, P(X) = X + c$.

★ Réciproquement, soit P un polynôme qui s'écrit : $P(X) = X + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} (t+c)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + ct\right]_k^{k+1} \\
&= \frac{(k+1)^2}{2} + c(k+1) - \frac{k^2}{2} - ck \\
&= \frac{2k+1}{2} + c \\
&= k + c + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P \in \mathcal{A} \iff c + \dfrac{1}{2} = 0$ donc $P \in \mathcal{A} \iff c = -\dfrac{1}{2}$.

$\mathcal{A}$ est réduit à un seul élément : $\boxed{\mathcal{A} = \left\{X - \frac{1}{2}\right\}}$.

Partie 3

6°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$Q' = P$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = Q(k+1) - Q(k)$.

On a donc, par $(*)$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ Q(k+1) - Q(k) = \dfrac{1}{k}$, ce qui s'écrit : $k(Q(k+1) - Q(k)) = 1$ soit encore $k(Q(k+1) - Q(k)) - 1 = 0$.

Tous les entiers naturels non nuls sont donc racines du polynôme $X(Q(X+1) - Q(X)) - 1$: il admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Ainsi, $\boxed{X(Q(X+1) - Q(X)) = 1}$.

7°) On sait que $X(Q(X+1) - Q(X)) = 1$.

Méthode 1 : En évaluant en 0, on obtient $0 = 1$: absurde.

Méthode 2 : On a donc $\deg(X(Q(X+1) - Q(X)) = \deg(1)$ i.e. $1 + \deg(Q(X+1) - Q(X)) = 0$, d'où $\deg(Q(X+1) - Q(X)) = -1$: impossible.

Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de polynôme } P \text{ de } E \text{ tel que : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}}$.

Exercice 3

1°) $T_2 = 2XT_1 - T_0 = \boxed{2X^2 - 1}$

$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = \boxed{4X^3 - 3X}$

$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = \boxed{8X^4 - 8X^2 + 1}$

2°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n : T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

★ $T_1 = X = 2^0 X$ et $T_2 = 2X^2 - 12^1X^2 - 1$ donc H_1 et H_2 sont vraies.

★ On suppose, pour un rang $n \geq 1$ fixé, H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie.
Par H_{n+1}, T_{n+1} s'écrit : $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$ où Q est un polynôme de degré $< n+1$.
Ainsi,

$$T_{n+2} = 2X(2^n X^{n+1} + Q) - T_n = 2^{n+1} X^{n+2} + 2XQ - T_n$$

$\deg(2XQ - T_n) \leq \max(\deg(2XQ), \deg(T_n))$.
Or $\deg(T_n) = n$ par H_n et $\deg(2XQ) = 1 + \deg Q < n+2$.
Donc, $\deg(2XQ - T_n) < n+2$.
On en déduit alors que $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et le coefficient dominant de T_{n+2} est 2^{n+1}. Ainsi, H_{n+2} est vraie.

★ On a montré par récurrence double que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \text{ est vraie.}}$

3°) a) Soient a et b des réels.

Méthode 1 : On sait que

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

En effectuant la demi-somme des deux lignes, on obtient :

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$$

Méthode 2 : Avec les complexes.

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{ia}e^{ib}+e^{-ia}e^{ib}+e^{ia}e^{-ib}+e^{-ia}e^{-ib}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)}$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

★ $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ donc $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$.
Ainsi, H_0 et H_1 sont vraies.

★ Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, H_n et H_{n+1} sont vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie.

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)\\
&= 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad \text{par } H_n \text{ et } H_{n+1}\\
&= \cos(\theta+(n+1)\theta) + \cos(\theta-(n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad \text{par 3a}\\
&= \cos((n+2)\theta) \quad \text{car cos est paire}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+2} est vraie.

★ On a montré par récurrence double que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n \text{ est vraie}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Q_n un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $Q_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = Q_n(\cos\theta)$ ie $(T_n - Q_n)(\cos\theta) = 0$.
$\cos\theta$ décrit $[-1,1]$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$. Ainsi, le polynôme $T_n - Q_n$ admet pour racines tous les réels de $[-1,1]$ et a donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Ainsi $T_n = Q_n$.
Finalement, $\boxed{T_n \text{ est l'unique polynôme de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } \forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)}$.

d) ★ $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n0) = \cos 0 = \boxed{1}$.

★ $T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ par 3b.
Supposons n impair. Alors n s'écrit : $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, et $T_n(0) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Supposons n pair. Alors n s'écrit : $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$.
$T_n(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}}$.
Finalement, $\boxed{\begin{cases} T_n(0) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ T_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}}$.

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Q_n le polynôme $Q_n = (-1)^n T_n(-X)$.
$\forall\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q_n(\cos\theta) &= (-1)^n T_n(-\cos\theta) = (-1)^n T_n(\cos(\theta+\pi))\\
&= (-1)^n \cos(n(\theta+\pi)) = (-1)^n\cos(n\theta+n\pi)\\
&= (-1)^{2n}\cos\theta\\
&= \cos(n\theta)
\end{aligned}$$

Par unicité du polynôme T_n (cf. 3c), il vient $Q_n = T_n$ ie $\boxed{T_n(X) = (-1)^n T_n(-X)}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $T_n(-X) = \frac{1}{(-1)^n}T_n(X) = (-1)^n T_n(X)$.
— Si n est pair alors $T_n(-X) = T_n(X)$ ie $\boxed{T_n \text{ est un polynôme pair}}$.

— Si n est impair alors $T_n(-X) = -T_n(X)$ ie $\boxed{T_n \text{ est un polynôme impair}}$.

5°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Les fonctions $\theta \mapsto T_n(\cos\theta)$ et $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
En dérivant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

En dérivant à nouveau :
$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$-\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta)$$
$$\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (\cos^2\theta - 1)T_n''(\cos\theta) = n^2 T_n(\cos\theta)$$

Comme $\cos\theta$ décrit $[-1, 1]$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ (x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x)}$$

b) On pose $x = 1$ dans la relation précédente, on obtient, en utilisant $T_n(1) = 1$: $\boxed{T_n'(1) = n^2}$.

6°) a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Par $(*)$, $T_n(\alpha_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0}$

b) On note, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$.
$1 \le k \le n$ donc $1 \le 2k - 1 \le 2n - 1$. Puis, $\frac{\pi}{2n} \le x_k \le \frac{2n-1}{2n}\pi$. Ainsi, $0 < x_k < \pi$.
Les réels x_k, pour k variant de 1 à n, sont des éléments distincts 2 à 2 de l'intervalle $[0, \pi]$.
Comme cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que les $\alpha_k = \cos(x_k)$ sont 2 à 2 distincts pour $k \in \{1, \ldots n\}$.
Or, les α_k sont racines de T_n ; donc T_n admet (au moins) n racines distinctes. Comme T_n est de degré n, ce sont nécessairement les seules racines de T_n et elles sont simples. T_n est ainsi scindé.
Comme les racines de T_n sont des valeurs de la fonction cos, on en déduit de plus que toutes les racines de T_n sont éléments de $[-1, 1]$.

c) Par la question précédente et en utilisant le fait que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, il vient :

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît la somme des racines de T_n et le produit des racines de T_n.
Notons a_0 le coefficient constant de T_n et a_{n-1} le coefficient de X^{n-1} dans T_n.
Comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} :

$$s_n = -\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \pi_n = (-1)^n \frac{a_0}{2^{n-1}}$$

- Comme T_n a la parité de n, on a toujours $a_{n-1} = 0$:
  en effet, si n est pair, c'est un coefficient impair alors que T_n est pair ;
  et si n est impair, c'est un coefficient pair alors que T_n est impair.
  Ainsi, $\boxed{s_n = 0}$.
- $\pi_n = (-1)^n \frac{a_0}{2^{n-1}} = (-1)^n \frac{T_n(0)}{2^{n-1}}$. En utilisant la question 3.d :
  $\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } \pi_n = 0}$.
  $\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, } \pi_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}}$ (car $(-1)^n = 1$).