

## Fractions

## Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

## Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel non nul).

a)  $\frac{32}{40}$  .....

c)  $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$  .....

b)  $8^3 \times \frac{1}{4^2}$  .....

d)  $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$  .....

## Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$  .....

c)  $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$  .....

b)  $\frac{2}{3} - 0,2$  .....

d)  $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$  .....

## Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$  .....

b)  $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$  .....

c)  $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$  .....

d)  $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$  .....

## Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

## Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a)  $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$  .....

c)  $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$  .....

b)  $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$  .....

d)  $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$  .....

### Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....
- b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , distincts deux à deux. ....
- c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$ . ....

### Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

### Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{c}$  avec  $b < c$ .

- a)  $\frac{29}{6}$  .....       b)  $\frac{k}{k-1}$  ...       c)  $\frac{3x-1}{x-2}$  ..

### Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

### Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a)  $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$  .....       b)  $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$  .....       c)  $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$  .....

### Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux ? Oui ou non ? .....

### Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$  ? .....

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{-1}{n(n+1)^2} & -\frac{ab}{a-b} & 2 & 3 & \frac{12}{11} > \frac{10}{12} & \frac{1}{2} & 247 & \frac{n^3+n}{n+1} & 1\ 000 & \frac{1}{9} \\ 2t & 2\ 022 & \frac{-10}{3} & \frac{4}{5} & 3 + \frac{5}{x-2} & \frac{3}{2}n & \frac{203}{24} & \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{3}{5} > \frac{5}{9} & 9 \\ 4 + \frac{5}{6} & A > B & 1 & \frac{16}{35} & 2^5 & -2 \times 3^{3k-2} & \text{Non} & 1 + \frac{1}{k-1} & \frac{125}{25} = \frac{105}{21} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 13

# Puissances

## Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a)  $10^5 \cdot 10^3$  .....       c)  $\frac{10^5}{10^3}$  .....       e)  $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$  .....

b)  $(10^5)^3$  .....       d)  $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$  .....       f)  $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$  .....

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

a)  $3^4 \cdot 5^4$  .....       c)  $\frac{2^5}{2^{-2}}$  .....       e)  $\frac{6^5}{2^5}$  .....

b)  $(5^3)^{-2}$  .....       d)  $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$  .....       f)  $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$  .....

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$  .....       c)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$  .....

b)  $2^{21} + 2^{22}$  .....       d)  $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$  .....

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a)  $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$  .....       c)  $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$  .....

b)  $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$  .....       d)  $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$  .....

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

a)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$  .....       c)  $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$  .....

b)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$  .....       d)  $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$  .....

### Réponses mélangées

$\frac{x}{x+1}$	$15^4$	$\frac{2x}{x+1}$	$2^{21} \cdot 3$	$10^{15}$	11	$5^{-6}$	$2^{38} \cdot 3^{26}$
$10^2$	$10^8$	$10^{-2}$	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	$2^6 \cdot 5$	$3^5$	$(-7)^{-2}$	
$\frac{2}{x-2}$	$10^4$	8	$2^7$	$10^{-8}$	$3^{10}$	$\frac{1}{x-2}$	$3^{28}$ 2

► Réponses et corrigés page 16

**Prérequis**

Les identités remarquables !

## Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable  $x$  représente un nombre réel (ou complexe).

### Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

- |  |                      |                                 |                      |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ ..... | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ .....                | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ ....            | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ .....   | <input type="text"/> |

### Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de  $x$ .

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ .....                    | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ .....                           | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ .....                             | <input type="text"/> |
| e) $(x^2+\sqrt{2}x+1)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ .....         | <input type="text"/> |
| f) $(x^2+x+1)^2$ .....   | <input type="text"/> |

## Factoriser

### Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ .....             | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  est  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  (où  $a \neq 0$ ).

- |                         |                      |                           |                      |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ ..... | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ ..... | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ ..... | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                      |                      |  |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ .....           | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ .....                  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ..... | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..    | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ .....            | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ .. | <input type="text"/> |

### Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .....  | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$ .. | <input type="text"/> |

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & (x + 1)(x + 2) & \\
 2 - x + x^3 - x^4 - x^5 & x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & \\
 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 2(3x - 4)(10x + 3) & 1 + x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & \\
 -1 - 3x - 3x^2 + x^3 & x^4 + x^2 + 1 & (14x + 3y)(-12x + 3y) & (x + 1)(y + 1) \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x - 1)^2 & (x + y)(x + 1)^2 & -6(6x + 7) \\
 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} & -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & (x - 1)(y - 1) \quad (x + 2)^2 \\
 -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & x^5 - x^3 + x^2 - 1 & -28 + 21x \\
 -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -8(x + 1)(x + 16) & 
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 17

## Racines carrées

### Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

## Premiers calculs

### Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a)  $\sqrt{(-5)^2}$  .....

d)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  .....

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$  .....

e)  $\sqrt{(3 - \pi)^2}$  .....

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  .....

f)  $\sqrt{(3 - a)^2}$  .....

### Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a)  $(2\sqrt{5})^2$  .....

e)  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$  .....

b)  $(2 + \sqrt{5})^2$  .....

f)  $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$  .....

c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .....

g)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$  .....

d)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$  .....

h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$  .....

## Avec la méthode de la quantité conjuguée

### Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$  .....

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

b)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  .....

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  .....

g)  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

d)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  .....

h)  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$  .....

#### Calcul 4.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{\phantom{000}}$$

### Calculs variés

#### Calcul 4.5 — Avec une variable.



On considère la fonction  $f$  qui à  $x > 1$  associe  $f(x) = \sqrt{x-1}$ . Pour tout  $x > 1$ , calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	e) $f(x) + 4f''(x)$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$
c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$

#### Calcul 4.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$
--	-------------------------	--	-------------------------

#### Calcul 4.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	d) $3e^{-\frac{1}{2} \ln 3}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$
b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	e) $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$
c) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$	f) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ .....	$\boxed{\phantom{000}}$

#### Calcul 4.8



Simplifier  $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ .

On commencera par exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ . .....

#### Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$	$-4(x-1)^2$	$-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$	$9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}$	20	$-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$
$\sqrt{2}$	$1 + \sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$ 3 - a $	$50 - 25\sqrt{3}$
$\sqrt{3} - 1$	$3 + \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$	5	$\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$
$\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$	1	$2\sqrt{2}$	$9 + 4\sqrt{5}$
$\ln(1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{3}$	$-\sqrt{3} + 2$	$\pi - 3$	12	$\sqrt{7} - 2$
$1 + \sqrt{2}$	$-11 + 5\sqrt{5}$	$x - \sqrt{x^2 - 1}$	10	$\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$	$1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}$

► Réponses et corrigés page 19