Correction du devoir surveillé 6.

Exercice 1

1°) Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$ puisque, pour l'inégalité de droite, il y a égalité si $x = x_0$ et inégalité stricte si $x \neq x_0$ par l'hypothèse.

Or $|x - x_0| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, donc par théorème des gendarmes , $|f(x) - f(x_0)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, i.e. $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Ainsi f est continue en x_0, ceci pour tout $x_0 \in [a,b]$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } [a,b].}$

2°) Supposons que α et β soient deux réels de $[a,b]$ tels que $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$. Si on avait $\alpha \neq \beta$, alors par l'hypothèse, on aurait $|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|$ i.e. $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$: absurde. Donc $\alpha = \beta$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ possède un point fixe, alors il est unique.}}$

3°) Comme f, $x \mapsto -x$ et $t \mapsto |t|$ sont continues, par somme et composition, g est continue sur le segment $[a,b]$. Par le théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes ; en particulier, $\boxed{g \text{ possède un minimum sur } [a,b].}$

4°) Supposons que $f(\alpha) \neq \alpha$.

α et $f(\alpha)$ sont bien dans $[a,b]$, donc d'après l'hypothèse, $|f(f(\alpha)) - f(\alpha)| < |f(\alpha) - \alpha|$, i.e. $g(f(\alpha)) < g(\alpha)$.

Or, par ailleurs, $g(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} g$ donc $g(f(\alpha)) \geq g(\alpha)$: contradiction.

Donc $\boxed{f(\alpha) = \alpha.}$

Exercice 2

Partie 1 : Étude de f

1°) $f(x) = x \times \dfrac{1}{\ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ par produit.

Ainsi, f est <u>prolongeable par continuité en 0</u> en posant $\boxed{f(0) = 0}$.

2°) $\ln x \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) < 0$ pour $x < 1$, et $x \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} -\infty}$.

$\ln x \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) > 0$ pour $x > 1$, donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty}$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } 1}$.

Graphiquement, $\mathcal{C}$ admet $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 1 \text{ pour asymptote au voisinage de } 1}$.

3°)
- f est continue sur $D \cup \{0\}$, car elle a été prolongée par continuité en 0 et car elle est continue sur D par quotient.
- f est dérivable sur D par quotient.
- Pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$$

Comme $\dfrac{1}{\ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{(\ln x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, par somme, $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Cela signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
L'information $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ se réécrit donc : $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$, donc f' est continue en 0.
Comme de plus f est de classe C^1 sur D comme quotient de fonctions de classe C^1, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D \cup \{0\}}$.

4°) Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ est du signe de $\ln x - 1$. Or,

$$\begin{aligned} \ln x - 1 \geq 0 &\iff \ln x \geq 1 \\ &\iff x \geq e \qquad \text{car exp est strictement croissante} \\ \ln x - 1 = 0 &\iff x = e \end{aligned}$$

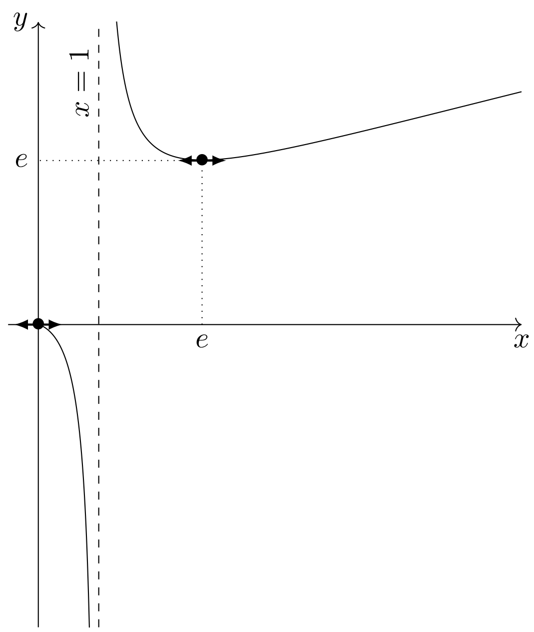
x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5°) Soit $x \geq e$. Alors, $f'(x) \geq 0$ d'après le tableau de variations de f.

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{1}{4} &= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4(\ln x - 1) - (\ln x)^2}{4(\ln x)^2} \\ &= \frac{4\ln x - 4 - (\ln x)^2}{4(\ln x)^2} \\ &= -\frac{(\ln x - 2)^2}{4(\ln x)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}}$.

6°) Courbe $\mathcal{C}$ de f :



Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose H_n : u_n existe et $u_n \geq e$.

★ u_0 existe et $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq e$. Donc, H_0 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
u_n existe et $u_n \geq e$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
De plus f est croissante sur $[e, +\infty[$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e) = e$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq e.}$

8°) f est dérivable sur l'intervalle $[e, +\infty[$ et, pour tout $x \geq e$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$. D'où $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\forall (x, y) \in [e, +\infty[^2, \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = u_n$ et $y = e$. On a bien : $x \geq e$ et $y \geq e$.
D'où $|f(u_n) - f(e)| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e|$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(e) = e$, il vient :

$$\boxed{|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.}$$

9°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, H_n$: $|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - e|$.

★ $\dfrac{1}{4^0}|u_0 - e| = |u_0 - e|$ donc H_0 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
Par la question précédente, $|u_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e|$. Or, par H_n, $|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - e|$.
Donc $|u_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}|u_0 - e|$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - e|}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - e| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - e|$.

De plus, $\dfrac{1}{4} \in]-1, 1[$ donc $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - e| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement, $u_n - e \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ie $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e}$.

10°) $|u_0 - e| = 3 - e \leq 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que $|u_n - e| \leq 10^{-3}$, il <u>suffit</u> que $\dfrac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$ ie $4^n \geq 10^3$.

Or $4^5 = 2^{10} = 1024$ donc $\boxed{u_5 \text{ est une valeur approchée de } e \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Partie 3 : Solution d'une équation différentielle non linéaire

11°) Par quotient, $y = \dfrac{1}{z}$ est dérivable sur $]0, 1[$, et pour tout $x \in]0, 1[$, $y(x) \neq 0$, $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ et

$z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{(y(x))^2}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0{,}1[&\iff \forall x \in]0,1[,\ -x^2\left(-\frac{y'(x)}{(y(x))^2}\right) + x\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{(y(x))^2} \\
&\iff \forall x \in]0,1[,\ x^2y'(x) + xy(x) = 1 \\
&\iff y \text{ solution sur }]0,1[\text{ de } (F) : \boxed{y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

12°) • (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, son équation homogène associée est $(H) : y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,1[$ est ln, donc les solutions de (H) sur $]0,1[$ sont les $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$ i.e. les $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Posons $y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$, où $\lambda :]0,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable. Par produit, y_p est dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$, $y_p'(x) = \lambda'(x)\dfrac{1}{x} - \lambda(x)\dfrac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (F) &\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x)\frac{1}{x} - \lambda(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\lambda(x)}{x} = \frac{1}{x^2} \\
&\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \\
&\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Prenons $\lambda = \ln$; on en tire que $y_p : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est une solution particulière de (F).

• Finalement, les solutions de (F) sur $]0,1[$ sont les fonctions de la forme : $\boxed{x \mapsto \dfrac{\lambda + \ln x}{x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

• Comme ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, pour tout réel λ, $-\lambda$ peut s'écrire $\ln a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, et alors, si $x > 0$, $\lambda + \ln x = -\ln a + \ln x = \ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Ainsi, les solutions de (F) sur $]0,1[$ sont les fonctions de la forme : $\boxed{x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x} \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*}$.

• Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\exists x \in]0,1[,\ \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x} = 0 &\iff \exists x \in]0,1[,\ \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \\
&\iff \exists x \in]0,1[,\ \frac{x}{a} = 1 \\
&\iff \exists x \in]0,1[,\ a = x \\
&\iff a \in]0,1[
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la solution } x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x} \text{ ne s'annule pas sur }]0,1[\text{ si et seulement si } a \geq 1.}$

13°) • Soit $z :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, qui ne s'annule pas, et $y = \dfrac{1}{z}$. y ne s'annule pas non plus. D'après les questions précédentes, on peut donc affirmer :

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\iff & \exists\, a \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)}{x} \\
\iff & \exists\, a \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = \frac{x}{\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)} \\
\iff & \exists\, a \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = a\frac{\dfrac{x}{a}}{\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)} \\
\iff & \exists\, a \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = af\left(\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,1[$ qui ne s'annulent pas sont donc les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto af\left(\dfrac{x}{a}\right), \text{ avec } a \in [1,+\infty[.}$

- Soit $a \in [1,+\infty[$ et $f_a : x \mapsto af\left(\dfrac{x}{a}\right)$; d'après la partie 1, par composition, f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+\backslash\{a\}$, donc en particulier sur $[0,1[$ (puisque $a \geq 1$). En particulier, $f_a(0) = af(0) = 0$, et $f_a'(0)$ existe. On constate que $-0^2 f_a'(0) + 0 f_a(0) = 0$, c'est bien $(f_a(0))^2$.
Ainsi, les solutions obtenues ci-dessus sur $]0,1[$ se prolongent en 0 en des solutions sur $[0,1[$.

Exercice 3

Partie 1 : Une première inclusion

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 = A(A^n X_0) = AX_n$.
Ainsi, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Il vient : $\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}}$.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : X_n \in \mathcal{H}_+$.

★ Pour $n = 0$. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie : $1 \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N}$. De plus $1^2 - 3 \times 0^2 = 1$. Donc $X_0 \in \mathcal{H}_+$.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que H_{n+1} est vraie.
Par la question précédente, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$.
Or x_n et y_n sont dans $\mathbb{N}$ donc x_{n+1} et y_{n+1} aussi, comme sommes et produits d'entiers naturels.
De plus,

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 - 3y_{n+1}^2 &= 4x_n^2 + 12x_ny_n + 9y_n^2 - 3(x_n^2 + 4x_ny_n + 4y_n^2) \\
&= x_n^2(4-3) + y_n^2(9-12) + x_ny_n(12-12) \\
&= x_n^2 - 3y_n^2 \\
&= 1 \qquad \text{car } X_n \in \mathcal{H}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in \mathcal{H}_+}$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+}$.

3°) Par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{H}^+$. Précisons X_0, X_1, X_2.

$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ dont des éléments de } \mathcal{H}^+}$.

4°)

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on a transformé A en I_2.

Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible}}$. De plus, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

Partie 2 : Détermination de $\mathcal{H}_+$

5°) a) $y \in \mathbb{N}$ donc $y \geq 0$. Supposons que $y = 0$. Comme $X \in \mathcal{H}$, $x^2 - 3y^2 = 1$. D'où $x^2 = 1$.

Comme $x \in \mathbb{N}$, $x = 1$. Finalement, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $X = X_0$: ceci est exclu.

On en déduit que $\boxed{y \geq 1}$.

b) ★ $X' = BX$ donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc, $\boxed{\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}}$.

★ Vérifions que $X' \in \mathcal{H}$.
$x'^2 - 3y'^2 = (2x - 3y)^2 - 3(-x + 2y)^2 = x^2(4 - 3) + y^2(9 - 12) = x^2 - 3y^2 = 1$ car $X \in \mathcal{H}$.
Donc $X' \in \mathcal{H}$.

★ Vérifions maintenant que $x' \in \mathbb{N}, y' \in \mathbb{N}$.
x' et y' sont des entiers relatifs comme sommes, produits, différences d'entiers.
Montrons que $x' \geq 0$ et $y' \geq 0$.

$$\begin{aligned}
x' \geq 0 &\iff 2x \geq 3y \\
&\iff 4x^2 \geq 9y^2 \qquad \text{car } 2x \geq 0 \text{ et } 3y \geq 0 \\
&\iff 4(1 + 3y^2) \geq 9y^2 \qquad \text{car } X \in \mathcal{H} \\
&\iff \underbrace{3y^2 + 4 \geq 0}_{\text{vrai}}
\end{aligned}$$

Donc $2x - 3y \geq 0$.

$$\begin{aligned}
y' \geq 0 &\iff -x + 2y \geq 0 \\
&\iff 2y \geq x \\
&\iff 4y^2 \geq x^2 \qquad \text{car } 2x \geq 0 \text{ et } 3y \geq 0 \\
&\iff 4y^2 \geq 1 + 3y^2 \qquad \text{car } X \in \mathcal{H} \\
&\iff y^2 \geq 1
\end{aligned}$$

Par 5a, $y \geq 1$ donc $y^2 \geq 1$. Donc $y' \geq 0$.

On a bien montré que $\boxed{X' \in \mathcal{H}^+}$.

c) Montrons que $\varphi(X') < \varphi(X)$.
$X' = BX$ donc $\varphi(X') = x' + y' = (2x - 3y) + (-x + 2y) = x - y$. D'autre part, $\varphi(X) = x + y$
Or $y \geq 1$ donc $y > 0$ donc $\boxed{\varphi(X') < \varphi(X)}$.

6°) Soit $X \in \mathcal{H}_+$.
Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n X \neq X_0$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}, H_n : B^n X \in \mathcal{H}^+ \setminus \{X_0\}$.
Pour $n = 0$: $B^0 X = X$. Par hypothèses, $B^0 X \neq X_0$ et $X \in \mathcal{H}^+$. Ainsi, H_0 est vraie.
On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$: $B^n X \in \mathcal{H}^+ \setminus \{X_0\}$.
Par 5b, $B(B^n X)X \in \mathcal{H}^+$ *i.e.* $B^{n+1}X \in \mathcal{H}^+$. De plus, par hypothèse, $B^{n+1}X \neq X_0$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.
On a montré, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n X \in \mathcal{H}^+ \setminus \{X_0\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \varphi(B^n X)$. On note $B^n X = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$.
$B^n X \in \mathcal{H}^+$ donc α_n et β_n sont dans $\mathbb{N}$. Donc $u_n = \varphi(B^n X) = \alpha_n + \beta_n \in \mathbb{N}$.
De plus, $B^n X \in \mathcal{H}^+$ et $B^n X \neq X_0$.
Donc, par 5c, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(B(B^n X)) < \varphi(B^n X)$ *i.e.* $\varphi(B^{n+1}X_0) < \varphi(B^n X_0)$.
Ainsi, $u_{n+1} < u_n$.
(u_n) est donc une suite strictement décroissante d'entiers naturels.
Ceci est exclu par la partie 1.
On en déduit que : $\boxed{\forall X \in \mathcal{H}^+, \exists\, n \in \mathbb{N},\ B^n X = X_0}$.

7°) ★ On a déjà vu que, par 2, que : $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+$.
★ Réciproquement, soit $X \in \mathcal{H}^+$.
Par 6, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n X = X_0$.
Ainsi, $(A^{-1})^n X = X_0$. Donc $(A^n)^{-1} X = X_0$ *i.e.* $X = A^n X_0$. Ainsi, $X \in \mathcal{E}$.
Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathcal{H}^+ = \mathcal{E} \ \textit{i.e.}\ \mathcal{H}^+ = \{A^n X_0 \ /n \in \mathbb{N}\}}$$

Partie 3 : $\mathcal{H}^+$ est infini

8°) Effectuons deux calculs :
$A \times P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{3}+3 \\ \sqrt{3}+2 & -\sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$.
$P \times D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{3}+3 \\ 2+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Ainsi, on a bien : $\boxed{AP = PD}$.

9°) Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de P.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{3}L_1$$

On a transformé P, par opérations élémentaires, en la matrice T.
Or T est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls, donc T est inversible.
Donc, $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

10°) $AP = PD$.
Comme P est inversible, on peut multiplier les 2 membres de l'égalité à droite par P^{-1}.
On obtient $\boxed{A = PDP^{-1}}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n : A^n = PD^nP^{-1}$.

- $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc Q_0 est vraie.
- Supposons Q_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \qquad \text{par HR} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  Ainsi Q_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}}$.

11°) On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^kX_0 = X_0$.
On a donc, par la question précédente : $PD^kP^{-1}X_0 = X_0$.
En multipliant à gauche par P^{-1} : $D^k(P^{-1}X_0) = P^{-1}X_0$.
On note $\boxed{Y_0 = P^{-1}X_0}$. Alors, on a $\boxed{D^kY_0 = Y_0}$.
Par l'absurde, supposons $Y_0 = 0$. Alors, $P^{-1}X_0 = 0$.
En multipliant à gauche par P, cela donne : $X_0 = 0$: ceci est exclu.
Ainsi, $\boxed{Y_0 \neq 0}$.

12°) On dispose d'une matrice colonne Y_0 non nulle telle que $D^kY_0 = Y_0$.
On note $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $Y_0 \neq 0$ donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Donc, $D^k = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^k & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^k \end{pmatrix}$.
On a alors : $\begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^k & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{cases} (2+\sqrt{3})^ka = a \\ (2-\sqrt{3})^kb = b \end{cases}$.
On sait que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Supposons $a \neq 0$. Alors, $(2+\sqrt{3})^k = 1$.
  Or $2+\sqrt{3} > 1$ donc $(2+\sqrt{3})^k > 1$. C'est exclu.
- Supposons que $b \neq 0$. Alors, $(2-\sqrt{3})^k = 1$. Or $1 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $0 < 2-\sqrt{3} < 1$. Donc $(2-\sqrt{3})^k < 1$. C'est exclu aussi.

Dans les 2 cas, $\boxed{\text{on obtient une contradiction}}$.
On en déduit que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, A^kX_0 \neq X_0}$.

13°) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \neq p$. Montrons que $A^nX_0 \neq A^pX_0$.
Par l'absurde, supposons que $A^nX_0 = A^pX_0$.
$n \neq p$. Supposons par exemple que $n > p$.
Comme A est inversible, A^p aussi. On multiplie $A^nX_0 = A^pX_0$ à gauche par $(A^p)^{-1}$.
On obtient : $(A^p)^{-1}A^nX_0 = X_0$. Donc $(A^{-1})^pA^nX_0 = X_0$.
Ce qui s'écrit : $A^{n-p}X_0 = X_0$: on a trouvé k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^kX_0 = X_0$.
Ceci est exclu.
Donc, on a bien $A^nX_0 \neq A^pX_0$.
Le raisonnement est analogue si $p > n$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'énoncé } (*) \text{ est vrai}}$.