Corrigé du devoir maison 7.

Exercice

Partie 1 :

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons $(*)$ avec $2x$ et 0 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2x+0}{2}\right) &= \frac{f(2x)+f(0)}{2} \\ \text{d'où } f(x)-f(0) &= \frac{f(2x)+f(0)}{2} - f(0) \\ g(x) &= \frac{f(2x)-f(0)}{2} \\ g(x) &= \frac{g(2x)}{2} \\ \text{d'où } &\boxed{2g(x) = g(2x)} \end{aligned}$$

2°) Soient x et y des réels. Appliquons $(*)$ avec $2x$ et $2y$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2x+2y}{2}\right) &= \frac{f(2x)+f(2y)}{2} \\ f(x+y) &= \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(2y)}{2} \\ \text{d'où } f(x+y)-f(0) &= \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(2y)}{2} - f(0) \\ g(x+y) &= \frac{f(2x)-f(0)}{2} + \frac{f(2y)-f(0)}{2} \\ g(x+y) &= \frac{g(2x)}{2} + \frac{g(2y)}{2} \\ &\boxed{g(x+y) = g(x)+g(y)} \text{ d'après la question 1} \end{aligned}$$

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$.
En appliquant le résultat précédent avec $y = -x$, on trouve $g(0) = g(x) + g(-x)$.
Or $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, d'où $g(-x) = -g(x)$.
Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

4°) Par le résultat de la question 2 :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x-x_0) = g(x) + g(-x_0) = g(x) - g(x_0)$ puisque g est impaire.
On en tire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x_0) + g(x-x_0)$.

$$\begin{cases} x - x_0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 & \\ g(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} g(0) & \text{car } g \text{ est continue en 0 (puisque } f \text{ l'est)} \end{cases}.$$

Par composition de limites, $g(x-x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(0) = 0$.

D'où, par somme, $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$, ce qui signifie que $\boxed{g \text{ est continue en } x_0}$.

Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.

5°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x+1) &= g(x+1) - a(x+1) \\ &= g(x) + g(1) - ax - a \\ &= g(x) - ax \quad \text{car } g(1) = a \\ h(x+1) &= h(x) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{h \text{ est 1-périodique}}$.

b) D'après la question 4, g est continue sur $\mathbb{R}$, donc par somme, h est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur le segment $[0,1]$, donc h est bornée sur $[0,1]$ et elle atteint ses bornes : il existe des réels x_1 et x_2 de ce segment tels que :

$$\forall\, x \in [0,1],\ h(x_2) \leq h(x) \leq h(x_1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $n = \lfloor x \rfloor$. On a $n \leq x < n+1$ donc $0 \leq x - n < 1$ d'où $x - n \in [0,1]$.
On a donc $h(x_2) \leq h(x-n) \leq h(x_1)$, i.e. $h(x_2) \leq h(x) \leq h(x_1)$ puisque h est 1-périodique.
Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{h \text{ possède un maximum et un minimum sur } \mathbb{R}}$.

c) Comme M est le maximum de h sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) \leq M$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x_1+x) &= g(x_1+x) - a(x_1+x) \\ &= g(x_1) + g(x) - ax_1 - ax \\ &= h(x_1) + h(x) \\ &= M + h(x) \\ \text{d'où} \qquad h(x) &= h(x_1+x) - M \\ \boxed{h(x) \leq 0} & \quad \text{puisque } h(x_1+x) \leq M \end{aligned}$$

d) Notons x_2 un réel tel que $h(x_2) = m$, où m est le minimum de h sur $\mathbb{R}$.
Par un calcul similaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x_2+x) &= m + h(x) \\ \text{d'où} \qquad h(x) &= h(x_2+x) - m \\ \boxed{h(x) \geq 0} & \quad \text{puisque } h(x_2+x) \geq m \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$ et $h(x) \leq 0$, donc $h(x) = 0$.

$\boxed{h \text{ est la fonction identiquement nulle sur } \mathbb{R}.}$
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(x) + ax$.
Ainsi, $\boxed{g \text{ est la fonction } \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array}}$.

6°) Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + f(0) = ax + f(0)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est une fonction affine.}}$

Partie 2 :

- On a montré que si $f \in \mathcal{E}$ alors f est une fonction affine.
- Réciproquement, soit a et b des réels, posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$.

  f est bien continue en 0.

Soit x, y des réels.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= a\left(\frac{x+y}{2}\right)+b \\ &= \frac{ax+ay+2b}{2} \\ &= \frac{ax+b+ay+b}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème.

- Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{E} \text{ est l'ensemble des fonctions affines}}$.