Devoir maison 4.

À rendre le lundi 7 novembre 2022

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2°) Étudier la parité de f.

3°) **a)** Justifier que f est dérivable au moins sur $D\backslash\{x_1, x_2\}$ où x_1 et x_2 sont des réels à expliciter (on fera en sorte d'avoir $x_2 < 0 < x_1$).

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in D\backslash\{x_1, x_2\}$.

c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in D$ tel que $x \geq 0$.

d) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S) : \begin{cases} (z+it)^n + (z-it)^n = 2\cos(\varphi) \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

d'inconnue le couple (z, t) de <u>complexes</u>.

1°) Soit z et t des complexes. On suppose que (z, t) est solution du système (S).
On note $u = z + it, v = z - it$.

a) Justifier que $u \neq 0$ et $v = \dfrac{1}{u}$.

b) Montrer que u^n est solution de l'équation (E) : $Z^2 - 2\cos(\varphi)Z + 1 = 0$.

c) Résoudre l'équation (E). En déduire la forme de u et v.

d) En déduire la forme de z et t.

2°) Conclure.