Chapitre 4. Complexes.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.a Définition des nombres complexes, forme algébrique

Théorème-définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, $\boxed{\text{contenant } \mathbb{R}}$, muni de lois $+$ et $\times$, vérifiant les propriétés suivantes :

- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $\boxed{i^2 = -1}$
- $\boxed{\text{Tout élément } z \text{ de } \mathbb{C} \text{ s'écrit de manière unique sous la forme } z = x + iy\text{, où } x \text{ et } y \text{ sont des réels.}}$

  Autrement dit :

  C'est ce qu'on appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z.
  Le réel x s'appelle la partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$.
  Le réel y s'appelle la partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$.

  On a donc $\boxed{z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z).}$
- Les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$, et ont les $\boxed{\text{mêmes propriétés}}$:
  - *Commutativité de + et de $\times$:*
    $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ z + z' = z' + z$ et $z \times z' = z' \times z$.
  - *Associativité de + et de $\times$:*
    $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3,\ (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
  - *Éléments neutres :*
    $\forall z \in \mathbb{C},\ z + 0 = 0 + z = z$ et $z \times 1 = 1 \times z = z$.
  - *Distributivité de $\times$ par rapport à + :*
    $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3,\ z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$ et $(z' + z'') \times z = z' \times z + z'' \times z$.
  - *Intégrité :*
    $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$.

On peut donc écrire :

$$\mathbb{C} =$$

⚠ Malgré son nom, la partie imaginaire est un réel !

Vocabulaire :

- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est imaginaire pur.
  Cela revient à dire qu'il est de la forme iy avec y réel. Exemples : $i, -i, 2i, \sqrt{2}i$...
  L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$. Ainsi :

$$z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0.$$

- De façon similaire :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0.$$

Conséquence de l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si z et z' ont même partie réelle et même partie imaginaire :

autrement dit, pour x, x', y et y' réels :

L'idée à retenir : une égalité de nombres complexes se traduit par deux égalités de nombres réels.

En particulier, $z = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$.

1.b Addition, produit, inverse

Pour x, y, x', y' réels :

- Somme : $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$, autrement dit : $\begin{cases} \mathrm{Re}(z+z') = \\ \mathrm{Im}(z+z') = \end{cases}$

  Cela se généralise à des sommes de n termes :

- Produit : $(x+iy) \times (x'+iy') \;=$

  $=$

  ⚠ $\mathrm{Re}(zz')$ n'est donc pas égal à $\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$... Idem avec la partie imaginaire.
  Cependant :

- Inverse : si $z = x+iy$ est non nul, alors $x^2+y^2 \neq 0$ car

  et on constate que : $(x+iy)\dfrac{(x-iy)}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2-(iy)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$

  Ainsi, $z^{-1} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.
  On pourra retenir que, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

On calcule $\dfrac{1}{x+iy}$ sous forme algébrique en multipliant au numérateur et au dénominateur par $(x-iy)$

  (cela donnera, au dénominateur, x^2+y^2 puisque c'est le résultat de $(x+iy)(x-iy)$).

Cas des puissances de i :

$\dfrac{1}{i} =$

$i^3 =$ $\quad i^4 =$ $\quad i^5 =$

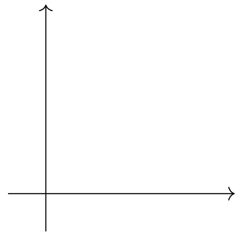
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $i^{2n} =$ $\quad i^{2n+1} =$

1.c Interprétation géométrique

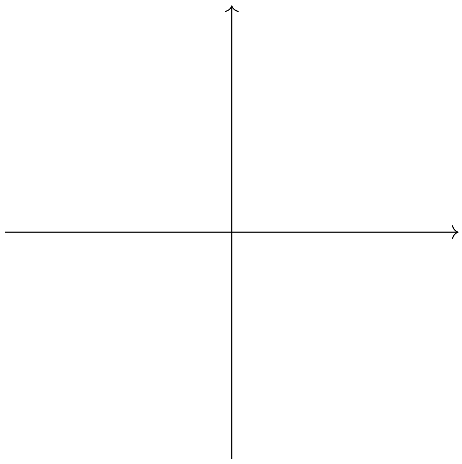
Définition :

Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ s'écrivant $z = x + iy$, avec x et y réels.

- Le point M de coordonnées (x, y) est appelé point d'affixe z, ce que l'on note : $M(z)$.
  On dit aussi que M est le point image de z.
- Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) est appelé vecteur d'affixe z, ce que l'on note : $\overrightarrow{u}(z)$.



On peut donc identifier $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ (muni d'un repère orthonormé direct).
Exemples :



Plus généralement, les points M d'affixe z réelle sont les points de l'axe des abscisses :

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow M(z) \in (Ox)$$

les points M d'affixe z imaginaire pur sont les points de l'axe des ordonnées :

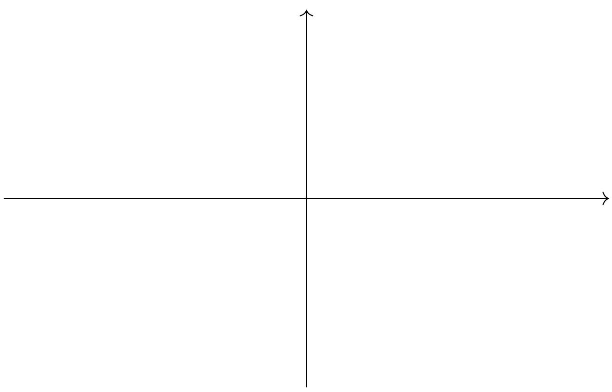
$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow M(z) \in (Oy)$$

Proposition :

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs, d'affixes respectives z et z'. Soit λ un réel.
  Alors l'affixe de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}$ est $z + z'$ et l'affixe de $\lambda.\overrightarrow{u}$ est $\lambda.z$.

- Soient A et B des points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B.
  Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Remarque : Soit M le point d'affixe z. Le point M' d'affixe $-z$ est



2 Conjugué et module

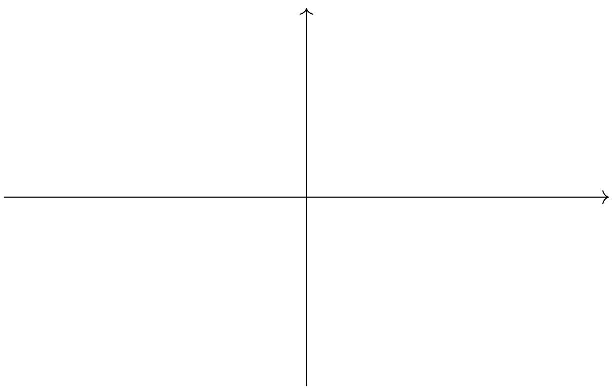
2.a Conjugué

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, s'écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels.
On appelle <u>conjugué</u> de z le complexe suivant :

Autrement dit, $\overline{z} =$

Interprétation géométrique : Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $\overline{z}$ est



Proposition :

Pour tous complexes z et z' :

- $\overline{z + z'} =$
- $\overline{zz'} =$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} =$
  (On peut prendre $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$)
- $\overline{\overline{z}} =$
  (On dit que la conjugaison est une involution).

Démonstration 1

Proposition :

Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}(z) =$

$\mathrm{Im}(z) =$

Démonstration 2

C'est à utiliser aussi "dans l'autre sens", c'est-à-dire :

Corollaire :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{R} \iff \qquad \text{et } z \in i\mathbb{R} \iff$$

2.b Module

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, s'écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels.
On appelle module de z le réel positif suivant :

$$|z| =$$

On a aussi :

$$|z| =$$

En effet,

Très souvent, c'est $|z|^2$ qu'on manipule ;

Remarques importantes

- Le module et le conjugué permettent de calculer l'inverse :

  On retrouve bien la formule donnée pour $z = x + iy$ avec x, y réels :

- Si $z = x + iy$, avec x, y réels, est un réel, alors $y = 0$, $z = x$, et $|z| = \sqrt{x^2}$: on retrouve la valeur absolue de x.
  Autrement dit, le module coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue, donc la notation $|.|$ n'est pas ambigüe.

Interprétation géométrique : (toujours dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct)

Si M est le point d'affixe z, alors $|z|$ est

Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $|z|$ est

Si les points A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B,
alors $|z_B - z_A|$ est

Par conséquent : pour r réel positif et z_A un nombre complexe, en notant A le point d'affixe z_A,

$\{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |z - z_A| = r\}$ est

$\{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |z - z_A| \leq r\}$ est

$\{M(z) \in \mathcal{P} \ / \ |z - z_A| < r\}$ est

Proposition :

Pour tous complexes z et z' :

- $|\overline{z}| = |z| = |-z|$
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|zz'| =$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| =$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$
(On peut prendre $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$)

- $|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} =$

Démonstration 3

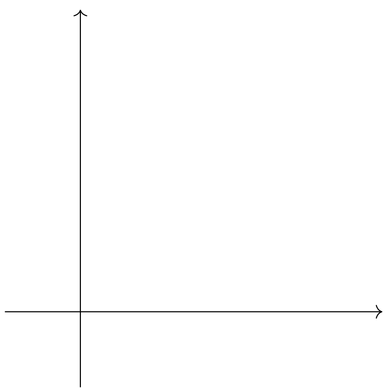
Proposition :

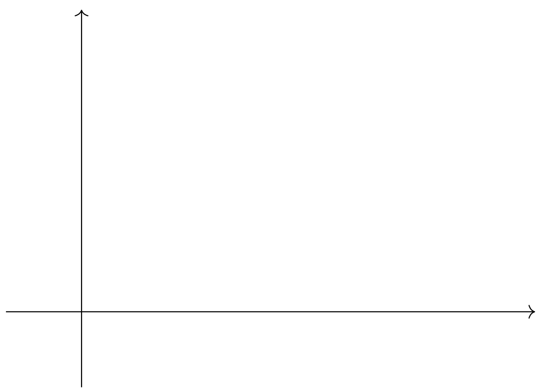
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- **(Inégalité triangulaire)** Pour tous complexes z et z' :

  Pour l'inégalité de droite, on a égalité si et seulement si z et z' sont positivement liés, c'est-à-dire :
$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+,\ z' = \alpha z \text{ ou } \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+,\ z = \alpha z'.$$

Démonstration 4

Interprétations géométriques :





3 Nombres complexes de module 1

3.a Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} =$$

Remarque importante : Comme $|z|$ est un réel positif, $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1$.

Premiers exemples :

Proposition :

- Pour tous éléments z et z' de $\mathbb{U}$, les éléments suivants sont encore dans $\mathbb{U}$:
- Pour tout $z \in \mathbb{U}$,

Démonstration 5

Interprétation géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y sont donc des réels).
Soit M le point d'affixe z.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U} &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1.

On sait aussi qu'un point M du cercle trigonométrique est déterminé par ses coordonnées $\cos\theta$ et $\sin\theta$ où θ est l'angle orienté entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OM}$, d'où :

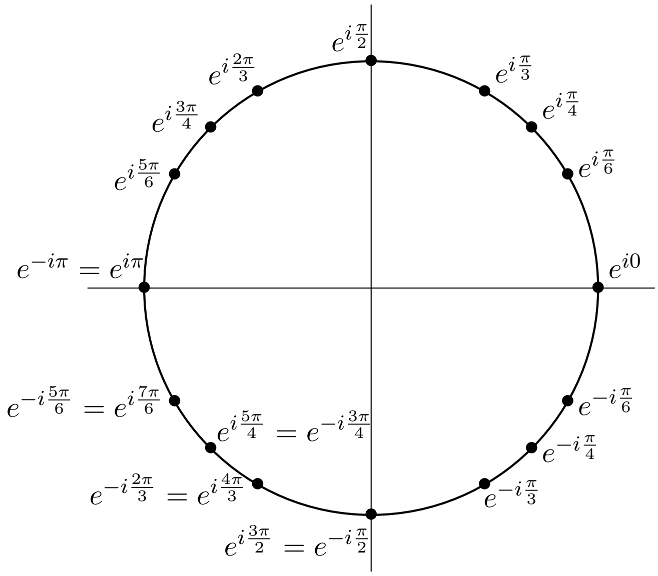
Proposition :

Soit M un point du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Notons (x, y) ses coordonnées.

$$\boxed{M \in \mathcal{C} \iff \qquad\qquad \iff \qquad\qquad}$$

Conséquence : **Théorème-définition :**

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\boxed{z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \quad}$



Proposition :

- $e^{i0} = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$
- $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ e^{i2k\pi} = 1$
- Pour tous réels θ et θ', $\ e^{i\theta} = e^{i\theta'} \quad \Longleftrightarrow$

  $\Longleftrightarrow$
- Pour tout réel θ, $\overline{e^{i\theta}} =$
- Pour tous réels θ et θ', $e^{i(\theta+\theta')} =$
- Formules d'Euler : $\quad \cos\theta = \qquad\qquad \sin\theta =$
- Formule de Moivre :

  $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},$

Démonstration 6

Exemple important : On définit le nombre $\boxed{j = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

$\overline{j} =$

$j^2 =$

3.b Une application : linéarisation, "délinéarisation"

- **Linéarisation**
  Linéariser une expression polynômiale en $\sin x$ et $\cos x$ (avec des puissances, des produits et éventuellement des sommes) consiste à la transformer en somme de termes $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\sin x$, ... sans puissances et sans produits. Cela sera extrêmement utile pour calculer des intégrales.

  Il y a trois étapes :
  - Étape 1 :

  - Étape 2 :

  - Étape 3 :

  Exemples : a) Linéariser $\cos^4 x$.
  b) Linéariser $\sin^2 x \cos x$.

  Démonstration 7

- **"Dé-linéarisation"** On souhaite faire l'opération inverse : passer de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à une expression polynômiale ne contenant plus que des $\sin(x)$ et des $\cos(x)$.

  Pour les petites valeurs de n ($n = 2, 3...$), les formules trigo peuvent suffire.
  Sinon, il y a aussi une méthode générale, avec deux choses à connaître : la formule du binôme de Newton encore, et

  $$\text{La formule de Moivre : } \quad \cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

  Exemple : Exprimer $\cos(6x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.
  Exprimer $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
  Écrire $\sin(6x) = \sin(x) \times f(\cos(x))$ où f est une fonction polynomiale.

  Démonstration 8

3.c Une autre application : calculs de sommes

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Démonstration 9

4 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

4.a Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Alors : .

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

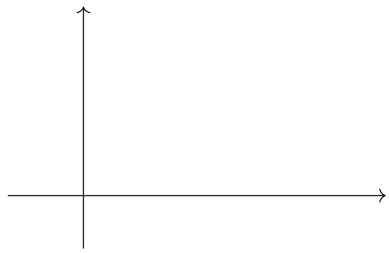
Un tel réel θ est appelé <u>un argument</u> de z, ce qu'on note $\theta = \arg(z)$.

L'ensemble des arguments de z est alors $\{\theta + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

L'écriture $\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$ est appelée <u>forme trigonométrique</u> de z.

Remarque : pour $z \neq 0$, il y a cependant un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$: on l'appelle l'argument principal.

Interprétation géométrique



Soit M le point du plan d'affixe $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$.
$|z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$
θ est l'angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OM}$
$(|z|, \theta)$ forment un couple de coordonnées polaires de $M(z)$.

Méthode
Lorsqu'on a mis un nombre complexe non nul z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\boxed{\rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}}$ alors il s'agit bien de la forme trigonométrique de z : $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$.
En effet :

4.b Propriétés

Proposition :

Soient z et z' des complexes non nuls. $\quad z = z' \Longleftrightarrow$

Démonstration 10

Proposition :

Soient z et z' des complexes non nuls. Alors :
$\arg(zz') =$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) =$

Démonstration 11

On a aussi : $\arg(\overline{z}) = \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$.

Proposition :

Soit z un complexe non nul.

$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) =$ $\qquad$ $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) =$

4.c Comment obtenir la forme trigonométrique d'un complexe non nul ?

- Si $z = a \in \mathbb{R}^*$:

  Retenir que transformer -1 (un signe "moins") en $e^{i\pi}$ peut être très utile...
  Et de même, il faut penser parfois à remplacer i par $e^{i\frac{\pi}{2}}$...

- **Autres exemples** :

$$z_1 = \sqrt{2}i \quad ; \quad z_2 = -3i \quad ; \quad z_3 = ae^{i\theta} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad z_4 = 2 - 2i \quad ; \quad z_5 = \frac{-3}{1+\sqrt{3}i}$$

  Démonstration 12

- A-t-on une formule générale pour récupérer la forme trigonométrique $z = |z|e^{i\theta}$ à partir de la forme algébrique $z = x + iy$ de $z \neq 0$?

4.d Technique de l'angle moitié

C'est un calcul qui permet de factoriser les sommes ou différences de deux éléments de $\mathbb{U}$. On obtient la forme $Xe^{i\theta}$, avec X réel et θ réel : quand $X > 0$ est strictement positif, c'est la forme trigonométrique, et quand $X < 0$ il suffit d'utiliser que $-1 = e^{i\pi}$.
À parfaitement savoir faire : pour tout réels p et q,

$$e^{ip} + e^{iq} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

De même :

$$e^{ip} - e^{iq} =$$

$$=$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$1 + e^{i\theta} = \qquad\qquad 1 - e^{i\theta} =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$=$$

Remarque : Avec les formules obtenues pour $e^{ip} + e^{iq}$ et $e^{ip} - e^{iq}$, on peut retrouver les formules trigonométriques $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$!

4.e Une application

Proposition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a,b) \neq (0,0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \\ \iff \quad & \exists\, A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists\, \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = A\cos(t - \varphi) \end{aligned}$$

✎ **Démonstration 13**

5 Des équations à savoir résoudre dans $\mathbb{C}$

5.a $z^2 = Z_0$: Racines carrées

Définition :

Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'un complexe z est une racine carrée de Z_0 si $z^2 = Z_0$.

⚠ La notation $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \in \mathbb{R}_+$! Cela désigne l'unique réel positif y vérifiant $y^2 = x$. En effet, $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie comme la réciproque de $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Trouver les racines carrées de Z_0, c'est donc résoudre l'équation $z^2 = Z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Proposition :

> Tout complexe Z_0 non nul possède deux racines carrées exactement, opposées l'une de l'autre.

✎ **Démonstration 14**

Exemples :

-1 a pour racines carrées

-4 a pour racines carrées

2 a pour racines carrées

Généralisons : pour un réel α, les racines carrées de α sont :

La démonstration nous donne une **méthode trigonométrique** pour trouver les racines carrées : si la forme trigonométrique de Z_0 est $\rho e^{i\theta}$, alors les deux racines carrées de Z_0 sont $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exemple : $Z_0 = 1 + i$

Que faire quand la forme trigonométrique de Z_0 n'est pas facile à obtenir, et qu'on ne dispose que de sa forme algébrique ?

On écrit $Z_0 = a + ib$ avec a, b réels.

On cherche z racine carrée de Z_0 sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Premier essai :

$$\begin{aligned} z^2 = Z_0 &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Avec seulement cela, c'est compliqué de trouver x et y ! Il nous faudrait :

- une autre équation avec x^2 et y^2, de sorte qu'on trouve les valeurs de x^2 et y^2 ;
- les signes relatifs de x et y, autrement dit le signe de xy.

Deuxième essai - la **méthode algébrique** :

L'astuce :

$$z^2 = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Exemple : déterminer les racines carrées de $4 - 3i$.

Démonstration 15

5.b $az^2 + bz + c = 0$: Trinômes du second degré à coefficients complexes

Proposition :

Soit (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante : $az^2 + bz + c = 0$,
avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ.
L'ensemble des solutions de (E) est :

En particulier, il n'y a qu'une seule solution si et seulement si

Démonstration 16

Exemple : (E) : $z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{i}{4} = 0$

- **Cas où a, b, c sont réels**

  On retrouve les résultats connus car $\Delta = b^2 - 4ac$ est alors un réel ;

  — Si $\Delta \geq 0$,

  — Si $\Delta < 0$,

- **Remarque importante dans le cas où a, b, c sont réels et $\Delta < 0$**

  Comme $\sqrt{-\Delta} \neq 0$, on a des solutions $\boxed{\text{complexes non réelles}}$.

  Soit z_0 l'une des deux solutions.

  On peut l'écrire sous forme trigonométrique (car $z_0 \neq 0$ sinon z_0 serait réelle) :

  $$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

  L'autre solution est $\overline{z_0} = \rho e^{-i\theta}$ donc $\quad az^2 + bz + c =$

  $=$

  $=$

  Il s'agit de la forme générale d'un trinôme du second degré :

  — à coefficients réels

  — sans racine réelle (i.e. $\Delta < 0$)

  Sans calcul, on peut dire que les racines sont

  Remarque : si on a un polynôme $P(z)$ à coefficients complexes de degré strictement supérieur à 2, on cherche une racine "évidente" α, et on peut mettre $(z - \alpha)$ en facteur dans $P(z)$ (comme au chapitre 1).

- **Relations coefficients-racines**

  Proposition :

  Soit (E) : $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$

  $$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les deux solutions de } (E) \iff$$

  Démonstration 17

  Bien sûr, il est très courant d'avoir $a = 1$: équation de la forme $z^2 + pz + q = 0$.

  $$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les deux solutions de } (E) \iff$$

  Le coefficient de z est alors

  Le coefficient constant est alors

5.c $z^n = Z$: Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z_0 \in \mathbb{C}$.
On dit qu'un complexe z est une racine $n$ième de Z_0 si
Lorsque $Z_0 = 1$, on parle de racine $n$ième de l'unité.

⚠ Ne pas utiliser la notation $\sqrt[n]{x}$ à mauvais escient : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie comme la réciproque de $x \mapsto x^n$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si n est impair.
Ainsi, $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens que si $x \in \mathbb{R}$ voire seulement si $x \in \mathbb{R}_+$; et cela ne désigne qu'une seule des racines n-ièmes de x au sens complexe !

L'ensemble des racines $n$ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$:

$$\mathbb{U}_n =$$

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines $n$ièmes de l'unité, qui sont les complexes suivants :

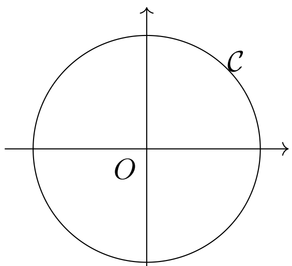
✎ **Démonstration 18**

Ainsi

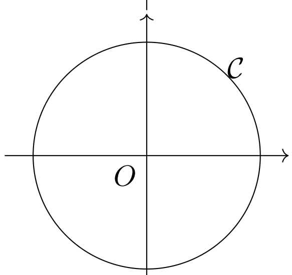
$$\mathbb{U}_n =$$

Pour les petites valeurs de n, voici les racines $n$ièmes de l'unité et leurs points images sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$:

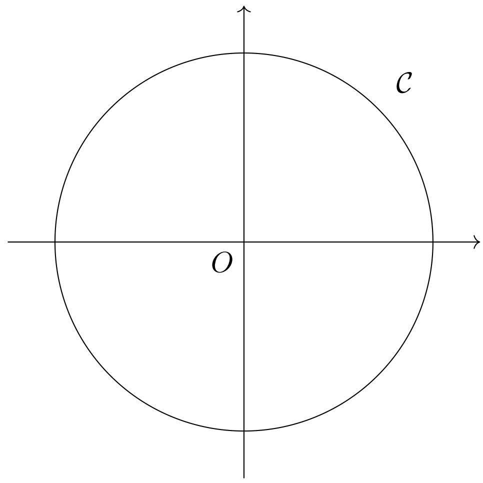
$n = 2$:



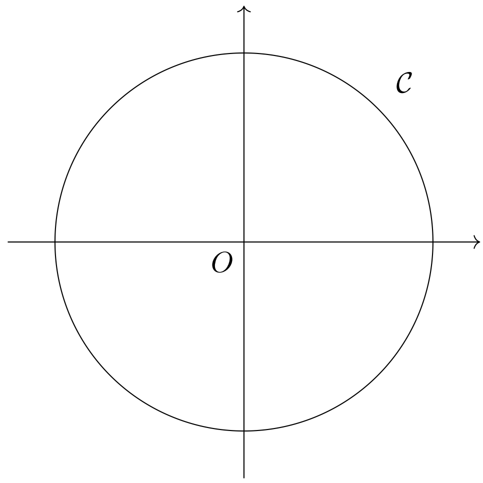
$n = 3$:



$n = 4$:



Les points images forment, sur le cercle trigonométrique,



Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ est alors la somme des racines $n$ièmes de l'unité, elle vaut 0 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Démonstration 19

En particulier :

Il faut savoir manipuler les puissances des racines n-ièmes de l'unité. Par exemple, : si α est une racine 5-ième de l'unité :

$$\alpha^5 = \qquad \alpha^6 = \qquad \alpha^8 =$$

$$\alpha^{2022} = \qquad \overline{\alpha} =$$

Exemple d'application des racines $n$ièmes : Résoudre $(z+1)^4 = z^4$.

Démonstration 20

Racines $n$ièmes de Z_0 non nul :

- On écrit Z_0 sous forme trigonométrique :

$$Z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \qquad \rho_0 > 0.$$

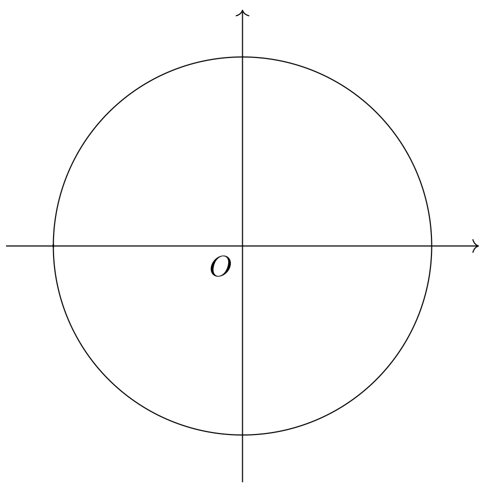
  On en tire une racine $n$ième évidente :
- Donc :

$$\begin{aligned} z^n = Z_0 &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

On a montré :

Proposition :

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z_0 \in \mathbb{C}^*$. Il existe exactement n racines $n$ièmes de Z_0, qui sont les complexes suivants :



Exemple : Trouver les racines 5ièmes de $1 + i$.

Démonstration 21

6 Exponentielle complexe

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).
On définit

$$e^z = e^x e^{iy}$$

C'est un nombre complexe non nul.
Il est écrit directement sous forme trigonométrique :
e^x est un réel strictement positif, e^{iy} est un nombre complexe de module 1.

En résumé :

Proposition :

Soient z et z' des complexes.

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
- $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
- $e^z = e^{z'} \iff$

Démonstration 22

Exemple : Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.

Démonstration 23

7 Applications à la géométrie

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

7.a Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité

Proposition :

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs non nuls, d'affixes respectives z et z'. Alors :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') =$$

- Soient A, B, C, D des points d'affixes respectives a, b, c, d, avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) =$$

Démonstration 24

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u'}$ ou bien tel que $\overrightarrow{u'} = k\overrightarrow{u}$.

Proposition :

(Colinéarité et orthogonalité)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs non nuls, d'affixes respectives z et z'

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\boxed{\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}.}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\boxed{\dfrac{z'}{z} \in i\mathbb{R}.}$

Démonstration 25

En fait, cela marque aussi si $z' = 0$.

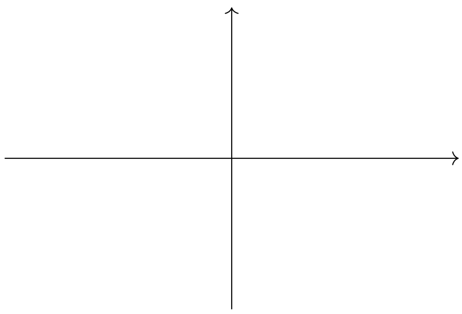
Soient A, B, C des points d'affixes respectives a, b, c. Dire qu'ils sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont colinéaires. On en tire que, si $a \neq b$:

$$A,\ B,\ C \text{ alignés } \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

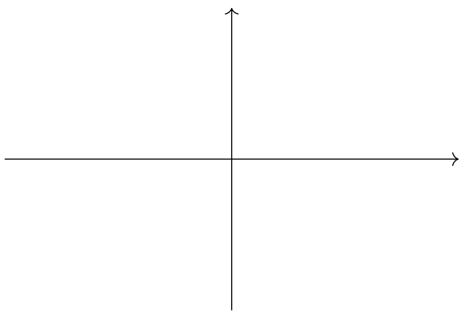
7.b Quelques transformations élémentaires du plan

On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$, autrement dit on identifie z et le point M d'affixe z.

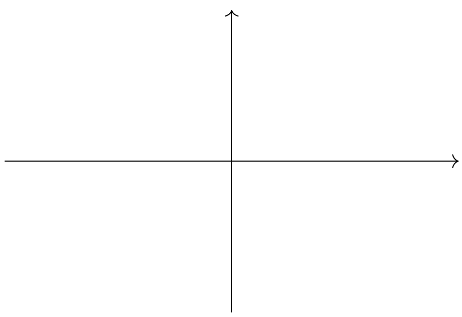
- La transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -z \end{array}$ est



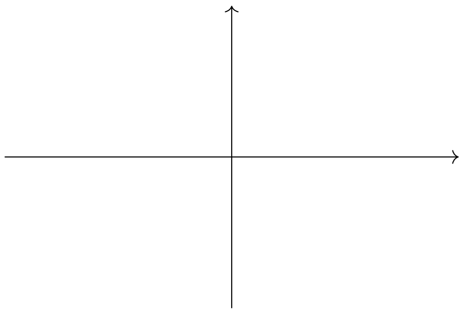
- La transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ est



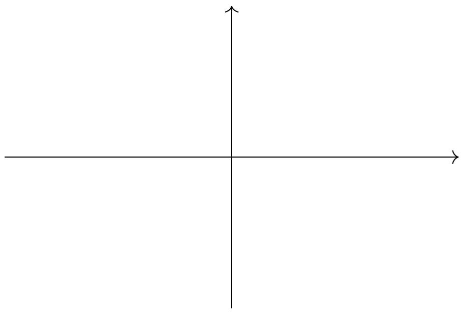
- Soit $b \in \mathbb{C}$. La transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}$ est



- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. La transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & kz \end{array}$ est



- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}z \end{array}$ est



De façon plus générale, si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on peut s'intéresser à l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \alpha z \end{array}$. En écrivant α sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on peut noter :

- h l'homothétie de centre O et de rapport ρ
- r la rotation de centre O et d'angle θ.

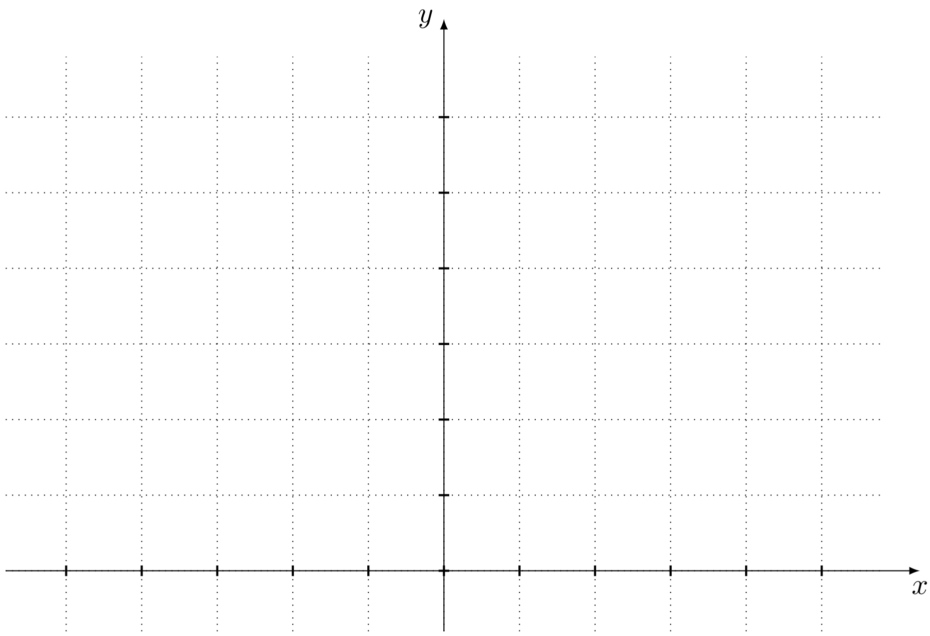
On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \rho \times e^{i\theta} \times z = h \circ r(z) \\ &= e^{i\theta} \times \rho \times z = r \circ h(z) \end{aligned}$$

f est appelée <u>similitude de centre O, de rapport ρ et d'angle θ</u>.

Exemple

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3iz \end{array}$. Construire géométriquement $f(2+i)$. Vérifier par le calcul.



8 Fonctions à valeurs complexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut définir des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, par exemple :
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \ln(x) + ix^2. \end{array}$$

On peut alors considérer les parties réelles et imaginaires de $f(x)$ pour tout $x \in I$, ce qui définit des fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ qui, elles, sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Dans l'exemple précédent, $\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f): & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f): & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$

Définition :

- On dit que f est continue en x_0 (respectivement sur I) si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- On dit que f est dérivable en x_0 (respectivement sur I) si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
  Dans ce cas, on définit le nombre dérivé $f'(x_0)$ (respectivement la fonction dérivée f') comme :
  $$f'(x_0) = (\mathrm{Re}(f))'(x_0) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(x_0)$$
  $$(\text{respectivement } f' = (\mathrm{Re}(f))' + i\,(\mathrm{Im}(f))' \ )$$
- Lorsque f est continue sur I, on définit, pour tout $(a,b) \in I^2$,
  $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\ dt \ + \ i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\ dt.$$

Remarques :

- La définition de f' permet d'écrire, en cas de dérivabilité : $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(f') = (\mathrm{Re}(f))' \\ \mathrm{Im}(f') = (\mathrm{Im}(f))' \end{array}\right.$
- Une somme, plus généralement une combinaison linéaire, un produit, un quotient de fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont dérivables, et les formules habituelles sont valables.

Exemples :

- Avec la fonction f définie plus haut :

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la dérivée de $x \mapsto \alpha x$ est $x \mapsto \alpha$.
  Démonstration 26
- Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & e^{ix} \end{array}$; calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition :

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. On pose, pour tout $x \in I,\ f(x) = e^{\varphi(x)}$.
On note : $f =$
Alors, f est dérivable sur I et : $\forall x \in I,\ \ f'(x) =$
Ce qui se note : $(e^{\varphi})' =$

Démonstration 27

Exemple : Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x} \end{array}$ où α est un complexe,
f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$.

Plan du cours