Corrigé du devoir maison 4.

Exercice

1°) ★ On pose : $t = \ln x$; la fonction $x \mapsto \ln x$ est bien de classe C^1 sur $[1, 2]$.
On a $e^t = x$.

★ On a $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

★ si $x = 1$ alors $t = \ln 1 = 0$; si $x = 2$ alors $t = \ln 2$.

D'où :

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 x^2 \sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 2} (e^t)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\ln 2} e^{2t} \sin(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On pose : $\forall\, t \in [0, \ln 2]\,, \quad u(t) = \sin(t) \qquad v(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall\, t \in [0, \ln 2]\,, \quad u'(t) = \cos(t) \quad v'(t) = e^{2t}$$

D'où , par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \left[\sin(t)\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \cos(t)\frac{e^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(\ln 2)\frac{e^{2\ln 2}}{2} - \int_0^{\ln 2} \cos(t)\frac{e^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sin(\ln 2) - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \cos(t)e^{2t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Effectuons une intégration par parties similaire pour la seconde intégrale.

On pose : $\forall\, t \in [0, \ln 2]\,, \quad w(t) = \cos(t) \qquad v(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}$

Les fonctions w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall\, t \in [0, \ln 2]\,, \quad w'(t) = -\sin(t) \quad v'(t) = e^{2t}$$

D'où

$$\int_0^{\ln 2} \cos(t)e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\cos(t)\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \sin(t)\frac{e^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2\cos(\ln 2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= 2\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}I \\ \left(1 + \frac{1}{4}\right) I &= 2\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{4} \\ I &= \frac{4}{5}\left(2\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{8\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2) + 1}{5}}$$

2°) a) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \alpha \ln(x)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = e^{\varphi(x)}$.
Comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (résultat rappelé dans l'énoncé), et pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \alpha \ln'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$.
D'après un résultat du chapitre 4, $\boxed{f_\alpha \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'_\alpha(x) &= \varphi'(x)e^{\varphi(x)} \\
&= \frac{\alpha}{x}e^{\alpha \ln x} \\
&= \alpha e^{-\ln x}e^{\alpha \ln x} \\
&= \alpha e^{-\ln x + \alpha \ln x} \quad \text{d'après les propriétés de l'exponentielle complexe} \\
&= \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} \\
f'_\alpha(x) &= \boxed{\alpha x^{\alpha-1}} \quad \text{d'après la définition générale de } x^\alpha
\end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $f_{\alpha+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_{\alpha+1}(x) = (\alpha+1)x^\alpha$.
Comme $\alpha \neq -1$, on peut poser $\boxed{F = \dfrac{1}{\alpha+1}f_{\alpha+1}}$.
Alors F est dérivable (résultat rappelé dans l'énoncé) et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{\alpha+1}f'_{\alpha+1}(x) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha = f_\alpha(x).$$

Ainsi $\boxed{F \text{ est une primitive de } f_\alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

c) Notons $a = \mathrm{Re}(\alpha)$ et $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
x^\alpha &= e^{(a+ib)\ln(x)} \\
&= e^{a\ln x}e^{ib\ln x} \\
&= x^a\left(\cos\left(b\ln(x)\right) + i\sin\left(b\ln(x)\right)\right) \\
\boxed{x^\alpha} &\boxed{= x^a\cos\left(b\ln(x)\right) + ix^a\sin\left(b\ln(x)\right)} \quad \text{forme algébrique de } x^\alpha.
\end{aligned}$$

En prenant $b = 1$ et $a = 1$, autrement dit en prenant $\boxed{\alpha = 1+i}$, on a bien, pour tout $x > 0$, $\mathrm{Im}(x^{1+i}) = x\sin(\ln x)$.

d) Ainsi $I = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{Im}\left(x^{1+i}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_1^2 x^{1+i}\,\mathrm{d}x\right)$.
Calculons :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^{1+i}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 f_{1+i}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2+i}x^{2+i}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2+i}\left(2^{2+i} - 1^{2+i}\right) \\
&= \frac{2-i}{5}\left[2^2\cos\left(\ln(2)\right) + 2^2 i\sin\left(\ln(2)\right) - 1^2\cos\left(\ln(1)\right) - 1^2 i\sin\left(\ln(1)\right)\right] \\
&\qquad \text{par la question précédente} \\
&= \frac{2-i}{5}\left[4\cos\left(\ln(2)\right) + 4i\sin\left(\ln(2)\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

On a alors, en prenant la partie imaginaire :

$$\boxed{I = \frac{-4\cos\left(\ln(2)\right) + 1 + 8\sin\left(\ln(2)\right)}{5}}$$