Devoir surveillé 6.

Samedi 5 mars 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
exo 86 faidherbe

Exercice 1

Soient a et b des réels tels que $a < b$, et une fonction $f : [a, b] \to [a, b]$.
On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, (x, y) \in [a, b]^2,\ x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Rappel : on dit que $x \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

On se propose de montrer que f possède un et un seul point fixe sur $[a, b]$, sans utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

1°) Justifier que f est continue sur $[a, b]$.

2°) Montrer que si f possède un point fixe, alors il est unique.

3°) On pose, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = |f(x) - x|$.
Justifier que g possède un minimum sur $[a, b]$.
Dans la suite, on notera α un élément de $[a, b]$ tel que $g(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} g$.

4°) En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in D,\ f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Partie 1 : Étude de f

1°) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction prolongée.

2°) Étudier la limite de f en 1. Qu'en déduit-on sur la courbe $\mathcal{C}$ de f ?

3°) Montrer que f est de classe C^1 sur $D \cup \{0\}$, en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

4°) Dresser le tableau de variations complet de f.

5°) Montrer que, pour tout $x \geq e$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

6°) Représenter $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé en faisant apparaître les éléments remarquables.

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

On étudie ici la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

7°) Justifier l'existence de la suite (u_n) et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.

8°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e|$.

9°) Montrer que la suite (u_n) converge vers e.

10°) Déterminer une valeur de n pour laquelle le réel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-3} près.
Indication : On pourra remarquer que $|u_0 - e| \leq 1$.

Partie 3 : Solution d'une équation différentielle non linéaire

On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre 1 non linéaire suivante :

$$(E)\ :\ -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x).$$

11°) Soit $z :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, qui ne s'annule pas. On pose $y = \dfrac{1}{z}$.
Vérifier que z est solution de (E) sur $]0,1[$ si et seulement si y est solution sur $]0,1[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (F) que l'on précisera.

12°) Résoudre (F) sur $]0,1[$ (on utilisera la méthode de la variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière).
Vérifier que les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
À quelle condition sur a, ces solutions ne s'annulent-elles pas sur $]0,1[$?

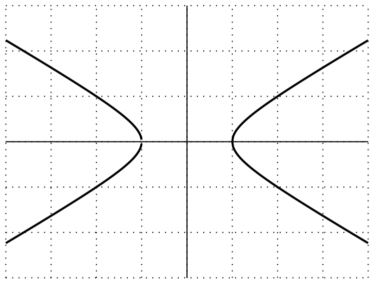
13°) En déduire les solutions de (E) sur $]0,1[$ qui ne s'annulent pas. Les exprimer à l'aide de la fonction f.
Justifier que ces fonctions se prolongent en 0 en des solutions de (E) sur $[0,1[$.

Exercice 3

L'ensemble des points (x, y) de réels tels que

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

forme une courbe que l'on appelle une *hyperbole.*



On se propose, dans cet exercice, de déterminer tous les points à coordonnées entières naturelles de cette hyperbole et montrer qu'ils forment un ensemble infini. On va utiliser une méthode matricielle.

On pose :

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

Remarque : Les éléments de $\mathcal{H}$ *sont donc des matrices colonnes.*

On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ à coordonnées entières naturelles *i.e.*

$$\mathcal{H}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ x \in \mathbb{N}, \ y \in \mathbb{N}, \ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

`Remarque: Quitte à admettre des résultats, les trois parties sont largement indépendantes.`

Partie 1 : Une première inclusion

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ X_n = A^n X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{E} = \{X_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

On notera : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où x_n et y_n sont des réels.

1°) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1}, y_{n+1} en fonction de x_n, y_n.

2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n \in \mathcal{H}^+$.
Quelle inclusion cela nous donne-t-il ?

3°) Expliciter 3 éléments de $\mathcal{H}^+$.

4°) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Remarque : Vérifiez votre calcul avant de commencer la partie 2.

Partie 2 : Détermination de $\mathcal{H}^+$

Dans cette partie, on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :
Il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Dans la suite, on note $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x+y \end{array}$. On note aussi : $B = A^{-1}$.

5°) Soit $X \in \mathcal{H}^+$ telle que $X \neq X_0$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = BX$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $y \geq 1$.

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
En déduire que : $X' \in \mathcal{H}^+$.

c) Montrer que : $\varphi(X') < \varphi(X)$.

6°) Soit $X \in \mathcal{H}_+$.
Supposons, par l'absurde, que $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n X \neq X_0$.
On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varphi(B^n X)$.
Aboutir à une contradiction. Qu'en conclut-on ?

7°) En déduire que $\mathcal{H}^+ = \mathcal{E}$.

Partie 3 : $\mathcal{H}^+$ est infini

Ainsi, d'après la question 7, l'ensemble $\mathcal{H}^+$ est $\{A^n X_0 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous allons prouver, dans cette partie, l'énoncé :

$$(*) : \qquad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq p \implies A^n X_0 \neq A^p X_0$$

Cela prouvera qu'il y a une infinité de points de l'hyperbole à coordonnées entières naturelles.

8°) Soit $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$.

9°) Justifier que P est inversible.
On ne calculera pas son inverse.

10°) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$ en fonction de P, D, P^{-1}, n.

11°) On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^k X_0 = X_0$.
Montrer qu'il existe une matrice colonne Y_0, non nulle, telle que $D^k Y_0 = Y_0$.
On ne calculera pas Y_0 de manière explicite. On l'exprimera seulement à l'aide de X_0.

12°) Aboutir à une contradiction. Qu'en déduit-on ?

13°) Démontrer l'énoncé $(*)$.