Correction du devoir surveillé 5.

Exercice 1

Partie 1 : Étude de la fonction f_n

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
Pour $x > 0$, $f_n'(x)$ est du signe de $x - 1$, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$1-n$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification de la limite en $+\infty$: $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{n}{x}\right)$.

Par croissance comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ d'où $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par somme et produit de limites.

2°) Remarquons d'abord que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(E_n) \iff f_n(x) = 0$.
Pour $n = 0$, on constate que la fonction f_0 a pour minimum 1. Elle ne s'annule donc jamais.
Donc $\boxed{(E_0) \text{ n'a pas de solution.}}$
Pour $n = 1$, on constate que f_1 a un minimum égal à 0, atteint uniquement en 1 puisque f_1 est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Donc $\boxed{(E_1) \text{ a une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ qui est } 1.}$

Partie 2 : Étude d'une suite

1°) Soit $n \geq 2$. D'après le tableau de variations de f_n, f_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$. De plus, f_n est continue sur $]0, 1[$, et $]0, 1[$ est un intervalle.
On peut donc appliquer le théorème de la bijection : f_n réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $f_n(]0, 1[) =]\displaystyle\lim_{x\to1} f_n(x), \lim_{x\to0} f_n(x)[=]1-n, +\infty[$.
Comme $n \geq 2$, on a $1 - n < 0$, donc $0 \in]1-n, +\infty[$. Donc 0 admet un unique antécédent dans $]0, 1[$ par f_n, autrement dit $\boxed{(E_n) \text{ a une unique solution dans l'intervalle }]0,1[}$.

2°) Soit $n \geq 2$. On sait que x_n est solution de (E_n), donc $x_n - \ln(x_n) = n$. Calculons :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - (n+1) = n - (n+1) = -1.$$

Ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$. Or $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ donc on a $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme f_{n+1} est décroissante sur $]0, 1[$ et que x_n et x_{n+1} sont dans cet intervalle, on en tire que $x_n > x_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{(x_n)_{n\geq2} \text{ est décroissante.}}$

3°) Comme pour tout $n \geq 2$, $x_n > 0$, la suite $(x_n)_{n\geq2}$ est minorée. Elle est de plus décroissante donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

4°) Comme pour tout $n \geq 2$, $x_n > 0$, par passage à la limite, on a $\ell \geq 0$.
Supposons qu'on ait $\ell > 0$.
Comme ln est continue en ℓ, on a $x_n - \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ln(\ell)$ qui est un réel.
Par ailleurs, pour tout $n \geq 2$, $x_n - \ln(x_n) = n$, ce qui tend vers $+\infty$. On a une contradiction par unicité de la limite.
On a donc montré par l'absurde que $\boxed{\ell = 0.}$

5°) Pour tout $n \geq 2$, $x_n - \ln(x_n) = n$ donc $x_n - n = \ln(x_n)$, d'où $e^{x_n - n} = x_n$, soit $\boxed{x_n = e^{x_n}e^{-n}.}$
On sait que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de exp en 0, $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $e^{x_n} = 1 + o(1)$.
D'où $x_n = (1 + o(1))\, e^{-n} = \boxed{e^{-n} + o(e^{-n})}$.

6°) Reprenons l'égalité $x_n = e^{x_n}e^{-n}$ et injectons le développement asymptotique de la question précédente :

$$x_n = e^{e^{-n}+o(e^{-n})}e^{-n}$$

Posons $u = e^{-n} + o(e^{-n})$. On a $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et un $o(u)$ est un $o(e^{-n})$.
On sait par ailleurs que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$. D'où :

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \left(e^{-n} + o(e^{-n})\right) + o(e^{-n})\right) e^{-n} \\ &= \left(1 + e^{-n} + o(e^{-n})\right) e^{-n} \\ &= \boxed{e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})} \end{aligned}$$

7°) **a)** Pour tout $n \geq 2$, $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} x_k - \sum_{k=2}^{n} x_k = x_{n+1} > 0$.
Donc $\boxed{(S_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$

b) Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par continuité de exp en 0, on a $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite : il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$,

$$-\frac{1}{2} \leq e^{x_n} - 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} \leq e^{x_n} \leq \frac{3}{2}$$

Multiplions l'inégalité de droite par e^{-n}, qui est bien positif :

$$\forall n \geq N,\ e^{x_n}e^{-n} \leq \frac{3}{2}e^{-n}$$

$$\boxed{\forall n \geq N,\ x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}} \text{ d'après l'égalité de la question 5}$$

c) Soit $n \geq N$. Pour tout $k \in \{N, \dots, n\}$, on a $x_k \leq \dfrac{3}{2}e^{-k}$. Sommons ces inégalités :

$$\sum_{k=N}^{n} x_k \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{3}{2}e^{-k}$$

$$\sum_{k=N}^{n} x_k \leq \frac{3}{2}\sum_{k=N}^{n} \left(e^{-1}\right)^k$$

$$\sum_{k=N}^{n} x_k \leq \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(e^{-1}\right)^k \text{ car les termes ajoutés sont positifs}$$

$$\sum_{k=N}^{n} x_k \leq \frac{3}{2}\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}} \text{ car } e^{-1} \neq 1$$

$$\sum_{k=N}^{n} x_k \leq \frac{3}{2}\frac{1}{1-e^{-1}} \text{ car } -\frac{\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}} \text{ est négatif}$$

Si $N=2$, on a donc majoré $(S_n)_{n\geq 2}$ par la constante $C = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1-e^{-1}}$.
Si $N>2$, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=2}^{N-1} x_k \ + \sum_{k=N}^{n} x_k$$
$$S_n \leq \sum_{k=2}^{N-1} x_k \ + \ C \text{ ce qui est une constante } (N \text{ est fixé})$$

Ainsi, dans tous les cas, la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est majorée. Comme elle est croissante, on en déduit qu' $\boxed{\text{elle converge.}}$

Exercice 2

1°) $f(x) = -\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{=} -\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$

On pose : $X \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. On a bien $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

De plus, $X \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ donc $X^2 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{4}$ donc un $o(X^2)$ est un $o(x^4)$ en 0.

On sait que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{=} X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$, ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)}$$

2°) Pour tout $x>0$, $f(x) = \sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\exp\left(\dfrac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\exp\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{-1}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{-1}{x}\right)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

De même,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

On pose : $X = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On a bien : $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus, $X \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $X^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ donc un $o(X^2)$ est un $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

On sait que $e^X \underset{X\to 0}{=} 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$, d'où :

$$\exp\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}-\frac{9}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On a donc : $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}-\frac{9}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{9}{8x}$.

Ainsi :

- $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc :

  $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y=x+\frac{1}{2} \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ de } f \text{ en } +\infty.}$

- Pour tout $x>0$, $-\frac{9}{8x}<0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$.

  Ainsi, $\boxed{\text{en } +\infty, \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } \mathcal{D}.}$

Exercice 3

1°) a) f est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$.

$x\in[0,1]$ donc $1-x^2\geq 0$ et $1-x^2=0 \iff x=1$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

b) On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, H_n : u_n existe et $0<u_n\leq 1$.

★ H_0 est vraie.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Ainsi, u_n existe et $0<u_n\leq 1$.
Donc, $f(u_n)$ existe et, par stricte croissance de f sur $[0,1]$, $f(0)<f(u_n)\leq f(1)$.
Donc u_{n+1} existe et $0<u_{n+1}\leq\frac{1}{3}$ donc $0<u_{n+1}\leq 1$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, u_n \text{ existe et } 0<u_n\leq 1}$.

2°) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1}=\frac{n}{1+n+n^2}.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1} &\iff n(n+1)\leq 1+n+n^2 \qquad \text{car } n+1>0\\ &\iff \underbrace{0\leq 1}_{\text{vrai}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}}$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

★ $u_0 = 1$ donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

Alors $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. De plus, ce sont deux éléments de $[0,1]$ et f est croissante sur $[0,1]$ donc $f(u_n) \leq f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Ainsi, par 2a, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$. Donc, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{1}{n+1}}$.

c) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} = \dfrac{1}{f(u_n)}$. Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}}$.

4°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

★ Pour $n = 1$: $u_0 = 1$. Or $u_1 = f(u_0)$ donc $u_1 = \dfrac{1}{3}$.

On a bien : $\dfrac{1}{u_1} = 3 \leq 2 + \dfrac{1}{1}$. Ainsi, H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

Par 3, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Donc, par H_n, $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq u_n + 1 + n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Or, par 2b, $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq (n+1) + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}}$.

5°) Soit un entier $k \geq 2$.

$\ln k - \ln(k-1) = -(\ln(k-1) - \ln k) = -\ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

Or, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

En posant $x = -\dfrac{1}{k}$, on a $x > -1$. D'où $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \leq -\dfrac{1}{k}$. Donc $\dfrac{1}{k} \leq -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

Finalement, $\boxed{\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)}$.

6°) Soit $n \geq 2$.

$\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ donc, en sommant de $k=2$ à $k=n$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1))$.

Par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) = \ln n - \ln 1 = \ln n$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n$.

Par 4, $\displaystyle\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Donc, $\displaystyle\frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln n$.

Comme les termes sont strictement positifs, il vient : $\displaystyle\frac{1}{n+2+\ln n} \leq u_n$.

D'autre part, par 2b, on sait que : $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi, puisque $n \geq 0$, $\boxed{\dfrac{n}{n+2+\ln n} \leq nu_n \leq \dfrac{n}{n+1}}$.

$\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'autre part, $\dfrac{n}{n+2+\ln n} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

Il vient : $nu_n = 1+o(1)$ *i.e.* $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Exercice 4

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = \left|\frac{i-x}{i+x}\right| = \frac{|i-x|}{|i+x|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{U}}$.

2°) Comme les images par f sont de module 1, on en déduit que 2 par exemple n'a pas d'antécédent par f : $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

3°) Soit $\theta \in \,]-\pi, \pi]$. Résolvons $f(x) = e^{i\theta}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = e^{i\theta} &\iff \frac{i-x}{i+x} = e^{i\theta} \\ &\iff i-x = e^{i\theta}(i+x) \\ &\iff x(e^{i\theta}+1) = i(1-e^{i\theta}) \end{aligned}$$

Si $e^{i\theta} = -1$, *i.e.* si $\theta = \pi$, alors $f(x) = e^{i\theta} \iff 0 = 2i$. Exclu.

$\boxed{\text{Si } e^{i\theta} = -1, \text{ l'équation n'a pas de solution.}}$

Supposons $\theta \neq \pi$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) = e^{i\theta} &\iff x = i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \qquad \text{car } 1+e^{i\theta} \neq 0 \\ &\iff x = i\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})} \\ &\iff x = i\frac{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} \\ &\iff \boxed{x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien un réel.

$\boxed{\text{Pour } \theta \neq \pi, \text{ l'équation admet une unique solution dans } \mathbb{R} : x = \tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right)}$.

4°) a) Soit $(x,x') \in \mathbb{R}^2$. Supposons $f(x) = f(x')$, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{i-x}{i+x} &= \frac{i-x'}{i+x'} \\ (i-x)(i+x') &= (i-x')(i+x) \\ -1 - ix + ix' - xx' &= -1 - ix' + ix - xx' \\ 2i(x'-x) &= 0 \\ \text{d'où } x &= x' \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est injective}}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $z \notin \mathbb{U}$ alors l'équation $f(x) = z$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (puisque $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), autrement dit z n'a pas d'antécédent par f.
- Si $z = -1$, z n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$ (cas $e^{i\theta} = -1$ dans la question 3).
- Si $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ alors z admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la question 3.

Ainsi, tout élément de $\mathbb{C}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

5°)
- Par la question 1, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$. De plus, -1 n'a pas d'antécédent donc $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
- Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ alors, par la question 3, z admet un (unique) antécédent dans $\mathbb{R}$. Donc $z \in f(\mathbb{R})$.

Finalement, $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}}$.

6°) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(x) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(x) = -1 \text{ ou } f(x) = 1 \quad \text{car d'après la question 1, } |f(x)| = 1 \\ &\iff f(x) = 1 \quad \text{car d'après la question 3, } f(x) = -1 \text{ n'a pas de solution} \\ &\iff f(x) = e^{i0} \\ &\iff x = \tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0 \text{ d'après la question 3} \end{aligned}$$

(Ou bien on re-résout : $f(x) = 1 \iff \dfrac{i-x}{i+x} = 1 \iff i - x = i + x \iff 2x = 0 \iff x = 0$.)

Donc, $\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}}$.

Exercice 5

1°) a) i. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : "$u_n \geq 0$".

- $u_0 = a \geq 0$ donc P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  $u_{n+1} = g(u_n) = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \geq 0$ car $u_n \geq 0$ et $1 + u_n^2 > 0$. Donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0}$.

Autre méthode : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \in \mathbb{R}_+$ puisque $1 + x^2 > 0$.

Ainsi, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par g.

Comme $u_0 = a \in \mathbb{R}_+$, on en tire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n^2)}{1+u_n^2} = -\dfrac{u_n^3}{1+u_n^2} \leq 0$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

iii. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, la suite est minorée. Comme elle est décroissante, elle converge. Notons ℓ sa limite.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ et que g est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de g. On a donc :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\ell}{1+\ell^2} \\ \ell(1+\ell^2) &= \ell \\ \ell + \ell^3 - \ell &= 0 \\ \ell^3 &= 0 \\ \ell &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

b) On a $v_0 = -a \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = -u_{n+1} = \frac{-u_n}{1+u_n^2} = \frac{-u_n}{1+(-u_n)^2} = g(-u_n) = g(v_n)$$

Ainsi, v est une suite récurrente associée à la fonction g, de premier terme positif. D'après la question précédente, elle converge vers 0. Donc $\boxed{u_n = -v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ également.

c)

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} &= f(u_{n+1}) \\ &= f\left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right) \\ &= f(u_n) \text{ car } f \text{ vérifie } (*) \\ &= \alpha_n \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ est constante}}$.

d) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = \alpha_n = \alpha_0 = f(u_0) = f(a)$.

On a donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Or, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que f est continue en 0, on a aussi $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

Par unicité de la limite, on a donc $f(a) = f(0)$.

Ceci est valable pour n'importe quel réel a ; $\boxed{f \text{ est donc constante sur } \mathbb{R}}$.

2°)
- D'après ce qui précède, si f est solution, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Réciproquement, si f est une fonction constante égale à un réel c sur $\mathbb{R}$, alors f est continue en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = c = f(x)$$

Donc f est bien solution.
- Conclusion : $\boxed{\text{les seules solutions sont les fonctions constantes sur } \mathbb{R}}$.