# Devoir maison 3.

*À rendre le lundi 8 novembre 2021*

## Exercice 1

Le but de l'exercice est de démontrer que $\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) \notin \mathbb{Q}$.

Nous allons raisonner par l'absurde. On note $\alpha = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$.
On suppose que $\alpha \in \mathbb{Q}$ *i.e.* $\alpha$ est un nombre rationnel.

**1°)** Montrer que $e^{i\alpha\pi} = \dfrac{1+2i\sqrt{2}}{3}$.

**2°)** En déduire que : $\exists\, q \in \mathbb{N}^*,\ (1+2i\sqrt{2})^q = 3^q$.

**3°)** Montrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ (1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$.
*On sera amené, lors de la résolution, à exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.*

**4°)** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - b_n$.
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $b_n$ uniquement.

**5°)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ n'est pas divisible par 3.

**6°)** Conclure.

## Exercice 2

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'équation $(E)$ suivante sur $\mathbb{C}$ :

$$(E) : (z^2+1)^n - (z-i)^{2n} = 0.$$

*Les deux questions sont indépendantes.*

**1°)** À l'aide du module, montrer que si $z$ est une solution de $(E)$ différente de $i$, alors $z \in \mathbb{R}$.

**2°)** Résoudre $(E)$ ; on vérifiera que les solutions différentes de $i$ sont bien réelles.