Devoir surveillé 8.

Samedi 14 mai 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle *racine carrée* de f tout endomorphisme g de E tel que

$$g^2 = f \qquad i.e. \qquad g \circ g = f$$

Les différentes parties du problème sont indépendantes entre elles.

Partie 1 : Un exemple pour commencer

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
On note f_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M_θ.

1°) Calculer, pour tous réels θ et θ', $M(\theta) \times M(\theta')$.

2°) En déduire une racine carrée de f_θ où $\theta \in \mathbb{R}$.

3°) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ d'une racine carrée de $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
Proposer alors, une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que l'endomorphisme canoniquement associé soit une racine carrée de $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.
Expliquer comment on pourrait généraliser à la dimension $2p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

4°) Que vaut, si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, le déterminant de $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$? Qu'en déduire ?

Partie 2 : Un cas particulier en dimension n puis une application pour $n = 3$

5°) On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale de la manière suivante

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

On suppose que f admet une racine carrée g : $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g^2 = f$.
On note G la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

a) Que vaut G^2 ?

b) Montrer que $DG = GD$.

c) En déduire que G est diagonale.
Indication : En notant $M = DG$ et $N = GD$, on explicitera les coefficients d'indice (i, j) de M et N pour i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

d) En déduire que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

6°) Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda.I_3)$, directement sous forme factorisée.
En déduire que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension supérieure ou égale à 1 si et seulement si λ vaut 0, 1 ou 4.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ pour chacune des 3 valeurs de λ trouvées à la question précédente.

c) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque : On ne calculera pas P^{-1}.

d) Justifier que si une matrice $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $Y^2 = D$, alors Y est diagonale.
En déduire que l'équation $Y^2 = D$ a quatre solutions que l'on notera Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4.

e) Montrer que f possède exactement quatre racines carrées, et exprimer les matrices dans la base canonique de ces quatre racines carrées, en fonction de P, P^{-1} et des Y_i (on n'effectuera pas les calculs).

Partie 3 : Un contre-exemple

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.
On note p le plus petit entier naturel non nul tel que $f^p = 0$. On a donc, $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

7°) a) Soit x un vecteur de E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$ (un tel x existe car $f^{p-1} \neq 0$).
Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $f^n = 0$.

8°) On suppose ici que E est de dimension 3.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 0$.

a) Montrer que f est nilpotent d'indice 3.

b) On souhaite montrer que f n'admet pas de racine carrée.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$.
Montrer que g est nilpotent puis conclure à une absurdité en utilisant la question 7.

Partie 4 : Un deuxième contre-exemple

Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Nous allons montrer que D n'admet pas de racine carrée.
Par l'absurde, on suppose que D admet une racine carrée T : $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X]),\ T^2 = D$

9°) a) Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$. Que vaut sa dimension ?

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(D^2)$. Que vaut sa dimension ?

10°) Justifier que T n'est pas injective.

11°) a) Justifier que $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^2)$.

b) À l'aide des questions précédentes, en déduire que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$.

12°) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}(T^n) = \mathrm{Ker}(T)$.

13°) En utilisant une valeur judicieuse de n, conclure.

Partie 5 : Racines carrées de l'endomorphisme nul

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et f désigne l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$.
On considère une racine carrée g <u>non nulle</u> de f, on a donc :

$$g \circ g = 0 \text{ et } g \neq 0.$$

On note de plus r le rang de g.

14°) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

15°) Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, g$ dans E. Justifier que $\dim F = r$.
Soit alors $(x_1, \dots, x_r)$ une base de F. Montrer que la famille $(g(x_1), \dots, g(x_r))$ est libre.
De quel sous-espace vectoriel est-ce une base ?

16°) Dans cette question, on suppose que $n = 2r$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) Justifier que la famille $(g(x_1), \dots, g(x_r), x_1, \dots, x_r)$ est une base de E, et déterminer la matrice de g dans cette base.

17°) On ne suppose plus que $n = 2r$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & I_r & \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u>

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Un jury de concours est composé de 10 membres (tous ont le même rôle au sein du jury). Ces 10 membres sont tirés au sort parmi 12 hommes et 13 femmes.

a) Combien de jurys différents peut-on former ?

b) Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?

c) Combien de jurys dont tous les membres sont du même sexe peut-on former ?

d) Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

2°) On s'intéresse maintenant uniquement au classement effectué par le jury. Il y a 500 candidats au départ, 300 filles et 200 garçons. Seuls 100 sont sélectionnés par le jury et classés, sans ex-aequo.

a) Combien y a-t-il de classements possibles ?

b) Combien y a-t-il de classements avec au moins un garçon ?

c) Combien y a-t-il de classements avec que des filles aux premières places (au moins une) puis que des garçons aux places suivantes (au moins un) ? On laissera le résultat sous la forme d'une somme.