Devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°) Calculons :

★ $u_1 = 2u_0 + 1 = \boxed{3}$

★ $u_2 = 2(u_0 + u_1) + 1 = \boxed{9}$

★ $u_3 = 2(u_0 + u_1 + u_2) + 1 = \boxed{27}$

$\boxed{\text{On conjecture : pour } n \text{ entier, on a } u_n = 3^n.}$

2°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : « $u_n = 3^n$ ».

★ **Initialisation**
$u_0 = 1 = 3^0$, donc P_0 est vraie.

★ **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons P_k vraie pour tout entier k entre 0 et n. Montrons P_{n+1}.
On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n} u_k + 1 \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} 3^k + 1 \qquad \text{par } P_0, \dots, P_n \\
&= 2\frac{1-3^{n+1}}{1-3} + 1 \qquad \text{car } 3 \neq 1 \\
&= 2\frac{3^{n+1}-1}{2} + 1 \\
&= 3^{n+1}
\end{aligned}$$

d'où P_{n+1}.

★ **Conclusion**
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n.}$

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n} u_k + 1 \\
&= 2u_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 1 \\
&= 3u_n
\end{aligned}$$

Et pour $n = 0$, on a : $u_1 = 3$ et $u_0 = 1$ donc $u_1 = 3u_0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 3, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n u_0 = \boxed{3^n}$.

Exercice 2

1°) a) $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$ comme quotient de fonctions continues.
La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par quotient $\boxed{\varphi \text{ est au moins dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.
Pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - 2x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \boxed{\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}}.$$

Étudions la dérivabilité en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{x(1+x)} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Ceci tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\varphi'(x)$ est du signe de $1 - x$ d'où :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Justifions la limite de φ en $+\infty$:
$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2°) a) On a $f = \operatorname{Arcsin} \circ \varphi$.
D'après l'étude de φ à la question précédente (en particulier d'après son tableau de variations), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \in [0,1]$. Comme le domaine de définition de Arcsin est $[-1,1]$, on en déduit que $f = \operatorname{Arcsin} \circ \varphi$ est bien $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}_+}$.
Comme φ et Arcsin sont continues sur leurs intervalles de définitions respectifs,
f est $\boxed{\text{continue sur son domaine de définition } \mathbb{R}_+}$.
On a $\varphi(0) = 0$ donc $\boxed{f(0) = \operatorname{Arcsin}(0) = 0}$.

$$\begin{cases} \varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \operatorname{Arcsin}(X) \underset{X \to 0}{\longrightarrow} \operatorname{Arcsin}(0) = 0 \text{ par continuité de Arcsin en } 0 \end{cases}$$ donc, par composition de limites, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

b) Commençons par montrer que $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Arcsin}(h)}{h} = 1$:
Comme $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$, on reconnaît la limite du taux d'accroissement de Arcsin en 0. Comme Arcsin est dérivable en 0, cette limite existe et vaut donc $\operatorname{Arcsin}'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = \boxed{1}$.
Calculons maintenant le taux d'accroissement de f en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\operatorname{Arcsin}(\varphi(x))}{x} = \frac{\operatorname{Arcsin}(\varphi(x))}{\varphi(x)} \frac{\varphi(x)}{x}$$

Or $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, donc par composition de limites, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{Arcsin}(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1$.

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{x}}$; ceci tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Finalement, on obtient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0, \text{ mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse } 0.}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \text{Arcsin}(\varphi(x))$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait que Arcsin est dérivable seulement sur $]-1,1[$.

D'après les variations de φ : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) > 0$ et $\varphi(x) = 1 \iff x = 1$.

Par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable au moins sur } \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}.}$

d) Pour tout $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \varphi'(x)\frac{1}{\sqrt{1-(\varphi(x))^2}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x}{(1+x)^2}}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2+2x-4x}{(1+x)^2}}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{1+x^2-2x}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{(1+x)}{\sqrt{(1-x)^2}} \qquad \text{car } 1+x>0 \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,1[}$, on a $1-x>0$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \boxed{\psi(x)}$.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in]1,+\infty[}$, on a $1-x<0$ donc $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(x+1)} = \boxed{-\psi(x)}$.

3°) a) La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et Arctan est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{g = \text{Arctan}\circ u \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$.

De plus, $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$ comme composée de fonctions continues.

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $\boxed{g \text{ est dérivable (au moins) sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{2}\psi(x)}.$$

b) Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = 2g'(x)$. Comme $]0,1[$ est un intervalle, il existe une constante réelle C_1 telle que :

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad f(x) = 2g(x) + C_1.$$

Comme f et g sont continues en 0, c'est encore valable en 0 : $f(0) = 2g(0) + C_1$ i.e. $0 = C_1$.
De même, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = -2g'(x)$. Comme $]1, +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante réelle C_2 telle que :

$$\forall\, x \in \,]1, +\infty[, \quad f(x) = -2g(x) + C_2.$$

Comme f et g sont continues en 1, c'est encore valable en 1 : $f(1) = -2g(1) + C_2$ i.e. $\operatorname{Arcsin}(1) = -2\operatorname{Arctan}(1) + C_2$ d'où $C_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\dfrac{\pi}{4} = \pi$.
Ainsi :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2g(x) \text{ si } x \in [0,1] \\ -2g(x) + \pi \text{ si } x \in [1, +\infty[\end{cases}}$$

Exercice 3

Partie 1 : Définition de la fonction th

1°) Les fonctions sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'annule pas (on a même, $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Ainsi, $\boxed{\text{th est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(-x) = \dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = -\operatorname{th} x$ par imparité de sh et par parité de ch.

Donc, $\boxed{\text{th est impaire.}}$

2°) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$ donc $\boxed{\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}$.

3°) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$. Ainsi, th est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de th aux bornes de $\mathbb{R}$.

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$.

Par imparité, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.

Finalement,

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$	$+$
th	$-1 \nearrow 1$

Partie 2 : Un calcul de somme

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} &= 2\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} \\
&= 2\times\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\times\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2} \\
&= 2\frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2++e^{-2x}} \\
&= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} = \mathrm{th}(2x)}$$

2°) Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Par la question précédente, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}(2u)=\dfrac{2\,\mathrm{th}\,u}{1+\mathrm{th}^2\,u}$.

Si $u\neq 0$ alors $\mathrm{th}(2u)\neq 0$ et $1+\mathrm{th}^2\,u=\dfrac{2\,\mathrm{th}(u)}{\mathrm{th}(2u)}$.

En posant $u=\dfrac{x}{2^k}$ on obtient, puisque $u\neq 0$, $1+\mathrm{th}^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right)=\dfrac{2\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$.

Donc, $\boxed{a=\dfrac{x}{2^k} \text{ et } b=\dfrac{x}{2^{k-1}} \text{ conviennent}}$.

3°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(2\frac{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln 2+\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)-\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n(x)=n\ln 2+\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)-\ln(\mathrm{th}\,x)} \qquad \text{par téléscopage}$$

Remarque : Comme le résultat était donné, on pouvait aussi faire un récurrence.

4°) a) Soit $t\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\mathrm{th}\,t}{t}=\dfrac{\mathrm{th}\,t-\mathrm{th}\,0}{t-0}$.

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction th en 0.

Comme th est dérivable en 0 et $\mathrm{th}'(0)=1-\mathrm{th}^2(0)=1$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{th}\,t}{t}=1}$.

b) Soit $x>0$ fixé. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \ln(2^n)+\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)-\ln(\mathrm{th}\,x) \\
&= \ln\left(2^n\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)-\ln(\mathrm{th}\,x) \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\times x\right)-\ln(\mathrm{th}\,x)
\end{aligned}$$

$\begin{cases} \dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \dfrac{\operatorname{th} t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$ donc, par composition de limites $\dfrac{\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Finalement, par produit, composition et somme, il vient : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \ln(\operatorname{th} x) = \ln\left(\dfrac{x}{\operatorname{th} x}\right)}$.

Exercice 4

1°) Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si k est pair, $k = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, et $i^k = (i^2)^\ell = (-1)^\ell$.

Si k est impair, $k = 2\ell + 1$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, et $i^k = i^{2\ell} i = (-1)^\ell i$.

On résume : $\boxed{\begin{cases} i^k = (-1)^{\frac{k}{2}} \text{ si } k \text{ est pair} \\ i^k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}}$.

2°) Soit $m \in \mathbb{N}$.

Si m est pair, m s'écrit : $m = 2\ell$ où $\ell \in \mathbb{N}$. Alors $\cos(m\pi) = \cos(2\ell\pi) = 1 = (-1)^m$.

Si m est impair, m s'écrit $m = 2\ell + 1$ où $\ell \in \mathbb{N}$. Alors $\cos(m\pi) = \cos(2\ell\pi + \pi) = -1 = (-1)^m$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}, \cos(m\pi) = (-1)^m}$.

3°) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + e^{i2\theta} = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)$$

$$\boxed{1 + e^{i2\theta} = e^{i\theta} 2\cos(\theta)}$$

4°) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i2\theta}\right)^k 1^{n-k} \\ \boxed{A_n(\theta) = \left(e^{i2\theta} + 1\right)^n} & \quad \text{par la formule du binôme} \\ &= \left(e^{i\theta} 2\cos(\theta)\right)^n \\ &= e^{in\theta} 2^n (\cos(\theta))^n \end{aligned}$$

Ainsi, comme $2^n(\cos(\theta))^n$ est un réel et que $\operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \cos(n\theta)$, on a $\boxed{\operatorname{Re}(A_n(\theta)) = 2^n(\cos(\theta))^n \cos(n\theta)}$.

5°)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(A_{2p}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2p} \cos\left(2p\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2p} \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}^{2p} \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^p \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Si p est impair, il s'écrit $p = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, et $\cos\left(p\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(m\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. On a donc $\operatorname{Re}\left(A_{2p}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 0$.

Si p est pair, , il s'écrit $p = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, et $\cos\left(p\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(m\pi) = (-1)^m$. On a donc $\mathrm{Re}\left(A_{2p}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = (-1)^m 2^p = (-1)^{\frac{p}{2}} 2^p$.

On résume : $\boxed{\begin{cases} \mathrm{Re}\left(A_{2p}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \text{ si } p \text{ est impair} \\ \mathrm{Re}\left(A_{2p}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = (-1)^{\frac{p}{2}} 2^p \text{ si } p \text{ est pair} \end{cases}}$.

6°) Or, par ailleurs,

$$A_{2p}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{ik\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} i^k$$

Or on sait que i^k est imaginaire pur si k est impair, et réel si k est pair. Donc

$$\mathrm{Re}\left(A_{2p}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{p} \binom{2p}{2\ell} i^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{p} \binom{2p}{2\ell} (-1)^\ell = S_p$$

Finalement, $\boxed{S_p = (-1)^{\frac{p}{2}} 2^p \text{ si } p \text{ est pair et } S_p = 0 \text{ si } p \text{ est impair}}$.

Exercice 5

1°) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+(x+3)^2} > 0$.
$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}}$.

2°) f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est un intervalle.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\dfrac{3\pi}{2}$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3\pi}{2}$,
donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
Or, $\dfrac{5\pi}{4} \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, donc $\dfrac{5\pi}{4}$ admet un unique antécédent x_0 par f.
Autrement dit $\boxed{(*) \text{ possède une unique solution } x_0 \in \mathbb{R}.}$

3°) Calculons $f(4) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(4) + \mathrm{Arctan}(7) = \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}(4) + \mathrm{Arctan}(7)$. Comme $\mathrm{Arctan}(4) < \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Arctan}(7) < \dfrac{\pi}{2}$, on en tire que $f(4) < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$.
Ainsi, $f(4) < f(x_0)$. Si on avait $4 \geq x_0$, par croissance de f, on aurait $f(4) \geq f(x_0)$: absurde.
Donc $\boxed{4 < x_0}$.

4°) Comme $1 < 2$ et que Arctan est strictement croissante, $\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}(1) < \mathrm{Arctan}(2)$. On a aussi $\mathrm{Arctan}(2) < \dfrac{\pi}{2}$ puisque Arctan est à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De même, $\dfrac{\pi}{4} < \mathrm{Arctan}(5) < \dfrac{\pi}{2}$, donc par somme $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Donc $\tan(\theta)$ est bien défini.
Calculons :

$$\tan(\theta) = \tan(\mathrm{Arctan}(2) + \mathrm{Arctan}(5)) = \frac{\tan(\mathrm{Arctan}(2)) + \tan(\mathrm{Arctan}(5))}{1 - \tan(\mathrm{Arctan}(2))\tan(\mathrm{Arctan}(5))}$$
$$= \frac{2+5}{1 - 2\times 5}$$
$$\boxed{\tan(\theta) = -\frac{7}{9}}$$

5°) $f(5) = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8) = \theta + \text{Arctan}(8)$. Or, de même qu'à la question précédente, on a $\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}(8) < \frac{\pi}{2}$, et on a vu que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ce qui donne $\frac{3\pi}{4} < f(5) < \frac{3\pi}{2}$.
Ainsi $\tan(f(5))$ existe, et :

$$\begin{aligned}
\tan(f(5)) = \tan(\theta + \text{Arctan}(8)) &= \frac{\tan(\theta) + \tan(\text{Arctan}(8))}{1 - \tan(\theta)\tan(\text{Arctan}(8))} \\
&= \frac{-\frac{7}{9} + 8}{1 + \frac{7}{9} \times 8} \\
&= \frac{\frac{-7+72}{9}}{\frac{9+56}{9}} \\
&= \frac{-7+72}{9+56} \\
&= \frac{65}{65}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(f(5)) = 1}$$

Ainsi, $\tan(f(5)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On en tire que $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \ f(5) = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Comme $f(5) \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$, la seule possibilité est $f(5) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.
Par unicité de la solution de $(*)$, on en tire que $\boxed{x_0 = 5}$.