Corrigé du devoir maison 6.

Exercice 1

1°) Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est polynomiale, elle est donc continue sur $[1, +\infty[$, qui est bien un intervalle.
De plus, f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$.
Pour $x \geq 1$, on a $x^{n-1} \geq 1$ donc $f_n'(x) \geq n - 1 > 0$.
Ainsi, f_n est est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f_n([1, +\infty[)$.
Or $f_n(1) = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $f_n([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$.
Comme $0 \in [-1, +\infty[$, 0 admet un unique antécédent x_n dans $[1, +\infty[$.
Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_n \text{ dans } [1, +\infty[.}$
Comme $f_n(1) \neq 0$, $\boxed{x_n \neq 1}$.

2°) Soit $n \geq 2$. Calculons : $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 = x_n^n x_n - x_n - 1$.
Or on sait que $x_n^n - x_n - 1 = 0$, donc $x_n^n = x_n + 1$.
Ainsi $f_{n+1}(x_n) = (x_n + 1)x_n - x_n - 1 = x_n^2 - 1$.
Comme $x_n > 1$, on en tire que $\boxed{f_{n+1}(x_n) > 0}$.

3°) Soit $n \geq 2$.
$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ donc le résultat de la question précédente peut se réécrire $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.
Comme f_{n+1} est croissante sur $[1, +\infty[$ et que x_n et x_{n+1} sont dans cet intervalle, on en déduit que : $x_n > x_{n+1}$ (si on avait $x_n \leq x_{n+1}$, la croissance de f_{n+1} donnerait $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$).
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

4°) (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.
Notons ℓ sa limite ; comme pour tout $n \geq 2$, $x_n \geq 1$, on a $\ell \geq 1$.
Par l'absurde, supposons $\ell > 1$. Montrons qu'alors $x_n^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- *Méthode 1*
  $\forall n \geq 2$, $x_n \geq \ell$ par décroissance de (x_n).
  Comme les termes sont positifs, il vient $x_n^n \geq \ell^n$ pour tout $n \geq 2$.
  Comme $\ell^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $\ell > 1$, $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration.
- *Méthode 2*
  $\forall n \geq 2$, $x_n^n = e^{n \ln(x_n)}$.
  Comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$, par continuité de ln, $\ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) > 0$.
  Par produit, on en tire que $n \ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Finalement, $x_n^n = e^{n \ln(x_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Or, pour tout $n \geq 2, x_n^n = x_n + 1$, donc on a aussi $x_n^n = x_n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell + 1$: ceci contredit l'unicité de la limite.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers 1.}}$

5°) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
x_n^n &= x_n + 1 && \text{par définition de la suite } (x_n) \\
n\ln(x_n) &= \ln(1+x_n) && \text{car les termes précédents sont strictement positifs} \\
\ln(x_n) &= \frac{\ln(1+x_n)}{n} \\
&\boxed{x_n = \exp\left(\frac{\ln(1+x_n)}{n}\right)}
\end{aligned}$$

6°) Comme $1 + x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, par continuité de ln en 2, on a $\boxed{\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)}$.

Cela s'écrit $\boxed{\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + o(1)}$ puisque $\ln(1+x_n) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7°) On a alors $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{\ln 2 + o(1)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On pose $u = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; on a $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On sait que $\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$, et ici un $o(u)$ est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc on a :

$$\begin{aligned}
x_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

8°) Commençons par :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x_n) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 + 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(2\left(1 + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Posons $u = \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; on a $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$, et ici un $o(u)$ est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
\ln(1+x_n) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On réinjecte dans l'égalité de la question 5 :

$$\begin{aligned}
x_n &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(2) + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Posons $u = \frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On sait que $\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, et ici un $o(u^2)$ est un $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\ln(2)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(2) + \ln(2)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{2x - \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - 2\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{(x+o(x))^2} \qquad \text{car } 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-x + o(x)}{1 + o(1)} \end{aligned}$$

Le numérateur $-x + o(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et dénominateur $1 + o(1)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Par quotient de limite, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.