Corrigé du devoir maison 1.

Question préliminaire : On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ par croissances comparées, et que $\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{e^X}{X}=0$ par quotient de limites.

1°) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f_k(x)=\dfrac{e^{kx}}{kx}\dfrac{kx}{1-x}=\dfrac{e^{kx}}{kx}\dfrac{k}{\frac{1}{x}-1}$.

- Cas $k>0$:

  On sait $\begin{cases}\frac{e^X}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\\ kx\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\end{cases}$, donc par composition de limites : $\dfrac{e^{kx}}{kx}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

  Comme $\dfrac{k}{\frac{1}{x}-1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-k<0$, on obtient que $\boxed{f_k(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty}$.

  On sait $\begin{cases}\frac{e^X}{X}\underset{X\to-\infty}{\longrightarrow}0\\ kx\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty\end{cases}$, donc par composition de limites : $\dfrac{e^{kx}}{kx}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$.

  Comme $\dfrac{k}{\frac{1}{x}-1}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-k\in\mathbb{R}$, on obtient que $\boxed{f_k(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0}$.

- Cas $k<0$:

  On sait $\begin{cases}\frac{e^X}{X}\underset{X\to-\infty}{\longrightarrow}0\\ kx\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty\end{cases}$, donc par composition de limites : $\dfrac{e^{kx}}{kx}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

  Comme $\dfrac{k}{\frac{1}{x}-1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-k\in\mathbb{R}$, on obtient que $\boxed{f_k(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}$.

  On sait $\begin{cases}\frac{e^X}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\\ kx\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty\end{cases}$, donc par composition de limites : $\dfrac{e^{kx}}{kx}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

  Comme $\dfrac{k}{\frac{1}{x}-1}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-k>0$, on obtient que $\boxed{f_k(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty}$.

En 1, peu importe la valeur de $k\in\mathbb{Z}^*$, $e^{kx}\underset{x\to1}{\longrightarrow}e^k>0$. Comme $\dfrac{1}{1-x}\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}+\infty$ et $\dfrac{1}{1-x}\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}-\infty$, on en tire que $\boxed{f_k(x)\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}+\infty \text{ et } f_k(x)\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}-\infty}$.

Remarque : f_k n'a pas de limite en 1.

b) $a_k=1+\dfrac{1}{k}$, et $\dfrac{1}{k}$ a le même signe que k, donc $\boxed{a_k>1 \text{ si } k>0 \text{ et } a_k<1 \text{ si } k<0}$.

c) Par quotient et composition de fonction dérivables là où elles sont définies, f_k est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$f_k'(x)=\frac{ke^{kx}(1-x)-e^{kx}(-1)}{(1-x)^2}=\frac{e^{kx}(k+1-kx)}{(1-x)^2}.$$

Comme pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $(1-x)^2>0$ et $e^{kx}>0$, $f_k'(x)$ a le signe de $k+1-kx$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\begin{aligned}k+1-kx=0&\iff kx=k+1\\&\iff x=\frac{k+1}{k}=a_k\\k+1-kx>0&\iff kx<k+1\end{aligned}$$

$$\text{Si } k>0 : k+1-kx>0\iff x<\frac{k+1}{k}$$

$$\text{Si } k<0 : k+1-kx>0\iff x>\frac{k+1}{k}$$

D'où le tableau de variation de f_k, d'après tout ce qui précède :
Si $k > 0$:

x	$-\infty$		1		a_k		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	-	
f_k	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$f_k(a_k)$	$\searrow$	$-\infty$

Si $k < 0$:

x	$-\infty$		a_k		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		-	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f_k	$+\infty$	$\searrow$	$f_k(a_k)$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

2°) a) On a $g = f_{-1}$; comme $-1 < 0$, d'après la question 1.c, g est croissante sur $[a_{-1}, 1[$.
Or $a_{-1} = 0$. Donc g est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(0) \leq g(x) \leq g(\frac{1}{2})$.
On a $g(0) = \dfrac{e^0}{1-0} = 1$ et $g(\frac{1}{2}) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$, d'où l'encadrement voulu :

$$\boxed{\forall\, x \in [0, \frac{1}{2}],\ 1 \leq g(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.}$$

b) Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} = \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x}$$
$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}}$$

c) On a donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\dfrac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + \dfrac{x^2e^{-x}}{1-x}$ i.e. $g(x) = (1+x)e^{-x} + x^2 g(x)$.
D'où, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \big((1+x)e^{-x} + x^2 g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x}$$

d) Les fonctions $u : x \mapsto 1+x$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont dérivables sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$u(x) = 1 + x \qquad u'(x) = 1$$
$$v(x) = -e^{-x} \qquad v'(x) = e^{-x}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 1.(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}}$$

e) Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, comme x^2 est positif : $x^2 \leq x^2 g(x) \leq x^2 \frac{2}{\sqrt{e}}$.

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \frac{2}{\sqrt{e}}\,\mathrm{d}x \\
\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{2}{\sqrt{e}}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{3}\frac{1}{8} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{2}{\sqrt{e}}\frac{1}{3}\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}}$$

f) En additionnant la valeur de $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ à cet encadrement, on obtient :

$$2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leq I \leq 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}} \quad \text{i.e.} \quad \frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leq I \leq 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$$

À l'aide d'une calculatrice, on trouve que $0.52 < \frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}}$ et que $2 - \frac{29}{12\sqrt{e}} < 0.54$. On a donc $0.52 < I < 0.54$.

On en tire que $-0.01 < I - 0.53 < 0.01$ i.e. $|I - 0.53| < 0.01$.

Donc $\boxed{\text{0.53 est une valeur approchée de } I \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.