Corrigé du devoir maison 4.

Exercice 1

1°) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et Arcsin est définie sur $[-1,1]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x \in D &\iff \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} \neq 0 \\ 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ |2x\sqrt{1-x^2}| \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 > x^2 \\ \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 4x^2(1-x^2) \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 0 \leq 4x^4 - 4x^2 + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 0 \leq (2x-1)^2 \text{ : toujours vrai} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble de définition } D \text{ de } f \text{ est }]-1,1[}$.

2°) D est bien centré en 0. Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= 2\operatorname{Arctan}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-(-x)^2}}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(-2x\sqrt{1-(-x)^2}\right) \\
&= -2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \text{ car Arcsin et Arctan sont impaires} \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3°) a)

- La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; par ailleurs, la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc par composition, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$. Donc $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ également par quotient.
  Comme Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est dérivable sur $]-1,1[$.
- Nous venons de voir que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$, donc $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ aussi par produit.
  Comme Arcsin est dérivable seulement sur $]-1,1[$, on résout :

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{1-x^2} = \pm 1 &\iff 4x^2(1-x^2) = 1 \\
&\iff (2x^2-1)^2 = 0 \\
&\iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi, sur $]-1,1[\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, la fonction $x\mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable et à valeurs dans $]-1,1[$, où Arcsin est dérivable. Par composition, la fonction $x\mapsto \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ est dérivable au moins sur $]-1,1[\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

- Par somme, $\boxed{f \text{ est dérivable au moins sur } D\setminus\{x_1,x_2\}}$ en notant $\boxed{x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}, x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

b) On a alors, pour tout $x\in D\setminus\{x_1,x_2\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\
&\quad -2\left(\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} \\
&= 2\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \;-\; 2\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \\
&= 2\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \;-\; 2\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{(2x^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}\right)}$$

c) Pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, $\frac{y}{|y|}=1$ si $y>0$, et $\frac{y}{|y|}=-1$ si $y<0$.

Pour $x\in\mathbb{R}, 1-2x^2>0 \iff x^2<\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit :

★ Pour $x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on a $1-2x^2>0$ d'où $1-\frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}=0$.

Ainsi : $\forall x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, $f'(x)=0$. Donc f est constante sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Comme $f(0)=2\operatorname{Arctan}(0)-\operatorname{Arcsin}(0)=0$, on a, $\boxed{\text{pour tout } x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ f(x)=0.}$

★ $\forall x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$.

Comme $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ est un intervalle, il existe une constante k telle que :

$$\forall x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\quad f(x)=4\operatorname{Arcsin}(x)+k.$$

$f(x)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\underset{x\to1}{\longrightarrow}2\times\frac{\pi}{2}-0$ par opérations sur les limites. Donc $f(x)\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}\pi$.

D'autre part, $4\operatorname{Arcsin}(x)+k\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}4\times\frac{\pi}{2}+k=2\pi+k$.

On en déduit (par unicité de la limite) : $2\pi+k=\pi$, c'est-à-dire $k=-\pi$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\ f(x)=4\operatorname{Arcsin}(x)-\pi.}$

★ $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right)$

donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arcsin}(1) = 2\times\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$. Ainsi, $\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0}$.

d) Détaillons 2 cas en utilisant l'imparité de f :

★ Comme f est nulle sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$.

★ Soit $x \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Alors $-x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.
$f(x) = -f(-x) = -(4\operatorname{Arcsin}(-x) - \pi) = -(-4\operatorname{Arcsin}(x) - \pi)$.
Donc $f(x) = 4\operatorname{Arcsin}(x) + \pi$.

On résume :

> ★ $\forall x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], f(x) = 0$.
>
> ★ $\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[, f(x) = 4\operatorname{Arcsin}(x) - \pi$
>
> ★ $\forall x \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[, f(x) = 4\operatorname{Arcsin}(x) + \pi$.

Exercice 2

1°) a) On a $uv = (z+it)(z-it) = z^2 - (it)^2 = z^2 + t^2 = 1$, puisque (z,t) est solution de (S).

On en déduit que $\boxed{u \neq 0}$ (sinon $0 = 1$) et que $\boxed{v = \frac{1}{u}}$.

b) On sait que $u^n + v^n = 2\cos(\varphi)$ puisque (z,t) vérifie (S).
Comme $v = \frac{1}{u}$, il vient : $u^n + \frac{1}{u^n} = 2\cos(\varphi)$ donc $\frac{u^{2n}+1}{u^n} = 2\cos(\varphi)$.
Puis $u^{2n} + 1 = 2\cos(\varphi)u^n$. Finalement : $(u^n)^2 - 2\cos(\varphi)u^n + 1 = 0$.
$\boxed{u^n \text{ est solution de l'équation } (E) : Z^2 - 2\cos(\varphi)Z + 1 = 0}$.

c) Soit $Z \in \mathbb{C}$. $(E) \iff (Z - e^{i\varphi})(Z - e^{-i\varphi}) = 0$.
$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les complexes } e^{i\varphi} \text{ et } e^{-i\varphi}}$.
(C'est une équation vue en cours, cela se retrouve si on l'a oublié :
Le discriminant de (E) vaut $\Delta = 4\cos^2(\varphi) - 4 = -4\sin^2(\varphi) = (2i\sin(\varphi))^2$.
Donc les solutions de (E) sont $\frac{2\cos(\varphi)+2i\sin(\varphi)}{2} = e^{i\varphi}$ et $\frac{2\cos(\varphi)-2i\sin(\varphi)}{2} = e^{-i\varphi}$.)

u^n est solution de (E) donc $u^n = e^{i\varphi}$ ou $u^n = e^{-i\varphi}$.
Supposons que $u^n = e^{i\varphi}$ alors $u^n = \left(e^{i\frac{\varphi}{n}}\right)^n$. D'où $\left(\frac{u}{e^{i\frac{\varphi}{n}}}\right)^n = 1$.
Ainsi, $\exists k \in \{0,\dots,n-1\}, \frac{u}{e^{i\frac{\varphi}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. D'où $u = e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$.
Supposons que $u^n = e^{-i\varphi}$.
Alors, par un calcul analogue, u s'écrit $e^{i\left(\frac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0,\dots,n-1\}$.
Comme $v = \frac{1}{u} = \overline{u}$ car $|u| = 1$, il vient finalement :

$$\boxed{\exists k \in \{0,\dots,n-1\}, (u,v) = \left(e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}, e^{-i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}\right) \text{ ou } (u,v) = \left(e^{i\left(\frac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)}, e^{i\left(\frac{\varphi-2k\pi}{n}\right)}\right)}.$$

d) $\begin{cases} L_1 : \ u = z + it \\ L_2 : \ v = z - it \end{cases}$ donc en effectuant $\dfrac{L_1 + L_2}{2}$ et $\dfrac{L_1 - L_2}{2}$: $\begin{cases} z = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{u-v}{2i} \end{cases}$.

Donc, dans le cas où $(u,v) = \left(e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}, e^{-i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}\right)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on obtient :

$\boxed{z = \cos\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \text{ et } t = \sin\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$.

Dans le cas où $(u,v) = \left(e^{i\left(\frac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)}, e^{i\left(\frac{\varphi-2k\pi}{n}\right)}\right)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on obtient :

$\boxed{z = \cos\left(\dfrac{-\varphi+2k\pi}{n}\right) \text{ et } t = \sin\left(\dfrac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)}$.

2°) Réciproquement,

- Supposons $z = \cos\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ et $t = \sin\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
  Alors $z + it = e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ et $z - it = e^{-i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$.
  Alors $z^2 + t^2 = (z+it)(z-it) = 1$.
  De plus, $(z+it)^n + (z-it)^n = e^{i(\varphi+2k\pi)} + e^{-i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos(\varphi)$.
  Donc (z,t) est solution de (S).
- On montre de même que si $z = \cos\left(\dfrac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)$ et $t = \sin\left(\dfrac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)$ alors (z,t) est solution de (S).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\boxed{\left\{\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \left(\cos\left(\frac{-\varphi+2k\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{-\varphi+2k\pi}{n}\right)\right) \ / \ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}}$$