TD 1. Analyse : généralités.

Exercice 1. a) Montrer que, pour tous réels x, y :

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

b) En déduire que, pour tous réels a, b, c :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Exercice 2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tous réels x et y :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Exercice 3. Simplifier, pour tous réels a et b tels que $a \geq b \geq 0$, la quantité suivante :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}.$$

Exercice 4. Montrer que l'expression $x^4 - 3x^2 + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le calculer.

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n+3)\sqrt{n+1} \leq (2n+1)\sqrt{n} + 3\sqrt{n+1}.$$

Exercice 6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 7. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$.
Montrer, sans étude de fonction, que pour tout $x \in [\sqrt{2}, 2]$, $f(x) \in [\sqrt{2}, 2]$ (on dit que l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ est stable par f).
Indication : On pourra traduire le résultat à montrer par deux inégalités à démontrer.

Exercice 8. Démontrer l'inégalité suivante : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$.

Exercice 9. Soient x et y des réels de $]-1, 1[$.
a) Montrer que $-1 < xy < 1$.
b) Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.
Indication : On pourra étudier, pour y fixé, la fonction $f_y \;:\; x \mapsto \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Exercice 10. Factoriser : $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Exercice 11. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$\text{a) } \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 1 \quad \text{b) } |2x-4| \leq |x-1| \quad \text{c) } x - 1 \leq \sqrt{x+2}$$

$$\text{d) } x - \sqrt{x} - 2 \geq 0 \quad \text{e) } \ln\frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$$

$$\text{f) } \ln|x-1| \;-\; 2\ln|x| \;+\; \ln|x+1| < 1 \quad \text{g) } 3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \quad \text{h) } x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$$

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln(x) \quad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x) \quad \text{c)} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(\ln x)^3}{x^4}$$

$$\text{d)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{e^{\sqrt{x}}} \quad \text{e)} \lim_{x\to+\infty} e^{x^2} - e^x \quad \text{f)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x . \ln(\ln x)}{x}$$

Exercice 13. On pose $f(x) = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$. Déterminer le domaine de définition de f et simplifier $f(x)$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition de f, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.

1°) $f(x) = \ln(\ln x)$

2°) $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.

3°) $f(x) = x^x$ (sur $\mathbb{R}_+^*$)

4°) $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

5°) $f(x) = x^{\sqrt{1-x^2}}$ (on exclura 0)

Exercice 15. Soit $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f, puis dresser son tableau de variations.

2°) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$. Interpréter graphiquement.

3°) Tracer la courbe de f.

Exercice 16. Pour quels réels x peut-on écrire $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$?

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\cos x = \sin x$ b) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(2x) = \cos(x) - \sin(x)$ d) $2\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 3$

e) $\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = 0$

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \leq 0$ b) $\cos x - \cos(2x) \geq 0$

Exercice 19. On pose, pour tout réel x, $f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$.

1°) Étudier la périodicité de f.

2°) Calculer $f(\pi - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3°) Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

4°) Tracer la courbe représentative de f.