Corrigé du devoir maison 11.

Partie 1 : Étude de deux applications

1°) ★ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $f(P) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$, $f(P)$ est bien un polynôme.

On a $\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$ et $\deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$, donc $P\left(\frac{X}{2}\right)$ et $P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par combinaison linéaire, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_2[X]}$.

★ Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \lambda \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \lambda f(P) + f(Q)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

2°) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$.
Donc $\boxed{\phi \text{ est linéaire}}$.

3°) $f(1) = 1$

$f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(2X+1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X$

$f(X^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4}\right) = \frac{1}{8}(2X^2 + 2X + 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2.$

Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

4°) A est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls donc A est inversible.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

5°) Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(\phi) &\iff \phi(P) = 0 \\
&\iff P(1) = 0 \\
&\iff a + b + c = 0 \\
&\iff a = -b - c \\
&\iff P = -b - c + bX + cX^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{-b-c+bX+cX^2/(b,c)\in\mathbb{R}^2\} = \{b(-1+X)+c(-1+X^2)/(b,c)\in\mathbb{R}^2\}$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}(-1+X,-1+X^2)$.
La famille $(-1+X,-1+X^2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\phi)$. De plus, les 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (-1+X,-1+X^2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\phi)}$.
On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2}$.

Autre méthode :
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\phi) &\iff \phi(P) = 0\\
&\iff P(1) = 0\\
&\iff (X-1)|P\\
&\iff \exists\, Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)Q\\
&\iff \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P = (X-1)(aX+b)\\
&\iff \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P = aX(X-1)+b(X-1)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{aX(X-1)+b(X-1)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X(X-1),X-1)$.
La famille $(X(X-1),X-1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\phi)$. De plus, les 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (X(X-1),X-1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\phi)}$.
On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2}$.

6°) $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \{0\}$ donc $\boxed{\phi \text{ n'est pas injective}}$.
$\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) \leq \dim(\mathbb{R})$ i.e. $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) \leq 1$.
Pour $P = X$, on a $P(1) = 1 \neq 0$ donc $\mathrm{Im}(\phi) \neq \{0\}$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) \geq 1$.
On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 1$ (*on aurait pu aussi utiliser le théorème du rang.*)
$\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\phi \text{ est surjective}}$.

Partie 2 : Calcul des puissances successives d'une matrice

7°) La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, donc $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, elle a 3 éléments et $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

8°) $f(P_1) = f(1) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$ donc $f(P_1) = P_1$.
Comme A est la matrice de f dans la base canonique, calculer $f(P)$ où $P = a+bX+cX^2$ revient à calculer $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

- Calcul de $f(P_2)$ où $P_2 = 1-2X$:
$\begin{pmatrix}1&\frac14&\frac18\\0&\frac12&\frac14\\0&0&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12\\-1\\0\end{pmatrix} = \dfrac12\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ donc $f(P_2) = \dfrac12 P_2$.
- Calcul de $f(P_3)$ où $P_3 = 1-6X+6X^2$:
$\begin{pmatrix}1&\frac14&\frac18\\0&\frac12&\frac14\\0&0&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac14\\-\frac32\\\frac32\end{pmatrix} = \dfrac14\begin{pmatrix}1\\-6\\6\end{pmatrix}$ donc $f(P_3) = \dfrac14 P_3$.

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac14\end{pmatrix}}$$

9°) Par lecture des coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on obtient :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

10°) $\boxed{Q \text{ est inversible}}$ car c'est une matrice de passage entre deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On pouvait ce servir de ce calcul pour justifier que Q est inversible

Ainsi $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$.

11°) $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)$.

Par une formule du changement de bases, $A = QDQ^{-1}$.

Par une récurrence élémentaire, on démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = QD^nQ^{-1}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} \\ 0 & -\frac{1}{2^{n-1}} & -\frac{6}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Calculer $f^n(P)$ revient à calculer $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

en notant :

$\boxed{\begin{cases} a_n = a + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{6 \times 4^n}\right) c \\ b_n = \dfrac{b}{2^n} + \left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n}\right) c \\ c_n = \dfrac{c}{4^n} \end{cases}}$. On a alors, $\boxed{f^n(P) = a_n + b_nX + c_nX^2}$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$\phi(f^n(P)) = \phi(a_n + b_n X + c_n X^2) = a_n + b_n + c_n$.

$$\phi(f^n(P)) = a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6 \times 4^n}\right) c.$$

Comme $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $|q| < 1$, on en déduit que : $\phi(f^n(P)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3}$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\,\mathrm{d}t = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

Donc, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \phi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$.