Devoir maison 4.

À rendre le lundi 22 novembre 2021

Exercice

Le but de cet exercice est de calculer, par deux méthodes différentes :

$$I = \int_1^2 x \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x$$

1°) *Première méthode*
Calculer I sans utiliser les nombres complexes, en commençant par un changement de variable bien choisi.

2°) *Deuxième méthode*
Rappel : les résultats sur les combinaisons linéaires de fonctions dérivables s'étendent aux fonctions à valeurs complexes, en particulier : Si une fonction à valeurs complexes φ est dérivable sur un intervalle I et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda\varphi$ est dérivable sur I et $(\lambda\varphi)' = \lambda\varphi'$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

On note alors f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

a) Montrer que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) On suppose $\alpha \neq -1$. Déterminer une primitive de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Écrire x^α sous forme algébrique pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
En déduire une valeur de α telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \sin(\ln x) = \mathrm{Im}(x^\alpha).$$

d) Déduire des questions précédentes la valeur de I.