Corrigé du devoir maison 8.

Exercice 1

Partie 1 : Premiers exemples

1°) exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{\exp \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$

2°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Elle est négative sur $]1, +\infty[$ donc si $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, alors l'intervalle I est inclus dans $]-\infty, 1[$. Montrons que $f \in \mathcal{A}(]-\infty, 1[, \mathbb{R})$, il n'y aura alors pas d'intervalle I plus grand pour lequel $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \forall\, x \in]-\infty, 1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $\forall\, x \in]-\infty, 1[,\ \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$.
- Si c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$ donc $f^{(n+1)}(x) = -n!(-n-1)(1-x)^{-n-2} = \dfrac{n!(n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{(n+1)+1}}$, donc H_{n+1} est vraie.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \geq 0$.

Donc $\boxed{f \in \mathcal{A}(]-\infty, 1[, \mathbb{R}).}$

Partie 2 : Stabilité par quelques opérations

3°) Les fonctions $f+g$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I par somme et produit.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$, donc $\boxed{f+g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.
Par la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, et tous les termes de cette somme sont positifs par hypothèse ; donc $(fg)^{(n)} \geq 0$. Donc $\boxed{fg \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

4°) **a)** Par composition, exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f sur I, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$.
On a $\varphi' = f' \times (\exp \circ f)$ donc $\boxed{\varphi' = f' \times \varphi}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée $n$ième de φ' est $\varphi^{(n+1)}$.
Appliquons par ailleurs la formule de Leibniz en voyant φ' comme le produit $f'\varphi$ (les fonctions f' et φ sont bien n fois dérivables) :

$$\begin{aligned}
(\varphi')^{(n)} &= (f'\varphi)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(n-k)} \varphi^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} \varphi^{(k)}}$$

c) On va raisonner par récurrence forte.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "$\varphi^{(n)} \geq 0$ sur I.".

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\varphi^{(0)} = \varphi = \exp \circ f \geq 0$ puisque exp est positive.
- Héredité : Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout k entre 0 et n. Soit $x \in I$.
  D'après la question précédente, $\varphi^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x)\varphi^{(k)}(x)$.
  On sait que $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ donc pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $f^{(n+1-k)}(x) \geq 0$.
  Par ailleurs, par hypothèses de récurrence, pour tout k entre 0 et n, $\varphi^{(k)}(x) \geq 0$.
  Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(x)$ est positif comme somme et produit de termes positifs, et ceci pour tout $x \in I$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On en déduit que $\boxed{\varphi \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

Partie 3 : Quelques propriétés - prolongement à gauche

5°) Supposons que $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, c'est-à-dire qu'elle est indéfiniment dérivable, donc $f^{(n)}$ aussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(f^{(n)}\right)^{(k)} = f^{(n+k)}$, et cette fonction est positive sur I puisque $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
Donc $\boxed{f^{(n)} \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})}$.

6°) Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. En particulier $f^{(0)} = f \geq 0$ sur I, donc $\boxed{f \text{ est minorée}}$. Elle est aussi dérivable et sa dérivée est positive sur l'intervalle I, donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$.

7°) a) Soit $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
D'après la question précédente, f est croissante et minorée sur $]a, b[$; d'après un théorème du cours sur les fonctions monotones, $\boxed{f \text{ admet une limite finie } \ell_0 \text{ en } a}$.

Pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq 0$, donc $\boxed{\ell_0 \geq 0}$ par passage à la limite.

b) Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, telle que $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
- f est continue sur $[a, b[$.
- f est dérivable sur $]a, b[$
- Comme $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, on sait par la question 5 que f' est également dans $\mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
  On peut donc appliquer à f' le résultat de la question précédente : $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ avec ℓ_1 réel positif.

Par le théorème de la limite de la dérivée, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$.
Comme $\ell_1 \in \mathbb{R}$, cela signifie que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell_1$. On a bien $\boxed{f'(a) \geq 0}$.
L'information $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ se réécrit $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$, donc f' est continue en a.
Comme de plus, f est de classe C^1 sur $]a, b[$ (puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$), on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a, b[}$.

c) Soit $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
D'après la question 7a, f a une limite finie positive ℓ_0 en a, donc f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = \ell_0$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: H_n : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b[$ et $f^{(n)}(a) \geq 0$.
- H_0 est vraie car f est continue sur $[a, b[$ et $f^{(0)}(a) = f(a) = \ell_0 \geq 0$.
- Supposons H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $f^{(n)}$ existe et est continue sur $[a, b[$.
  Par ailleurs, puisque $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, $f^{(n)}$ est aussi dans $\mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$ d'après la question 5.
  D'après la question 7b, $f^{(n)}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $\left(f^{(n)}\right)'(a) \geq 0$.
  Autrement dit f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b[$ et $f^{(n+1)}(a) \geq 0$.
  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[a, b[$ et $f^{(n)}(a) \geq 0$.

Ainsi f est de classe C^∞ sur $[a,b[$; et comme on sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $]a,b[$, on a maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $[a,b[$.

Autrement dit, $\boxed{f \in \mathcal{A}([a,b[,\mathbb{R}).}$

d) Avec $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}}$, on a vu que $f \in \mathcal{A}(]a,b[,\mathbb{R})$ avec $a = -\infty$ et $b = 1$. Mais elle n'est même pas prolongeable par continuité en 1 puisque $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Donc le même raisonnement ne sera pas possible pour la borne de droite.

Exercice 2

1°) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{A^2 = 3A - 2I_3}$.

2°) $A^2 = 3A - 2I_3$ donc $\dfrac{1}{2}(A^2 - 3A) = I_3$ d'où $A \times \left(\dfrac{1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3$.

On a aussi $\left(\dfrac{1}{2}(A - 3I_3)\right) \times A = I_3$.

On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - 3I_3).}$

3°) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : A^{n+1} - 2A^n = A - 2I_3$.

★ Pour $n = 0$: $A^1 - 2A^0 = A - 2I_3$ donc H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^{n+2} - 2A^{n+1} &= A \times (A^{n+1} - 2A^n) = A(A - 2I_3) \qquad \text{par } H_n \\ &= A^2 - 2A \\ &= 3A - 2I_3 - 2A = A - 2I_3 \end{aligned}$$

Donc, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} - 2A^n = A - 2I_3}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= A^{n+1} + A - 2I_3 = 2A^n + A - 2I_3 + A - 2I_3 \qquad \text{par ce qui précède} \\ &= 2(A^n + A - 2I_3) \\ &= \boxed{2G_n} \end{aligned}$$

Ainsi, (G_n) est une suite « géométrique » de matrices.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, H_n : G_n = 2^n G_0$.

★ Pour $n = 0$, $G_0 = 2^0 G_0$ donc H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
$G_{n+1} = 2G_n = 2(2^n G_0)$ par H_n donc $G_n = 2^{n+1} G_0$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, G_n = 2^n G_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $A^n = G_n - A + 2I_3$ donc $A^n = 2^n G_0 - A + 2I_3$.
Or $G_0 = A^0 + A - 2I_3$ donc $G_0 = A - I_3$.
Finalement, $A^n = 2^n(A - I_3) - A + 2I_3 = \boxed{(2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}$.

4°) a) On a $2B + C = 2A - 2I_3 + 2I_3 - A$ donc $\boxed{A = 2B + C}$.

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B$.

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = C$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : $B^n = B$ et $C^n = C$.

- C'est vrai pour $n = 1$.
- Si c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors $B^{n+1} = B^n B = BB$ par hypothèse de récurrence, donc $B^{n+1} = B$. De même $C^{n+1} = C$.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = B \text{ et } C^n = C}$.

c) Vérifions que $2B$ et C commutent :

$$2B \times C = 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \times (2B) = 2CB = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^n = (2B + C)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2B)^k C^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k B^k C^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} 2^0 B^0 C^{n-0} + \cdots + \binom{n}{n} 2^n B^n C^{n-n} \end{aligned}$$

(Comme $n \geq 1$, il y a au moins les deux termes extrêmes écrits dans la dernière ligne).
Les éventuels termes $B^k C^{n-k}$ avec $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ peuvent se réécrire, puisque $k - 1 \in \mathbb{N}$ et $n - 1 - k \in \mathbb{N}$: $B^k C^{n-k} = B^{k-1} \times BC \times C^{n-1-k}$.
Ces termes sont donc nuls puisque $BC = 0$.
Ainsi $A^n = \binom{n}{0} 2^0 B^0 C^n + \binom{n}{n} 2^n B^n C^0 = I_3 C + 2^n B I_3 = \boxed{C + 2^n B}$.
On peut vérifier qu'on retrouve la même expression qu'à la question 3 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2I_3 - A + 2^n(A - I_3) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

Complément : Pour la question 3.b, avec la première version de l'énoncé ($G_n = A^n + 2A - 2I_3$), on trouvait , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = 2A^n + 3A - 4I_3 = 2(A^n + 2A - 2I_3) - A = 2G_n - A$.
On pouvait alors faire une analogie avec les suites arithmético-géométriques de nombres :

- On commence par chercher une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = 2L - A$: $L = A$ est la solution.
- On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{G}_n = G_n - L = G_n - A$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{G}_{n+1} = G_{n+1} - A = 2G_n - A - A = 2\,(G_n - A) = 2\tilde{G}_n$.
  Une récurrence comme dans le corrigé ci-dessus montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{G}_n = 2^n \tilde{G}_0$.
  (Attention à ne pas l'affirmer sans preuve : nous ne connaissons aucun résultat sur des "suites géométriques de matrices").
  Et $\tilde{G}_0 = G_0 - A = A^0 + 2A - 2I_3 - A = A - I_3$.
- D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \tilde{G}_n + A = 2^n(A - I_3) + A$,
  puis $A^n = G_n - 2A + 2I_3 = 2^n(A - I_3) - A + 2I_3 = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.