



Universidad Nacional de Colombia
sede Manizales

Análisis numérico

Aproximación Numérica de la Ecuación de Laplace en un Cuarto de Anillo Circular

Daniel Fabián Serrano Galvis
Carlos Andrés Ordóñez Cerón

Marzo 2025

Contents

1	Introducción	2
2	Planteamiento del problema	2
2.1	Definición del problema	2
2.2	Cambio a coordenadas polares	3
3	Método numérico	4
3.1	Esquema de diferencias finitas	4
3.2	Sistema de ecuaciones	5
3.3	Forma matricial	6
3.4	Condición de monotonía	8
4	Resultados y análisis	11
4.1	Implementación del esquema numérico	11
4.2	Resultados numéricos y análisis de errores	12
4.3	Visualización y discusión	13
5	Conclusiones	14

1 Introducción

La ecuación de Laplace, dada por $\Delta u = 0$, es una ecuación diferencial en derivadas parciales de gran relevancia en física y matemáticas aplicadas. Describe fenómenos como el flujo de calor en equilibrio, el potencial eléctrico en regiones sin cargas, o la distribución de temperaturas en un medio estacionario. En este trabajo, nos enfocamos en resolver numéricamente esta ecuación en un dominio particular: un cuarto de anillo circular definido en el primer cuadrante, con condiciones de borde Dirichlet específicas. Este tipo de problemas surge en aplicaciones donde la geometría radial es importante, como en el diseño de componentes cilíndricos o en el análisis de ondas.

El objetivo principal de este trabajo es aproximar la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el dominio dado, utilizando un esquema de diferencias finitas. Para ello, primero transformaremos el problema a coordenadas polares, lo que simplifica su tratamiento numérico debido a la simetría radial del dominio (ver Sección 2). Posteriormente, en la Sección 3, describiremos el esquema numérico, derivaremos el sistema de ecuaciones resultante y analizaremos sus propiedades, como la monotonía de la matriz asociada. Finalmente, en la Sección 4, implementaremos el método y evaluaremos su precisión mediante el cálculo de errores en diferentes normas y sus órdenes de convergencia, comparándolos con la solución exacta proporcionada.

Este ejercicio no solo busca resolver un problema específico, sino también comprender los fundamentos de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, así como desarrollar habilidades prácticas en su implementación y análisis. Los resultados obtenidos permitirán evaluar la efectividad del enfoque elegido y su dependencia de parámetros como el tamaño de la discretización.

2 Planteamiento del problema

En esta sección, se presenta el problema matemático a resolver y se realiza la transformación a coordenadas polares requerida en el punto 2.1 de la tarea. Comenzamos describiendo el dominio y las ecuaciones dadas, para luego deducir su expresión en un sistema de coordenadas adecuado al dominio radial.

2.1 Definición del problema

El problema consiste en encontrar una función $u(x, y)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en dos dimensiones,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

definida en el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Este dominio corresponde a un cuarto de anillo circular en el primer cuadrante, con radio interior 1 y radio exterior 2, limitado a los ángulos entre 0 y $\pi/2$.

Las condiciones de borde Dirichlet asociadas son:

- $u(x, 0) = \ln(x)$, para $x \in [1, 2]$ (sobre el eje x),
- $u(0, y) = \ln(y)$, para $y \in [1, 2]$ (sobre el eje y),
- $u(x, y) = 0$, para $x^2 + y^2 = 1$ (borde interior),

- $u(x, y) = \ln(2)$, para $x^2 + y^2 = 4$ (borde exterior).

Además, se proporciona la solución exacta del problema como $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, que se empleará para evaluar la precisión del método numérico en la Sección 4.

2.2 Cambio a coordenadas polares

La geometría radial del dominio Ω , definida por los bordes $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, motiva el uso de coordenadas polares (r, θ) . Estas se definen mediante las relaciones:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad (2)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa la distancia al origen y $\theta = \arctan(y/x)$ el ángulo respecto al eje x positivo.

Para expresar el dominio en estas coordenadas, consideramos las restricciones de Ω :

- $x, y > 0$: Dado que $x = r \cos(\theta)$ y $y = r \sin(\theta)$ deben ser positivos, θ se restringe al primer cuadrante, es decir, $\theta \in (0, \pi/2)$.
- $1 < x^2 + y^2 < 4$: Sustituyendo, $x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r^2$, ya que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Por lo tanto, $1 < r^2 < 4$, lo que implica $1 < r < 2$ (dado que $r > 0$).

Así, el dominio Ω en coordenadas polares queda como:

$$\Omega = \{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi/2\}.$$

A continuación, transformamos la ecuación de Laplace. En coordenadas cartesianas, se tiene $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Para expresarla en términos de r y θ , consideramos $u(x, y) = u(r(x, y), \theta(x, y))$ y aplicamos la regla de la cadena. Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

donde:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos(\theta)}{r} = \cos(\theta)$,
- $\theta = \arctan(y/x)$, por lo que $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}$.

Así:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r}.$$

De manera análoga, para y :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos(\theta)}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r}.$$

Las segundas derivadas se obtienen derivando nuevamente estas expresiones y combinando términos. Tras realizar los cálculos correspondientes, se llega a la forma de la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3)$$

Transformamos ahora las condiciones de borde:

- Sobre el eje x ($y = 0$): Si $y = 0$, entonces $\sin(\theta) = 0$, $\theta = 0$, y $x = r \cos(0) = r$, con $r \in [1, 2]$. Por lo tanto, $u(r, 0) = \ln(r)$.
- Sobre el eje y ($x = 0$): Si $x = 0$, $\cos(\theta) = 0$, $\theta = \pi/2$, y $y = r \sin(\pi/2) = r$, con $r \in [1, 2]$. Por lo tanto, $u(r, \pi/2) = \ln(r)$.
- Borde interior ($x^2 + y^2 = 1$): Esto implica $r^2 = 1$, $r = 1$, y $u(1, \theta) = 0$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.
- Borde exterior ($x^2 + y^2 = 4$): Esto implica $r^2 = 4$, $r = 2$, y $u(2, \theta) = \ln(2)$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.

La solución exacta en coordenadas polares es:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(r^2) = \ln(r),$$

lo que indica que u depende únicamente de r , y por ende $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$.

El problema transformado, listo para su discretización en la Sección 3, queda expresado como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad r \in (1, 2), \quad \theta \in (0, \pi/2),$$

con las condiciones de borde especificadas anteriormente.

3 Método numérico

En esta sección, se desarrolla el esquema numérico para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares, presentada en la Sección 2. Se detalla el esquema de diferencias finitas, se deduce el sistema de ecuaciones resultante, se construye explícitamente su representación matricial y se analizan las condiciones de monotonía de la matriz, cumpliendo con los requerimientos del punto 2.2 de la tarea.

3.1 Esquema de diferencias finitas

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

definida en $\Omega = \{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi/2\}$. Para resolverla numéricamente, discretizamos el dominio en una malla rectangular:

- En la dirección radial: $r_i = 1 + ih_r$, para $i = 0, 1, \dots, N_r$, donde $h_r = (2 - 1)/N_r = 1/N_r$, siendo $r_0 = 1$ y $r_{N_r} = 2$,
- En la dirección angular: $\theta_j = jh_\theta$, para $j = 0, 1, \dots, N_\theta$, donde $h_\theta = (\pi/2)/N_\theta$, siendo $\theta_0 = 0$ y $\theta_{N_\theta} = \pi/2$.

La solución $u(r, \theta)$ se aproxima en cada nodo (r_i, θ_j) como $u_{i,j} \approx u(r_i, \theta_j)$, con $i = 0, \dots, N_r$ y $j = 0, \dots, N_\theta$.

Aproximamos las derivadas parciales con diferencias finitas centradas:

- Segunda derivada respecto a r :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_i, \theta_j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_r^2},$$

- Primera derivada respecto a r :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_i, \theta_j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r},$$

- Segunda derivada respecto a θ :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right|_{r_i, \theta_j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2}.$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2} = 0.$$

Multiplicamos por $h_r^2 h_\theta^2 r_i^2$:

$$h_\theta^2 r_i^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + h_r^2 (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0.$$

Agrupamos términos:

$$\left(h_\theta^2 r_i^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} \right) u_{i-1,j} + h_r^2 u_{i,j+1} + h_r^2 u_{i,j-1} - (2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2) u_{i,j} = 0.$$

Este esquema se aplica a los nodos interiores ($i = 1, \dots, N_r - 1$, $j = 1, \dots, N_\theta - 1$).

3.2 Sistema de ecuaciones

Cada nodo interior genera una ecuación. Las condiciones de borde son:

- $u_{0,j} = 0$, para $j = 0, \dots, N_\theta$ ($r = 1$),
- $u_{N_r,j} = \ln(2)$, para $j = 0, \dots, N_\theta$ ($r = 2$),
- $u_{i,0} = \ln(r_i)$, para $i = 0, \dots, N_r$ ($\theta = 0$),
- $u_{i,N_\theta} = \ln(r_i)$, para $i = 0, \dots, N_r$ ($\theta = \pi/2$).

Definimos coeficientes:

- $a_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$ (coeficiente de $u_{i+1,j}$),
- $b_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$ (coeficiente de $u_{i-1,j}$),
- $c_{i,j} = h_r^2$ (coeficiente de $u_{i,j+1}$),
- $d_{i,j} = h_r^2$ (coeficiente de $u_{i,j-1}$),

- $e_{i,j} = -(2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2)$ (coeficiente de $u_{i,j}$).

La ecuación general es:

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = 0.$$

En nodos cercanos a la frontera, incorporamos las condiciones. Por ejemplo:

- Para $i = 1, j = 1, \dots, N_\theta - 1$:

$$a_{1,j}u_{2,j} + b_{1,j}u_{0,j} + c_{1,j}u_{1,j+1} + d_{1,j}u_{1,j-1} + e_{1,j}u_{1,j} = 0,$$

con $u_{0,j} = 0$, simplificando a:

$$a_{1,j}u_{2,j} + c_{1,j}u_{1,j+1} + d_{1,j}u_{1,j-1} + e_{1,j}u_{1,j} = 0.$$

- Para $i = N_r - 1, j = 1, \dots, N_\theta - 1$:

$$a_{N_r-1,j}u_{N_r,j} + b_{N_r-1,j}u_{N_r-2,j} + c_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j+1} + d_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j-1} + e_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j} = 0,$$

con $u_{N_r,j} = \ln(2)$, ajustando:

$$b_{N_r-1,j}u_{N_r-2,j} + c_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j+1} + d_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j-1} + e_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j} = -a_{N_r-1,j} \ln(2).$$

3.3 Forma matricial

El sistema se expresa como $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, donde \mathbf{u} contiene las incógnitas $u_{i,j}$ en los nodos interiores ($i = 1, \dots, N_r - 1, j = 1, \dots, N_\theta - 1$), con dimensión $(N_r - 1)(N_\theta - 1)$. Ordenamos \mathbf{u} por filas:

$$\mathbf{u} = [u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,N_\theta-1}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,N_\theta-1}, \dots, u_{N_r-1,1}, u_{N_r-1,2}, \dots, u_{N_r-1,N_\theta-1}]^T.$$

La matriz A es de tamaño $(N_r - 1)(N_\theta - 1) \times (N_r - 1)(N_\theta - 1)$, y \mathbf{b} incluye los términos de las condiciones de borde.

Definimos un índice lineal k para cada nodo (i, j) :

$$k = (i - 1)(N_\theta - 1) + j,$$

donde $i = 1, \dots, N_r - 1, j = 1, \dots, N_\theta - 1$, y k va de 1 a $(N_r - 1)(N_\theta - 1)$. Cada ecuación corresponde a una fila de A . Construimos A y \mathbf{b} considerando los casos:

- **Nodos interiores** ($i = 2, \dots, N_r - 2, j = 2, \dots, N_\theta - 2$):

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = 0.$$

Índices: $u_{i,j}$ en $k = (i - 1)(N_\theta - 1) + j$, $u_{i+1,j}$ en $k + (N_\theta - 1)$, $u_{i-1,j}$ en $k - (N_\theta - 1)$, $u_{i,j+1}$ en $k + 1$, $u_{i,j-1}$ en $k - 1$. Fila k de A :

$$A_{k,k} = e_{i,j}, \quad A_{k,k+(N_\theta-1)} = a_{i,j}, \quad A_{k,k-(N_\theta-1)} = b_{i,j}, \quad A_{k,k+1} = c_{i,j}, \quad A_{k,k-1} = d_{i,j},$$

$$b_k = 0.$$

- **Fila $i = 1$, interior en θ ($j = 2, \dots, N_\theta - 2$):**

$$a_{1,j}u_{2,j} + b_{1,j}u_{0,j} + c_{1,j}u_{1,j+1} + d_{1,j}u_{1,j-1} + e_{1,j}u_{1,j} = 0,$$

con $u_{0,j} = 0$. Índices: $k = j$. Fila k :

$$A_{k,k} = e_{1,j}, \quad A_{k,k+(N_\theta-1)} = a_{1,j}, \quad A_{k,k+1} = c_{1,j}, \quad A_{k,k-1} = d_{1,j},$$

$$b_k = 0.$$

- **Fila $i = N_r - 1$, interior en θ ($j = 2, \dots, N_\theta - 2$):**

$$a_{N_r-1,j}u_{N_r,j} + b_{N_r-1,j}u_{N_r-2,j} + c_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j+1} + d_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j-1} + e_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j} = 0,$$

con $u_{N_r,j} = \ln(2)$. Índices: $k = (N_r - 2)(N_\theta - 1) + j$. Fila k :

$$A_{k,k} = e_{N_r-1,j}, \quad A_{k,k-(N_\theta-1)} = b_{N_r-1,j}, \quad A_{k,k+1} = c_{N_r-1,j}, \quad A_{k,k-1} = d_{N_r-1,j},$$

$$b_k = -a_{N_r-1,j} \ln(2).$$

- **Columna $j = 1$, interior en r ($i = 2, \dots, N_r - 2$):**

$$a_{i,1}u_{i+1,1} + b_{i,1}u_{i-1,1} + c_{i,1}u_{i,2} + d_{i,1}u_{i,0} + e_{i,1}u_{i,1} = 0,$$

con $u_{i,0} = \ln(r_i)$. Índices: $k = (i - 1)(N_\theta - 1) + 1$. Fila k :

$$A_{k,k} = e_{i,1}, \quad A_{k,k+(N_\theta-1)} = a_{i,1}, \quad A_{k,k-(N_\theta-1)} = b_{i,1}, \quad A_{k,k+1} = c_{i,1},$$

$$b_k = -d_{i,1} \ln(r_i).$$

- **Columna $j = N_\theta - 1$, interior en r ($i = 2, \dots, N_r - 2$):**

$$a_{i,N_\theta-1}u_{i+1,N_\theta-1} + b_{i,N_\theta-1}u_{i-1,N_\theta-1} + c_{i,N_\theta-1}u_{i,N_\theta} + d_{i,N_\theta-1}u_{i,N_\theta-2} + e_{i,N_\theta-1}u_{i,N_\theta-1} = 0,$$

con $u_{i,N_\theta} = \ln(r_i)$. Índices: $k = (i - 1)(N_\theta - 1) + (N_\theta - 1)$. Fila k :

$$A_{k,k} = e_{i,N_\theta-1}, \quad A_{k,k+(N_\theta-1)} = a_{i,N_\theta-1}, \quad A_{k,k-(N_\theta-1)} = b_{i,N_\theta-1}, \quad A_{k,k-1} = d_{i,N_\theta-1},$$

$$b_k = -c_{i,N_\theta-1} \ln(r_i).$$

- **Esquinas (ejemplo $i = 1, j = 1$):**

$$a_{1,1}u_{2,1} + b_{1,1}u_{0,1} + c_{1,1}u_{1,2} + d_{1,1}u_{1,0} + e_{1,1}u_{1,1} = 0,$$

con $u_{0,1} = 0$, $u_{1,0} = \ln(1 + h_r)$. Fila $k = 1$:

$$A_{1,1} = e_{1,1}, \quad A_{1,1+(N_\theta-1)} = a_{1,1}, \quad A_{1,2} = c_{1,1},$$

$$b_1 = -d_{1,1} \ln(1 + h_r).$$

La matriz A tiene una estructura de cinco diagonales. Presentamos su forma general esquematizando los bloques por filas $i = 1$ a $N_r - 1$, cada uno con $N_\theta - 1$ columnas:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & D_2 & T_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & S_3 & D_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{N_r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{N_r-1} & D_{N_r-1} \end{bmatrix},$$

donde:

- D_i es una matriz tridiagonal de tamaño $(N_\theta - 1) \times (N_\theta - 1)$:

$$D_i = \begin{bmatrix} e_{i,1} & c_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{i,2} & e_{i,2} & c_{i,2} & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{i,3} & e_{i,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{i,N_\theta-2} \\ 0 & \cdots & 0 & d_{i,N_\theta-1} & e_{i,N_\theta-1} \end{bmatrix},$$

- T_i es una matriz diagonal de tamaño $(N_\theta - 1) \times (N_\theta - 1)$ con $T_i = \text{diag}(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N_\theta-1})$,
- S_i es una matriz diagonal de tamaño $(N_\theta - 1) \times (N_\theta - 1)$ con $S_i = \text{diag}(b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,N_\theta-1})$,
- 0 representa bloques de ceros de tamaño adecuado.

El vector \mathbf{b} se construye como:

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{(N_r-1)(N_\theta-1)}]^T,$$

donde:

- $b_k = 0$ para nodos interiores ($i = 2, \dots, N_r - 2, j = 2, \dots, N_\theta - 2$),
- $b_j = -d_{1,j} \ln(1 + h_r)$ para $i = 1, j = 1$ (esquina),
- $b_j = 0$ para $i = 1, j = 2, \dots, N_\theta - 2$,
- $b_{N_\theta-1} = -c_{1,N_\theta-1} \ln(1 + h_r)$ para $i = 1, j = N_\theta - 1$,
- $b_{(i-1)(N_\theta-1)+1} = -d_{i,1} \ln(r_i)$ para $i = 2, \dots, N_r - 2, j = 1$,
- $b_{(i-1)(N_\theta-1)+N_\theta-1} = -c_{i,N_\theta-1} \ln(r_i)$ para $i = 2, \dots, N_r - 2, j = N_\theta - 1$,
- $b_{(N_r-2)(N_\theta-1)+j} = -a_{N_r-1,j} \ln(2)$ para $i = N_r - 1, j = 2, \dots, N_\theta - 2$,
- $b_{(N_r-2)(N_\theta-1)+1} = -a_{N_r-1,1} \ln(2) - d_{N_r-1,1} \ln(2)$ para $i = N_r - 1, j = 1$,
- $b_{(N_r-1)(N_\theta-1)} = -a_{N_r-1,N_\theta-1} \ln(2) - c_{N_r-1,N_\theta-1} \ln(2)$ para $i = N_r - 1, j = N_\theta - 1$.

3.4 Condición de monotonía

En esta subsección, se determina bajo qué condiciones sobre $h_r > 0$ la matriz A del sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, construida en la Subsección 3.3, es monótona, respondiendo a la pregunta planteada en la tarea. Una matriz A es monótona si es invertible y su inversa satisface $A^{-1} \geq 0$, es decir, todos sus elementos son no positivos. Para demostrar que A cumple esta propiedad, hacemos uso del siguiente resultado del álgebra lineal: una matriz es monótona si tiene elementos fuera de la diagonal no positivos, es débilmente diagonal dominante, estrictamente diagonal dominante en al menos una fila y es irreducible. A continuación, se deducen estas condiciones evaluando los signos de los coeficientes de A , su dominancia diagonal y su irreducibilidad.

Primero, examinamos los coeficientes de la matriz A , definidos en la Subsección 3.2:

- $a_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$. Como $h_\theta = \frac{\pi}{2N_\theta} > 0$ y $r_i = 1 + ih_r \in (1, 2)$, ambos términos son positivos, por lo que $a_{i,j} > 0$.

- $c_{i,j} = h_r^2 > 0$ y $d_{i,j} = h_r^2 > 0$, ya que $h_r = \frac{1}{N_r} > 0$.
- $e_{i,j} = -(2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2) < 0$, puesto que la expresión entre paréntesis es positiva.
- $b_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$. Para que $b_{i,j} \geq 0$, se requiere:

$$h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} \geq 0 \implies h_\theta^2 r_i \left(r_i - \frac{h_r}{2} \right) \geq 0.$$

Dado que $h_\theta^2 r_i > 0$, esto se cumple si:

$$r_i - \frac{h_r}{2} \geq 0 \implies r_i \geq \frac{h_r}{2}.$$

El valor mínimo de r_i en los nodos interiores es $r_1 = 1 + h_r$, y el máximo es $r_{N_r-1} = 2 - h_r$. Evaluamos la cota más restrictiva:

$$b_{i,j} = h_\theta^2 r_i \left(r_i - \frac{h_r}{2} \right).$$

Para $r_i \leq 2$, $b_{i,j} \geq 0$ si $r_i \geq \frac{h_r}{2}$. Como $r_i > 1$ y consideramos $r_i \approx 2$ como máximo:

$$2 - \frac{h_r}{2} \geq 0 \implies 2 \geq \frac{h_r}{2} \implies h_r \leq 4.$$

Si $h_r < 4$, entonces $r_i - \frac{h_r}{2} > 0$ para todo $r_i \in (1, 2)$, y $b_{i,j} > 0$. Si $h_r \geq 4$, $b_{i,j}$ podría ser negativo, pero dado que $h_r = \frac{1}{N_r} < 1$ en la discretización, $h_r < 4$ es suficiente.

Así, para $h_r < 4$, todos los elementos fuera de la diagonal $(a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j})$ son positivos, y el elemento diagonal $e_{i,j} < 0$.

A continuación, evaluamos la dominancia diagonal de A para analizar su invertibilidad:

- **Nodos interiores** ($i = 2, \dots, N_r - 2, j = 2, \dots, N_\theta - 2$):

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = 0.$$

Elementos de la fila $k = (i-1)(N_\theta - 1) + j$:

$$|e_{i,j}| = 2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2,$$

$$a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + d_{i,j} = \left(h_\theta^2 r_i^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} \right) + \left(h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2} \right) + h_r^2 + h_r^2 = 2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2 = |e_{i,j}|.$$

Por lo tanto, $|e_{i,j}| = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + d_{i,j}$, indicando dominancia débil.

- **Fila $i = 1$, interior en θ** ($j = 2, \dots, N_\theta - 2$):

$$a_{1,j}u_{2,j} + c_{1,j}u_{1,j+1} + d_{1,j}u_{1,j-1} + e_{1,j}u_{1,j} = 0,$$

con $u_{0,j} = 0$. Elementos:

$$|e_{1,j}| = 2h_\theta^2 r_1^2 + 2h_r^2, \quad a_{1,j} + c_{1,j} + d_{1,j} = h_\theta^2 r_1^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_1}{2} + h_r^2 + h_r^2 = h_\theta^2 r_1^2 + 2h_r^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_1}{2},$$

$$|e_{1,j}| - (a_{1,j} + c_{1,j} + d_{1,j}) = (2h_\theta^2 r_1^2 + 2h_r^2) - \left(h_\theta^2 r_1^2 + 2h_r^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_1}{2} \right) = h_\theta^2 r_1^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_1}{2} = b_{1,j} > 0,$$

ya que $r_1 = 1 + h_r < 2$ y $h_r < 4$. Así, $|e_{1,j}| > a_{1,j} + c_{1,j} + d_{1,j}$, indicando dominancia estricta.

- **Fila $i = N_r - 1$, interior en θ ($j = 2, \dots, N_\theta - 2$):**

$$b_{N_r-1,j}u_{N_r-2,j} + c_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j+1} + d_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j-1} + e_{N_r-1,j}u_{N_r-1,j} = -a_{N_r-1,j}\ln(2).$$

Elementos:

$$|e_{N_r-1,j}| = 2h_\theta^2 r_{N_r-1}^2 + 2h_r^2, \quad b_{N_r-1,j} + c_{N_r-1,j} + d_{N_r-1,j} = h_\theta^2 r_{N_r-1}^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_{N_r-1}}{2} + 2h_r^2,$$

$$|e_{N_r-1,j}| - (b_{N_r-1,j} + c_{N_r-1,j} + d_{N_r-1,j}) = (2h_\theta^2 r_{N_r-1}^2 + 2h_r^2) - (h_\theta^2 r_{N_r-1}^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_{N_r-1}}{2} + 2h_r^2) = h_\theta^2 r_{N_r-1}^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_{N_r-1}}{2}$$

Dominancia estricta se cumple.

Seguidamente, analizamos la irreducibilidad de A . Una matriz es irreducible si su grafo asociado es conexo. El grafo tiene vértices correspondientes a los nodos interiores (i, j) , con $i = 1, \dots, N_r - 1$, $j = 1, \dots, N_\theta - 1$, y aristas entre nodos si el coeficiente en A es no nulo. La estructura de A es:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & D_2 & T_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & S_3 & D_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{N_r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{N_r-1} & D_{N_r-1} \end{bmatrix},$$

donde D_i es tridiagonal ($e_{i,j}$ en la diagonal, $c_{i,j}$ arriba, $d_{i,j}$ abajo), $T_i = \text{diag}(a_{i,1}, \dots, a_{i,N_\theta-1})$, y $S_i = \text{diag}(b_{i,1}, \dots, b_{i,N_\theta-1})$. Para $N_r - 1 = 3$, $N_\theta - 1 = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} e_{1,1} & c_{1,1} & 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{1,2} & e_{1,2} & c_{1,2} & 0 & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{1,3} & e_{1,3} & 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & e_{2,1} & c_{2,1} & 0 & a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & d_{2,2} & e_{2,2} & c_{2,2} & 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,3} & 0 & d_{2,3} & e_{2,3} & 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{3,1} & 0 & 0 & e_{3,1} & c_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,2} & 0 & d_{3,2} & e_{3,2} & c_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & d_{3,3} & e_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Cada fila conecta:

- $A_{k,k+(N_\theta-1)} = a_{i,j} > 0$: (i, j) a $(i+1, j)$,
- $A_{k,k-(N_\theta-1)} = b_{i,j} > 0$: (i, j) a $(i-1, j)$,
- $A_{k,k+1} = c_{i,j} > 0$: (i, j) a $(i, j+1)$,
- $A_{k,k-1} = d_{i,j} > 0$: (i, j) a $(i, j-1)$.

El grafo asociado para este caso se representa gráficamente como una malla de 3×3 nodos:

En esta malla, cada nodo está conectado a sus vecinos. Por ejemplo, $(1, 1)$ se conecta a $(1, 2)$ ($c_{1,1}$), $(2, 1)$ ($a_{1,1}$), $(2, 1)$ a $(1, 1)$ ($b_{2,1}$), $(2, 2)$ ($a_{1,2}$), etc. Existe un camino entre cualquier par de nodos (e.g., $(1, 1)$ a $(3, 3)$ vía $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$), por lo que el

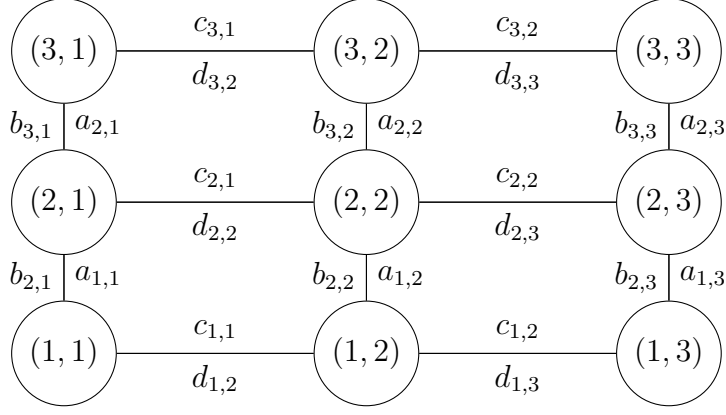


Figure 1: Grafo asociado a la matriz A para $N_r - 1 = 3$, $N_\theta - 1 = 3$. Los nodos representan los puntos interiores, y las aristas indican conexiones por los coeficientes no nulos.

grafo es conexo y A es irreducible para cualquier N_r y N_θ .

Para $h_r < 4$:

- Los elementos fuera de la diagonal son positivos.
- A es débilmente diagonal dominante en el interior ($|e_{i,j}| = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + d_{i,j}$), estrictamente dominante en las filas $i = 1$ y $i = N_r - 1$, e irreducible por la conexidad del grafo.

Por lo tanto se garantiza la monotonía de la matriz $-A$ para $h_r < 4$. Así que el sistema que usaremos para aproximar la solución será $-A\mathbf{u} = -\mathbf{b}$.

4 Resultados y análisis

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al implementar el esquema de diferencias finitas descrito en la Sección 3 para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en el dominio $\Omega = \{(x, y) : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Se evaluó el esquema en varias particiones de la malla, se calcularon los errores en las normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_h = h\|\cdot\|_2$, y se determinaron los órdenes de convergencia experimentales, cumpliendo con los requerimientos del punto 2.3 de la tarea. A continuación, se detalla la implementación, se analizan los errores y se discuten las visualizaciones.

4.1 Implementación del esquema numérico

El esquema de diferencias finitas se implementó en el lenguaje de programación Python, utilizando una malla rectangular en coordenadas polares (r, θ) . Se definieron $N_r = N_\theta = N$ puntos en las direcciones radial y angular, respectivamente, con N tomando los valores 9, 17, 33, 65 y 129. Los puntos de la malla se calcularon como $r_i = 1 + ih_r$, para $i = 0, \dots, N_r - 1$, donde $h_r = \frac{2-1}{N_r-1} = \frac{1}{N-1}$, y $\theta_j = jh_\theta$, para $j = 0, \dots, N_\theta - 1$, donde $h_\theta = \frac{\pi/2}{N_\theta-1} = \frac{\pi/2}{N-1}$. Esto discretiza el dominio $r \in [1, 2]$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

La matriz A y el vector \mathbf{b} se construyeron según las ecuaciones deducidas en la Subsección 3.3, considerando solo los nodos interiores ($i = 1, \dots, N_r - 2$, $j = 1, \dots, N_\theta - 2$).

Para optimizar el cálculo, se utilizó una representación dispersa de A mediante las bibliotecas `lil_matrix` y `csc_matrix` de SciPy. Las condiciones de borde se incorporaron en \mathbf{b} como sigue:

- $u_{0,j} = 0$ para $r = 1$,
- $u_{N_r-1,j} = \ln(2)$ para $r = 2$,
- $u_{i,0} = \ln(r_i)$ para $\theta = 0$,
- $u_{i,N_\theta-1} = \ln(r_i)$ para $\theta = \pi/2$.

El sistema lineal $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ se resolvió utilizando el método directo `spsolve` de SciPy, que aprovecha la estructura dispersa de A . La solución numérica u_{num} se reconstruyó en una malla completa de $N \times N$ puntos, incluyendo los valores en la frontera. La solución exacta, dada por $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln(r)$ en coordenadas polares, se evaluó en los mismos puntos para calcular los errores.

4.2 Resultados numéricos y análisis de errores

Para cada valor de N , se calcularon los errores entre la solución numérica u_{num} y la solución exacta u_{exact} en las normas solicitadas:

- Norma L_2 : $\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N_r N_\theta} \sum_{i=0}^{N_r-1} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} (u_{\text{num}}(r_i, \theta_j) - u_{\text{exact}}(r_i, \theta_j))^2}$,
- Norma L_∞ : $\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\|_\infty = \max_{i,j} |u_{\text{num}}(r_i, \theta_j) - u_{\text{exact}}(r_i, \theta_j)|$,
- Norma de energía: $\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\|_h = h \|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\|_2$, donde se tomó $h = h_r = \frac{1}{N-1}$ como el tamaño de paso en la dirección radial, dado que la solución depende únicamente de r .

Las tasas de convergencia experimentales se estimaron utilizando la fórmula:

$$\text{Tasa} = \frac{\log(e_{k-1}/e_k)}{\log(h_{k-1}/h_k)},$$

donde e_k es el error en una norma para la partición k , y $h_k = h_r$ es el tamaño de paso correspondiente.

Los resultados se resumen en la Tabla 1, generada directamente desde el código y adaptada a este documento.

Table 1: Errores y tasas de convergencia para diferentes tamaños de malla.

Nr	N_θ	h	L_2 Error	L_∞ Error	$\ \cdot\ _h$ Error	r_{L_2}	r_{L_∞}	$r_{\ \cdot\ _h}$
9	9	0.125000000000	0.00003914891	0.00007651278	0.00000489361	NaN	NaN	NaN
17	17	0.062500000000	0.00001052465	0.00001932953	0.00000065779	2.03367828616	2.07677258653	3.07499181359
33	33	0.031250000000	0.00000272096	0.00000485019	0.00000008503	2.06552714387	2.16328312722	3.15540045112
65	65	0.015625000000	0.00000069134	0.00000121409	0.00000001080	2.03942234782	2.08446888677	3.08442946889
129	129	0.007812500000	0.00000017421	0.00000030357	0.00000000136	2.02117462176	2.04316832443	3.04369701318

Al analizar la Tabla 1, se observa que los errores en las tres normas disminuyen a medida que N aumenta, lo cual es consistente con la refinación de la malla (h_r decrece). La norma L_2 refleja el error promedio, mostrando una reducción gradual; la norma L_∞

indica que el error máximo también disminuye; y la norma de energía $\|\cdot\|_h$, al usar $h = h_r$, amplifica la escala del error L_2 conforme h_r se hace pequeño. Las tasas de convergencia para $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ se aproximan a 2, lo que confirma el orden esperado para un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden. Para la norma $\|\cdot\|_h$, las tasas se aproximan a 3.

4.3 Visualización y discusión

Para complementar el análisis numérico, se generaron visualizaciones de la solución numérica en Python, la solución exacta y el error absoluto en representaciones bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D) para $N = 65$. Estas se presentan en las Figuras 2 y 3, respectivamente, transformando las coordenadas polares (r, θ) a cartesianas (x, y) mediante $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$.

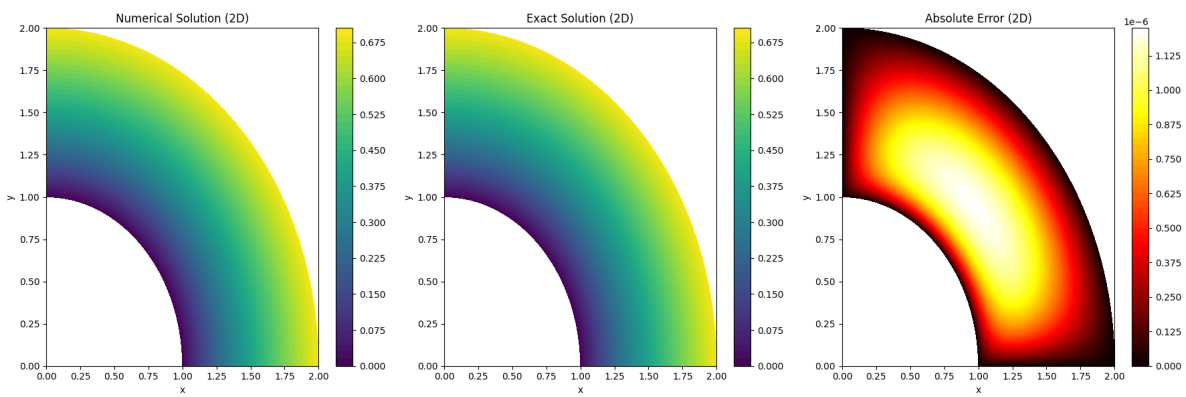


Figure 2: Solución numérica, solución exacta y error absoluto en 2D para $N = 65$.

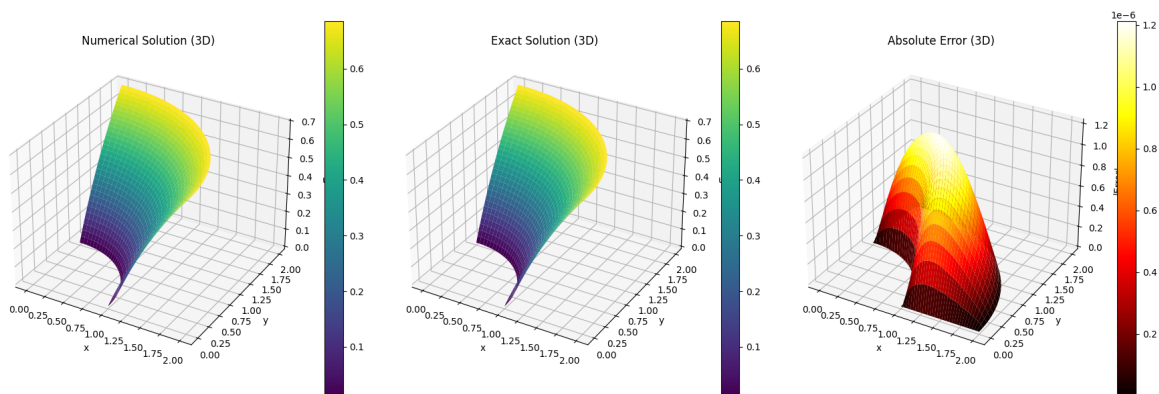


Figure 3: Solución numérica, solución exacta y error absoluto en 3D para $N = 65$.

La Figura 2 muestra contornos en el plano (x, y) . La solución numérica reproduce la dependencia radial de $u = \ln(r)$, con valores que aumentan desde 0 en $r = 1$ hasta $\ln(2)$ en $r = 2$, coincidiendo visualmente con la solución exacta. El error absoluto, representado en la tercera subfigura, indica que las mayores discrepancias se concentran hacia el centro del dominio, mientras que el error disminuye hacia los bordes.

La Figura 3 ofrece una perspectiva tridimensional, destacando la superficie suave de la solución, que refleja el carácter armónico de u . El error en 3D muestra que las mayores

discrepancias también se encuentran hacia el centro del dominio, con valores máximos consistentes con la observación en 2D, mientras que el error disminuye hacia los bordes.

En conclusión, los resultados numéricos y visuales validan la implementación del esquema, mostrando una convergencia de orden 2 en las normas L_2 y L_∞ , y un orden de convergencia de aproximadamente 3 en la norma de energía $\|\cdot\|_h$, lo cual es consistente con la definición adoptada al usar $h = h_r$.

5 Conclusiones

En esta sección, se sintetizan los resultados obtenidos al resolver numéricamente la ecuación de Laplace en un cuarto de anillo circular y se reflexiona sobre las lecciones aprendidas durante el desarrollo del proyecto.

Los resultados muestran que el esquema de diferencias finitas implementado en coordenadas polares permitió aproximar con éxito la solución $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ en el dominio $\Omega = \{(x, y) : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. La convergencia del método fue validada mediante el análisis de errores en las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$, con tasas experimentales cercanas a 2, lo que confirma el orden esperado para un esquema de diferencias finitas centradas. La norma de energía $\|\cdot\|_h$, definida con $h = h_r$, exhibió tasas de convergencia aproximadas a 3, consistentes con la dependencia adicional del factor h_r en su formulación. Las visualizaciones revelaron que el error absoluto es mayor hacia el centro del dominio, y disminuye hacia los bordes.

A lo largo de este proyecto, se adquirieron conocimientos valiosos sobre el uso de coordenadas polares para simplificar problemas con simetría radial, como la ecuación de Laplace en un anillo circular. La implementación de matrices dispersas en Python optimizó el manejo del sistema lineal, destacando la importancia de estructuras de datos eficientes en problemas numéricos de gran escala. Además, el cálculo de errores y tasas de convergencia reforzó la comprensión de la relación entre el refinamiento de la malla y la precisión del método.

Este trabajo demostró la efectividad del esquema de diferencias finitas para resolver la ecuación de Laplace en un dominio no trivial, destacando la importancia de la elección de coordenadas y el análisis numérico para validar las aproximaciones.

References

- [1] M. Acosta, C. R. de Coss. Solución numérica de ecuaciones diferenciales unidimensionales por el método de diferencias finitas. *Ingeniería*, 2016.
- [2] David F. Griffiths and Desmond J. Higham. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 1 edition, 2010.
- [3] H.B. Keller. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2018.