Aproximación Numérica de la Ecuación de Laplace en un Cuarto de Anillo Circular

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

Daniel Fabian Serrano Galvis
Carlos Andrés Ordóñez Cerón

Introducción

La ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$, es una ecuación diferencial clave en física y matemáticas aplicadas, modelando fenómenos como el flujo de calor en equilibrio, el potencial eléctrico y la distribución de temperaturas. En este trabajo, se resuelve numéricamente en un cuarto de anillo circular en el primer cuadrante ($1 < x^2 + y^2 < 4$, $x, y > 0$). Utilizamos un esquema de diferencias finitas en coordenadas polares para aproximar $u(x, y)$, evaluando la precisión del método frente a la solución exacta y analizando su convergencia numérica.

Definición del Problema

Resolver $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, con condiciones de borde Dirichlet:

- $u(x, 0) = \ln(x)$, $x \in [1, 2]$,
- $u(0, y) = \ln(y)$, $y \in [1, 2]$,
- $u(x, y) = 0$, en $x^2 + y^2 = 1$,
- $u(x, y) = \ln(2)$, en $x^2 + y^2 = 4$.

La solución exacta es $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

Método Numérico

Cambio a coordenadas polares: Se transforma el problema a coordenadas polares (r, θ) con $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, definiendo $\Omega = \{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi/2\}$. La ecuación de Laplace se convierte en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Y las condiciones de borde:

- $u(r, 0) = \ln(r), \quad r \in [1, 2]$,
- $u(r, \pi/2) = \ln(r), \quad r \in [1, 2]$.
- $u(1, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi/2]$,
- $u(2, \theta) = \ln(2), \quad \theta \in [0, \pi/2]$.

Esquema de diferencias finitas: Se discretiza en una malla $r_i = 1 + ih_r$, $\theta_j = jh_\theta$, con $h_r = 1/N_r$, $h_\theta = \pi/(2N_\theta)$, $i = 0, \ldots, N_r$, $j = 0, \ldots, N_\theta$. Las derivadas se aproximan mediante diferencias centradas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2}.$$

Sistema de ecuaciones: Sustituyendo en la ecuación, para nodos interiores ($i = 1, \ldots, N_r - 1$, $j = 1, \ldots, N_\theta - 1$), se obtiene:

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = 0,$$

donde $a_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 + \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$, $b_{i,j} = h_\theta^2 r_i^2 - \frac{h_r h_\theta^2 r_i}{2}$, $c_{i,j} = d_{i,j} = h_r^2$, $e_{i,j} = -(2h_\theta^2 r_i^2 + 2h_r^2)$, ajustado por condiciones de borde.

Sistema matricial: El sistema se expresa como $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{u}$ las incógnitas interiores y A una matriz de cinco diagonales:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & D_2 & T_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & S_3 & D_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{N_r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{N_r-1} & D_{N_r-1} \end{bmatrix},$$

donde D_i es tridiagonal de tamaño $(N_\theta - 1) \times (N_\theta - 1)$:

$$D_i = \begin{bmatrix} e_{i,1} & c_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{i,2} & e_{i,2} & c_{i,2} & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{i,3} & e_{i,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{i,N_\theta-2} \\ 0 & \cdots & 0 & d_{i,N_\theta-1} & e_{i,N_\theta-1} \end{bmatrix},$$

$T_i = \operatorname{diag}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,N_\theta-1})$, $S_i = \operatorname{diag}(b_{i,1}, \ldots, b_{i,N_\theta-1})$. El vector $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_{(N_r-1)(N_\theta-1)}]^T$ incorpora las condiciones de borde en los nodos correspondientes a nodos exteriores, mientras que es 0 en los nodos interiores. Por otro lado, las incógnitas a encontrar son $u = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,N_\Theta-1} & \ldots & u_{N_r-1,1} & u_{N_r-1,2} & \ldots & u_{N_r-1,N_\Theta-1} \end{bmatrix}$ Finalmente multiplicando por -1, el sistema se reformula como $-A\mathbf{u} = -\mathbf{b}$. El sistema a resolver es $\mathbf{u} = (-A)^{-1}(-\mathbf{b})$, y en la siguiente sección se demostrará que $-A$ es monótona.

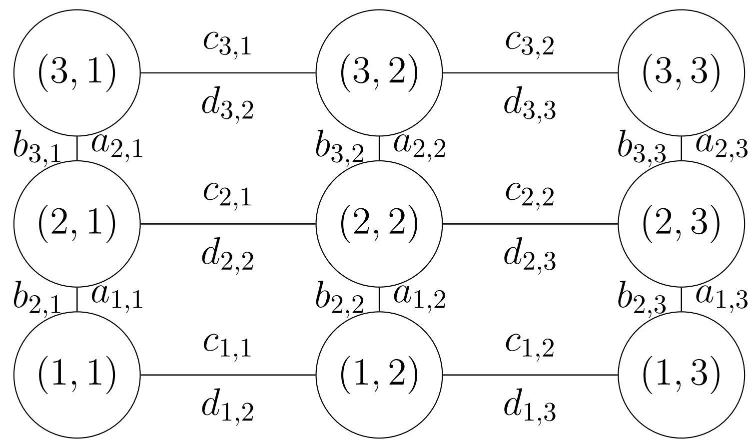
Condición de Monotonía

Se demuestra que $-A$ es monótona usando el Teorema 2: $-A$ debe ser una matriz L irreducible, débilmente diagonal dominante y estrictamente diagonal dominante en alguna fila.

- **Propiedades de $-A$:** Dado que A tiene $e_{i,j} < 0$, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \geq 0$: Elementos de $-A$: $-e_{i,j} > 0$ (diagonal), $-a_{i,j}, -b_{i,j}, -c_{i,j}, -d_{i,j} \leq 0$ (fuera de diagonal).
- **Dominancia:** Para nodos interiores, $|-e_{i,j}| = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + d_{i,j}$ (débil); para $i = 1$ y $i = N_r - 1$, $|-e_{i,j}| > \sum |-a_{i,j} - b_{i,j} - c_{i,j} - d_{i,j}|$ (estricta).
- **Irreducibilidad:** El grafo de $-A$ es conexo, idéntico al de A. Ejemplo con $N_r - 1 = N_\theta - 1 = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} e_{1,1} & c_{1,1} & 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{1,2} & e_{1,2} & c_{1,2} & 0 & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{1,3} & e_{1,3} & 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & e_{2,1} & c_{2,1} & 0 & a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & d_{2,2} & e_{2,2} & c_{2,2} & 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,3} & 0 & d_{2,3} & e_{2,3} & 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{3,1} & 0 & 0 & e_{3,1} & c_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,2} & 0 & d_{3,2} & e_{3,2} & c_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & d_{3,3} & e_{3,3} \end{bmatrix},$$

con conexiones: (i, j) a $(i+1, j)$ ($a_{i,j}$), $(i-1, j)$ ($b_{i,j}$), $(i, j+1)$ ($c_{i,j}$), $(i, j-1)$ ($d_{i,j}$). El grafo asociado (malla 3×3) es:



El grafo es conexo, confirmando que A es monótona para $h_r < 4$.

Resultados y Análisis

Descripción general: Se implementó un esquema de diferencias finitas en coordenadas polares para resolver numéricamente la ecuación de Laplace en $\Omega = \{(x, y) : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. La solución u_{num} se comparó con la exacta $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, evaluando errores y convergencia en varias normas.

Implementación del esquema numérico: En Python, se discretizó el dominio en una malla (r, θ) con $N_r = N_\theta = N$ ($N = 9, 17, 33, 65, 129$), usando $h_r = 1/(N - 1)$, $h_\theta = \pi/(2(N - 1))$. La matriz A se construyó como dispersa con SciPy (lil_matrix y csr_matrix), y el sistema $-A\mathbf{u} = -\mathbf{b}$ se resolvió con un método directo (spsolve), incorporando las condiciones de borde.

Resultados numéricos y análisis de errores: Se calcularon errores en normas L_2, L_∞, y energía ($\|\cdot\|_h = h_r\|\cdot\|_2$), con tasas de convergencia estimadas como $\log(e_{k-1}/e_k)/\log(h_{k-1}/h_k)$. Resultados en la tabla siguiente:

Nr	N_θ	h	L_2 Error	L_∞ Error	$\|\cdot\|_h$ Error	r_{L_2}	r_{L_∞}	$r_{\|\cdot\|_h}$
9	9	1.25×10^{-1}	3.914891×10^{-5}	7.651278×10^{-5}	4.89361×10^{-6}	NaN	NaN	NaN
17	17	6.25×10^{-2}	1.052465×10^{-5}	1.932953×10^{-5}	6.5779×10^{-7}	2.0336	2.0767	3.0749
33	33	3.125×10^{-2}	2.72096×10^{-6}	4.85019×10^{-6}	8.503×10^{-8}	2.0655	2.1632	3.1554
65	65	1.5625×10^{-2}	6.9134×10^{-7}	1.21409×10^{-6}	1.08×10^{-8}	2.0394	2.0844	3.0844
129	129	7.8125×10^{-3}	1.7421×10^{-7}	3.0357×10^{-7}	1.36×10^{-9}	2.0211	2.0431	3.0436

Los errores disminuyen con N, con tasas de convergencia ≈ 2 para L_2 y L_∞ (esperado para diferencias centradas de orden 2), y ≈ 3 para $\|\cdot\|_h$ por el factor h_r.

Visualización: Se generaron mapas de contorno 2D para $N = 65$, transformando (r, θ) a (x, y), mostrando la solución numérica (u_{num}), la solución exacta (u_{exact}), y el error absoluto (Figuras 1-3).

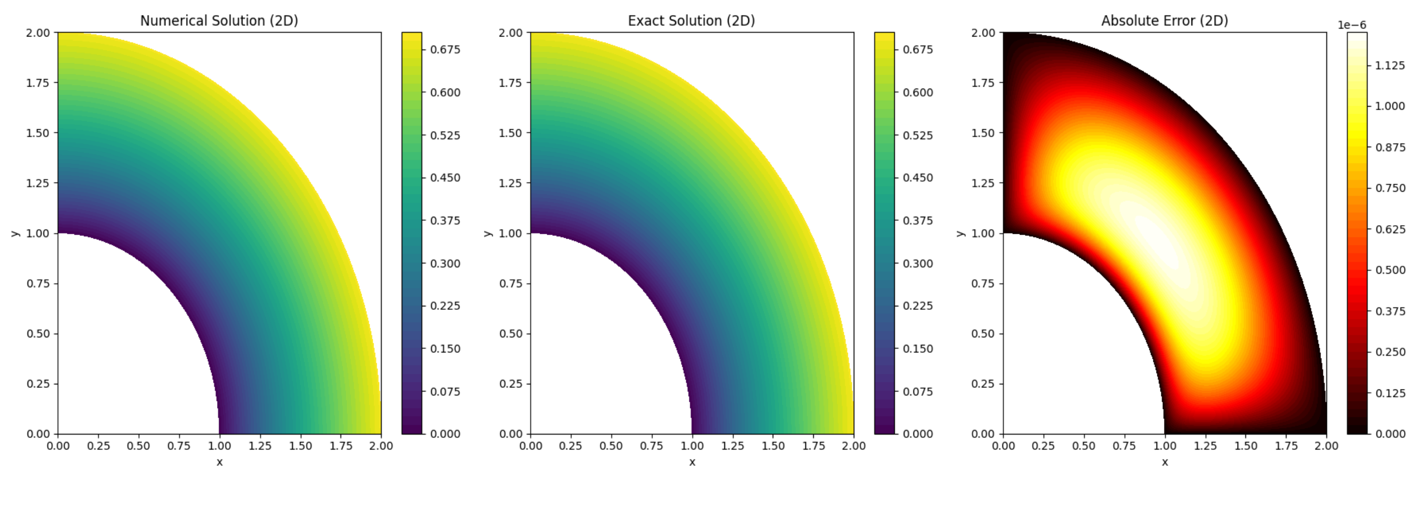


Figure 1. Soluciones 2D: numérica, exacta y error absoluto.

Conclusiones

El esquema de diferencias finitas en coordenadas polares aproximó con éxito la ecuación de Laplace, con convergencia de orden 2 en L_2 y L_∞, y 3 en $\|\cdot\|_h$. Los errores se concentran cerca de el centro, validando el método para dominios radiales. Este trabajo refuerza la utilidad de métodos numéricos en problemas aplicados.