

1 Direkte Beweise (10 P) Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Übersetzen Sie außerdem Aussagen, die ausformuliert sind, in formale mathematische Aussagen und umgekehrt.

- a) (2 P) Für alle reellen Zahlen x , die größer als 1 sind, ist $6x + 3$ größer als $3x + 6$.
- b) (2 P) Das Quadrat aller geraden natürlichen Zahlen ist wieder gerade.
- c) (2 P) Alice ist 16 Jahre alt. Damit ist Alice genau doppelt so alt, wie Bob war, als Alice so alt war, wie es Bob jetzt ist. Bob ist 12 Jahre alt.
- d) (2 P) $\forall k, m \in \mathbb{N}: k + m \leq k \times m \implies k \geq 2 \wedge m \geq 2$
- e) (2 P) $\forall p, q \in \mathbb{R}: (\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + px + q > 0) \iff \left(\frac{p^2}{4} < q\right)$

Hinweise Für b) benutzen Sie die folgende Definition: $n \in \mathbb{N}$ heißt gerade, wenn es ein $n' \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 2n'$. Hier noch eine grobe Erläuterung der (möglicherweise) unbekannten Symbole (hierbei sind A und B logische Aussagen)

- $A \wedge B$: logisches UND; ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind
- $A \implies B$: Implikation; aus der Wahrheit von Aussage A folgt die Wahrheit von Aussage B
- $A \iff B$: Äquivalenz; aus der Wahrheit von A folgt die Wahrheit von B und aus der Wahrheit von B folgt die Wahrheit von A . Beweist man häufig, indem man die beiden Aussagen $A \implies B$ und $B \implies A$ zeigt.

Formal exakt werden diese Begriffe im mathematischen Teilgebiet der Aussagenlogik behandelt.

Beispiel

Beweisen Sie, dass die Summe zweier gerader Zahlen wieder gerade ist.

Formal: $\forall m, n \in \mathbb{N}; m, n \text{ gerade} \implies (m + n) \text{ gerade}$.

Beweis: Da m und n gerade sind existieren lt. Definition $m', n' \in \mathbb{N}$, sodass $m = 2m'$ und $n = 2n'$. Damit folgt, dass $m + n$ gerade ist, da

$$m + n = 2m' + 2n' = 2(m' + n').$$

Den selben Beweis kann man mit weniger Prosa wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} m, n \text{ gerade} &\iff \exists m', n' \in \mathbb{N}: m = 2m' \wedge n = 2n' \\ &\implies m + n = 2(m' + n') \\ &\implies (m + n) \text{ gerade} \end{aligned}$$

2 Euklidisches Skalarprodukt (13 P) In der Vorlesung wurde das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n definiert durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

- a) (4 P) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist, d.h. die drei Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt sind (siehe Vorlesung 1.5.1).
- b) (3 P) Berechnen Sie $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$ und $\|\mathbf{v}\|$ für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ die induzierte Norm.

- c) (2 P) Finden Sie alle Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, die mit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$ haben.
- d) (4 P) Welche der folgenden Beispiele definiert ein Skalarprodukt auf V ? Überprüfen Sie jeweils die Bedingungen an ein Skalarprodukt.
- $V = \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 5u_3v_3$
 - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_2v_2 - u_1v_1$
 - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2$
 - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_1 + u_2v_2$

3 Skalarprodukt & Winkel (7 P) Der Kosinussatz, welcher Ihnen vielleicht aus der Schule bekannt ist, stellt eine Beziehung in einem Dreieck zwischen den Seiten a, b, c und dem der Seite c gegenüberliegenden Winkel φ her. Er lautet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

- a) (4 P) Leiten Sie diese Beziehung her, dabei soll Ihnen die Skizze als Inspiration dienen.
- b) (2 P) Benutzen Sie den Kosinussatz um für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgendes zu zeigen: Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Hierbei bezeichnet $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ den von \mathbf{u} und \mathbf{v} aufgespannten Winkel.

- c) (1 P) Zeigen Sie, dass zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

