Wintersemester 2015/16 Blatt 2, Abgabe 3.11.2015 12:00

## 1 Axiome des Vektorraums (10 P)

a) (5 P) Sei  $\mathcal{F} = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$  die Menge der reellen Funktionen. Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{F}, +, \times)$  einen Vektorraum bildet, wobei Addition und Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  für  $f, g \in \mathcal{F}$  punktweise erklärt wird

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x). \tag{*}$$

b) (3 P) Die Menge der Polynome vom Grad n ist die Menge aller Funktionen, die sich als Summe der Potenzen  $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$  der Variablen x mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \ldots a_n$  schreiben lassen,

$$\mathcal{P}_n = \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}.$$

Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}_n, +, \times)$  ein Untervektorraum von  $\mathcal{F}$  ist. Hierbei sind + und  $\times$  wie in (\*) definiert.

- c) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$  ( $k = 0, \ldots, n$ ) eine Basis für  $\mathcal{P}_n$  sind. Was schlussfolgern Sie für die Dimension von  $\mathcal{P}_n$ ?
- **d)** (2 P) Betrachte  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in \mathcal{P}_n$  mit  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ . Berechnen Sie explizit die Koeffizienten von f + g und  $\lambda \times f$  bezüglich der  $p_k$ .

**Hinweis** Überlegen Sie sich bei jedem Beweisschritt, welche Annahmen Sie verwenden dürfen – Aufgaben wie 1a) erscheinen ohne die nötige Sorgfalt oft trivialer als sie eigentlich sind. Machen Sie sich klar, dass in (\*) jeweils zwei verschiedene "+" und "ד auf der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen.

Für c): Induktion nach n. Welcher Koeffizient bestimmt das Verhalten für  $x \to \infty$ ? Für die präzise Formulierung benötigen Sie den Grenzwertbegriff aus der Schule oder dem Vorkurs.

**2** Linearkombination und lineare Unabhängigkeit (8 P) Gegeben sind die Komponenten  $\mathbf{x}$ ,... von Vektoren  $\vec{x}$ ,... bezüglich einer Basis des  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (4P) Prüfen Sie, ob die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  linear unabhängig sind und begründen Sie, ob diese eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.
- **b)** (4 P) Drücken Sie die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  jeweils als Linearkombination von  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  aus.

3 Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis (7P) Gegeben seien zwei Basen  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  und  $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$  des dreidimensionalen Vektorraums V. Damit lässt sich jedes  $\vec{v} \in V$  sowohl bezüglich  $\mathcal{E}$  als auch bezüglich  $\mathcal{F}$  darstellen:

$$\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = \tilde{v}_1 \vec{f}_1 + \tilde{v}_2 \vec{f}_2 + \tilde{v}_3 \vec{f}_3. \tag{+}$$

Die Wahl der Basis deuten wir in der Komponentenschreibweise mittels eines zusätzlichen obenstehenden Index an, d.h.

$$\mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}$$

Für die Beziehung zwischen den beiden Basen gilt

$$\vec{f_1} = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad \vec{f_2} = e_1 + e_3, \quad \vec{f_3} = -e_1 + e_2.$$

- a) (4P) Geben Sie die Komponenten  $\mathbf{e}_i^{\mathcal{E}}$  der Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  (i=1,2,3) sowie die Komponenten  $\mathbf{f}_i^{\mathcal{E}}$  der Basisvektoren  $\vec{f}_i$  (i=1,2,3) bezüglich der Basis  $\mathcal{E}$  an.
- b) (3 P) Drücken Sie die Komponenten eines beliebigen Vektors  $\mathbf{v}^{\mathcal{E}}$  mithilfe der Komponenten  $\mathbf{v}^{\mathcal{F}}$  aus. Mit anderen Worten: angenommen Sie kennen die Komponenten  $\tilde{v}_i$  in (+), finden Sie die zugehörigen Komponenten  $v_i$ .
- **4 Kräftezerlegung (5 P)** Eine Kugel mit Masse m rollt eine geneigte Ebene mit Steigungswinkel  $\varphi$  hinab. Es wirkt die Gewichtskraft  $F_{\rm G} = m \times g$ , wobei g die Fallbeschleunigung bezeichnet (die Richtung der Gewichtskraft entnehmen Sie bitte der Skizze). Berechnen Sie daraus die Kraft  $\vec{F}_{\parallel}$ , die entlang der Bewegungsrichtung wirkt, und die Kraft  $\vec{F}_{\perp}$ , die senkrecht auf die Auflage wirkt.

