Mathematische Methoden

Wintersemester 2015/16

Blatt 12, Abgabe 26.1.2016

Institut für Theoretische Physik

Johannes Berg, Daniel Suess

1 Gradient (6 P)

a) (2 P) An welchen Punkten ist der Gradient von $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ senkrecht zur x-Achse? Wo ist er gleich 0?

b) (2 P) Berechnen Sie $\nabla f(r)$ für $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und eine einmal stetig differenzierbare Funktion f.

c) (2 P) Gegeben sei das Potential $\phi(x,y,z) = \frac{1}{r}$ für $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. In welchen Raumpunkten $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\nabla\phi(\mathbf{r})\| = 1$?

2 Gradientenfelder I (10 P) In der Vorlesung haben Sie den Begriff des *Gradientenfeldes* kennengelernt. Ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^N$ ist eine Funktion $\mathbf{V}\colon \mathcal{D}(\mathbf{V}) \to \mathbb{R}^N$, für die es ein *Potential* $\phi\colon \mathcal{D}(\mathbf{V}) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}). \qquad (*)$$

Hierbei bezeichnen $\mathcal{D}(\mathbf{V}) \subset \mathbb{R}^N$ den Definitionsbereich der Funktion V. Eine notwendige Bedingung, dass $\mathbf{V}$ ein Gradientenfeld ist sind die sogenannten Integrabilitätsbedingungen (Formel (5.18) im Skript für $N = 3$)

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (i,j = 1,\ldots,N).$$

a) (1 P) Zeigen Sie, dass jedes Gradientenfeld die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

b) (4 P) Berechnen Sie die Vektorfelder der folgenden Potentiale

$$\phi_1(x,y,z) = x^2y + z\cos xy, \qquad \phi_2(x,y,z) = r^n \text{ mit } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c) (5 P) Berechnen Sie jeweils ein Potential für die nachfolgenden Gradientenfelder

$$\mathbf{V}_1(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 6x\cos y \\ -3x^2\sin y + 2y \end{pmatrix}.$$

Hinweis Zu c): Schreiben Sie Gleichung $(*)$ komponentenweise auf und lösen Sie nach ϕ auf, indem Sie über die Variable integrieren, nach der ϕ abgeleitet wird. Beachten Sie, dass Integration über eine Variable eine Konstante erzeugt, die u.U. von den anderen Variablen abhängt.

3 Gradientenfelder II (14 P) Als nächstes betrachten wir eine wichtige Eigenschaft von Gradientenfeldern. Ein Vektorfeld $\mathbf{V}\colon \mathcal{D}(\mathbf{V}) \to \mathbb{R}^N$ heißt konservativ, wenn das Wegintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot V(\mathbf{r})$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt.
Genauer: Betrachte Wege $\gamma_i\colon [0,1] \to \mathcal{D}(\mathbf{V})$ $(i = 1,2)$, die ganz in $\mathcal{D}(\mathbf{V})$ verlaufen und die gleichen Anfangs-/Endpunkte haben:

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \text{ und } \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_{\gamma_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}).$$

Ein Vektorfeld ist dann und nur dann konservativ, wenn es ein Gradientenfeld ist.

a) (6 P) Entscheiden Sie ob die Vektorfelder vom letzten Übungsblatt, Aufgabe 4 konservativ sind:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + xy \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

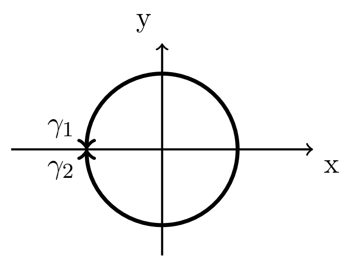
Geben Sie auch entweder ein Potential an oder weisen Sie nach, dass die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

b) (2 P) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

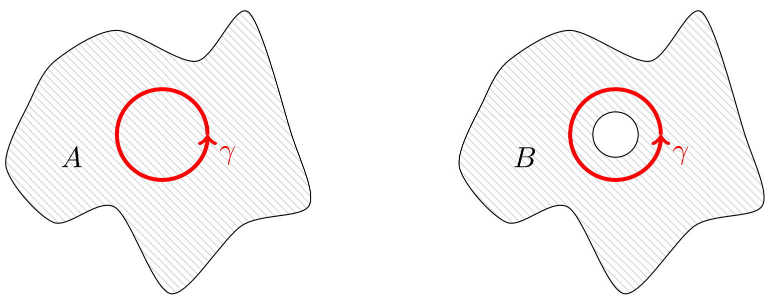
$$\mathbf{V}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$$

die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

c) (6 P) Berechnen Sie das Wegintegral über $\mathbf{V}$ über den oberen und unteren Halbkreisbogen von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ mit Radius 1(siehe Skizze).



Bemerkung Die Umkehrung: $\mathbf{V}$ erfüllt Integrabilitätsbedingungen $\Longrightarrow$ $\mathbf{V}$ Gradientenfeld gilt nur falls $\mathbf{V}$ einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathbf{V})$ hat. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt dabei *einfach zusammenhängend*, wenn man jeden geschlossenen Weg (d.h. Anfangs- = Endpunkt) auf einen Punkt stetig zusammenziehen kann ohne A dabei zu verlassen. Als Beispiel dienen die folgende Mengen im $\mathbb{R}^2$:



Während A einfach zusammenhängend ist, kann man bei B die eingezeichnete Kurve γ nicht auf einen Punkt zusammen ziehen, da sie das "Loch" innerhalb von B umschließt. Natürlich gibt es auch in B Kurven, die auf einen Punkt zusammenziehbar sind.

Überlegen Sie sich, warum das Vektorfeld $\mathbf{V}$ in b) zwar die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, aber nach c) nicht konservativ ist.