Institut für Theoretische Physik
Johannes Berg, Daniel Suess

1 Axiome des Vektorraums (10 P)

a) (5 P) Sei $\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ die Menge der reellen Funktionen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}, +, \times)$ einen Vektorraum bildet, wobei Addition und Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ für $f, g \in \mathcal{F}$ punktweise erklärt wird

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x). \tag{*}$$

b) (3 P) Die Menge der Polynome vom Grad n ist die Menge aller Funktionen, die sich als Summe der Potenzen $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$ der Variablen x mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ schreiben lassen,

$$\mathcal{P}_n = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}_n, +, \times)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}$ ist. Hierbei sind $+$ und $\times$ wie in (*) definiert.

c) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ $(k = 0, \ldots, n)$ eine Basis für $\mathcal{P}_n$ sind. Was schlussfolgern Sie für die Dimension von $\mathcal{P}_n$?

d) (2 P) Betrachte $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{P}_n$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Berechnen Sie explizit die Koeffizienten von $f+g$ und $\lambda \times f$ bezüglich der p_k.

Hinweis Überlegen Sie sich bei jedem Beweisschritt, welche Annahmen Sie verwenden dürfen – Aufgaben wie 1a) erscheinen ohne die nötige Sorgfalt oft trivialer als sie eigentlich sind. Machen Sie sich klar, dass in (*) jeweils zwei verschiedene „+“ und „×“ auf der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen.
Für c): Induktion nach n. Welcher Koeffizient bestimmt das Verhalten für $x \to \infty$? Für die präzise Formulierung benötigen Sie den Grenzwertbegriff aus der Schule oder dem Vorkurs.

2 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit (8 P)

Gegeben sind die Komponenten $\mathbf{x}$,... von Vektoren $\vec{x}$,... bezüglich einer Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 P) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig sind und begründen Sie, ob diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) (4 P) Drücken Sie die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ jeweils als Linearkombination von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aus.

3 Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis (7 P)

Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ und $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ des dreidimensionalen Vektorraums V. Damit lässt sich jedes $\vec{v} \in V$ sowohl bezüglich $\mathcal{E}$ als auch bezüglich $\mathcal{F}$ darstellen:

$$\vec{v} = v_1 \mathrm{e}_1 + v_2 \mathrm{e}_2 + v_3 \mathrm{e}_3 = \tilde{v}_1 \vec{f}_1 + \tilde{v}_2 \vec{f}_2 + \tilde{v}_3 \vec{f}_3. \tag{+}$$

Die Wahl der Basis deuten wir in der Komponentenschreibweise mittels eines zusätzlichen obenstehenden Index an, d.h.

$$\mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}$$

Für die Beziehung zwischen den beiden Basen gilt

$$\vec{f}_1 = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3, \quad \vec{f}_3 = -\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2.$$

a) (4 P) Geben Sie die Komponenten $\mathbf{e}_i^{\mathcal{E}}$ der Basisvektoren e_i $(i = 1, 2, 3)$ sowie die Komponenten $\mathbf{f}_i^{\mathcal{E}}$ der Basisvektoren $\vec{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ an.

b) (3 P) Drücken Sie die Komponenten eines beliebigen Vektors $\mathbf{v}^{\mathcal{E}}$ mithilfe der Komponenten $\mathbf{v}^{\mathcal{F}}$ aus. Mit anderen Worten: angenommen Sie kennen die Komponenten $\tilde{v}_i$ in (+), finden Sie die zugehörigen Komponenten v_i.

4 Kräftezerlegung (5 P) Eine Kugel mit Masse m rollt eine geneigte Ebene mit Steigungswinkel φ hinab. Es wirkt die Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = m \times g$, wobei g die Fallbeschleunigung bezeichnet (die Richtung der Gewichtskraft entnehmen Sie bitte der Skizze). Berechnen Sie daraus die Kraft $\vec{F}_{\|}$, die entlang der Bewegungsrichtung wirkt, und die Kraft $\vec{F}_{\perp}$, die senkrecht auf die Auflage wirkt.