Institut für Theoretische Physik
Johannes Berg, Daniel Suess

1 Fadenpendel (12 P) Ein Massepunkt der Masse m befindet sich an einem Ende eines starren, masselosen „Faden“ der Länge l, dessen anderes Ende in einem Punkt fixiert ist. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Massepunktes im Schwerefeld der Erde lautet

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\phi(t). \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\phi \in [-\pi, \pi]$ den Auslenkwinkel aus der Ruhelage.

a) (3 P) Fertigen Sie eine Skizze des Pendels an und nutzen Sie diese, um die Bewegungsgleichung herzuleiten.

b) (1 P) Da die Differentialgleichung (1) nicht elementar lösbar ist, verwenden wir die Kleinwinkelnäherung für kleine Auslenkungen ϕ:

$$\sin\phi \approx \phi.$$

Begründen Sie diese.

c) (2 P) Finden Sie die allgemeine Lösung von (1) unter der Kleinwinkelnäherung.

d) (2 P) Man kann die genäherte Gleichung in der Form $\mathcal{L}\phi = 0$ schreiben, wobei $\mathcal{L}$ ein linearer Differentialoperator ist. Was folgt daraus für Lösungen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ der genäherten Gleichung? Gilt die selbe Aussage auch für Lösungen von (1)? Geben Sie $\mathcal{L}$ explizit an.

e) (4 P) Wie lautet die Lösung, falls das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ um ϕ_0 ausgelenkt wurde und die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ ist? Berechnen Sie die Periodendauer, d.h. die kleinste Zeit $T > 0$, bei der erneut $\phi(t) = \phi_0$ gilt.

2 Wellengleichung in einer Dimension (18 P) Wellengleichungen gehören zu den wichtigsten partiellen Differentialgleichungen in der Physik. In dieser Aufgabe sollen Sie die Wellengleichung aus einem einfachen Model herleiten und ihre allgemeine Lösung bestimmen.

a) (4 P) Wir betrachten eine endliche, lineare Kette (siehe Skizze) als Model für ein eindimensionales Medium, in dem sich die Welle ausbreitet: Die Kette besteht aus N Massepunkten der Masse m, die über ideale Federn mit Federkonstante k verbunden sind. In Ruhelage haben die Massen den Abstand h. Wir betrachten nur longitudinale Auslenkungen, d.h. Abweichungen von der Ruhelage *entlang* der Kette. Die *Auslenkung* der i-ten Masse aus ihrer Ruhelage zum Zeitpunkt t beschreiben wir durch die Variable $\varphi_i(t)$.

Nach dem Hookschen Gesetz ist die Rückstellkraft einer Feder proportional zu ihrer Ausdehnung oder Stauchung Δx und wirkt dieser entgegen:

$$F_{\mathrm{H}} = -k\Delta x.$$

Leiten Sie aus den Newtonschen Gesetzen die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der i-ten Masse her:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}t^2}(t) = k\left[\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)\right].$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen.

b) (4 P) Zur Beschreibung eines kontinuierlichen Systems (z.B. eines elastischen Gummibands) betrachten wir nun den Grenzfall $N \to \infty$, wobei die Gesamtlänge $L = Nh$, die Gesamtmasse $M = Nm$, sowie $K = k/N$ konstant bleiben sollen. Die longitudinale Auslenkung zur Zeit t eines Punktes mit Ruhelage x wird dann beschrieben durch $\varphi(x,t)$. Für den diskreten Fall heißt das $\varphi_i(t) = \varphi(x = ih, t)$.

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung im kontinuierlichen Grenzfall die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)$$

hat. Bestimmen Sie die Konstante c^2 aus den Parametern des diskreten Modells L, M und K.

Hinweis Zeigen Sie, dass sich die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ durch folgenden Grenzwert ausdrücken lassen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

c) (6 P) In der Vorlesung wurde die allgemeine Lösung für die sogenannten Dirichlet-Randbedingungen $\varphi(0,0) = \varphi(L,0) = 0$

$$\varphi(x,t) = \Re\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\frac{k\pi}{L}t}\right)$$

mithilfe des Separationsansatzes hergeleitet. Leiten Sie analog die allgemeine Lösung für sogenannte von Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad (2)$$

her. Lösen Sie mit Hilfe dieser das Anfangswertproblem

$$\varphi(x,0) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{10}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Bemerkung Die von Neumann-Randbedingungen werden auch offene Randbedingungen genannt und treten u.a. bei transversalen Schwingungen auf: Angenommen eine Saite ist entlang der x-Achse gespannt; bezeichne die Auslenkung der Saite in y-Richtung an der Position x zur Zeit t mit $\varphi(x,t)$. Die Zeitentwicklung von φ kann näherungsweise auch durch eine Wellengleichung beschrieben werden. Die Randbedingungen (2) gelten für eine Saite, die so eingespannt ist, dass ihre Aufhängepunkte sich frei in y-Richtung bewegen können.

d) (4 P) Zeigen Sie, dass die Überlagerung einer links- und einer rechtslaufenden Welle

$$\varphi(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{L}(x-ct)\right)$$

eine Lösung der Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingungen ist. Skizzieren Sie $\varphi(x,t)$ für die Zeiten $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{L}{2c}$ und $t_3 = \frac{L}{c}$ und beschreiben Sie die Zeitentwicklung dieser Lösung.