Mathematische Methoden

Wintersemester 2015/16
Blatt 9, Abgabe 5.1.2016

Institut für Theoretische Physik
Johannes Berg, Daniel Suess

Beachten Sie, dass der Abgabetermin in der vorlesungesfreien Zeit liegt.

1 Horizontaler Wurf (4 P) Ein Massepunkt der Masse m wird aus der Höhe h über dem Boden mit Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(0) = v_0\vec{e}_x$ horizontal geworfen. Unter Vernachlässigung der Reibung folgt aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}_g = -mg\vec{e}_y.$$

a) (3 P) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die angegebenen Anfangswerte. Dabei können Sie die $\vec{e}_z$ Richtung vernachlässigen und das Problem als Bewegung in 2D auffassen.

b) (1 P) Berechnen Sie den Auftreffpunkt auf den Boden.

2 Separation der Variablen (10 P) Lösen sie die folgenden Anfangswertprobleme mit der Methode der Separation der Variablen.

a) (3 P) Unbeschränktes Wachstum $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \beta N(t)$ mit $N(0) = N_0 > 0$ und $\beta > 0$.

b) (3 P) Beschränktes Wachstum $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \beta N(t) - \alpha t N(t)$ mit $N(0) = N_0 > 0$ und $\alpha, \beta > 0$.

c) (3 P) Barometrische Höhenformel: $\frac{\mathrm{d}p(h)}{\mathrm{d}h} = -\frac{p(h)Mg}{R(T_0 - ah)}$ mit $p(h_0) = p_0$ und $M, g, R > 0$.

d) (1 P) Skizzieren Sie die Lösungen von a) und b) und diskutieren Sie ihr Verhalten für kleine t und $t \to \infty$.

Hinweis Separation der Variablen ist eine Lösungmethode für Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x(t)).$$

Die in der Vorlesung besprochenen Umformungen zur Lösung der DGL lassen sich gut als „Multiplikation mit $\mathrm{d}t$“ und anschließende Integration über x und t merken:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x(t)) \implies \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t \implies \int \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Diese Regel soll aber nur als Gedankenstütze dienen, da Multiplikation mit $\mathrm{d}t$ hier nicht mathematisch definiert ist.

3 Variation der Konstanten (6 P) Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen.

a) (3 P) $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t) = \beta t$ für $t \geq 0$ mit $x(0) = 1$ und $\alpha, \beta > 0$.

b) (3 P) $t\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2 - t + 1$ für $t \geq 1$ mit $y(1) = 1$.