## Mathematische Methoden

Wintersemester 2015/16

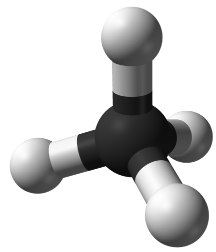
Blatt 4, Abgabe 17.11.2015 12:00

Institut für Theoretische Physik
Johannes Berg, Daniel Suess

**1 Das Methanmolekül (6 P)** Ein Methanmolekül (chemische Formel $CH_4$) besitzt die Struktur eines regulären Tetraheders (siehe Bild). Die Wasserstoffatome (weiß) befinden sich dabei in den Punkten $(0,0,0)$, $(k,k,0)$, $(k,0,k)$ und $(0,k,k)$; das Kohlenstoff im Zentrum im Punkt $(\frac{k}{2},\frac{k}{2},\frac{k}{2})$. Hierbei bezeichnet $k$ eine Längenkonstante.

**a)** Zeigen Sie, dass die angegebene Struktur tatsächlich einen regulären Tetraeder bilden, d.h. dass alle Verbindungslinien zwischen den Wasserstoffatomen gleich lang sind.

**b)** Berechnen Sie den Bindungswinkel zwischen zwei Wasserstoffatomen, d.h. den Winkel, der von zwei Wasserstoffatomen mit dem Kohlenstoffatom im Scheitelpunkt aufgespannt wird.



**2 Eigenschaften des Vektorproduktes (6 P)** In dieser Aufgabe sollen Sie die folgenden Eigenschaften des Vektorproduktes nachweisen: Für drei Vektoren $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ gilt

- $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (Antikommutativität)
- $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ (keine Assoziativität)
- $\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle = \langle\vec{w},\vec{u}\times\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{w}\times\vec{u}\rangle$ (zyklische Vertauschbarkeit)

Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt.

**Hinweis** Sie können diese Beziehungen in Komponentenschreibweise der Vektoren zeigen, was aber viel aufwendige Schreibarbeit bedeutet. Alternativ können Sie aber auch die Definition über das so genannten *Levi-Civita-Symbols* $\epsilon_{ijk}$ verwenden. Für die $i$-te Komponente des Kreuzproduktes gilt

$$(\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k$$

mit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ azyklische Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Permutation von $n$ Elementen $\sigma$ (siehe auch Blatt 1) heißt *zyklisch*, wenn sie alle Elemente um die gleiche Zahl von Stellen verschiebt, d.h.

$$\sigma(i) = i \oplus k = \mathrm{mod}_n(i+k)$$

für ein $k\in\mathbb{N}$ (siehe auch Übungsblatt 1). Wenn eine Permutation nicht zyklisch ist, heißt sie azyklisch. Machen Sie sich klar, dass $\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1$, $\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=\epsilon_{213}=-1$ und 0 in allen anderen Fällen.

**3 Vektorprodukte (6 P)** Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte. Prüfen Sie jeweils auch explizit, ob $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

**a)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

**4 Grenzwerte reeller Funktionen (12 P)** In der Vorlesung haben Sie die den Grenzwert einer reellen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen gelernt: $y \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - y| < \epsilon$. Man schreibt für den Grenzwert dann $y = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Analog definiert man den Grenzwert für „$x_0 = \pm\infty$“: $y = \lim_{x\to\infty}$ ($y = \lim_{x\to-\infty}$) wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $S \in \mathbb{R}$ exisiert, sodass für $x > S$ ($x < S$) folgt $|f(x) - y| < \epsilon$.

**a)** (5 P) Beweisen Sie, dass $\lim_{x\to-3} 1 - 4x = 13$ (mit anderen Worten: für gegebens $\epsilon$, bestimmen Sie $\delta$). Was ist der Grenzwert $\lim_{x\to 3} 1 - 4x$? Beweisen Sie das!

**b)** (4 P) Betrachte $f(x) = \frac{1}{2^x}$. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $x \in \mathbb{R}$. Was passiert für große $x$; was passiert für kleine $x$? Mit anderen Worten: Geben Sie den Grenzwert von $f$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Bestimmen Sie außerdem $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**c)** (3 P) Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, geben Sie diese an. Begründen Sie Ihr Ergebnis kurz (kein Beweis!).

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to\infty} \sin x \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$