

**1 Axiome des Vektorraums (10 P)**

- a) (5 P) Sei  $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$  die Menge der reellen Funktionen. Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{F}, +, \times)$  einen Vektorraum bildet, wobei Addition und Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  für  $f, g \in \mathcal{F}$  punktweise erklärt wird

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x). \quad (*)$$

- b) (3 P) Die Menge der Polynome vom Grad  $n$  ist die Menge aller Funktionen, die sich als Summe der Potenzen  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$  der Variablen  $x$  mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  schreiben lassen,

$$\mathcal{P}_n = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}.$$

Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}_n, +, \times)$  ein Untervektorraum von  $\mathcal{F}$  ist. Hierbei sind  $+$  und  $\times$  wie in  $(*)$  definiert.

- c) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $p_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) eine Basis für  $\mathcal{P}_n$  sind. Was schlussfolgern Sie für die Dimension von  $\mathcal{P}_n$ ?
- d) (2 P) Betrachte  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in \mathcal{P}_n$  mit  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ . Berechnen Sie explizit die Koeffizienten von  $f + g$  und  $\lambda \times f$  bezüglich der  $p_k$ .

**Hinweis** Überlegen Sie sich bei jedem Beweisschritt, welche Annahmen Sie verwenden dürfen – Aufgaben wie 1a) erscheinen ohne die nötige Sorgfalt oft trivialer als sie eigentlich sind. Machen Sie sich klar, dass in  $(*)$  jeweils zwei verschiedene „+“ und „ $\times$ “ auf der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen.

Für c): Induktion nach  $n$ . Welcher Koeffizient bestimmt das Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ ? Für die präzise Formulierung benötigen Sie den Grenzwertbegriff aus der Schule oder dem Vorkurs.

**2 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit (8 P)** Gegeben sind die Komponenten  $\mathbf{x}, \dots$  von Vektoren  $\vec{x}, \dots$  bezüglich einer Basis des  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (4 P) Prüfen Sie, ob die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  linear unabhängig sind und begründen Sie, ob diese eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.
- b) (4 P) Drücken Sie die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  jeweils als Linearkombination von  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  aus.

**3 Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis (7 P)** Gegeben seien zwei Basen  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  und  $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  des dreidimensionalen Vektorraums  $V$ . Damit lässt sich jedes  $\vec{v} \in V$  sowohl bezüglich  $\mathcal{E}$  als auch bezüglich  $\mathcal{F}$  darstellen:

$$\vec{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \tilde{v}_1 \vec{f}_1 + \tilde{v}_2 \vec{f}_2 + \tilde{v}_3 \vec{f}_3. \quad (+)$$

Die Wahl der Basis deuten wir in der Komponentenschreibweise mittels eines zusätzlichen obenstehenden Index an, d.h.

$$\mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}$$

Für die Beziehung zwischen den beiden Basen gilt

$$\vec{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \vec{f}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

- a) (4 P) Geben Sie die Komponenten  $\mathbf{e}_i^{\mathcal{E}}$  der Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sowie die Komponenten  $\mathbf{f}_i^{\mathcal{E}}$  der Basisvektoren  $\mathbf{f}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezüglich der Basis  $\mathcal{E}$  an.
- b) (3 P) Drücken Sie die Komponenten eines beliebigen Vektors  $\mathbf{v}^{\mathcal{E}}$  mithilfe der Komponenten  $\mathbf{v}^{\mathcal{F}}$  aus. Mit anderen Worten: angenommen Sie kennen die Komponenten  $\tilde{v}_i$  in (+), finden Sie die zugehörigen Komponenten  $v_i$ .

**4 Kräftezerlegung (5 P)** Eine Kugel mit Masse  $m$  rollt eine geneigte Ebene mit Steigungswinkel  $\varphi$  hinab. Es wirkt die Gewichtskraft  $F_G = m \times g$ , wobei  $g$  die Fallbeschleunigung bezeichnet (die Richtung der Gewichtskraft entnehmen Sie bitte der Skizze). Berechnen Sie daraus die Kraft  $\vec{F}_{\parallel}$ , die entlang der Bewegungsrichtung wirkt, und die Kraft  $\vec{F}_{\perp}$ , die senkrecht auf die Auflage wirkt.

