Mathematische Methoden
Wintersemester 2015/16
Blatt 13, Abgabe 2.2.2016

Institut für Theoretische Physik
Johannes Berg, Daniel Suess

1 Volumen einer Halbkugel (10 P)

Wir betrachten eine Halbkugel mit Radius a

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\, z \geq 0\}$$

a) (2 P) Zur Parametrisierung von H in kartesischen Koordinaten überlegen Sie sich die folgenden Grenzen:

i) x läuft zwischen den Grenzen $x_1 \leq x \leq x_2$,

ii) y läuft für gegebenes x zwischen $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

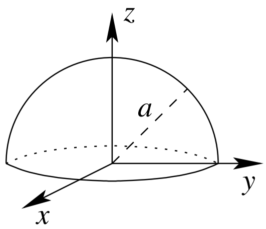
iii) z läuft für gegebenes x, y zwischen $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$.

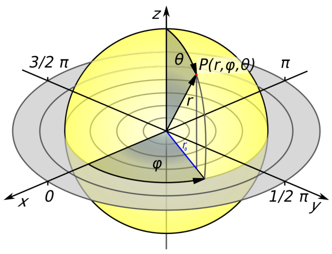
b) (3 P) Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) für die Berechnung des Halbkugelvolumens in kartesischen Koordinaten

$$V(H) = \int_H \mathrm{d}V = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{d}z.$$

c) (2 P) Überlegen Sie sich nun die Grenzen für die Parametrisierung (r, θ, ϕ) in Kugelkoordinaten (siehe Vorlesung (5.30)).

d) (3 P) Berechnen Sie das Volumen $V(H)$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten.





2 Volumen und Oberfläche eines Kegels (10 P)

Wir betrachten einen Kreiskegel mit Grundflächenradius b und Höhe h. Zur Berechnung des Volumens des Körpers benutzen wir Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z), die an die Symmetrie des Körpers angepasst sind

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

Hierbei ist ρ der Abstand des Punktes zur z-Achse, ϕ der Azimutwinkel und z der Abstand des Punktes zur x-y Ebene.

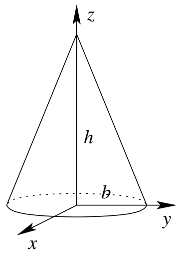
a) (2 P) Zeigen Sie, dass das Volumenelement in Zylinderkoordinaten gegeben ist durch

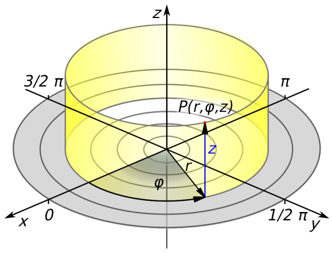
$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z.$$

b) (2 P) Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels.

c) (6 P) Berechnen Sie die Oberfläche des Kreiskegels mit Hilfe des Oberflächenintegrals.

Hinweis In Teilaufgabe c) beachten Sie, dass der Kreiskegel aus Mantel- und Grundfläche besteht. Finden Sie jeweils eine geeignete Parametrisierung und benutzen Sie Formel (5.22) der Vorlesung um die jeweilige Oberfläche zu berechnen.





3 Trägheitsmomente (10 P) Das Massenträgheitsmoment J eines Körpers K lässt sich bei bekannter Massendichte $\rho(\vec{r})$ aus folgendem Volumenintegral berechnen

$$J = \int_K \mathrm{d}V \, r_\perp^2 \, \rho(\vec{r}).$$

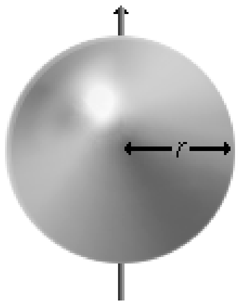
Hierbei bezeichnet $r_\perp$ den Abstand des Punktes *zur Rotationsachse*.

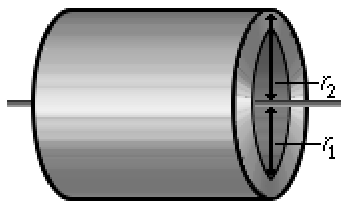
a) (5 P) Eine homogene Kugel K mit Masse m und Radius r rotiert um die z-Achse. Zeigen Sie, dass für das Trägheitsmoment gilt

$$J_z = \frac{3m}{4\pi r^3} \int_K \mathrm{d}V \, (x^2 + y^2).$$

Berechnen Sie J.

b) (5 P) Ein hohler Zylinder mit Innenradius r_1, Außenradius r_2 ($r_1 < r_2$), Höhe h und Gesamtmasse m rotiert um seine Symmetrieachse. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment.





Bildquellen:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten`
`http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Zylinderkoordinaten`
`http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment`