Satz: Für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind die Monome $(p_k)_{k=0}^{N}$ linear unabh. Diese sind definiert durch

$$p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k$$

Beweis $\to$ durch Induktion

Induktions-Anfang: $N = 0$:

Beh.: (p_0) ist linear unabh.

Bew.: Ang. $\exists c_0 \in \mathbb{R}$:

$$c_0 p_0 = 0$$

konst. Funktion $x \mapsto 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{c_0 p_0(x)}_{= c_0} = 0$$

$\Rightarrow c_0 = 0 \Rightarrow (p_0)$ lin. unabh.

Induktionsschritt:

Lt. Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $(p_k)_{k=0}^{N}$ lin. unabh.

Beh.: $(p_k)_{k=0}^{N+1}$ lin. unabh.

Bew.: Ang. $\exists c_0, \ldots, c_{N+1} \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{N+1} c_k p_k = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \sum_{k=0}^{N+1} c_k p_k(x) = \sum_{k=0}^{N+1} c_k x^k = 0 \quad (1)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{N+1} c_k n^k = 0 \quad (2)$$

da (1) für alle x gelten muss, mus es insbesondere für $x = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gelten

da $n > 0$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{N+1} \frac{c_k}{n^{(N+1)-k}} = 0 \quad (3)$$

Teile (2) durch n^{N+1}

Betrachte die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{c_k}{n^{(N+1)-k}} = c_{N+1} + \frac{c_N}{n} + \ldots + \frac{1}{n^{N+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c_{N+1}$$ (Warum?)

Andererseits folgt aus (3), dass $a_n = 0$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Konstante Nullfolge

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$ (Warum?)

Da der Grenzwert in $\mathbb{R}$ (falls er existiert!) eindeutig ist folgt

$$c_{N+1} = 0$$

$\Rightarrow$ Für die restlichen Summanden gilt immernoch:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k p_k = 0$$

$\Rightarrow$ Nach Induktionsvoraussetzung:

$$c_k = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, N$$

$\Rightarrow (p_k)_{k=0}^{N+1}$ linear unabh. $\square$