

**1 Direkte Beweise (10 P)** Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Übersetzen Sie außerdem Aussagen, die ausformuliert sind, in formale mathematische Aussagen und umgekehrt.

- a) (2 P) Für alle reellen Zahlen  $x$ , die größer als 1 sind, ist  $6x + 3$  größer als  $3x + 6$ .
- b) (2 P) Das Quadrat aller geraden natürlichen Zahlen ist wieder gerade.
- c) (2 P) Alice ist 16 Jahre alt. Damit ist Alice genau doppelt so alt, wie Bob war, als Alice so alt war, wie es Bob jetzt ist. Bob ist 12 Jahre alt.
- d) (2 P)  $\forall k, m \in \mathbb{N}: k + m \leq k \times m \implies k \geq 2 \wedge m \geq 2$
- e) (2 P)  $\forall p, q \in \mathbb{R}: (\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + px + q > 0) \iff \left(\frac{p^2}{4} < q\right)$

**Hinweise** Für b) benutzen Sie die folgende Definition:  $n \in \mathbb{N}$  heißt gerade, wenn es ein  $n' \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $n = 2n'$ . Hier noch eine grobe Erläuterung der (möglicherweise) unbekannten Symbole (hierbei sind  $A$  und  $B$  logische Aussagen)

- $A \wedge B$ : logisches UND; ist genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  beide wahr sind
- $A \implies B$ : Implikation; aus der Wahrheit von Aussage  $A$  folgt die Wahrheit von Aussage  $B$
- $A \iff B$ : Äquivalenz; aus der Wahrheit von  $A$  folgt die Wahrheit von  $B$  und aus der Wahrheit von  $B$  folgt die Wahrheit von  $A$ . Beweist man häufig, indem man die beiden Aussagen  $A \implies B$  und  $B \implies A$  zeigt.

Formal exakt werden diese Begriffe im mathematischen Teilgebiet der Aussagenlogik behandelt.

*Beispiel*

Beweisen Sie, dass die Summe zweier gerader Zahlen wieder gerade ist.

*Formal:*  $\forall m, n \in \mathbb{N}; m, n \text{ gerade} \implies (m + n) \text{ gerade}$ .

*Beweis:* Da  $m$  und  $n$  gerade sind existieren lt. Definition  $m', n' \in \mathbb{N}$ , sodass  $m = 2m'$  und  $n = 2n'$ . Damit folgt, dass  $m + n$  gerade ist, da

$$m + n = 2m' + 2n' = 2(m' + n').$$

Den selben Beweis kann man mit weniger Prosa wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} m, n \text{ gerade} &\iff \exists m', n' \in \mathbb{N}: m = 2m' \wedge n = 2n' \\ &\implies m + n = 2(m' + n') \\ &\implies (m + n) \text{ gerade} \end{aligned}$$

**2 Euklidisches Skalarprodukt (13 P)** In der Vorlesung wurde das euklidische Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

- a) (4 P) Zeigen Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist, d.h. die drei Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt sind (siehe Vorlesung 1.5.1).
- b) (3 P) Berechnen Sie  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ,  $\|\mathbf{u}\|$  und  $\|\mathbf{v}\|$  für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$  die induzierte Norm.

- c) (2 P) Finden Sie alle Vektoren  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , die mit  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  das Skalarprodukt  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$  haben.
- d) (4 P) Welche der folgenden Beispiele definiert ein Skalarprodukt auf  $V$ ? Überprüfen Sie jeweils die Bedingungen an ein Skalarprodukt.
- $V = \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 5u_3v_3$
  - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_2v_2 - u_1v_1$
  - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2$
  - $V = \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_1 + u_2v_2$

**3 Skalarprodukt & Winkel (7 P)** Der Kosinussatz, welcher Ihnen vielleicht aus der Schule bekannt ist, stellt eine Beziehung in einem Dreieck zwischen den Seiten  $a, b, c$  und dem der Seite  $c$  gegenüberliegenden Winkel  $\varphi$  her. Er lautet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

- a) (4 P) Leiten Sie diese Beziehung her, dabei soll Ihnen die Skizze als Inspiration dienen.
- b) (2 P) Benutzen Sie den Kosinussatz um für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  folgendes zu zeigen: Für  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Hierbei bezeichnet  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  den von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannten Winkel.

- c) (1 P) Zeigen Sie, dass zwei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$  genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

