

**1 Gradient (6 P)**

- a) (2 P) An welchen Punkten ist der Gradient von  $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  senkrecht zur  $x$ -Achse? Wo ist er gleich 0?
- b) (2 P) Berechnen Sie  $\nabla f(r)$  für  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und eine einmal stetig differenzierbare Funktion  $f$ .
- c) (2 P) Gegeben sei das Potential  $\phi(x, y, z) = \frac{1}{r}$  für  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . In welchen Raumpunkten  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  gilt  $\|\nabla\phi(\mathbf{r})\| = 1$ ?

**2 Gradientenfelder I (10 P)** In der Vorlesung haben Sie den Begriff des *Gradientenfeldes* kennengelernt. Ein Gradientenfeld im  $\mathbb{R}^N$  ist eine Funktion  $\mathbf{V}: \mathcal{D}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , für die es ein *Potential*  $\phi: \mathcal{D}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (*)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathcal{D}(\mathbf{V}) \subset \mathbb{R}^N$  den Definitionsbereich der Funktion  $V$ . Eine notwendige Bedingung, dass  $\mathbf{V}$  ein Gradientenfeld ist, ist die sogenannte Integrabilitätsbedingung (Formel (5.18) im Skript für  $N = 3$ )

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

- a) (1 P) Zeigen Sie, dass jedes Gradientenfeld die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.
- b) (4 P) Berechnen Sie die Vektorfelder der folgenden Potentiale

$$\phi_1(x, y, z) = x^2y + z \cos xy, \quad \phi_2(x, y, z) = r^n \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- c) (5 P) Berechnen Sie jeweils ein Potential für die nachfolgenden Gradientenfelder

$$\mathbf{V}_1(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2(x, y) = \begin{pmatrix} 6x \cos y \\ -3x^2 \sin y + 2y \end{pmatrix}.$$

**Hinweis** Zu c): Schreiben Sie Gleichung (\*) komponentenweise auf und lösen Sie nach  $\phi$  auf, indem Sie über die Variable integrieren, nach der  $\phi$  abgeleitet wird. Beachten Sie, dass Integration über eine Variable eine Konstante erzeugt, die u.U. von den anderen Variablen abhängt.

**3 Gradientenfelder II (14 P)** Als nächstes betrachten wir eine wichtige Eigenschaft von Gradientenfeldern. Ein Vektorfeld  $\mathbf{V}: \mathcal{D}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt konservativ, wenn das Wegintegral  $\int_\gamma \mathbf{dr} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$  nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\gamma$  abhängt.

Genauer: Betrachte Wege  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{V})$  ( $i = 1, 2$ ), die ganz in  $\mathcal{D}(\mathbf{V})$  verlaufen und die gleichen Anfangs-/Endpunkte haben:

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \text{ und } \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_{\gamma_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}).$$

Ein Vektorfeld ist dann und nur dann konservativ, wenn es ein Gradientenfeld ist.

- a) (6 P) Entscheiden Sie ob die Vektorfelder vom letzten Übungsblatt, Aufgabe 4 konservativ sind:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + xy \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

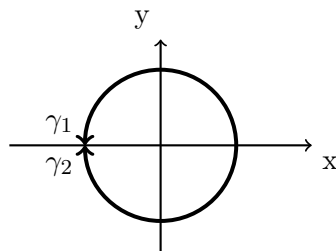
Geben Sie auch entweder ein Potential an oder weisen Sie nach, dass die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

- b) (2 P) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

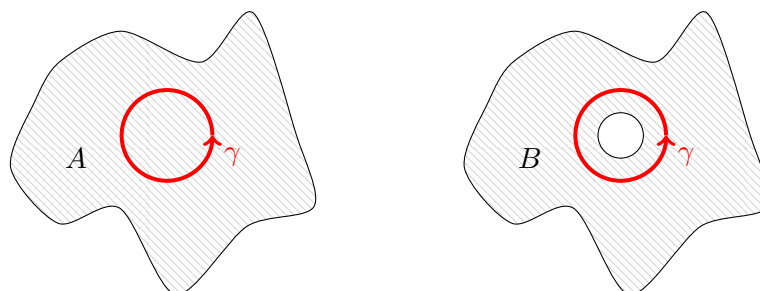
$$\mathbf{V}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$$

die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

- c) (6 P) Berechnen Sie das Wegintegral über  $\mathbf{V}$  über den oberen und unteren Halbkreisbogen von  $(1, 0)$  nach  $(-1, 0)$  mit Radius 1 (siehe Skizze).



**Bemerkung** Die Umkehrung:  $\mathbf{V}$  erfüllt Integrabilitätsbedingungen  $\implies \mathbf{V}$  Gradientenfeld gilt nur falls  $\mathbf{V}$  einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich  $\mathcal{D}(\mathbf{V})$  hat. Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^N$  heißt dabei *einfach zusammenhängend*, wenn man jeden geschlossenen Weg (d.h. Anfangs- = Endpunkt) auf einen Punkt stetig zusammenziehen kann ohne  $A$  dabei zu verlassen. Als Beispiel dienen die folgende Mengen im  $\mathbb{R}^2$ :



Während  $A$  einfach zusammenhängend ist, kann man bei  $B$  die eingezeichnete Kurve  $\gamma$  nicht auf einen Punkt zusammen ziehen, da sie das "Loch" innerhalb von  $B$  umschließt. Natürlich gibt es auch in  $B$  Kurven, die auf einen Punkt zusammenziehbar sind.

Überlegen Sie sich, warum das Vektorfeld  $\mathbf{V}$  in b) zwar die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, aber nach c) nicht konservativ ist.