- 1 Das Methanmolekül (6 P) Ein Methanmolekül (chemische Formel CH<sub>4</sub>) besitzt die Struktur eines regulären Tetraheders (siehe Bild). Die Wasserstoffatome (weiß) befinden sich dabei in den Punkten (0,0,0), (k,k,0), (k,0,k) und (0,k,k); das Kohlenstoff im Zentrum im Punkt  $(\frac{k}{2},\frac{k}{2},\frac{k}{2})$ . Hierbei bezeichnet k eine Längenkonstante.
  - a) Zeigen Sie, dass die angegebene Struktur tatsächlich einen regulären Tetraeder bilden, d.h. dass alle Verbindungslinien zwischen den Wasserstoffatomen gleich lang sind.
  - b) Berechnen Sie den Bindungswinkel zwischen zwei Wasserstoffatomen, d.h. den Winkel, der von zwei Wasserstoffatomen mit dem Kohlenstoffatom im Scheitelpunkt aufgespannt wird.



- 2 Eigenschaften des Vektorproduktes (6 P) In dieser Aufgabe sollen Sie die folgenden Eigenschaften des Vektorproduktes nachweisen: Für drei Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt
  - $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$  (Antikommutativität)
  - $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  (keine Assoziativität)
  - $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \times \vec{u} \rangle$  (zyklische Vertauschbarkeit)

Hier bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt.

**Hinweis** Sie können diese Beziehungen in Komponentenschreibweise der Vektoren zeigen, was aber viel aufwendige Schreibarbeit bedeutet. Alternativ können Sie aber auch die Definition über das so genannten *Levi-Civita-Symbols*  $\epsilon_{ijk}$  verwenden. Für die *i*-te Komponente des Kreuzproduktes gilt

$$(\vec{u} \times \vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \, u_j \, v_k$$

mit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ azyklische Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Permutation von n Elementen  $\sigma$  (siehe auch Blatt 1) heißt zyklisch, wenn sie alle Elemente um die gleiche Zahl von Stellen verschiebt, d.h.

$$\sigma(i) = i \oplus k = \text{mod}_n(i+k)$$

für ein  $k \in \mathbb{N}$  (siehe auch Übungsblatt 1). Wenn eine Permutation nicht zyklisch ist, heißt sie azyklisch. Machen Sie sich klar, dass  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ ,  $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$  und 0 in allen anderen Fällen.

3 Vektorprodukte (6 P) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte. Prüfen Sie jeweils auch explizit, ob  $\vec{a} \times \vec{b}$  senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht.

a) 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
 b)  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 

- 4 Grenzwerte reeller Funktionen (12 P) In der Vorlesung haben Sie die den Grenzwert einer reellen Funktion  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  kennen gelernt:  $y \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von f an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  exisiert, sodass für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x x_0| < \delta$  gilt  $|f(x) y| < \epsilon$ . Man schreibt für den Grenzwert dann  $y = \lim_{x \to x_0} f(x)$ . Analog definiert man den Grenzwert für  $x_0 = \pm \infty$ :  $y = \lim_{x \to \infty} (y = \lim_{x \to \infty})$  wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $S \in \mathbb{R}$  exisiert, sodass für x > S (x < S) folgt  $|f(x) y| < \epsilon$ .
  - a) (5 P) Beweisen Sie, dass  $\lim_{x\to -3} 1 4x = 13$  (mit anderen Worten: für gegebens  $\epsilon$ , bestimmen Sie  $\delta$ ). Was ist der Grenzwert  $\lim_{x\to 3} 1 4x$ ? Beweisen Sie das!
  - b) (4P) Betrachte  $f(x) = \frac{1}{2^x}$ . Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für  $x \in \mathbb{R}$ . Was passiert für große x; was passiert für kleine x? Mit anderen Worten: Geben Sie den Grenzwert von f für  $x \to \infty$  und  $x \to -\infty$  an. Bestimmen Sie außerdem  $\lim_{x\to 0} f(x)$ .
  - c) (3 P) Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, geben Sie diese an. Begründen Sie Ihr Ergebnis kurz (kein Beweis!).

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x \to \infty} \sin x \qquad \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$