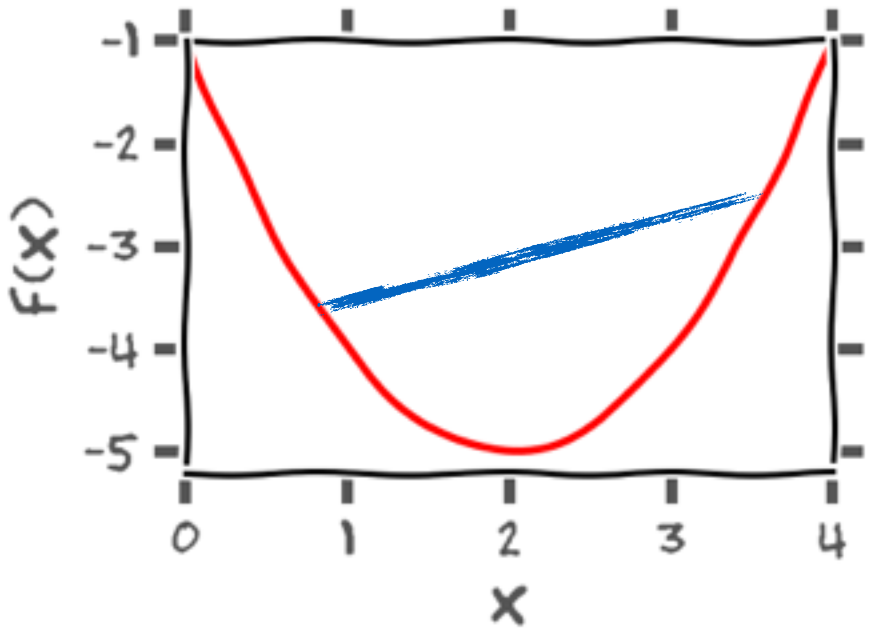
Konvexe Optimierung in cvxpy

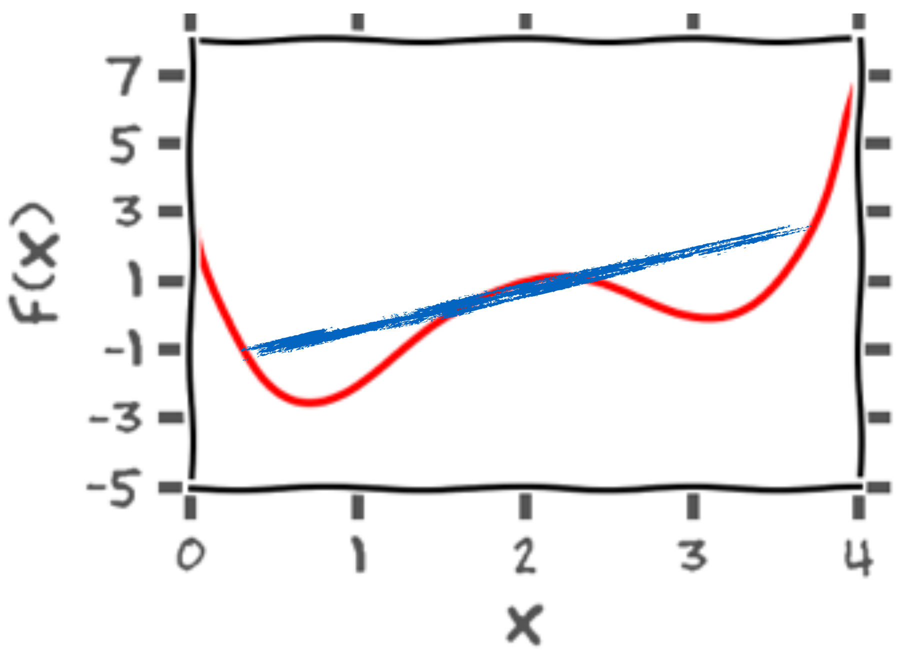
Daniel Suess

https://github.com/dseuss/presentations/2016

Optimierung? Konvex?



Optimierung: Bestimme Maximum/ Minimum einer reellwertigen Funktion unter Randbedingungen



Konvex:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Anwendungen

- Bildverarbeitung
- Optimierung von Flugrouten
- Charakterisierung von Quantenkorrelationen
- Relaxierung von kombinatorischen Problemen
- Signalverarbeitung (En- und Decoder)
- Radarauswertung
- MRI
- effizientere physikalische Experimente
- …

Konvexe Optimierung

$$\boxed{\begin{aligned} &\min f_0(x) \\ &\text{s.t. } f_i(x) \geq 0 \end{aligned}}$$

- lokales = globales Optimum
- Lösungen zertifizierbar

Konvexe Optimierung

$$\boxed{\begin{aligned} &\min f_0(x) \\ &\text{s.t. } f_i(x) \geq 0 \end{aligned}}$$

- lokales = globales Optimum
- Lösungen zertifizierbar

SOCP

Lineare Programme

Semidefinite Programme

Konvexe Optimierung

$$\min f_0(x)$$
$$\text{s.t. } f_i(x) \geq 0$$

- lokales = globales Optimum
- Lösungen zertifizierbar

SOCP

Lineare Programme

Semidefinite Programme

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } x \geq 0, Ax = b$$

Disciplined Convex Programming

$$\min \|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$

http://dcp.stanford.edu/home

Disciplined Convex Programming

$$\min \|x\|_1 = \sum_i |x_i| \quad \text{s.t. } Ax = b$$

$$\xleftrightarrow{\;x_i = z_i^+ - z_i^-\;}$$

$$\min \sum_i (z_i^+ + z_i^-)$$

$$\text{s.t. } A(z^+ - z_i^-) = b$$

$$z_i^+ \geq 0, z_i^- \geq 0$$

http://dcp.stanford.edu/home

Disciplined Convex Programming

$$\min \|x\|_1 = \sum_i |x_i| \quad \text{s.t. } Ax = b \quad \xleftrightarrow{\;x_i = z_i^+ - z_i^-\;} \quad \min \sum_i (z_i^+ + z_i^-) \quad \text{s.t. } A(z^+ - z_i^-) = b, \quad z_i^+ \geq 0, z_i^- \geq 0$$

- Elementare Funktion mit bekannten Eigenschaften
- garantiert konvexes Optimierungsproblem
- automatische Transformation auf Standardform

http://dcp.stanford.edu/home

CVXPY

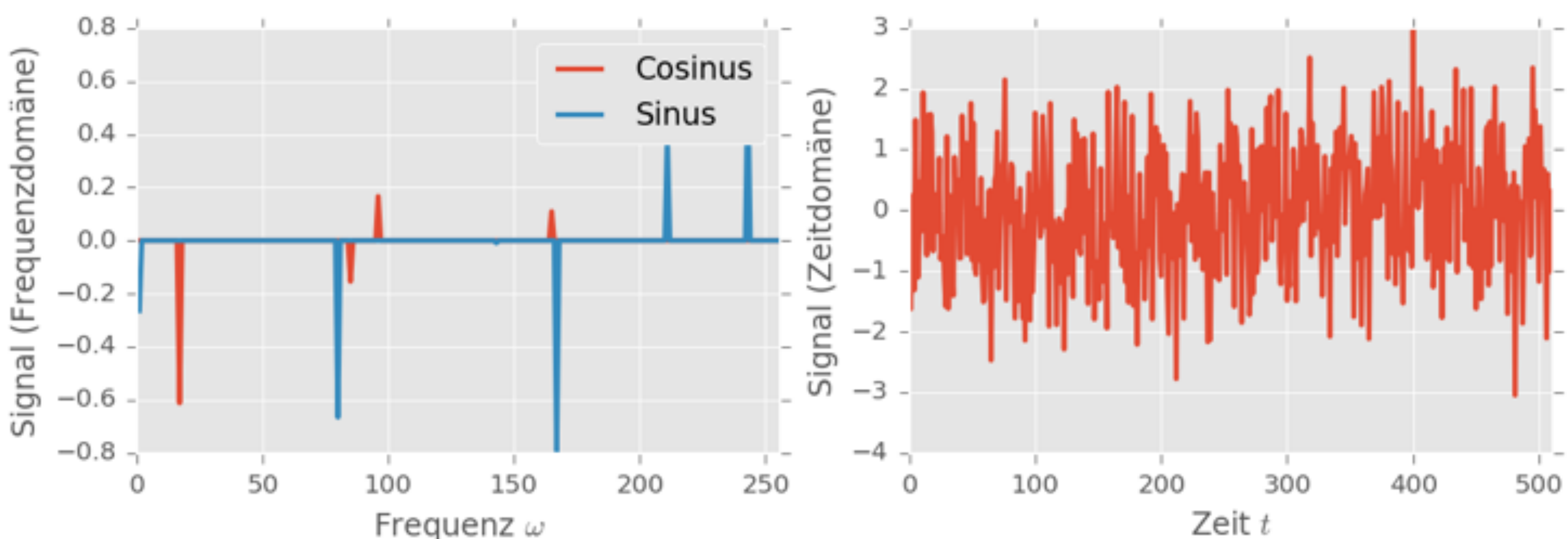
- Alternative zu CVX (Matlab) — de facto Standard für DCP
- Syntax nah an Mathematik
- Interface für mehrere (kommerzielle) Solver

http://cvxpy.org

Compressed Sensing

- JPEG: alle Daten aufnehmen -> komprimieren
- CS: nur relevante Daten aufnehmen

Fourier-Transformation



inverse Fourier-Transformation

Compressed Sensing

- wähle “genug” Messpunkte zufällig
- Rekonstruiere *x* durch folgendes Program

$$\min \sum_i (x_i \neq 0)$$
$$\text{s.t.}\, \mathcal{FT}(x)[\text{observed}] = y$$

Compressed Sensing

- wähle “genug” Messpunkte zufällig
- Rekonstruiere x durch folgendes Program

$$\min \cancel{\sum_i (x_i \neq 0)} \quad \sum_i |x_i|$$

$$\text{s.t.}\, \mathcal{FT}(x)[\text{observed}] = y$$